通过隐藏门户实现超轻轴子的规范路径

Claudio Corianò

意大利莱切萨兰托大学“恩尼奥·德·乔治”数学与物理系、INFN 莱切分部及意大利国家研究委员会纳米技术研究所

arXiv:2611.32729v1 [hep-ph] 24 Nov 2026

摘要

我们研究了一种超轻轴子的规范实现，其中包含隐藏的 $SU(2)$ 相互作用、阿贝尔矢量门户、一个带电希格斯和一个斯图克尔伯格场。该矢量吸收一个标量组合，并留下一个物理相位。其归一化由希格斯尺度和斯图克尔伯格尺度确定，而隐藏禁闭则产生其质量。要使该相位保持超轻，需要额外的对称性：仅由所展示的规范荷并不能排除较大的依赖于相位的标量相互作用。我们量化了对这些相互作用所需的抑制程度。纯-$SU(2)$ 格点结果将磁化率与物理禁闭尺度联系起来；一圈和两圈跑动展示了其对所选高能耦合的依赖性。我们推导了辐射时代相干密度，并展示了一个初始角：对于 $F_\chi \simeq 10^{17}$吉电子伏和零温质量 $m_{\chi,0} = 3 \times 10^{-20}$ 电子伏，它可给出参考暗物质丰度。我们在数目改变极限和数目守恒极限下追踪禁闭粒子群，并限制其能量贡献。一个示例性的暴胀子背景满足所述的真空和等曲率扰动检验，但前提是能够控制其势中的较大门户修正。其冷隐藏历史要求隐藏部门到可见部门的再加热比例接近 5×10^{-12}，其微观起源仍需作为输入给定。第二种规范反常自由模型利用两个带电希格斯单态，实现了相同的物理相位尺度。这些构造给出了有条件的宇宙学实例，以及使其完备所需的额外保护机制和再加热机制。

1 引言

冷暗物质能够很好地描述较大的宇宙学尺度，但其在星系内部的行为仍是检验其微观性质的重要途径。暗晕的中心密度、小暗晕的数量以及矮星系中恒星的运动，都促使人们对无碰撞粒子图景进行修正。气体动力学、恒星形成，以及观测到的星系与其宿主暗晕之间的关系，也会影响这些比较。当德布罗意波长与晕核心相当时，超轻玻色场会改变引力聚集。随后，场梯度和波干涉会影响暗物质的分布 [1]。相同的波效应还会抑制短波长密度扰动的增长。因此，包括莱曼-α 森林在内的观测，会同时限制轴子质量以及其所占的暗物质比例 [2]。

门户通过相互作用将标准模型粒子与隐藏扇区连接起来，这些相互作用能够产生隐藏粒子并在两个扇区之间转移能量。隐藏扇区可以包含多种形式的暗物质：相干振荡的超轻场、有质量费米子，或隐藏规范力的束缚态。它们的丰度和散射率取决于粒子谱及其宇宙学历史。门户还可以介导暗粒子之间的散射，从而为同时考虑近乎无碰撞的组分和相互作用组分提供框架。这种可能性促成了本研究。我们采用一个与可见扇区重子数减轻子数以及隐藏荷耦合的有质量阿贝尔矢量场，研究超轻组分的规范起源和丰度，以及对伴随的隐藏粒子群体的约束。

弦理论为轻轴子提供了一种起源。反对称张量场的分量在额外维度中的闭合周期上积分后，可以产生四维轴子。几何结构决定了轴子动能项，以及产生其势的瞬子等效应的大小 [3, 4]。在许多模型中，轴子与称为模量的场共享一个标量多重态，模量描述紧致维度的大小或形状。因此，寻找模量的稳定值，也是确定哪些轴子能够保持轻质量的一部分。在这里，我们研究一种四维规范理论，其中标量相位、它们之间的相互作用以及决定轴子质量的尺度都被直接指定。

传统的 QCD 轴子揭示了质量与相互作用之间关系的一项重要限制。在佩奇–奎因（PQ）机制中，轴子是与近似全局对称性自发破缺相关的角模 [5]。当量子色动力学主导其势时，轴子衰变常数 f_a 通过下式确定其零温质量：

$$m_a^2 f_a^2 = \mathcal{X}_{\rm QCD}(0), \qquad m_a \simeq 5.7\,\mu{\rm eV}\left(\frac{10^{12}\,{\rm GeV}}{f_a}\right). \tag{1}$$

这里，$\mathcal{X}_{\rm QCD}(0)$ 是 QCD 真空能相对于其 θ 角的曲率。相同的尺度也会抑制相互作用。例如，轴子–光子耦合为：

$$g_{a\gamma\gamma} = \frac{\alpha_{\rm em}}{2\pi f_a} C_\gamma, \tag{2}$$

其中，$\alpha_{\rm em}$ 是电磁精细结构常数，而 C_γ 是由电荷赋值和 QCD 混合 [6]决定的无量纲系数。与普通费米子的耦合也涉及倒数尺度 f_a，并带有依赖于模型的系数。一旦这些系数确定，质量越大，相互作用就越强。

这种关联说明了如何将对相互作用的限制转化为对 QCD轴子质量的约束。恒星内部产生的轴子会带走能量并改变观测到的恒星寿命，从而限制其耦合 [7]。对太阳轴子的搜索也会限制其转化为光子的过程 [8]。通过共同的尺度 f_a，此类耦合约束会限制特定 QCD轴子模型中的质量。宇宙学产生还会带来额外的限制：对于

给定的初始角和热历史，遗迹丰度不得超过观测到的暗物质密度 [6]。因此，所得质量区间取决于相互作用系数以及所假设的宇宙学历史。

另一种互补途径是通过扩展规范与希格斯扇区构造类轴子粒子。一个在额外阿贝尔规范变换下发生位移的斯图克尔伯格赝标量，会与带电希格斯场的相位混合。某些组合为有质量规范玻色子提供纵向极化，而一个独立的规范不变组合则可以作为物理赝标量保留下来。这个残存的混合态称为轴子-希格斯。其组成与耦合由规范荷、希格斯真空期望值和斯图克尔伯格尺度决定；其质量则取决于残存角度对应的势。

在反常阿贝尔规范扩展中，涉及发生位移的斯图克尔伯格场的相互作用会抵消费米子量子作用量的反常规范变分。由此产生的轴子-规范耦合取决于斯图克尔伯格尺度，以及物理轴子-希格斯中该场所占的比例。周期势的强度是另一个输入，因此质量-耦合关系可以不同于QCD轴子的关系 [9]。因此，基于假设式（1）和（2）得到的质量界限并不适用于此情形。必须根据物理耦合和产生历史，重新评估恒星、实验和宇宙学约束。若仍存在与量子色动力学拓扑密度的耦合，它仍会为势产生一个量子色动力学贡献。在此处研究的模型中，预期的超轻质量由隐藏非阿贝尔相互作用产生。

基于 $E_6 \times U(1)$的模型为这一机制提供了明确的实现：高能标瞬子所抑制的周期势可以使轴子-希格斯变得超轻 [10, 11]。矢量门户模型通过带电的隐藏希格斯和斯图克尔伯格场实现混合，并引入能够抵消规范反常的相互作用 [12]。我们在这一相位混合机制的基础上，采用更简单的隐藏规范群，并通过研究其产生历史来探讨超轻粒子群体。

斯图克尔伯格场具有张量描述。在四维中，无质量反对称二形式场具有一个传播自由度，可以用赝标量来描述。经过对偶变换后，张量-矢量耦合会产生斯图克尔伯格质量项，这正如从弦紧致化得到的有效作用量中所发生的那样 [11, 13]。另一种独立的场论实现则在积分掉其重径向激发后保留带电标量的相位 [14]。第 3节区分了这些构造，并说明了我们暴胀示例中所采用的标量假设。在任一种描述中，与隐藏希格斯相位的混合都会留下一个物理的轴子-希格斯，其势由隐藏规范动力学产生。

与 $E_6 \times U(1)$ 实现相比，我们的构造采用了隐藏 $SU(2)$ 的单态或双态表示中的标量单态和费米子。隐藏希格斯使这一非阿贝尔群保持未破缺，从而允许其在远低于希格斯期望值的尺度上发生禁闭。较大的标量尺度确定了物理相位的归一化，而较低的禁闭尺度则赋予其较小的角向曲率。因此，我们考察了小势的另一种起源，而非高尺度瞬子构造。基于文献 [12], 的门户框架，我们将这种尺度分离与相干轴子产生的计算以及对伴随禁闭粒子群的评估结合起来。我们还给出了一种独立的双希格斯实现，其所展示的费米子谱抵消了所有规范反常。

要保持相位超轻，就必须抑制额外的相位依赖相互作用。规范不变性允许存在维数为二的标量算符，否则这些算符会产生较大的角质量。我们施加一种微扰相位对称性，量化所需的保护程度，并说明剩余的高能假设。在这些构造中，规范荷也限制了最领先的对称性破缺算符，通过选择不同的电荷和场内容来实现这种保护 [15]。

可以选择隐藏规范耦合和初始位移，以获得基准暗物质密度。纯规范格点结果将角向曲率与物理禁

闭尺度联系起来，而转换为高能耦合时会带来重整化群跑动和阈值不确定性。隐藏胶球是禁闭过程中产生的束缚态，具有自身的变数反应和遗迹丰度 [16]。我们追踪它们的演化，并结合相干轴子对其贡献进行约束。一个条件性的暴胀子示例检验标量真空的存续、等曲率涨落，以及所选历史所需的再加热条件。

相互作用组分将为结构形成开辟更多可能性。碰撞可以将热量从晕核心带走并驱动引力热收缩，最终可能形成黑洞种子 [17–19]。与小红点的关联还需要吸积和周围气体 [20, 21]。本文计算的示例提供了一种近乎无碰撞的相干轴子，并对伴随的遗迹粒子施加了限制。要构成一个具有高效晕散射的丰富组分，需要适当的轻粒子和媒介粒子，还需要对其产生和输运进行单独计算。我们在展望部分说明了实现这一扩展所需的条件。

2 规范作用量与物理相位

我们通过一个隐藏扇区扩展标准模型，该扇区的非阿贝尔规范动力学能够产生轴子势。一个共用的阿贝尔矢量将该扇区与可见物质连接起来。隐藏标量扇区包含一个带电希格斯和一个斯图克尔伯格赝标量。当希格斯获得真空期望值时，其相位会与斯图克尔伯格场混合。其中一个组合构成有质量阿贝尔矢量场的纵向极化，留下物理轴子-希格斯。下面我们将介绍规范对称性和场内容，然后从标量动能项推导出这一剩余场及其归一化。

规范群及其两个相互独立的新耦合为

$$G_{\rm SM} \times SU(2)_D \times U(1)_X, \qquad g_D \text{ for } SU(2)_D, \qquad g_X \text{ for } U(1)_X. \tag{3}$$

下标 D 表示隐藏规范群。共享的阿贝尔生成元 is

$$X = (B-L)_{\rm vis} + D_{\rm hid}. \tag{4}$$

阿贝尔矢量 X_μ 与可见 $B-L$ 以及隐藏荷 $D_{\rm hid}$耦合。引入三个右手中微子后，可见规范反常相互抵消。可见希格斯的门户荷为零。所有隐藏场都是标准模型规范群下的单态。

隐藏费米子 F 在 $SU(2)_D$下有两个分量，每个分量都具有狄拉克旋量结构。其左手性和右手性部分都变换为隐藏双重态。狄拉克费米子 Ψ是一个$SU(2)_D$ 单态，因此没有隐藏色相互作用，但携带阿贝尔门户荷。希格斯 ϕ 也是一个 $SU(2)_D$ 单态。表 1 列出了这些表示和电荷。

场	Spin	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	Y	$SU(2)_D$	q_X
F_L	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{2}$	$+1$
F_R	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{2}$	-1
Ψ_L	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{1}$	$+1$
Ψ_R	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{1}$	-1
ϕ	0	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{1}$	$+2$

表1：对称性破缺前的隐藏场。各列分别给出自旋、标准模型表示、隐藏的 $SU(2)_D$ 表示以及门户荷 $q_X = D_{\rm hid}$。标签 L， R表示每个狄拉克场的左手性和右手性部分。

对于二荷希格斯，定义 $e_X \equiv 2g_X$。在选择真空之前，主导的希格斯势为

$$V_{\rm rad}(\phi) = -\mu_\phi^2 \phi^\dagger\phi + \lambda_\phi(\phi^\dagger\phi)^2. \tag{5}$$

我们取 $\lambda_\phi > 0$。真空值和标量质量由完整势确定。考虑与超荷可能存在的动能混合，拉格朗日量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{SM}+\nu_R} &- \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{X\mu\nu}F_X^{\mu\nu} - \frac{\epsilon}{2}F_{Y\mu\nu}F_X^{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_\mu b - M_1 X_\mu)^2 + |D_\mu\phi|^2 + \bar{F}i\gamma^\mu D_\mu F + \bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu \Psi \\ &- \left(y_F\phi\bar{F}_L F_R + y_\Psi\phi\bar{\Psi}_L\Psi_R + \mathrm{h.c.}\right) - V_{\mathrm{rad}} + \mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}.\end{aligned} \tag{6}$$

场 b 是平移赝标量。参数 M_1 决定矢量质量中的斯图克尔伯格贡献。参数 ϵ 衡量与超荷场强 F_Y 的动能混合。项 $\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}$ 包含下文给出的反常抵消相互作用。这里，W^a_μ 是三个隐藏规范场，$W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g_D\varepsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu$，以及 $F_X = \mathrm{d}X$。可见相互作用包括 $g_X X_\mu J^\mu_{B-L}$。对于 $T^a = \sigma^a/2$ 和 $P_{L,R} = (1 \mp \gamma_5)/2$，导数为

$$\begin{aligned}D_\mu\phi &= (\partial_\mu - ie_X X_\mu)\phi, \\ D_\mu F &= \left[\partial_\mu - ig_D T^a W^a_\mu - ig_X X_\mu(P_L - P_R)\right] F, \\ D_\mu\Psi &= \left[\partial_\mu - ig_X X_\mu(P_L - P_R)\right]\Psi.\end{aligned} \tag{7}$$

两种 Yukawa 相互作用的总规范荷均为零。我们选取实数且为正的 Yukawa 耦合，并将常数费米子相位并入隐藏 θ 角。守恒的单态费米子数可保护 Ψ 免于衰变。我们还施加一个全局可见 $B - L$ 对称性，以禁止原本在规范对称性允许下的耦合 $\phi\nu_R^T C\nu_R$。我们假设这些对称性在更高能量下的理论中仍然成立。

我们也用原始场来表示依赖相位的相互作用。该组合

$$\mathcal{Z} = \phi\, e^{-ie_X b/M_1}. \tag{8}$$

在门户规范变换下保持不变：ϕ 获得因子 $e^{ie_X\omega(x)}$，而 b 平移$M_1\omega(x)$，因此得到

$$\mathcal{Z} \longmapsto e^{ie_X\omega}\phi\, e^{-ie_X(b+M_1\omega)/M_1} = \mathcal{Z}. \tag{9}$$

其模 $\phi^\dagger\phi$ 也具有规范不变性。采用预印本 Ref. [12]中所考虑形式的单个周期相互作用，得到

$$\begin{aligned}V^{(1)}_{\mathrm{hid}}(\phi, b) = &-\mu_\phi^2\phi^\dagger\phi + \lambda_\phi(\phi^\dagger\phi)^2 \\ &- \left[\kappa_{\mathrm{ang}}\phi e^{-ie_X b/M_1} + \kappa^*_{\mathrm{ang}}\phi^\dagger e^{ie_X b/M_1}\right].\end{aligned} \tag{10}$$

系数κ_{ang} 的质量维数为三。该表达式是一种可能的低能反常生成势形式，其大小和径向依赖关系需另行给出。对于禁闭模型，我们将在下文采用一般的规范真空能。第4节讨论的相位保护假设排除了这种形式的任意微扰系数。

现在我们定义由隐藏规范动力学生成的势。参数 θ_D 是隐藏 $SU(2)_D$ 规范理论的无量纲真空角。它乘在隐藏拓扑密度上，

$$\mathcal{L}_{\theta_D} = \theta_D Q_D, \qquad Q_D = \frac{g_D^2}{32\pi^2}W^a_{\mu\nu}\widetilde{W}^{a\mu\nu}, \qquad \widetilde{W}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}W^a_{\rho\sigma}. \tag{11}$$

对于有限作用量规范构型，Q_D 的时空积分是一个整数拓扑荷。因此，路径积分权重取决于 $e^{i\theta_D n}$，而 θ_D 以模 2π为周期。它是拉格朗日量的一个固定参数。对有质量隐藏费米子进行手征重定义，可以

将一个相位从其质量移至 θ_D。它们的不变量组合决定了物理规范角。在当前模型中，这个角是

$$\vartheta = \theta_D + \arg\left(\phi e^{-ieXb/M_1}\right). \tag{12}$$

对称性破缺后，该角度变为 θ_D 与下文推导的物理轴希格斯场的组合。对于固定的标量场取值 $\rho_\phi \equiv \phi^\dagger\phi$ 和固定的 ϑ，令 $\mathcal{E}_D(\rho_\phi,\ \vartheta)$ 表示隐藏真空能量密度。我们将其与角度无关的微扰贡献归入径向有效势。剩余的规范贡献包括禁闭。我们用最低阶周期谐波近似其角度依赖性，

$$\mathcal{E}_D(\rho_\phi,\vartheta) = \mathcal{E}_{D,0}(\rho_\phi) + \mathcal{A}_D(\rho_\phi)\,[1-\cos\vartheta], \qquad \mathcal{E}_{D,0}(\rho_\phi) \equiv \mathcal{E}_D(\rho_\phi,0). \tag{13}$$

减除约定确定了如何在微扰项、禁闭贡献和加性真空常数之间分配与角度无关的能量 [27]。由于ϕ 是一个 $SU(2)_D$ 单态，其大小通过双重态质量进入规范理论m_F (ρ_ϕ) 。 $= y_F\sqrt{\rho_\phi}$当 m_F 远大于禁闭尺度时，在固定高能规范耦合下，单圈匹配给出以下领先阶依赖关系 [25, 26]:

$$\begin{aligned}
\Lambda_D(\rho_\phi) &= \Lambda_1\left(\frac{y_F\sqrt{\rho_\phi}}{\Lambda_1}\right)^{1/11}, \\
\mathcal{E}_{D,0}(\rho_\phi) &= \mathcal{E}_{\rm ref} - c_E\Lambda_D^4(\rho_\phi) = \mathcal{E}_{\rm ref} - c_E\Lambda_1^4\left(\frac{y_F\sqrt{\rho_\phi}}{\Lambda_1}\right)^{4/11}.
\end{aligned} \tag{14}$$

这里， Λ_1 是狄拉克双重态处于活跃状态时跑动耦合的尺度， c_E 是在所选减除约定下需要非微扰输入的带符号无量纲系数，而$\mathcal{E}_{\rm ref}$ 是加性真空常数。系数 $b_1 = 20/3$ 和 $b_0 = 22/3$ 给出幂次 $1/11$。附录 A 推导了这一结果，说明了其适用范围，并解释了该约定中包含的微扰径向项。

系数 $\mathcal{A}_D(\rho_\phi)$ 在所选的角向极小值处为正，且质量维数为四。它是由隐藏规范动力学产生的周期振幅。在相同的重双重态近似下，它与 $\Lambda_D^4(\rho_\phi)$ 成正比。其无量纲系数需要通过单独的非微扰方法确定。接下来，我们定义纯角向贡献

$$\mathcal{U}_D(\rho_\phi,\vartheta) \equiv \mathcal{E}_D(\rho_\phi,\vartheta) - \mathcal{E}_D(\rho_\phi,0) = \mathcal{A}_D(\rho_\phi)\,[1-\cos\vartheta]. \tag{15}$$

因此，$\mathcal{U}_D$ 表示在希格斯场模固定时改变 ϑ 所需付出的能量代价。与角度无关的项 $_D(\rho_\phi,0)$ 连同其微扰修正一起，包含在径向希格斯势 $V_{\rm rad}(\rho_\phi)$中。方程（5）给出了该径向势在其极小值附近的领先多项式近似。根据这些定义，隐藏标量势为

$$V_{\rm hid}(\phi,b) = V_{\rm rad}(\rho_\phi) + \mathcal{U}_D(\rho_\phi,\vartheta), \qquad \rho_\phi = \phi^\dagger\phi, \quad \vartheta = \theta_D + \arg[\phi e^{-ieXb/M_1}]. \tag{16}$$

函数 $\mathcal{U}_D$ 决定角向力和轴希格斯质量。用角度描述 ϕ 需要 $|\phi| > 0$；穿过 $\phi = 0$ 时，必须使用原始标量场和规范场进行追踪。

在弯曲时空中，势对作用量的贡献为

$$S_V = -\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,V_{\rm hid}(\phi,b), \qquad g = \det(g_{\mu\nu}). \tag{17}$$

该因子 $\sqrt{-g}$ 给出了适当的时空体积元。动能项使用了式（7）中的规范协变导数。

关于破缺真空，写作

$$\phi = \frac{v_\phi + h}{\sqrt{2}} e^{i\eta/v_\phi}, \qquad \langle\phi\rangle = \frac{v_\phi}{\sqrt{2}}. \tag{18}$$

该真空处的主导质量为

$$m_h^2 = 2\lambda_\phi v_\phi^2, \qquad m_F = \frac{y_F v_\phi}{\sqrt{2}}, \qquad m_\Psi = \frac{y_\Psi v_\phi}{\sqrt{2}}. \tag{19}$$

两个赝标量场分别为 η 和 b。对于实数正值的 $\kappa_{\rm ang}$，单个周期相互作用变为

$$-\sqrt{2}\kappa_{\rm ang}(v_\phi + h)\cos\left(\frac{\eta}{v_\phi} - \frac{e_X b}{M_1}\right). \tag{20}$$

因子 $v_\phi + h$ 源于假定的线性交互作用。对于一般的规范势，其对希格斯场模的依赖必须通过计算确定。在我们的超轻示例中，角向能量几乎不会改变希格斯真空值或径向质量，但其模依赖性决定了第 5节讨论的相互作用。

我们选择在所选重整化尺度下令 $H^\dagger$ 标准模型$H_{\rm SM}|\phi|^2$ 的系数为零。重门户粒子的量子修正仍可能影响可见希格斯质量。因此，要得到其观测值，就需要一种保护机制，或对希格斯参数进行调整。不同的左手性和右手性门户荷可能产生规范反常。我们通过计算具有三个外部顶点的费米子圈图来求出其系数。下标表示哪些规范场与圈图相接： X 表示 $U(1)_X$ ，而 D 表示 $SU(2)_D$。

关于隐藏扇区中规范不变性的恢复，系数 $C^{(1)}_{XDD}$描述一个门户矢量 X_μ和两个隐藏矢量 W^a_ν, W^b_ρ。它是第一个模型的 $U(1)_X[SU(2)_D]^2$反常系数。隐藏生成元迹正比于 δ^{ab}；定义 $C^{(1)}_{XDD}$时，我们将这个公共张量提取出来。系数 $C^{(1)}_{XXX}$ 描述三个门户矢量顶点。每个顶点贡献费米子荷，而双重态的两个隐藏色分量都对迹有贡献。标记 Xgrav 表示一个门户流顶点和两个能动张量顶点。这些共同产生混合规范-引力反常。下文的系数包含荷之和。相应的作用量变分中还会出现规范耦合和圈因子。

我们使用左手 Weyl 场计算这些迹。电荷为 q_R 的右手性费米子的左手性荷共轭场，其电荷为 $-q_R$。由于表1 中的两个右手性门户荷均为 -1，因此相同的费米子内容可表示为

$$F_L \sim \mathbf{2}_{+1}, \qquad F_R^c \sim \overline{\mathbf{2}}_{+1}, \qquad \Psi_L \sim \mathbf{1}_{+1}, \qquad \Psi_R^c \sim \mathbf{1}_{+1}. \tag{21}$$

共轭双重态与双重态具有相同的二次指标。因此，每个左手条目的门户荷均为 $+1$，隐藏色多重度分别为 2，2、1、1。

对于混合非阿贝尔迹，每个多重态的贡献等于其门户荷乘以其二次指标。使用上文所采用的生成元，有

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{2}}(T^a T^b) = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\sigma^a\sigma^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \qquad T(\mathbf{2}) = T(\overline{\mathbf{2}}) = \frac{1}{2}, \qquad T(\mathbf{1}) = 0. \tag{22}$$

双重态项给出

$$C^{(1)}_{XDD} = \sum_{\text{left-handed } f} q_f T(R_f) = \underbrace{1\cdot\frac{1}{2}}_{F_L} + \underbrace{1\cdot\frac{1}{2}}_{F_R^c} = (q_{F_L} - q_{F_R})\frac{1}{2} = 1. \tag{23}$$

因子 $1/2$ 是通过对式（22）中双重态的两个分量求迹得到的二次指标。单态具有 $T(\mathbf{1}) = 0$，因此混合系数包含所示的两个双重态贡献。

三个阿贝尔顶点给出电荷因子 q_f^3。在每个多重态内，生成元与单位矩阵成正比，因此其迹等于多重态的维数 $d\,(R_f)$：

$$\begin{aligned} C^{(1)}_{XXX} &= \sum_{\text{left-handed } f} d(R_f) q_f^3 \\ &= \underbrace{2(1)^3}_{F_L} + \underbrace{2(1)^3}_{F_R^c} + \underbrace{(1)^3}_{\Psi_L} + \underbrace{(1)^3}_{\Psi_R^c} \\ &= 2\big[q_{F_L}^3 - q_{F_R}^3\big] + \big[q_{\Psi_L}^3 - q_{\Psi_R}^3\big] = 4 + 2 = 6. \end{aligned} \tag{24}$$

此处双重态贡献前的因子 2 是必要的：阿贝尔迹会计入两个隐藏色分量。最后一行右手性项前的负号，正是替换 $q_R \mapsto -q_R$，因为 $(-q_R)^3 = -q_R^3$。

混合引力三角图包含一个门户顶点和两个能动张量顶点。其电荷和呈线性：

$$\begin{aligned} C^{(1)}_{X\text{grav}} &= \sum_{\text{left-handed } f} d(R_f) q_f \\ &= \underbrace{2(1)}_{F_L} + \underbrace{2(1)}_{F_R^c} + \underbrace{1}_{\Psi_L} + \underbrace{1}_{\Psi_R^c} \\ &= 2\big[q_{F_L} - q_{F_R}\big] + \big[q_{\Psi_L} - q_{\Psi_R}\big] = 4 + 2 = 6. \end{aligned} \tag{25}$$

隐藏费米子会产生阿贝尔立方反常和混合引力反常。可见部分则由所述右手中微子含量抵消。

双重态的两个手性态具有相同的 $SU(2)_D$表示，但具有不同的 $U(1)_X$电荷。因此，其左手部分和右手部分都会对隐藏门户反常作出贡献。两个左手双重态也满足全局 $SU(2)$ 反常的偶数双重态要求。为抵消剩余的局域反常，我们引入涉及移位场b 和拓扑密度 Q_D 的相互作用，后者定义于方程（11）。作用量中的系数由一致规范反常确定，该反常通过对费米子有效作用量求变分得到。对于一个左手性外尔场，其阿贝尔立方系数为 $g_X^3 q_X^3/(48\pi^2)$，其中对偶场强的定义见方程（11）。选择整体符号，使费米子总变分为

$$\delta_\omega \Gamma_{\text{ferm}} = \int \mathrm{d}^4x\, \omega \left[e_X Q_D + \frac{g_X^3 C^{(1)}_{XXX}}{48\pi^2} F_X \widetilde{F}_X + \mathcal{A}_{\text{grav}} \right]. \tag{26}$$

此处$\mathcal{A}_{\text{grav}}$ 表示混合引力贡献。对于混合 XDD 项，我们将反常归因于阿贝尔流，同时保留非阿贝尔沃德恒等式。这确定了该三角振幅中的有限局域反项。三次项采用一致系数；协变流系数会大三倍，不能代入此作用量变分 [22]。由于 $\delta b = M_1 \omega$，抵消条件要求

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} = -\frac{e_X b}{M_1} Q_D - \frac{b}{4M_1} c_X F_X \widetilde{F}_X + \mathcal{L}_{\text{WZ,grav}}, \qquad c_X = \frac{g_X^3}{2\pi^2}. \tag{27}$$

特别地，三次项的变分为 $-c_X \omega F_X \widetilde{F}_X/4$，因此公式（26）给出 $c_X = g_X^3 C^{(1)}_{XXX}/\,(12\pi^2) = g_X^3/\,(2\pi^2)$。引力项抵消了混合规范-引力反常。Wess–Zumino 项抵消了费米子量子作用量的反常规范变分。仍必须计入物理费米子圈振幅。这在其截断以下给出了规范一致的有效理论。一个在更高能量下有效、并通过其完整粒子内容抵消反常的理论尚待指定。

规范变换为

$$X_\mu \mapsto X_\mu + \partial_\mu \omega, \qquad b \mapsto b + M_1 \omega, \qquad \eta \mapsto \eta + e_X v_\phi \omega. \tag{28}$$

同一个规范参数 ω 作用于可见 $B-L$ 电荷并使 b发生平移。独立的全局可见 $B-L$ 对称性保护狄拉克中微子质量。

在固定径向模长下，方程（6）给出

$$\mathcal{L}_{\rm phase} = \frac{1}{2}(\partial\eta - e_X v_\phi X)^2 + \frac{1}{2}(\partial b - M_1 X)^2. \tag{29}$$

规范变换沿着（$e_X v_\phi$, M_1）方向移动（η, b）。垂直于该移动方向的组合保持不变，并且仍是物理的。定义 $M_X^2 = M_1^2 + e_X^2 v_\phi^2$，有

$$G = \frac{e_X v_\phi \eta + M_1 b}{M_X}, \qquad \chi = \frac{e_X v_\phi b - M_1 \eta}{M_X}. \tag{30}$$

这些组合将方程（29）写成 $\frac{1}{2}(\partial G - M_X X)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2$ 的形式。由于 $\delta G = M_X\omega$和$\delta\chi = 0$, G 提供了矢量的纵向极化，而 χ 仍作为物理轴子保留下来。规范不变角以及将其转换为 χ 的尺度为

$$\Theta = \frac{\eta}{v_\phi} - \frac{e_X b}{M_1} = -\frac{\chi}{F_\chi}, \qquad F_\chi = \frac{v_\phi M_1}{M_X}, \qquad F_\chi^{-2} = v_\phi^{-2} + e_X^2/M_1^2. \tag{31}$$

对于 $M_1 \gg e_X v_\phi$，相位尺度趋近于 v_ϕ，其中 $F_\chi \le v_\phi$。将阿贝尔动能项置于标准形式会同时重标度 g_X 和 M_1，因此该角度中的二者比值保持不变。我们在基准重整化尺度处设定 $\epsilon = 0$；可见扇区费米子圈图会在其他尺度生成非零混合。

3 斯图克尔伯格场的张量起源与标量实现

方程（6）中的作用量规定了低能移位场 b 及其反常抵消相互作用。张量起源和带电标量实现都导出这一导数作用量。它们的高能描述决定了 M_1的起源、使其稳定的场以及这些场对暴胀的响应。在将标量实现用于数值示例之前，我们先分别陈述这些假设。

3.1 张量与弦起源

在弦构造中，反对称张量场源自高维理论[11, 13]。在四维中，令 $C_{\mu\nu}$ 为一个二形式规范场，其场强为

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu C_{\nu\rho} + \partial_\nu C_{\rho\mu} + \partial_\rho C_{\mu\nu}. \tag{32}$$

动能对偶可由以下一阶拉格朗日量得出

$$\mathcal{L}_{\rm first} = -\frac{1}{2}J_\mu J^\mu + J^\mu(\partial_\mu b - M_1 X_\mu) - \frac{1}{4}F_{X\mu\nu}F_X^{\mu\nu}. \tag{33}$$

消去 J_μ得到$\frac{1}{2}(\partial b - M_1 X)^2$。而消去 b则施加约束 $\partial_\mu J^\mu = 0$，其局部解为$J^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}H_{\nu\rho\sigma}/6$。随后通过分部积分，将 $-M_1 X_\mu J^\mu$转化为一个 $C\wedge F_X$耦合。反常抵消相互作用也有相应的张量补全 [11, 13]。

经过正则归一化后， M_1 取决于张量动能系数、其矢量耦合以及伴随模量的真空值。我们将 M_1 保留为四维作用量的一个参数；其数值需要通过紧化和稳定化数据确定。式（30）中的旋转确定了隐藏希格斯获得期望值后物理相位的形式。要使其在暴胀期间得以保留，相应的模量必须保持稳定，其中也包括其暴胀子耦合的影响。

3.2 标量实现及其对称性破缺尺度

带电复标量为这一质量项提供了另一种实现方式 [14]。令 S 为一个 $SU(2)_D$ 单态，门户荷为二，并写作

$$S = \frac{w+s}{\sqrt{2}} e^{ib/w}, \qquad M_1 = e_X w. \tag{34}$$

径向涨落 s的质量为 $m_s^2 = 2\lambda_S w^2$，当 $V_S = \lambda_S \left(|S|^2 - w^2/2\right)^2$时。在低于该质量的能标下，将其消去后会留下相位动能项以及受到抑制的高阶导数相互作用。附录 B给出了推导及其适用范围。这种部分退耦保留了真空值和角自由度，与 Peccei–Quinn 构造 [5]中的情况相同。

当 S 和 ϕ 均存在时，物理场是方程（31）中定义的规范不变相对相位。施加的相对相位对称性使其在微扰理论中保持无质量，而隐藏反常则生成其微小的势。方程（27）中的反常抵消项伴随 Stückelberg 质量的任一实现。

标量真空尺度是一个额外输入。对于方程（D.1）中的耦合径向势，在 $I = R = 0$ 处满足驻定性，得到

$$\mu_S^2 = \lambda_S w^2 + \frac{\lambda_{\phi S}}{2} v_\phi^2, \qquad w = \frac{M_1}{e_X}. \tag{35}$$

此处 $-\mu_S^2$ 是 $|S|^2$的系数，而 $\lambda_{\phi S}$ 乘以 $|\phi|^2|S|^2$。基准点 $M_1 = 5 \times 10^{17}$吉电子伏，$e_X = 0.6$ 给出 $w = 8.33 \times 10^{17}$ 吉电子伏。采用附录 D中指定的四次耦合，对应的数值为 $\mu_S \simeq 5.9 \times 10^{17}$吉电子伏。因此，标量势指定了一个高能标的对称性破缺尺度，其微观起源仍属假设。暴胀计算从这一破缺相开始，并检验其极小值的稳定性。

相干密度示例采用 $F_\chi \simeq 10^{17}$吉电子伏，这要求 v_ϕ 和 w 均大于 F_χ。层级 $w \gg v_\phi$ 使 F_χ 趋近于 v_ϕ。取相同数值 $v_\phi = w = \sqrt{2} F_\chi \simeq 1.40 \times 10^{17}$吉电子伏，也会得到相同的相位归一化，但矢量和费米子阈值不同。以下数值结果仍采用所述的层级基准点。

标量真空的计算在附录 D中展开，其中包括暴胀期间的偏移极小值和径向质量。第3.1 节的张量实现需要对其稳定模及其耦合进行类似的计算。

4 超轻相位的保护

动能项表明，一个物理相位得以保留。其较小的质量还要求控制每一个依赖于该相位的相互作用。我们使用约化普朗克质量，其中 G 为牛顿常数，

$$\overline{M}_{\rm Pl} = (8\pi G)^{-1/2} = 2.435 \times 10^{18}\,{\rm GeV}. \tag{36}$$

第 3节的标量实现中，S 和 ϕ 都具有两个单位的门户荷。以下算符界限针对该实现。它们的乘积 $S^\dagger \phi$是规范不变的。一项

$$\Delta V = -\left[\mu_{\rm mix}^2 S^\dagger \phi + {\rm h.c.}\right] = -|\mu_{\rm mix}^2| v_\phi w \cos(\Theta + \delta) \tag{37}$$

因此受到规范群允许。相位 δ 是其系数的辐角，并且$\Theta = -\chi/F_\chi$。该项产生量级为 $|\mu_{\rm mix}^2| v_\phi w / F_\chi^2$ 的角向曲率。对于目标零温轴希格斯质量 $m_{\chi,\,0} \equiv m_\chi(T_D = 0)$，下方的基准点要求规范磁化率

$$\mathcal{X}_D = m_{\chi,0}^2 F_\chi^2 \simeq 8.9 \times 10^{-24}\,{\rm GeV}^4, \qquad \frac{\mathcal{X}_D}{\overline{M}_{\rm Pl}^4} \simeq 2.5 \times 10^{-97}. \tag{38}$$

要使额外曲率低于该值的百分之一，对于一般相位，需要 $|\mu_{\rm mix}^2| \lesssim 1.1\times10^{-60}$吉电子伏^2。必须由额外的对称性来强制实现这种抑制。

施加的相对对称性在微扰理论中禁止了这类项。该对称性在隐藏规范相互作用下存在反常，因此隐藏量子真空仍可产生下一节所计算的角向能量。这正是轴子质量的预期来源。其他对称性的显式破缺，包括高能下产生的相互作用，都必须低于这一贡献。

为量化这一要求，考虑规范不变级数

$$\Delta V_n = \frac{c_n}{\Lambda_{\rm UV}^{2n-4}}(S^\dagger\phi)^n + \text{h.c.}, \qquad A_n = 2|c_n|\Lambda_{\rm UV}^4\left(\frac{v_\phi w}{2\Lambda_{\rm UV}^2}\right)^n. \tag{39}$$

该算符的维数为 $2n$，而 A_n 是它在径向真空处的余弦振幅。其角频率为 n/F_χ，因此最大额外曲率为 n^2A_n/F_χ^2。在不同项之间不存在相消的前提下，一个充分的百分之一条件是

$$n^2A_n < 10^{-2}\mathcal{X}_D. \tag{40}$$

举例来说，取 $|c_n|=1$ 和 $\Lambda_{\rm UV}=M_{\rm Pl}$。该基准点满足 $v_\phi w/(2M_{\rm Pl}^2)=0.00703$。因此，这个级数中第一个允许出现的项必须满足 $n\geq 48$，或者维数至少为 96，且所有更低维的项均不存在或受到进一步抑制。这些数值取决于截断、系数和所选质量；它们体现了所需保护机制的严苛程度。该级数之外的相互作用也必须满足相应的角向曲率界限。

离散规范对称性可以限制允许的幂次，但其电荷赋值和混合规范反常也必须保持一致。不能仅凭假设，就将反常全局对称性的一个大离散子群视为具有所示谱的精确规范对称性。我们没有提供这一构造所需的额外场或反常抵消机制。当前模型以相位保护为前提；其规范起源决定了残留场及其耦合。这本身并不能解决这一保护问题 [15]。

较大的标量尺度也限制了有效描述。在基准点，$v_\phi/M_{\rm Pl}=0.041$，$M_X/M_{\rm MPl}=0.207$和 $w/M_{\rm MPl}=0.342$。高维标量相互作用的展开以及反常抵消项的起源，需要一个在这些能标下有效的理论提供信息。磁性弱引力论证所提示的$g_X M_{\rm MPl}\simeq 7.3\times10^{17}$吉电子伏尺度与重能标相当。这类论证属于猜想，并取决于完备理论[23]；所示场并不能确立一种受控的引力完备理论。

轴子版本的弱引力猜想涉及一个电荷为 q、作用量为$S_{\rm inst}$ 的瞬子，其条件约为 $F_\chi S_{\rm inst}/|q| \lesssim M_{\rm Pl}$ [23]。对于在v_ϕ处评估的小瞬子，在我们的单圈示例中，这一比值约为 $16M_{\rm Pl}$。这里的实际势由禁闭主导，因此不适用这一高能半经典作用量。检验该猜想需要相关的瞬子谱、尺度依赖性以及可能存在的其他态。我们既不会根据单一的高能作用量推断该理论被排除，也不会声称这一有效理论证实了该猜想。

5 隐藏真空能与超轻质量

标量动能项留下一个物理相位。施加的对称性使其在微扰理论中保持无质量。隐藏规范动力学可以生成角势；其在极小值处的二阶导数确定轴子质量。

双重态质量包含相位 η/v_ϕ。手征场重定义 $F=e^{-i\gamma_5\eta/(2v_\phi)}F'$使该质量变为实数。随后，量子积分测度会贡献 $(\eta/v_\phi)Q_D$。加上

式（27）中的项给出隐藏规范角

$$\vartheta = \theta_D + \frac{\eta}{v_\phi} - \frac{e_X b}{M_1} = \theta_D - \frac{\chi}{F_\chi}. \tag{41}$$

隐藏规范角的这一变化源自双重态 F。我们选择 χ 的原点，使角势在该处具有稳定极小值；常数 θ_D 随后也包含在这一选择中。

将希格斯场模固定为 $|\phi| = v_\phi/\sqrt{2}$，并将规范能量记为 $\mathcal{E}_D(\vartheta, T_D)$。隐藏温度 T_D 以能量单位计量。在非零温度下，$\mathcal{E}_D$ 是自由能量密度；在零温度下，则是基态能量密度。对角求二阶导数称为拓扑磁化率。它决定轴子质量：

$$\mathcal{X}_D(T_D) = \left.\frac{\partial^2 \mathcal{E}_D}{\partial \vartheta^2}\right|_0, \qquad m_\chi^2(T_D) = \frac{\mathcal{X}_D(T_D)}{F_\chi^2}. \tag{42}$$

将能量展开为 $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_D(0) + \mathcal{X}_D \vartheta^2/2 + \cdots$ 并使用式（41）即可得到上述质量关系。量 $\mathcal{X}_D$ 的质量维数为四。对于式（13）中的主谐波形式，其零温值为 $\mathcal{X}_D(0) = \mathcal{A}_D(v_\phi^2/2)$。在非零温度下，振幅会随温度变化。格点计算表明，角度依赖关系会在 $SU(2)$ 热相变 [29]过程中发生变化。在数值丰度示例中，我们将余弦形式作为工作近似。

我们可以计算跑动规范耦合，但强规范贡献的整体大小需要通过单独的信息来确定。在双重态质量 Λ_0 以下引入单圈强相互作用尺度，并写作

$$\mathcal{X}_D(0) = c_0 \Lambda_0^4, \qquad m_{\chi,0} = \frac{\sqrt{c_0}\Lambda_0^2}{F_\chi}. \tag{43}$$

单圈尺度 Λ_0 是跑动近似中的一个参数。其系数 c_0 取决于所采用的约定；令 $c_0 = 1$ 是单圈示例中的一种选择。

为确定强规范贡献的大小，我们采用纯 $SU(2)$ 杨–米尔斯理论的格点结果。该理论描述远低于 m_F能量下的隐藏规范扇区，此时重双重态已被移除；希格斯场和斯图克尔伯格场是 $SU(2)_D$ 单态。格点计算在时空网格上评估规范场观测量，并将结果外推至零网格间距。这些计算给出了无量纲比值，可应用于隐藏禁闭尺度。

常用的物理参照量是禁闭弦张力 σ_D，即一条长隐藏通量管的单位长度能量。我们采用

$$\frac{\mathcal{X}_D(0)^{1/4}}{\sqrt{\sigma_D}} = 0.486(10), \qquad \frac{\Lambda_{\overline{\rm MS}}}{\sqrt{\sigma_D}} = 0.752(20)(60). \tag{44}$$

第一个比值是参考文献 [30]表 3 中的连续统磁化率估计；参考文献 [31] 图 10 中的常规$SU(2)$模拟结果与之相符。第二个比值是参考文献 [32], 式 (26) 中的 $SU(2)$结果，该结果通过追踪跑动耦合从有限体积格点计算到微扰区域的变化，并将其转换为 $\overline{\rm MS}$ 方案而得出。它的两项不确定度分别是统计误差和估算的系统误差。中心值给出

$$\mathcal{X}_D(0) = c_{\overline{\rm MS}} \Lambda_{\overline{\rm MS}}^4, \qquad c_{\overline{\rm MS}} = \left(\frac{0.486}{0.752}\right)^4 \simeq 0.17. \tag{45}$$

仅运行尺度转换的不确定性就相当显著，而且所引述的测定结果并非联合精密拟合。特别是，$c_{\overline{\rm MS}}$ 不能在保持尺度不变的情况下代入单圈

极点尺度公式。在目标物理质量和相位尺度下，相同的格点输入意味着

$$\sqrt{\sigma_D} \simeq 3.55\,\mathrm{keV}, \qquad \Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}} \simeq 2.67\,\mathrm{keV}, \qquad T_c \simeq 2.52\,\mathrm{keV}. \tag{46}$$

对于最后一个数值，我们采用了 $T_c/\sqrt{\sigma_D} = 0.7091(36)$、参考文献 $SU(2)$ 表 6 中的连续统 [33]结果。该温度比将用于热历史计算。根据目标轴子质量到跑动尺度的转换，使用了方程（44）中的两个比值：

$$\mathcal{X}_D(0)^{1/4} = \sqrt{m_{\chi,0} F_\chi}, \qquad \Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}} = \frac{0.752}{0.486}\sqrt{m_{\chi,0} F_\chi}. \tag{47}$$

因此，所选的质量和相位尺度确定了量纲尺度；格点计算提供了转换因子。

在 m_F以上，双重态会对跑动规范耦合产生贡献。在其质量以下，只有$SU(2)$规范场会产生贡献。一圈系数为 $11C_A/3 - 4T_F n_f/3$，其中 $C_A = 2$ 以及$T_F = 1/2$。因此，对于一个活跃狄拉克味，它为 $20/3$ ，而在移除该味之后则为 $22/3$ 。跨越这一质量阈值连接跑动耦合，遵循标准的重费米子退耦程序 [25, 26]；其应用于希格斯依赖的真空能的推导见附录A。跑动方程及其积分形式为

$$\mu\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\mu} = -\frac{b_j g_D^3}{16\pi^2}, \qquad b_1 = \frac{20}{3}, \quad b_0 = \frac{22}{3}, \qquad \alpha_D^{-1}(\mu_2) = \alpha_D^{-1}(\mu_1) + \frac{b_j}{2\pi}\ln\!\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right). \tag{48}$$

耦合的单圈表达式在参数 Λ_0 处发散。要将这一尺度与高能耦合联系起来，先在费米子存在时从 v_ϕ 跑动到 m_F ，然后在 m_F 以下使用纯规范系数继续演化。在 m_F 处连接两个解，得到

$$\Lambda_0 = m_F \exp\left[-\frac{1}{b_0}\left(\frac{2\pi}{\alpha_D(v_\phi)} + b_1 \ln\frac{m_F}{v_\phi}\right)\right]. \tag{49}$$

因此，指定质量要求

$$\Lambda_0 = (m_{\chi,0} F_\chi)^{1/2} c_0^{-1/4}, \qquad \alpha_D(v_\phi) = \frac{2\pi}{b_0 \ln(m_F/\Lambda_0) + b_1 \ln(v_\phi/m_F)}. \tag{50}$$

因此，微扰规范耦合可以通过其重整化群跑动产生范围很广的小质量。方程（50）为指定质量选取耦合。在固定F_χ、 m_F、 v_ϕ、 c_0时的局部灵敏度为

$$\frac{\partial \ln m_{\chi,0}}{\partial \ln \alpha_D(v_\phi)} = \frac{4\pi}{b_0 \alpha_D(v_\phi)} \simeq 104. \tag{51}$$

该耦合增加百分之一，会使单圈质量改变约 2.8 倍。反演得到的耦合包含许多位数字，这些数字只表示近似中的数值反演，并不代表同等精确的物理预测。

为与方程（45）进行比较，在 MS 方案中采用规范–费米子双圈处理，使用

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_D}{\mathrm{d}\ln\mu} = -\frac{\mathcal{B}_0(n_f)}{2\pi}\alpha_D^2 - \frac{\mathcal{B}_1(n_f)}{8\pi^2}\alpha_D^3, \quad \mathcal{B}_0(n_f) = \frac{22 - 2n_f}{3}, \quad \mathcal{B}_1(n_f) = \frac{136}{3} - \frac{49 n_f}{6}. \tag{52}$$

这里的 n_f 表示活跃狄拉克双重态的数量。定义

$$L_{n_f}(\alpha) = \frac{2\pi}{\mathcal{B}_0 \alpha} + \frac{\mathcal{B}_1}{2\mathcal{B}_0^2}\ln\!\left[\frac{\mathcal{B}_0\alpha/(4\pi)}{1 + \mathcal{B}_1\alpha/(4\pi\mathcal{B}_0)}\right]. \tag{53}$$

这是截断贝塔函数的精确积分，其中采用 MS 标度的通常渐近定义。令 $\alpha_F = \alpha_D(m_F)$，在 $\mu = m_F$ 处进行连续匹配，得到

$$L_0(\alpha_F) = \ln\left(\frac{m_F}{\Lambda_{\overline{\rm MS}}}\right), \qquad L_1(\alpha_D(v_\phi)) - L_1(\alpha_F) = \ln\left(\frac{v_\phi}{m_F}\right). \tag{54}$$

对于基准点 $m_{\chi,\,0} = 3 \times 10^{-20}$ 电子伏 和 $F_\chi = 9.93 \times 10^{16}$吉电子伏，式（47）给出 $\mathcal{X}_D(0)^{1/4} \simeq$1。73 千电子伏 和 $\Lambda_{\overline{\rm MS}} \simeq 2.67$ 千电子伏。当 $v_\phi = 10^{17}$ 吉电子伏 和 $y_F = 0.2$时，二重态阈值为 $m_F = y_F v_\phi/\sqrt{2} \simeq 1.41 \times 10^{16}$ 吉电子伏。随后，式（54）中的第一个方程确定该阈值处的耦合；第二个方程将其演化至 v_ϕ。由此得到

$$\alpha_F \simeq 0.01648, \qquad \alpha_D^{\overline{\rm MS}}(v_\phi) \simeq 0.0159. \tag{55}$$

因此，高能耦合可根据选定的轴子质量、参考文献 [30, 32] 中的晶格比值以及所述的两圈演化推断出来。格点计算本身确定了纯规范比值。我们忽略了有限的高阶阈值项，以及两圈演化中的汤川耦合和门户贡献。精确测定应纳入这些项，并传播格点不确定性。

作为参考，所需的势标度为

$$\mathcal{X}_D(0)^{1/4} = 31.6\,\text{eV}\left(\frac{m_{\chi,0}}{10^{-22}\,\text{eV}}\right)^{1/2}\left(\frac{F_\chi}{10^{16}\,\text{GeV}}\right)^{1/2}. \tag{56}$$

希格斯期望值确定角度与场之间的标度，而小得多的隐藏规范标度则确定角势。因此，物理相位可以在高尺度对称性破缺之后存在，并且只有当隐藏扇区足够冷时才获得其相关势。

希格斯是一个 $SU(2)_D$ 单态，因此其期望值不会破缺该规范群。真空能包括长距离禁闭效应和大瞬子。因此，必须从完整的强规范理论中求得它。因子 $\exp[-2\pi/\alpha_D(v_\phi)]$ 仅描述高能下的小瞬子抑制。在固定的高能耦合下，将跑动解连接起来可得

$$\Lambda_0(h)^{b_0} = m_F(h)^{b_0-b_1}\Lambda_1^{b_1}, \qquad m_F(h) = \frac{y_F(v_\phi + h)}{\sqrt{2}}, \qquad \mathcal{X}_D(h) \propto (v_\phi + h)^{4/11} \tag{57}$$

当费米子的质量远大于禁闭尺度且纯规范真空能系数保持不变时。这里 Λ_1 是用一个活跃狄拉克味定义的标度。该公式还给出了对希格斯涨落的依赖关系 h 其定义见公式（18）。它的分数幂不同于公式（20）中的线性因子。在真空处，我们可以选择一个使轴子质量相同的余弦系数：

$$\lambda_{\rm eff} = \frac{\mathcal{X}_D(0)}{v_\phi^4}. \tag{58}$$

这种选择使第二个角向导数在径向真空处相一致。计算径向衰变还需要知道势和动能项如何随希格斯场模变化。因此，式（20）和（57）中的模依赖性不同，会导致不同的径向耦合。

6 暴胀与真空稳定性

遗迹密度计算始于一个在暴胀和再加热过程中存留下来的近似均匀场。我们使用第3.2节中标量实现的一个条件性示例。该

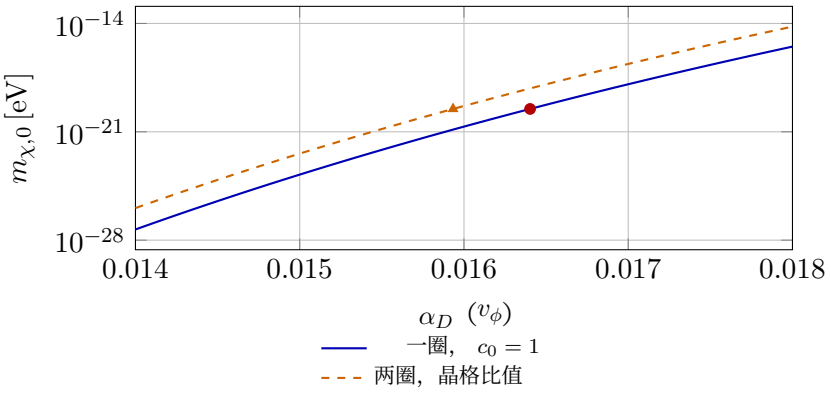


图1：在以下选定的高能规范耦合下，质量随之变化： $v_\phi = 10^{17}$吉电子伏， $y_F = 0.2$， $M_1 = 5 \times 10^{17}$吉电子伏 以及 $g_X = 0.3$。实线采用一圈重整化群跑动和$c_0 = 1$。虚线采用规范–费米子两圈贝塔函数，以及文献$SU(2)$ 中公式（44）给出的中心纯 [30, 32]比值。两条曲线都能在标记的耦合处达到所选质量3×10^{-20}电子伏。它们的偏移说明了尺度转换和重整化群跑动的依赖性。两条曲线都没有指定一个优选的轴子质量；虚线也未纳入正文中提及的其他不确定性。

暴胀子 I 是一个独立的实标量，在规范群下为中性，具有正则动能项和文献 [34],中的平台势

$$S_I = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu I\partial_\nu I - U(I)\right], \qquad U(I) = U_0\frac{I^2}{I^2+\mu_I^2}. \tag{59}$$

背景演化、原初谱以及与再加热的匹配推导见附录C。标量势及其与 I 和时空曲率的耦合详见附录D。这些相互作用保持相对相位对称性。暴胀期间的相位保护和较小的隐藏规范质量仍是该示例所作的假设。

对于再加热温度为 $T_R = 10^{10}$吉电子伏的可见扇区再加热，振幅和膨胀条件给出

$$\begin{aligned} &\mu_I \simeq 6.05\times10^{15}\,\mathrm{GeV}, \qquad U_0 \simeq 1.13\times10^{61}\,\mathrm{GeV}^4, \qquad H_* \simeq 7.96\times10^{11}\,\mathrm{GeV}, \\ &N_* \simeq 49.8, \qquad \mathcal{P}_\mathcal{R}(k_*) \simeq 2.10\times10^{-9}, \qquad n_s \simeq 0.9694, \qquad r \simeq 1.03\times10^{-5}. \end{aligned} \tag{60}$$

这里 $k_* = 0.05\mathrm{Mpc}^{-1}$，而 N_* 统计到首次穿过 $\epsilon_H = 1$时的膨胀。之后的振荡膨胀已纳入再加热匹配。谱采用一阶哈勃慢滚表达式。与已发表的标量谱约束的比较以及相近的示例均保留在附录 F [35–37]。

指定的暴胀子和曲率耦合使 v_ϕ^2 相对于其真空值变化约 -7.6×10^{-11}，并使 w^2 变化约 -2.1×10^{-14}。两个径向本征质量仍远大于 H_*，而 F_χ 的相对变化约为 -3.7×10^{-11}。附录 D 计算了位移真空及其对暴胀子势的树级效应；附录 E 给出了重粒子圈估计。这些结果支持在此标量示例中采用固定相位尺度。张量实现则需要单独进行模稳定化计算。

对于相干暗物质基准，角向涨落给出$\mathcal{P}_S \simeq 6.3\times10^{-11}$ 以及$\beta_{\mathrm{iso}} \simeq 0.029$ 在非相关等曲率假设下。相应的振幅上限为 $H_* \lesssim 9.2\times10^{11}$ 吉电子伏 [35]。附录 F 推导了密度响应及这一上限。联合似然分析将同时拟合标量谱和等曲率扰动谱。

可见衰变相互作用及其微扰再加热条件详见附录G。附录I中计算得出的最高温度能量上界表明，在给定的正热质量界限下，两个标量真空值均非零。暴胀子

自共振可能改变晚期压强历史。将晚期平均压强替换为类辐射阶段并重新进行匹配后，得到 $N_* \simeq 53.3$ 和 $n_s \simeq 0.9714$；实际压强则需要通过非线性碎裂计算来确定。

可见衰变算符还会通过超荷–门户动能混合改变重矢量质量。附录 H 发现了一个未抵消的斜率修正，其量级为 3×10^2 乘以 $\epsilon = 10^{-3}$所需的斜率。要将该贡献抑制到百分之一以下，需要在$|\epsilon| \lesssim 6 \times 10^{-6}$匹配尺度处实现这一点。可见费米子通过其超荷和 $B - L$ 电荷产生混合。因此，所选的平台是一个重整化势，其系数在高能下需要进行调整或受到保护。

冷隐藏历史还要求 $B_D/B_{\rm vis} \simeq 4.6 \times 10^{-12}$。这种能量分数、隐藏温度归一化与暴胀子衰变系数之间的关系在附录 I中推导。所展示的对称性允许可见衰变算符和隐藏衰变算符同时存在，因此较小的隐藏系数需要微观解释。真空和等曲率扰动结果适用于所指定的标量势、相位保护和再加热历史。

7 热历史与初始场值

遗迹密度取决于轴子何时开始运动。这由该时刻的膨胀率和轴子质量决定。与使用零温质量进行的估算相比，炽热的隐藏等离子体可以降低角势，并延迟振荡的开始。

第 6 节 给出了一个暴胀示例，其中隐藏希格斯真空得以保持。其他暴胀子势和耦合也必须通过相同的真空检验和等曲率扰动检验。我们将保留下来的希格斯场值和相位作为随后热演化的起点。

我们假设，在可观测模离开暴胀视界之前，两个希格斯场模都已经非零，并且在相关区域内具有近乎共同的相位。在再加热期间，包括其温度最高的阶段，它们的真空值必须始终保持非零。我们还假设径向质量远大于暴胀哈勃率。于是，晚期初始场值为

$$\chi_i = F_\chi \theta_i, \qquad \dot{\chi}_i \simeq 0. \tag{61}$$

初始角 θ_i 表示偏离角向极小值的程度。我们将其选作初始条件。足够长的暴胀可以将具有这一初始角的区域拉伸到包含我们的可观测宇宙。如果物理相位在暴胀之后形成，不同区域通常会具有不同的初始角，而密度计算必须纳入它们的空间变化，以及模型所允许的任何缺陷。

可见 sector 和隐藏扇区的温度可能不同。当六种隐藏胶子自由度处于非禁闭态并彼此达到热平衡时，定义$T_D/T = \xi(T)$。如果每个扇区在膨胀过程中各自守恒其熵，

$$\xi(T) = \xi_* \left[\frac{g_{*s}(T)}{g_{*s,*}} \right]^{1/3}, \qquad g_{*s,*} = \frac{43}{11}, \tag{62}$$

衡量隐藏粒子丰度的一个直接指标，是其熵与可见 sector 熵之比 ，

$$\mathcal{R}_D \equiv \frac{s_D}{s_{\rm ref}} = \frac{6}{43/11}\, \xi_*^3. \tag{63}$$

参数 ξ_* 是指定该比值的一种便捷方式。只有当六个隐藏胶子自由度保持相对论性、且可见 sector 熵计数为43/11时，它才等于温度比。对于基准点，$\mathcal{R}_D = 1.53 \times 10^{-9}$。方程（62）给出了解禁闭时期的温度比。我们在内部热平衡转变过程中保持$\mathcal{R}_D$ 不变，且向其他场的

转移可以忽略不计。如果该转变产生额外的熵，则必须改为提供转变后的数值。

物理相变温度可由方程（46）给出。它与跑动尺度的关系取决于尺度约定。恒质量近似要求实际振荡时的角向曲率变化很小。在热平衡下，写作

$$\mathcal{X}_D(T_D) = \mathcal{X}_D(0)\,\mathcal{F}(T_D/T_c), \qquad \mathcal{F}(0) = 1. \tag{64}$$

如果振荡在相变附近开始，就必须计算磁化率随温度的变化，或从强耦合数据中获取。

禁闭粒子群由有质量胶球组成。格点计算得出的禁闭态状态方程 [41]支持在远低于相变温度时采用气体描述。在相变附近，则需要完整的谱和状态方程。为解释后续演化，令G 表示质量为 m_G 、简并度为一的轻标量胶球。令 n_G， T_D， ρ_G， P_G 分别表示其数密度、动理学温度、能量密度和压强。在稀薄非相对论气体中，

$$n_G^{\mathrm{eq}}(T_D) = \left(\frac{m_G T_D}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m_G/T_D}, \quad \rho_G \simeq n_G\left(m_G + \frac{3}{2}T_D\right), \quad P_G = n_G T_D. \tag{65}$$

弹性碰撞会重新分配动量。三个入射胶球与两个出射胶球的反应也会减少胶球数目，并将静止能量转化为动能。若定义反应系数时已计入相同粒子因子，则单组分处理为

$$\dot{n}_G + 3Hn_G = -\langle\sigma_{3\to2}v^2\rangle\left(n_G^3 - n_G^2 n_G^{\mathrm{eq}}\right), \qquad \dot{\rho}_G + 3H(\rho_G + P_G) = 0. \tag{66}$$

这些方程忽略了向轴子和可见扇区的能量转移，并假设弹性散射维持由 T_D描述的动量分布。其他丰度不为零的胶球需要联立数密度方程 [16]。

当变数率 $\Gamma_{32} = n_G^2\langle\sigma_{3\to2}v^2\rangle$ 远大于 H时，化学势近似为零，且 $n_G \simeq n_G^{\mathrm{eq}}$ 。设 $x_G = m_G/T_D$，则熵为

$$s_D \simeq n_G^{\mathrm{eq}}(x_G + 5/2), \qquad x_G + \frac{1}{2}\ln x_G = 3\ln(a/a_\dagger) + \text{constant} \quad (x_G \gg 1). \tag{67}$$

尺度因子$a_\dagger$ 是任意固定的参考值。第二个关系式是将式（65）代入$s_D a^3$ =常数并保留大x_G 项的首阶结果。隐藏气体的冷却近似按 $1/\ln\, a$进行，因为变数反应持续补充动能。这通常称为自食相。在这些反应停止后， $n_G a^3$ 基本保持不变，而自由红移的非相对论性动量分布给出 $T_D \propto a^{-2}$。如果化学平衡在x_f结束，那么之后的数密度与可见扇区熵之比近似为

$$Y_G \equiv \frac{n_G}{s_{\mathrm{ref}}} \simeq \frac{\mathcal{R}_D}{x_f + 5/2}. \tag{68}$$

冻结值x_f 必须根据反应率和膨胀率求得。继续$T_D \propto a^{-1}$ 穿过禁闭阶段并不能描述这两种非相对论极限。

在固定的 F_χ 下，均匀方程和起始估计为

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \frac{\mathrm{d}V(\chi, T_D)}{\mathrm{d}\chi} = 0, \qquad 3H(t_{\mathrm{osc}}) \sim m_\chi(T_D(t_{\mathrm{osc}})). \tag{69}$$

$\ddot{\chi}$ 是场值对时间的加速度。当 $H \gg m_\chi$时，膨胀项 $3H\dot{\chi}$ 会阻尼其运动。在我们的余弦示例中， $V = \mathcal{X}_D(T_D)[1 - \cos(\chi/F_\chi)]$。条件$3H \sim m_\chi$ 用于估算振荡的起始时间；微分方程则描述振荡逐渐发展的过程。

当门户相互作用率超过膨胀率时，两个扇区能够高效地交换能量。远低于 M_X时，重矢量玻色子的交换会产生六维流相互作用，其估算为

$$\Gamma_{\rm portal} \sim C\frac{g_X^4 T^5}{M_X^4}, \qquad H = \sqrt{\frac{\pi^2 g_*}{90}}\frac{T^2}{\overline{M}_{\rm Pl}}. \tag{70}$$

系数 C 包含电荷和相空间因子。当末态粒子能够以可用能量产生时，这一估算适用。重隐藏费米子会进一步抑制产生率。产生率较低时，再加热后两个扇区可以维持不同的温度，尽管初始温差必须另行指定。可见扇区圈图也会产生动能混合；在这一历史中，通过重矢量玻色子进行的交换仍受到抑制。

8 辐射主导期间的相干轴子密度

相干成分是近乎均匀的场，在所考虑的区域内以相同相位振荡。具有大量相干占据且场期望值非零的量子态，可以用经典场方程来描述其演化。我们将其能量计入这个平均场。相干成分之外的额外量子，则由单独的动量分布描述。

假设在振荡开始前质量已稳定，且角度足够小，从而可以采用二次势。相对论性自由度保持不变时，辐射主导给出 $H = 1/(2t)$。当$x = m_{\chi,\,0}t$时，场方程变为

$$\frac{{\rm d}^2\chi}{{\rm d}x^2} + \frac{3}{2x}\frac{{\rm d}\chi}{{\rm d}x} + \chi = 0. \tag{71}$$

设定 $\chi = x^{-1/4}u$。直接代入可得

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{1}{16x^2}\right)u = 0. \tag{72}$$

正则解是阶数为 $1/4$ 的贝塞尔函数。其常数乘数由 $\chi \to \chi_i$确定为 $x \to 0$:

$$\chi(x) = \chi_i\, 2^{1/4}\Gamma(5/4)x^{-1/4}J_{1/4}(x). \tag{73}$$

事实上，在小 x 时， $J_{1/4}(x) \simeq (x/2)^{1/4}/\Gamma(5/4)$。在大 x 时，其振荡振幅正比于 $x^{-3/4}$。将振幅平方，并加上平均动能和势能，得到

$$\langle\rho_{\rm coh}\rangle = C_R\chi_i^2 m_{\chi,0}^2 x^{-3/2}, \qquad C_R = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(5/4)^2}{\pi} = 0.369834\ldots. \tag{74}$$

在辐射主导期间， $a \propto t^{1/2}$，因此 $x^{-3/2} \propto a^{-3}$。所以，振荡场的平均能量密度以与非相对论性物质相同的方式递减。

要比较不同时刻的能量密度，可使用可见 sector 热浴的熵密度，

$$s_{\rm ref} = B_s T^3, \qquad B_s = \frac{2\pi^2}{45}g_{*s}, \qquad A_R = \sqrt{\frac{\pi^2 g_*}{90}}, \qquad T^2 = \frac{m_{\chi,0}\overline{M}_{\rm Pl}}{2A_R x}. \tag{75}$$

如果可见 sector 热浴在随宇宙膨胀的区域内熵守恒，其熵密度便会按 a^{-3}的比例降低。轴子质量恒定且轴子快速振荡后，其平均能量密度也会按相同比例降低。因此，两者之比保持不变。将式（75）代入式（74），时间变量 x便会消去:

$$\frac{\rho_{\rm coh}}{s_{\rm ref}} = K_R\frac{F_\chi^2\theta_i^2\sqrt{m_{\chi,0}}}{\overline{M}_{\rm Pl}^{3/2}}, \qquad K_R = C_R\frac{(2A_R)^{3/2}}{B_s}. \tag{76}$$

电子-正电子湮灭后， $g_* = 3.36$ 和 $g_{*s} = 43/11$，得到 $K_R = 0.288507$。熵计数包括光子和标准遗迹中微子。如果之后可见共动熵增加了 D倍，则将式（76）除以 D。轴子质量变化时，通常需要使用完整场方程。若场快速振荡，且质量在每个振荡周期内变化不大，则可近似认为振荡作用量守恒。

采用参考值 $s_0 = 2891.2\mathrm{cm}^{-3}$和 $\rho_c/h_0^2 = 1.05375 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV\ cm}^{-3}$，密度参数为

$$\Omega_{\rm coh}h_0^2 = \frac{s_0}{\rho_c/h_0^2}\frac{\rho_{\rm coh}}{s_{\rm ref}}, \qquad \left(\frac{\rho_{\rm DM}}{s_{\rm ref}}\right)_{\rm ref} = 4.37362 \times 10^{-10}\,\mathrm{GeV} \tag{77}$$

对应于参考暗物质值 $\Omega_{\rm DM}h_0^2 = 0.12$。这里， h_0 是以 $100\ \mathrm{km\ s^{-1}\,Mpc^{-1}}$为单位的当前哈勃常数。这些值确定了需要再现的密度。检验由此得到的物质分布需要进行后续的微扰计算。

对于超出二次近似的角度，必须指定势的形状。对于余弦势，我们求解

$$\theta'' + \frac{3}{2x}\theta' + \sin\theta = 0, \qquad \theta(0) = \theta_i, \quad \theta'(0) = 0. \tag{78}$$

当振荡变得快速后，以下无量纲平均量趋于一个常数：

$$I(\theta_i) = \left\langle x^{3/2}\left[\frac{1}{2}\theta'^2 + 1 - \cos\theta\right]\right\rangle, \qquad \frac{\rho_{\rm coh}}{s_{\rm ref}} = \frac{(2A_R)^{3/2}}{B_s}\frac{F_\chi^2\sqrt{m_{\chi,0}}}{\overline{M}_{\rm Pl}^{3/2}}I(\theta_i). \tag{79}$$

在二次极限下，该常数为 $I = C_R\theta_i^2$。对于较大的初始角，我们从最初缓慢运动的场开始演化方程（78），直到方程（79）中的平均值不再变化。这给出了对二次遗迹密度的修正。对于更大的角度，要获得可靠的预测，就需要强规范理论的完整角度形状。

9 一个说明性的高能标示例

我们选取质量、相位尺度和初始位移，以说明密度关系。通过选择高能耦合来确定质量；随后选择角度，使其达到参考丰度。隐藏扇区熵和相位保护是彼此独立的输入。这一过程给出了一个有条件的参数示例及其所需的尺度。

Take

$$\begin{gathered} v_\phi = 10^{17}\,\mathrm{GeV}, \qquad M_1 = 5 \times 10^{17}\,\mathrm{GeV}, \qquad g_X = 0.3, \\ \lambda_\phi = 0.01, \qquad y_F = y_\Psi = 0.2, \qquad m_{\chi,0} = 3 \times 10^{-20}\,\mathrm{eV}, \qquad c_0 = 1. \end{gathered} \tag{80}$$

前面的方程给出了相位尺度和重粒子质量：

$$\begin{gathered} M_X = 5.036 \times 10^{17}\,\mathrm{GeV}, \qquad F_\chi = 9.929 \times 10^{16}\,\mathrm{GeV}, \\ m_h = m_F = m_\Psi = 1.414 \times 10^{16}\,\mathrm{GeV}, \qquad w = 8.333 \times 10^{17}\,\mathrm{GeV}. \end{gathered} \tag{81}$$

我们令径向质量 m_ρ 高于矢量和希格斯质量，因此在之后较低能量下，其影响很小。所有给出的真空值都低于 $M_{\rm Pl}$。要解释这些不同的尺度并保护可见希格斯质量，需要了解更高能量下的理论。

方程（50）给出

$$\Lambda_0 = 1.726\,\mathrm{keV}, \qquad \alpha_D(v_\phi) = 0.01640, \qquad g_D(v_\phi) = 0.4540. \tag{82}$$

采用纯$SU(2)$ 比值（见文献 [30, 32] ）和两圈跑动，对同一物理目标得到 $\alpha_D^{\overline{\rm MS}}(v_\phi) \simeq 0.0159$ ，推导见方程（47）–（55）。此后所有均匀密度

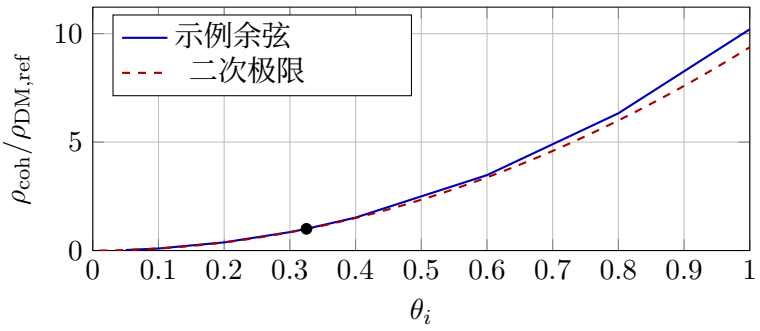


图 2：方程（80）–（81）中质量和相位尺度对应的相干轴子密度。实线表示数值余弦示例；虚线表示解析二次近似。标出的初始角可重现参考暗物质密度。对于所假设的历史，数值高于 1 会导致暗物质过多。

结果均取决于所选的物理质量和相位尺度。在单圈示例中，耦合给出 $\exp[-2\pi/\alpha_D(v_\phi)] \simeq 4.34\times10^{-167}$。禁闭产生的轴子质量对应于方程（ $\lambda_{\rm eff} = 8.87\times10^{-92}$ ）中的 58。第一个数值表示高能小瞬子抑制；第二个数值重现了禁闭产生的角势。改变 c_0会使所需的禁闭尺度改变 $c_0^{-1/4}$ 。要准确确定高能耦合，必须采用相同的禁闭尺度定义，通过强规范计算求得这一系数。

选择 $\xi_* = 10^{-3}$，等价地，$\mathcal{R}_D = 1.53\times10^{-9}$。根据晶格比值，物理转变尺度为 $T_c \simeq 2.52$千电子伏。对于恒定质量，按常规起始估计得到的可见温度为

$$T_{\rm osc} \simeq 6.33\,{\rm keV}. \tag{83}$$

隐藏温度必须根据禁闭气体求得。作为单物种示例，取舍入后的质量 $m_G = 4\sqrt{\sigma_D} \simeq 14.2$ 千电子伏。这是该示例的一个代表性输入。如果变数反应仍然很快，则求解

$$\left(\frac{m_G T_D}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m_G/T_D}\left(\frac{m_G}{T_D}+\frac{5}{2}\right) = \mathcal{R}_D s_{\rm ref}(T_{\rm osc}). \tag{84}$$

其数值为 $x_G \simeq 18.1$ 和 $T_D \simeq 0.78$千电子伏，此时可见光子仍处于6.33 千电子伏。将未知反应系数参数化为$\langle\sigma_{3\to2}v^2\rangle = c_{32}/m_G^5$。相应的速率为 $\Gamma_{32}/H \simeq 182c_{32}$；这一化学平衡估计要求 $182c_{32} \gg 1$。更早的冻结会给出不同的密度和温度，因此采用公式（66）处理。角势中的小有限密度贡献可以独立于该速率进行界定，如第10节所示。

二次丰度给出初始角 $\theta_i = 0.32662$。对示例性余弦势进行直接演化得到

$$\theta_i = 0.32520, \qquad \chi_i = 3.23\times10^{16}\,{\rm GeV}, \qquad \Omega_{\rm coh}h_0^2 \simeq 0.1200. \tag{85}$$

使用余弦势会使所需的初始角变化不到百分之一。我们检查了数值收敛性以及与解析二次解的一致性。主要的物理不确定性来自隐藏势和热历史。相干场给出暗物质密度的参考值；通过略微减小 θ_i，可以纳入少量额外的粒子群体。

10 其他族群与轴子存活

暗扇区可以包含相干轴子、隐藏规范辐射、胶球以及更早产生的其他粒子。暴胀也会产生轴子场的涨落。我们给出了这些效应与相干暗物质示例相容的条件。

对于 $T_R = 10^{10}$ 吉电子伏，方程（70）给出 $\Gamma_{\rm portal}/H \sim 9\times10^{-26}C$。带电隐藏费米子的质量远高于热浴温度，这会进一步抑制其产生。我们假设更早的最高温阶段能够保持希格斯真空，并且产生的重粒子丰度可以忽略不计。较小的隐藏扇区熵由再加热条件选定。如果再加热产生了大量的 Ψ， F 或径向粒子，则还必须演化它们的分布函数。

无需选定一个 $3 \to 2$ 系数，即可对微小的禁闭贡献设定界限。在化学势可忽略的平衡相变中，

$$\frac{\rho_{D,c}}{s_{\rm ref,c}} = \mathcal{R}_D \frac{\rho_{D,c}}{s_{D,c}} = \mathcal{R}_D T_c \frac{\rho_{D,c}}{\rho_{D,c} + P_{D,c}} \le \mathcal{R}_D T_c. \tag{86}$$

这里的压强和能量是扣除了零温真空部分后的热贡献。我们假设压强非负，并且发生共同的平衡相变。随后，在能量交换可忽略且 $P_G \ge 0$ 的情况下，有

$$\frac{\mathrm{d}(\rho_G a^3)}{\mathrm{d}t} = -3Ha^3 P_G \le 0, \qquad \frac{\rho_G}{s_{\rm ref}} \le \mathcal{R}_D T_c \simeq 3.9\times10^{-6}\,\mathrm{eV}. \tag{87}$$

这至多为 8.9×10^{-6} 参考暗物质能量每单位熵的比例。该界限包含自食相期间的压强功，并在数目改变冻结后仍然成立。它假设给定的熵演化历史，并排除了额外的生成或能量注入。在开始时的化学平衡示例中，式（65）则给出 $\rho_G/s_{\rm ref} \simeq 1.1\times10^{-6}$电子伏。精确的最终胶球丰度需要其完整的谱和反应系数 [16]。

对于稀薄的禁闭粒子群，其对缓慢变化的轴子的主要影响是胶球能量的角度依赖性。在 CP 偶极小值处， $m_G'(0) = 0$，而非相对论粒子丰度近似贡献为

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{X}_D &\simeq n_G m_G''(0), \qquad C_G \equiv \frac{|m_G''(0)|}{m_G}, \\ \frac{|\Delta\mathcal{X}_D|}{\mathcal{X}_D} &\lesssim C_G \frac{\mathcal{R}_D T_c s_{\rm ref}(T_{\rm osc})}{\mathcal{X}_D} \simeq 1.9\times10^{-7} C_G. \end{aligned} \tag{88}$$

此处的撇号表示对无量纲规范角求导。最后一个估计使用了能量上界；如果有多个物种存留，则使用按数密度加权的响应系数。在热平衡中，它还对应于自由能的领先低密度曲率，但存在 T_D/m_G 阶的修正。对于数量级为一的响应系数，热修正或有限密度修正足够小，因此可以采用恒定质量计算。要获得定量预测，该系数必须来自依赖规范角的胶球谱。此论证使用了实际的禁闭粒子群及其能量上界；它并未将外推的去禁闭温度赋予胶球。相干轴子势能将被单独追踪，并从 ρ_G 中排除。

即使不存在真实粒子气体，规范真空也会贡献一个势。粒子气体会增加取决于其数密度的能量密度。定义产额 $Y_\chi = n_\chi/s_{\rm ref}$，即粒子数密度除以可见扇区熵密度。对于非相对论轴子，

$$\frac{\rho_{\chi,\rm part}}{s_{\rm ref}} \simeq m_{\chi,0} Y_\chi, \qquad Y_{\chi,\text{all DM}} \simeq 1.46\times10^{19} \tag{89}$$

在选定的质量下。普通的相对论性热遗迹产额要小得多。具有显著动量的轴子必须先变成非相对论性粒子，其能量才能计入冷物质。

第 6 节的暴胀示例给出了 $\beta_{\rm iso} \simeq 0.029$ ，作为相干暗物质。其隐藏希格斯真空在指定的暴胀子和曲率耦合作用下保持稳定，并且其

再加热分数满足公式（I.3）。对于其他演化史，必须重新计算暴胀期间的相位尺度，以及公式（F.4）中角度涨落向密度涨落的转化。

轴子的质量太轻，无法衰变为重门户粒子或隐藏胶球。必须在纳入规范一致性所需的全部场和相互作用后，计算它衰变为可见粒子的过程。若要存续至今，它必须满足

$$\Gamma_\chi t_0 \ll 1. \tag{90}$$

光子相互作用 $-g_{\chi\gamma\gamma}\chi F_{\rm em}\widetilde{F}_{\rm em}/4$ 会产生 $\Gamma_{\gamma\gamma} = g_{\chi\gamma\gamma}^2 m_{\chi,\,0}^3/(64\pi)$。在所选质量下，数量级为$1/F_\chi$ 的耦合所对应的衰变宽度可以忽略不计。实际系数必须在完整理论中计算。此处展示的轴希格斯汤川相互作用涉及隐藏费米子。

对于假定的余弦势，四次接触振幅的大小为$|\mathcal{M}| = m_{\chi,\,0}^2/F_\chi^2$。总截面定义为对完整末态立体角积分，并对两个相同的出射标量计入因子 $1/2!$。对于平方质心能量 $\mathsf{s} \simeq 4m_{\chi,\,0}^2$，可得

$$\sigma_{\chi\chi} = \frac{1}{2!}\frac{1}{64\pi^2\mathsf{s}}\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2 \simeq \frac{m_{\chi,0}^2}{128\pi F_\chi^4}. \tag{91}$$

较大的 F_χ 使直接轴子散射极其微弱。所引用的 Lyman-α 分析在其假定的热学与宇宙学模型 [2]下，对构成全部暗物质的标准超轻轴子给出的结果是：在 95% 可信度下，$m_{\chi,\,0} > 2\times10^{-20}$电子伏。我们的 3×10^{-20}电子伏示例比这一特定限值高 1.5 倍。此比较不能替代纳入我们原初等曲率贡献的拟合。在速度为 10 km s^{-1}时，约化德布罗意长度 $\hbar/(m_{\chi,\,0}v)$约为 6.4 pc；若按 $h/(m_{\chi,\,0}v)$定义，则约为 40 pc。因此，该基准点并未证明存在千秒差距尺度的波支持核心。它旨在说明质量接近所引结构限值时的规范起源及条件性密度。

自相互作用暗成分需要额外存在一种丰度足够的轻粒子，以及质量和耦合适宜的媒介粒子。当前示例中的重隐藏费子和门户矢量无法提供这种成分。我们将在展望部分再讨论这一扩展。

11 一个无反常的广义 $B-L$ 模型

现在我们给出第二个模型，其中费子电荷相互抵消了所有规范反常。该模型具有独立的隐藏粒子谱。物理轴子来自两个带电希格斯相位。在这两个模型中，隐藏非阿贝尔规范理论都会生成其势。参考文献 [15]讨论了相关模型，其中规范对称性与一个遗留下来的反常全局相位共存。在这个独立模型中，我们对阿贝尔门户场及其耦合仍使用相同的符号 X_μ 和 g_X；但它们的数值不必与第一个模型中的数值相同。

规范群和门户生成元为

$$G_2 = G_{\rm SM}\times SU(2)_D\times U(1)_X, \qquad X = (B-L)_{\rm vis} + D_{\rm hid}. \tag{92}$$

可见粒子具有 $D_{\rm hid}=0$，因此夸克的 $X=1/3$，包括三种右手中微子在内的轻子的 $X=-1$，而可见希格斯的 $X=0$。隐藏粒子的可见重子数和轻子数均为零，因此其 X 电荷为 $D_{\rm hid}$。一个阿贝尔矢量以耦合 g_X与这些电荷耦合。 X对称性与 $SU(2)_D$对易，因此隐藏双重态的两个分量具有相同的 X 电荷。其可见流相互作用和隐藏流相互作用为

$$\mathcal{L}_{\rm currents,2} = g_X X_\mu\left(J^\mu_{B-L,\rm vis} + J^\mu_{D,\rm hid}\right). \tag{93}$$

这些相互作用源自动能项。该模型还允许超荷动能混合。我们在某个重整化尺度上指定其数值；可见扇区圈图会像在第一个模型中那样产生其重整化群跑动。

引入两个在 $SU(2)_D$ 下为单态的复标量，以及两个隐藏狄拉克双重态。表 2 给出了它们的表示和电荷，并将对 X 的可见贡献和隐藏贡献分开列出。

场	自旋	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	Y	$SU(2)_D$	$(B-L)_{\rm vis}$	$D_{\rm hid}$	X
Q_{1L}	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{2}$	0	$+1$	$+1$
Q_{1R}	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{2}$	0	-1	-1
Q_{2L}	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{2}$	0	-1	-1
Q_{2R}	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{2}$	0	$+1$	$+1$
Φ_1	0	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{1}$	0	$+2$	$+2$
Φ_2	0	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{1}$	0	-2	-2

表2：对称性破缺前第二个模型的隐藏场。共享电荷为$X=(B-L)_{\rm vis}+D_{\rm hid}$。每个隐藏场都有$(B-L)_{\rm vis}=0$，因此其 X 电荷为 $D_{\rm hid}$。两个狄拉克双重态的左手性和右手性门户电荷赋值相反。

我们施加全局相位对称性

$$\Phi_i \mapsto e^{i\alpha}\Phi_i, \qquad Q_{iL}\mapsto Q_{iL}, \qquad Q_{iR}\mapsto e^{-i\alpha}Q_{iR}, \qquad i=1,2. \tag{94}$$

可见场在此对称性下保持不变。它允许下列 Yukawa相互作用，并禁止会使剩余相位获得质量的微扰项。例如， $\Phi_1\Phi_2$的全局荷为二，不能单独出现在对称势中。该对称性还禁止非对角费米子质量项以及与共轭标量的 Yukawa相互作用。其隐藏的非阿贝尔异常会生成所需的轴子势。更高能量下的保护仍是一项独立假设。特别是，规范不变乘积 $\Phi_1\Phi_2$在此处起到与第4节中的 $S^\dagger\phi$ 相同的作用。对于一组 $(\Phi_1\Phi_2)^n$ ，其系数为一阶量级，截断为 $M_{\rm Pl}$，等真空期望值基准给出 $v_1v_2/(2M_{\rm Pl}^2)=0.00166$。因此，百分之一曲率判据要求首个允许的幂满足 $n\geq 37$，对应的维数至少为 74。离散规范保护需要满足自身一致的异常条件；所示连续群的规范异常消除并不能保证这种抑制。

在选择真空之前，将标量势写为

$$\begin{aligned} V_2(\Phi_1,\Phi_2) = &-\mu_1^2\Phi_1^\dagger\Phi_1-\mu_2^2\Phi_2^\dagger\Phi_2+\lambda_1(\Phi_1^\dagger\Phi_1)^2 \\ &+\lambda_2(\Phi_2^\dagger\Phi_2)^2+\lambda_{12}(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_2). \end{aligned} \tag{95}$$

该势同时保持 X 式（94）中的规范对称性和全局对称性。在微扰理论中，该势与两个标量相位无关。

包含共享阿贝尔矢量的隐藏作用量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D,2} = &-\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu}-\frac{1}{4}F_{X\mu\nu}F_X^{\mu\nu}+\sum_{i=1}^{2}|D_\mu\Phi_i|^2+\sum_{i=1}^{2}\bar{Q}_i i\gamma^\mu D_\mu Q_i \\ &-\Big(y_1\Phi_1\bar{Q}_{1L}Q_{1R}+y_2\Phi_2\bar{Q}_{2L}Q_{2R}+\text{h.c.}\Big)-V_2, \end{aligned} \tag{96}$$

其中 $F_X=\mathrm{d}X$，隐藏的非阿贝尔场强使用耦合$g_{D,\,2}$。取$q_1=+2$， $q_2=-2$ 并采用表 2中的费米子电荷，导数为

$$\begin{aligned} D_\mu\Phi_i &= (\partial_\mu - ig_X q_i X_\mu)\Phi_i, \\ D_\mu Q_i &= \Big[\partial_\mu - ig_{D,2}T^aW^a_\mu - ig_X X_\mu(x_{iL}P_L+x_{iR}P_R)\Big]\,Q_i. \end{aligned} \tag{97}$$

每个汤川荷之和均为 $q_i-x_{iL}+x_{iR}=0$。耦合 $g_{D,\,2}$ 属于这种第二种实现。

两个双重态之间的规范反常迹相互抵消。按照第一个模型所采用的约定，

$$\begin{aligned} C^{(2)}_{XDD} &= \frac{1}{2}\left[(1-(-1))+(-1-1)\right]=0, \\ C^{(2)}_{XXX} &= 2\left[1^3-(-1)^3+(-1)^3-1^3\right]=0, \\ C^{(2)}_{X\mathrm{grav}} &= 2\left[1-(-1)+(-1)-1\right]=0. \end{aligned} \tag{98}$$

标签 XDD 表示一个 X 和两个 $SU(2)_D$ 顶点； XXX 表示三个 X 顶点；而 $X\mathrm{grav}$ 表示一个 X 和两个引力顶点。这四个左手Wey尔双重态也满足全局 $SU(2)$条件。纳入三个右手中微子后，可见规范反常相互抵消。因此，该规范理论没有反常。全局相位对称性仍存在隐藏反常，它会产生较小的角势。

对于满足 $|\langle\Phi_i\rangle| = v_i/\sqrt{2}$ 且两者均满足 $v_i > 0$的真空，最小化方程（95）可得

$$\mu_1^2 = \lambda_1 v_1^2 + \frac{\lambda_{12}}{2}v_2^2, \qquad \mu_2^2 = \lambda_2 v_2^2 + \frac{\lambda_{12}}{2}v_1^2. \tag{99}$$

两个真空值的平方为

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_{12}^2}{4}, \\ v_1^2 = \frac{\lambda_2\mu_1^2 - \lambda_{12}\mu_2^2/2}{\Delta_2}, &\qquad v_2^2 = \frac{\lambda_1\mu_2^2 - \lambda_{12}\mu_1^2/2}{\Delta_2}. \end{aligned} \tag{100}$$

我们选取正的真空值平方， λ_1， $\lambda_2 > 0$ 和 $\Delta_2 > 0$。径向平方质量矩阵为

$$\mathcal{M}^2_{h,2} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_1^2 & \lambda_{12}v_1v_2 \\ \lambda_{12}v_1v_2 & 2\lambda_2 v_2^2 \end{pmatrix}. \tag{101}$$

其迹和行列式 $4v_1^2v_2^2\Delta_2$ 均为正，因此两个径向平方质量均为正。在确定这个主导真空后，我们再加入小得多的角势。

现在我们可以区分两个希格斯相位：

$$\Phi_i = \frac{v_i + h_i}{\sqrt{2}}e^{i\eta_i/v_i}, \qquad m_{Q_i} = \frac{y_i v_i}{\sqrt{2}}. \tag{102}$$

它们在模长固定时的动能项为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{phase},2} = \frac{1}{2}(\partial\eta_1 - 2g_X v_1 X)^2 + \frac{1}{2}(\partial\eta_2 + 2g_X v_2 X)^2. \tag{103}$$

规范变换沿着（v_1， $-v_2$）方向移动相位。令 $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$，定义沿该移动方向及其垂直方向的组合：

$$G_X = \frac{v_1\eta_1 - v_2\eta_2}{v}, \qquad \chi_2 = \frac{v_2\eta_1 + v_1\eta_2}{v}, \qquad m_X = 2g_X v. \tag{104}$$

这些场给出 $\mathcal{L}_{\mathrm{phase},\ 2} = \frac{1}{2}(\partial G_X - m_X X)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi_2)^2$。矢量吸收 G_X作为其纵向极化，留下 χ_2 作为具有标准动能项的物理标量。规范不变标量乘积及其角度为

$$\Phi_1\Phi_2 = \frac{(v_1+h_1)(v_2+h_2)}{2}e^{i\Theta_2}, \qquad \Theta_2 = \frac{\eta_1}{v_1} + \frac{\eta_2}{v_2} = \frac{\chi_2}{F_2}, \qquad F_2 = \frac{v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}. \tag{105}$$

两个相位之和中的规范场平移相互抵消。式（94）中的全局对称性使这个和改变 2α，因此，留下的物理角承载着该全局对称性。

两个隐藏费米子质量都会为规范θ角贡献一个相位。使这些质量变为实数的手征场重定义给出

$$\mathcal{L}_{\rm top,2}=\left(\theta_{D,2}+\frac{\eta_1}{v_1}+\frac{\eta_2}{v_2}\right)Q_D=\left(\theta_{D,2}+\frac{\chi_2}{F_2}\right)Q_D,\qquad Q_D=\frac{g_{D,2}^2}{32\pi^2}W^a_{\mu\nu}\widetilde{W}^{a\mu\nu}. \tag{106}$$

每个狄拉克双重态贡献一个质量相位。它们的总和是规范不变的，并具有产生势所需的全局反常。角向能量取决于 $\arg(\Phi_1\Phi_2)$ 和两个希格斯场模。其在真空处的二阶角向导数为

$$m_{\chi_2}^2(T_D)=\frac{\mathcal{X}_{D,2}(T_D)}{F_2^2}. \tag{107}$$

完整的角度依赖关系及其温度依赖性需要进行强耦合计算，如第一个模型中所述。

在两个费米子质量之上，单圈跑动系数为 $b_{(2)}=22/3-2(2/3)=6$。在两个质量之下，该系数为 $b_0=22/3$。在各个费米子质量处将其移除，并将跑动解连接起来，可得

$$\Lambda_0^{22/3}=m_{Q_1}^{2/3}m_{Q_2}^{2/3}\Lambda_{(2)}^6, \tag{108}$$

这里的 $\Lambda_{(2)}$ 是以两个活跃狄拉克双重态定义的能标。该方程给出了低能标度如何依赖于希格斯场模。在保持高能耦合和纯规范系数不变的情况下，当费米子质量远高于禁闭能标时，有 $\mathcal{X}_{D,\,2}\propto[(v_1+h_1)(v_2+h_2)]^{4/11}$。对于 $v_1=v_2=v_0$ 且费米子质量相等 m_Q 时，它化简为

$$\Lambda_0=m_Q\exp\left[-\frac{1}{22/3}\left(\frac{2\pi}{\alpha_{D,2}(v_0)}+6\ln\frac{m_Q}{v_0}\right)\right]. \tag{109}$$

关系 $\mathcal{X}_{D,\,2}(0)=c_0\Lambda_0^4$ 再次需要假定 c_0，或从强规范理论中得到。

要在相同相位尺度下比较这两个模型，取

$$\begin{aligned}&v_1=v_2=v_0=1.404\times10^{17}\,\text{GeV},\qquad g_X=0.3,\\&\lambda_1=\lambda_2=0.01,\qquad \lambda_{12}=0,\qquad y_1=y_2=0.2.\end{aligned} \tag{110}$$

这些数值给出

$$\begin{aligned}&F_2=9.929\times10^{16}\,\text{GeV},\qquad m_X=1.191\times10^{17}\,\text{GeV},\\&m_{Q_1}=m_{Q_2}=m_{h_1}=m_{h_2}=1.986\times10^{16}\,\text{GeV}.\end{aligned} \tag{111}$$

在单圈 $c_0=1$ 示例中，$\Lambda_0=1.726\text{keV}$ 和 $\alpha_{D,\,2}(v_0)\simeq0.0164$ 给出 $m_{\chi_2}=3\times10^{-20}$电子伏。采用相同的格点归一化，并使用规范–费米子两圈跑动，且 $n_f=2$ 高于共同费米子阈值，可得该目标对应的 $\alpha_{D,\,2}^{\rm MS}(v_0)\simeq0.0159$。对于相同的余弦势和冷历史，均匀场具有与第一个示例相同的质量和相位尺度。因此，初始角 $\theta_i\simeq0.325$ 再次给出 $\Omega_{\rm coh}h_0^2\simeq0.12$。

附录D 中的真空检验在此处同样适用，只需将 ϕ，S 替换为 Φ_1，Φ_2 以及该模型的四次矩阵。对于真空期望值相等的示例，同样较小的暴胀子耦合和曲率耦合可保持两个非零真空值，且两个径向质量仍远大于哈勃率。附录I 给出了真空期望值平方的偏移、F_2 的变化以及热界限。因此，在所述历史过程中，物理相位得以保留，等曲率扰动功率也在所述精度范围内保持不变。较小的隐藏扇区再加热分数以及对全局相位的保护仍是假设。

不同的矢量和费米子质量会改变粒子产生率。在 $T_R=10^{10}$ 吉电子伏处，流相互作用估算给出 $\Gamma_X/H\sim2.9\times10^{-23}C$；产生重型

带电粒子会进一步受到抑制。因此，在这个例子中，两个扇区可以保持不同的温度。仍需明确它们的初始熵比、希格斯真空的存续以及全局相位的保护。在应用公式（90）之前，必须使用该模型的谱计算可见衰变振幅。这给出了一个广义 $B-L$ 门户的简单规范反常自由模型，其中包含超轻希格斯相位。

12 结论与展望

带电隐藏希格斯相位和斯图克尔伯格场在阿贝尔矢量获得其纵向极化后留下一个物理标量。我们推导出其相位尺度和隐藏规范角。第二种构造使用两个带电希格斯单态，并在其所展示的费米子谱中抵消规范反常。两种构造都允许在较小内部表示下具有较大的物理相位尺度。

规范荷赋值还允许低维标量相互作用，从而赋予该相位较大的质量。因此，我们的超轻示例依赖于所施加的微扰对称性及其在更高能量下的保持。明确的曲率界展示了这种保护必须达到的强度。完整的离散规范机制或另一种高能解释仍有待构建。该规范路径在这一条件性有效理论中规定了场以及由反常诱导的势。

磁化率将物理质量与相位尺度联系起来。纯-$SU(2)$晶格比值将其与弦张力和相变温度联系起来，而转换到 MS 标度的代表性换算改进了任意的单圈归一化。所需的高能耦合显著取决于跑动近似。质量通过该耦合选定，而初始角则通过密度关系选定。我们的示例使用 $F_\chi \simeq 9.93\times10^{16}$吉电子伏，$m_{\chi,\,0}=3\times10^{-20}$ 电子伏和 $\theta_i\simeq0.325$。随后，解析的辐射时代解与假定的余弦演化给出参考相干密度。剩余的强动力学和阈值不确定性阻碍了对这些选定输入进行精确预测。

冷禁闭粒子群遵循彼此独立的数目与能量方程。改变数目的反应可以使其温度高于红移辐射浴，但在压强非负的情况下，其在膨胀共动区域中的能量仍会降低。平衡禁闭过程中守恒的隐藏扇区熵，使得示例中的晚期能量上界低于 9×10^{-6} 参考暗物质密度。对于普通的胶球质量响应，其对角向曲率的贡献也很小。这些结果说明了采用常质量处理所需的熵、隔离性和谱假设。

示例中的暴胀子背景通过了所述的标量真空检验和等曲率检验。其宇宙微波背景倾斜度的比较取决于再加热压强，以及是否将等曲率扰动与标量谱联合拟合。门户诱导的量子修正需要对重整化暴胀子势加以保护或调整。此外，要使隐藏扇区保持低温，就要求暴胀子与隐藏规范玻色子的耦合比其与可见超荷的耦合弱约一百万倍。所展示的对称性并不能产生这种层级。微观再加热、隐藏扇区热化，以及对两个势的高能保护，仍是必要的补充。

引力热黑洞种子形成需要存在大量的碰撞组分，而不能仅依赖这些示例中近乎无碰撞的轴子。如果加入较轻粒子 d 及其媒介粒子，则它们的产生过程必须决定物质分数和晕散射率，

$$f_d=\frac{\Omega_d}{\Omega_{\rm DM}},\qquad n_d=\frac{\rho_d}{m_d},\qquad \Gamma_{\rm el}=n_d\langle\sigma_{dd}v_{\rm rel}\rangle,\qquad \Omega_{\rm DM}=\Omega_{\rm coh}+\Omega_{\chi,\rm part}+\Omega_d+\Omega_{\rm other}. \tag{112}$$

此处 σ_{dd}是总弹性截面。热输运还需要考虑其角度和速度依赖性 y

。 [42]后续的坍缩取决于相互作用组分、重子，以及平均自由程从长变短的变化；近期计算发现，在光学厚介质状态下，晚期坍缩速度显著变慢 [17–19, 43]。在将此类扩展与小红点联系起来之前，还必须计算扰动增长、晕演化、相对论性坍缩以及后续吸积 [20, 21]。当前结果为进一步分析提供了条件性轴子背景。

致谢

本工作得到 INFN、QGsky专项计划的支持。

隐藏真空能及其希格斯场依赖性

在固定 $\rho_\phi = \phi^\dagger\phi$的情况下，隐藏规范真空通过希格斯场模依赖于$m_F = y_F\sqrt{\rho_\phi}$。在保持高能规范耦合固定且 $m_F \gg \Lambda_D$之后，我们在第 5节进行手征重定义，并将重整化真空能定义为

$$
\begin{aligned}
Z_D(\rho_\phi,\vartheta) &= \int \mathcal{D}W\,\mathcal{D}\bar{F}\,\mathcal{D}F\,\exp[-S_{D,E}(\rho_\phi) + i\vartheta\nu_D]\,, \\
\mathcal{E}_D^{\rm full}(\rho_\phi,\vartheta) &= -\lim_{\mathcal{V}_4\to\infty}\frac{1}{\mathcal{V}_4}\ln Z_D(\rho_\phi,\vartheta)\Big|_{\rm ren}\,.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

这里，$S_{D,\,E}$ 是欧几里得规范场与费米子作用量，ν_D 是整数拓扑荷，而$\mathcal{V}_4$ 是欧几里得四维体积。上标明确保留了微扰论中与角度无关的贡献。

具有 j 个活跃狄拉克双重态时，一圈系数为 [24]

$$
b_j = \frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}T_F j = \frac{22}{3} - \frac{2j}{3}, \qquad b_1 = \frac{20}{3}, \quad b_0 = \frac{22}{3}. \tag{A.2}
$$

对于 $SU(2)$，伴随表示卡西米尔算符为 $C_A = 2$，而 $T^a = \sigma^a/2$给出 $\mathrm{tr}(T^aT^b) = T_F\delta^{ab}$，其中$T_F = 1/2$。因此，规范场的贡献为 $22/3$，单个狄拉克双重态则减去 $2/3$。标量和 Ψ 是隐藏规范单态。取 $\alpha_j = g_j^2/(4\pi)$ 时，β函数及其积分形式为

$$
\mu\frac{\mathrm{d}g_j}{\mathrm{d}\mu} = -\frac{b_j}{16\pi^2}g_j^3, \qquad \alpha_j^{-1}(\mu) = \frac{b_j}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\Lambda_j}. \tag{A.3}
$$

尺度 Λ_j 是积分常数。单味表达式适用于高于 m_F的范围，而纯规范场表达式适用于 $\Lambda_D \ll \mu < m_F$，其中 $\Lambda_0 = \Lambda_D(\rho_\phi)$。在 $\mu = m_F$处的连续性给出 [25, 26]

$$
b_0\ln\frac{m_F}{\Lambda_D} = b_1\ln\frac{m_F}{\Lambda_1}, \qquad \Lambda_D^{22/3} = m_F^{2/3}\Lambda_1^{20/3}. \tag{A.4}
$$

因此，

$$
\Lambda_D(\rho_\phi) = \Lambda_1\left(\frac{y_F\sqrt{\rho_\phi}}{\Lambda_1}\right)^{1/11}, \qquad \frac{\Lambda_D^4(\rho_\phi)}{\Lambda_D^4(\rho_*)} = \left(\frac{\rho_\phi}{\rho_*}\right)^{2/11}, \quad \rho_* = \frac{v_\phi^2}{2}. \tag{A.5}
$$

指数由 $(b_0 - b_1)/b_0 = 1/11$ 得出。 y_F 的重整化群跑动以及高阶阈值修正会改变这一领先结果。

在双重态质量以下，纯规范理论唯一的动力学尺度是 Λ_D。因此，其对能量密度的禁闭贡献具有如下形式 $-c_E\Lambda_D^4$，其中省略了被 Λ_D/m_F的幂次抑制的项。加入微扰贡献后，得到

$$
\mathcal{E}_D^{\rm full}(\rho_\phi,0) \simeq \mathcal{E}_{\rm ref} + V_D^{\rm pert}(\rho_\phi;\mu) - c_E\Lambda_D^4(\rho_\phi). \tag{A.6}
$$

带符号系数 c_E 需要在指定的减除方案下提供非微扰输入[27]；$\mathcal{E}_{\rm ref}$ 确定加性归一化。单圈有效势、其双重态重数以及相关的质量响应见附录E。将 $V_D^{\rm pert}$ 赋予径向有效势后，得到$\mathcal{E}_{D,\ 0} = \mathcal{E}_{\rm ref} - c_E\Lambda_D^4$。在破缺真空处进行减除，得到

$$\mathcal{E}_{D,0}(\rho_\phi) - \mathcal{E}_{D,0}(\rho_*) = -c_E\Lambda_D^4(\rho_*)\left[\left(\frac{\rho_\phi}{\rho_*}\right)^{2/11} - 1\right]. \tag{A.7}$$

将 $V_{\rm rad}$ 中的所有与角度无关的项都计入后，得到方程（16）。其导数决定径向真空和质量；方程（5）给出了它们的领先阶多项式描述。

角向贡献定义为：从相同希格斯场模、零角度处的能量中减去相应能量。在领先谐波近似下，

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_D(\rho_\phi,\vartheta) &\simeq c_\chi\Lambda_D^4(\rho_\phi)[1-\cos\vartheta], \qquad c_\chi > 0, \\ \mathcal{X}_D(0) &= c_\chi\Lambda_D^4(\rho_*), \qquad m_{\chi,0}^2 = \frac{c_\chi\Lambda_D^4(\rho_*)}{F_\chi^2}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

系数 c_χ 和 c_E 需要分别提供非微扰输入。高阶角向谐波也取决于禁闭动力学 [29]。这些表达式假设存在重双重态和缓变希格斯场；在区域 $m_F \sim \Lambda_D$，则需要保留费米子的理论。

B 标量 S 的部分退耦

标量实现从一个门户荷为二 [14]的 $SU(2)_D$ 单态 S 开始。其作用量包含

$$\mathcal{L}_S = |D_\mu S|^2 - \lambda_S\left(|S|^2 - \frac{w^2}{2}\right)^2, \qquad D_\mu S = (\partial_\mu - ie_X X_\mu)S. \tag{B.1}$$

写作 $S = (w+s)e^{ib/w}/\sqrt{2}$，可得

$$D_\mu S = \frac{e^{ib/w}}{\sqrt{2}}\left[\partial_\mu s + i\left(1+\frac{s}{w}\right)(\partial_\mu b - e_X w X_\mu)\right]. \tag{B.2}$$

实部和虚部项在模平方中没有交叉项，因此

$$|D_\mu S|^2 = \frac{1}{2}(\partial s)^2 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{s}{w}\right)^2(\partial b - M_1 X)^2, \qquad M_1 = e_X w. \tag{B.3}$$

展开势得

$$V_S = \lambda_S w^2 s^2 + \lambda_S w s^3 + \frac{\lambda_S}{4}s^4, \qquad m_s^2 = 2\lambda_S w^2. \tag{B.4}$$

势与 b无关。在固定 λ_S 时取较大的 w 会提高径向质量，同时保持角向不变。这就是佩奇–奎因机制中所熟知的重径向激发与戈德斯通相位之间的分离 [5]。规范相互作用随后决定哪个相位组合是物理的。

径向模的积分可以显式完成。定义 $K_b = (\partial b - M_1 X)^2$。保留领先阶所需的项，得到

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}K_b + \frac{1}{2}(\partial s)^2 - \frac{1}{2}m_s^2 s^2 + \frac{s}{w}K_b + \cdots, \qquad (\Box + m_s^2)s = \frac{K_b}{w} + \cdots. \tag{B.5}$$

对于 m_s 远小于 m_s 时，解为 $s \simeq K_b/(wm_s^2)$。代入后得到 es

$$\mathcal{L}_{\rm eff} = \frac{1}{2}K_b + \frac{K_b^2}{2w^2 m_s^2} + \cdots. \tag{B.6}$$

第一项是斯图克尔伯格动能项，而下一项显示了被略去的径向动力学的抑制。这种部分退耦对围绕 w 的幅度涨落进行积分。期望值、相位以及从 w继承的参数保留在低能有效作用量中。

在 $X_\mu \to X_\mu + \partial_\mu \omega$ 下，相位变换为

$$b \to b + e_X w\omega, \qquad \eta \to \eta + e_X v_\phi \omega, \qquad \phi = \frac{v_\phi + h}{\sqrt{2}} e^{i\eta/v_\phi}. \tag{B.7}$$

固定两个模长后，相位动能项可通过以下方式对角化：

$$G = \frac{v_\phi \eta + wb}{\sqrt{v_\phi^2 + w^2}}, \qquad \chi = \frac{v_\phi b - w\eta}{\sqrt{v_\phi^2 + w^2}}, \qquad \mathcal{L}_{\rm phase} = \frac{1}{2}(\partial G - M_X X)^2 + \frac{1}{2}(\partial \chi)^2. \tag{B.8}$$

因此， $\delta G = M_X \omega$ 和 $\delta \chi = 0$。矢量吸收了 G。物理场是相对相位，

$$\Theta = \frac{\eta}{v_\phi} - \frac{b}{w} = -\frac{\chi}{F_\chi}, \qquad F_\chi^{-2} = v_\phi^{-2} + w^{-2}. \tag{B.9}$$

精确的相对相位对称性使 χ 在微扰理论中无质量；隐藏反常为其最终产生微小的势。对于单个规范标量，相位则为矢量提供纵向极化。在层级关系 $w \gg v_\phi$、 $G \simeq b$、 $\chi \simeq -\eta$ 和 $F_\chi \simeq v_\phi$ 下。增大 w 也会在固定 e_X 的情况下提高 M_X；在低于两个重质量的能量下，矢量也可以被积分掉。

对于数值示例， $m_s \simeq 8.33 \times 10^{17}$吉电子伏、 $M_X \simeq 5.04 \times 10^{17}$ 吉电子伏以及 $H_* \simeq 7.96 \times 10^{11}$ 吉电子伏。因此，暴胀的能标远低于两个重能标。暂时保留径向变量以求出它们的偏移极小值，可得到一致的树级匹配计算。由此得到的低能演化采用剩余的相对相位。

C 暴胀背景与膨胀

我们取一个正则中性暴胀子 I，其势为 [34]

$$U(I) = U_0 \frac{I^2}{I^2 + \mu_I^2}. \tag{C.1}$$

背景方程和微扰方程中涉及的导数可直接得到：

$$\begin{aligned} U' &= \frac{2U_0 I \mu_I^2}{(I^2+\mu_I^2)^2}, \quad U'' = \frac{2U_0 \mu_I^2(\mu_I^2 - 3I^2)}{(I^2+\mu_I^2)^3}, \\ \frac{U'}{U} &= \frac{2\mu_I^2}{I(I^2+\mu_I^2)}, \qquad \frac{U''}{U} = \frac{2\mu_I^2(\mu_I^2-3I^2)}{I^2(I^2+\mu_I^2)^2}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

均匀正则标量场的能量密度和压强分别为 $\rho_I = \dot{I}^2/2 + U$ 和$p_I = \dot{I}^2/2 - U$。能量守恒方程 $\dot{\rho}_I + 3H(\rho_I + p_I) = 0$ 给出暴胀子方程。与弗里德曼方程一起，

$$\ddot{I} + 3H\dot{I} + U' = 0, \qquad 3\overline{M}_{\rm Pl}^2 H^2 = \frac{1}{2}\dot{I}^2 + U, \qquad \dot{H} = -\frac{\dot{I}^2}{2\overline{M}_{\rm Pl}^2}. \tag{C.3}$$

慢滚近似忽略了相对于 $3HI$ 的 $\ddot{I}$，以及相对于 U的动能。由此得到 $3H\dot{I} \simeq -U'$和 $3M^2$普朗克$H^2 \simeq U$。因此，势参数为

$$\epsilon_V = \frac{2\overline{M}_{\rm Pl}^2 \mu_I^4}{I^2(I^2+\mu_I^2)^2}, \qquad \eta_V = \frac{2\overline{M}_{\rm Pl}^2 \mu_I^2(\mu_I^2 - 3I^2)}{I^2(I^2+\mu_I^2)^2}. \tag{C.4}$$

e折数， $N=\int H\mathrm{d}t$，变为

$$
\begin{aligned}
N_{\rm sr} &= \frac{1}{\overline{M}_{\rm Pl}^2}\int_{I_e}^{I_*}\frac{U}{U'}\mathrm{d}I = \frac{1}{2\mu_I^2\overline{M}_{\rm Pl}^2}\int_{I_e}^{I_*}(I^3+\mu_I^2 I)\mathrm{d}I \\
&= \frac{I_*^4-I_e^4}{8\mu_I^2\overline{M}_{\rm Pl}^2}+\frac{I_*^2-I_e^2}{4\overline{M}_{\rm Pl}^2}.
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

对于 $I_*\gg\mu_I$，可得 $I_*^4\simeq 8N_{\rm sr}\mu_I^2M^2{}_{\rm Pl}$ 将这一关系代入 $n_s\simeq 1-6\epsilon_V+2\eta_V$，得到领先阶的平台结果 $n_s\simeq 1-3/(2N_{\rm sr})$。接近终点时，我们求解完整的背景方程，并采用 $\epsilon_H=-\dot{H}/H^2=1$ 的首次穿越。

一阶原初谱为 [35]

$$
\mathcal{P}_{\mathcal{R}}=\frac{H_*^2}{8\pi^2\overline{M}_{\rm Pl}^2\epsilon_{H*}},\qquad n_s-1=-2\epsilon_{H*}-\epsilon_{2*},\qquad r=16\epsilon_{H*},\quad \epsilon_2=\frac{\mathrm{d}\ln\epsilon_H}{\mathrm{d}\ln a}.
\tag{C.6}
$$

因此，振幅 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}=2.10\times10^{-9}$ 确定了

$$
\epsilon_{H*}=\frac{H_*^2}{8\pi^2\overline{M}_{\rm Pl}^2\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}=6.4440\times10^{-7}\quad\text{for}\quad H_*=7.9594\times10^{11}\,\mathrm{GeV}.
\tag{C.7}
$$

对应的能标为 $(3M^2{}_{\rm Pl}H_*^2)^{1/4}=1.8322\times10^{15}$ 吉电子伏。两个量的质量维数均为一；弗里德曼方程中的普朗克尺度使它们的数值相差很大。

进行数值积分时，定义 $y=I/M_{\rm Pl}$、$s_I=\mu_I/M_{\rm Pl}$、$\tau=\sqrt{U_0}t/M_{\rm Pl}$、$z=\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$，以及 $q(y)=y^2/(y^2+s_I^2)$。然后

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=z,\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=-3\mathfrak{h}z-q_y,\qquad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\tau}=\mathfrak{h},\qquad \mathfrak{h}=\sqrt{\frac{z^2/2+q}{3}}.
\tag{C.8}
$$

这里 $H=\sqrt{U_0}\mathfrak{h}/M_{\rm Pl}$ 和 $\epsilon_H=z^2/(2\mathfrak{h}^2)$。我们从慢滚吸引子上略早于参考场值的点出发，积分均匀方程直至经历最初几次振荡，并分别确定枢轴点和暴胀结束点。振幅确定了

$$
U_0=\frac{8\pi^2\mathcal{P}_{\mathcal{R}}\overline{M}_{\rm Pl}^4\epsilon_{H*}}{\mathfrak{h}_*^2}.
\tag{C.9}
$$

在枢轴点处，$\epsilon_{2*}=0.0305998$。因此，$n_s=0.969399$ 和 $r=1.0310\times10^{-5}$。势的估计给出 $\eta_V=-0.0154802$ 和 $n_s=0.969036$；二者之间的微小差异衡量了采用势的慢滚近似与演化的一阶哈勃参数之间的差别。

为将这一演化与观测到的枢轴点 $k_*=0.05\mathrm{Mpc}^{-1}$ 联系起来，写成 $k_*=a_*H_*$。选择振荡期间的匹配时刻 t_m 以及再加热结束时刻 t_R。尺度因子满足

$$
\frac{k_*}{a_0H_*}=\frac{a_*}{a_m}\frac{a_m}{a_R}\frac{a_R}{a_0}=e^{-N_{*m}-N_{mR}}\frac{T_0}{T_R}\left(\frac{g_{*s,0}}{g_{*s,R}}\right)^{1/3}.
\tag{C.10}
$$

最后一个因子来自再加热后可见 sector 熵守恒，即 $g_{*s}T^3a^3=$ 为常数。我们采用 $T_0=2.34865\times10^{-13}$ 吉电子伏、$g_{*s,\,0}=43/11$、$g_{*s,\,R}=106.75$ 以及 $T_R=10^{10}$吉电子伏。在能量单位下，$k_*=3.19747\times10^{-40}$吉电子伏。取对数可得目标膨胀

$$
N_{*m}+N_{mR}=\ln\frac{H_*}{k_*}+\ln\frac{T_0}{T_R}+\frac{1}{3}\ln\frac{g_{*s,0}}{g_{*s,R}}=65.1358.
\tag{C.11}
$$

这包括暴胀首次结束后的膨胀。

振荡平均压力推动了后续的膨胀。在振荡能量固定时$E = eU_0 < U_0$，振幅为$I_{\rm amp} = \mu_I\sqrt{e/(1-e)}$。设 $A^2 = e/(1-e)$ 和 $\overline{I = \mu_I A\sin u}$。动能的周期平均为

$$\overline{w}_I(e) = 2\frac{J_1(e)}{J_0(e)} - 1, \qquad J_0 = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + A^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u, \quad J_1 = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 u}{\sqrt{1 + A^2\sin^2 u}}\mathrm{d}u. \tag{C.12}$$

确实，$\overline{w_I} = 2\langle K\rangle/E - 1$，上式的分子和分母分别来自对一个周期内的 $K\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}t$ 进行积分。对于 $e \ll 1$，展开这些积分可得 $w_I = -3e/8 + \cdots$，并趋近于无压二次极限。随后由能量守恒得到

$$N_{mR} = \frac{1}{3}\int_{\rho_R}^{\rho_m}\frac{\mathrm{d}\rho_I}{\rho_I[1 + \overline{w}_I(\rho_I)]}, \qquad \rho_R = \frac{\pi^2 g_{*,R}}{30}T_R^4. \tag{C.13}$$

我们将均匀方程积分至 $\rho_m/U_0 \simeq 0.05$，然后使用这一平均演化。求解振幅与枢轴匹配条件可得

$$\begin{gathered}\mu_I = 6.04675\times10^{15}\,\mathrm{GeV}, \quad U_0 = 1.12703\times10^{61}\,\mathrm{GeV}^4, \quad I_* = 5.38359\times10^{17}\,\mathrm{GeV},\\ N_{\rm sr} = 48.4433, \quad N_* = 49.8082, \quad N_{*m} = 51.1563, \quad N_{mR} = 13.9795,\\ \rho_{\rm end} = 1.11041\times10^{61}\,\mathrm{GeV}^4, \qquad H_{\rm end} = 7.90099\times10^{11}\,\mathrm{GeV}.\end{gathered} \tag{C.14}$$

前两个 e-fold数分别在慢滚估计中使用 $\epsilon_V = 1$，以及在演化背景中使用第一次 $\epsilon_H = 1$ 穿越。将积分步长减半后，总膨胀量改变了 1.8×10^{-6} 个 e-fold数，而在所采用的均匀近似下，n_s 改变了 6.0×10^{-8}。

D 标量极小值、径向质量与匹配

标量实现使得能够在暴胀期间显式计算径向真空。写作 $x = |\phi|^2$、$u = |S|^2$，并定义 $c_\phi = \kappa_\phi I^2 + \zeta_\phi R$、$c_S = \kappa_S I^2 + \zeta_S R$，其中慢滚期间有 $R \simeq 12H^2$。依赖模长的势为

$$V_{\rm mag} = (-\mu_\phi^2 + c_\phi)x + (-\mu_S^2 + c_S)u + \lambda_p x^2 + \lambda_S u^2 + \lambda_{\phi S}xu, \qquad \lambda_p \equiv \lambda_\phi^{(\mathrm{p})}. \tag{D.1}$$

在 $x = v^2/2$ 和 $u = w_I^2/2$ 处计算条件 $\partial_x V = \partial_u V = 0$，得到

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix}v^2\\ w_I^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_\phi^2 - c_\phi\\ \mu_S^2 - c_S\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix}\lambda_p & \lambda_{\phi S}/2\\ \lambda_{\phi S}/2 & \lambda_S\end{pmatrix}. \tag{D.2}$$

其中 $v = v_\phi(I,\ R)$ 和 $w_I = w(I,\ R)$。参数 μ_ϕ^2 和 μ_S^2 由 $I = R = 0$ 处所需的真空确定。将这些真空方程相减可消去两个二次系数：

$$\begin{pmatrix}\delta v^2\\ \delta w^2\end{pmatrix} = -\mathsf{A}^{-1}\begin{pmatrix}c_\phi\\ c_S\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix}\lambda_S & -\lambda_{\phi S}/2\\ -\lambda_{\phi S}/2 & \lambda_p\end{pmatrix}, \quad D = \lambda_p\lambda_S - \frac{\lambda_{\phi S}^2}{4}. \tag{D.3}$$

正的 D、正的对角四次项以及正的位移平方值，会给出一个稳定的内部径向极小值。径向海森矩阵通过对正则归一化涨落 h 和 s 求导得到：

$$\mathsf{M}_{\rm rad}^2 = \begin{pmatrix}2\lambda_p v^2 & \lambda_{\phi S}vw_I\\ \lambda_{\phi S}vw_I & 2\lambda_S w_I^2\end{pmatrix}. \tag{D.4}$$

对于条目 A_r、B_r、D_r，其特征值为

$$m_\pm^2 = \frac{A_r + D_r \pm \sqrt{(A_r - D_r)^2 + 4B_r^2}}{2}. \tag{D.5}$$

这些质量决定径向场能否跟随缓慢移动的极小值：条件是 $m_\pm \gg H$，并且极小值的变化相对于它们的响应时间足够缓慢。

通过在 u 中配方可以看出四次项的匹配：

$$\begin{aligned} V_{\rm mag} = (-\mu_\phi^2 + c_\phi)x + \lambda_p x^2 - \frac{(\mu_S^2 - c_S - \lambda_{\phi S} x)^2}{4\lambda_S} \\ + \lambda_S \left[u - \frac{\mu_S^2 - c_S - \lambda_{\phi S} x}{2\lambda_S} \right]^2 . \end{aligned} \tag{D.6}$$

在重径向极小值处，最后一项消失。因此，x^2 的系数为

$$\lambda_\phi = \lambda_p - \frac{\lambda_{\phi S}^2}{4\lambda_S}. \tag{D.7}$$

在将重径向模积分掉之后，这个有限阈值仍然存在。相同的代换给出 $\kappa_{\phi,\ \rm eff} = \kappa_\phi - \lambda_{\phi S}\kappa_S/(2\lambda_S)$ 以及 $\zeta_{\phi,\ \rm eff}$ 的相应表达式。

对于 $\lambda_p = 0.0100005$、$\lambda_S = 0.5$ 和 $\lambda_{\phi S} = 10^{-3}$，我们得到

$$D = 0.005, \qquad \mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & -0.1 \\ -0.1 & 2.0001 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_\phi = 0.01. \tag{D.8}$$

取 $\kappa_\phi = \kappa_S = 10^{-18}$ 和 $\zeta_\phi = \zeta_S = 10^{-3}$ 时，枢轴点源为

$$c_\phi = c_S = 10^{-18} I_*^2 + 12 \times 10^{-3} H_*^2 = 7.60255 \times 10^{21}\,\mathrm{GeV}^2. \tag{D.9}$$

乘以 $-\mathsf{A}^{-1}$ 后得到

$$\begin{aligned} \delta v^2 &= -7.59495 \times 10^{23}\,\mathrm{GeV}^2, & \delta w^2 &= -1.44456 \times 10^{22}\,\mathrm{GeV}^2, \\ \frac{\delta v^2}{v_\phi^2} &= -7.59495 \times 10^{-11}, & \frac{\delta w^2}{w^2} &= -2.08017 \times 10^{-14}, \\ m_- &= 1.41421 \times 10^{16}\,\mathrm{GeV}, & m_+ &= 8.33333 \times 10^{17}\,\mathrm{GeV}. \end{aligned} \tag{D.10}$$

两个真空值的平方均保持为正。比值 $m_-/H_* \simeq 1.78 \times 10^4$ 和 $m_+/H_* \simeq 1.05 \times 10^6$ 支持在此例中绝热消去径向模。

对于固定的 R，暴胀子势的变化也可以在树级精确得到。令 $\boldsymbol{y}_0 = (v_\phi^2,\ w^2)^T$ 和 $\boldsymbol{c} = (c_\phi,\ c_S)^T$。在其偏移后的极小值处计算二次型，得到

$$V_{\rm min}(\boldsymbol{c}) - V_{\rm min}(0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{y}_0^T \boldsymbol{c} - \frac{1}{4}\boldsymbol{c}^T \mathsf{A}^{-1} \boldsymbol{c}. \tag{D.11}$$

对于固定曲率下对暴胀子的依赖，其首项为

$$\Delta U_{\rm tree} = \frac{1}{2}(\kappa_\phi v_\phi^2 + \kappa_S w^2) I^2 + \cdots . \tag{D.12}$$

其在枢轴点处的斜率和曲率为

$$\frac{|\Delta U'_{\rm tree}|}{|U'|} = 7.18 \times 10^{-5}, \qquad \frac{\overline{M}_{\rm Pl}^2 \Delta U''_{\rm tree}}{U} \simeq 3.71 \times 10^{-7}. \tag{D.13}$$

在第二个表达式中，我们使用 $U \simeq 3\mathcal{M}^2$ 普朗克质量 H_*^2。曲率耦合也会改变爱因斯坦项的系数。测得的 $M_{\rm Pl}$ 包含其恒定的真空贡献；额外的变化为 $\delta M_{\rm eff}^2 = -\zeta_\phi \delta v^2 - \zeta_S \delta w^2$，对于上述数值可以忽略不计。

E 重粒子圈修正

缓慢变化的质量对应的单圈有效势形式为 [28]

$$\Delta U=\sum_j \frac{n_j m_j^4(I)}{64\pi^2}\left[\ln\frac{m_j^2(I)}{Q^2}-c_j\right]. \tag{E.1}$$

带符号的重数对玻色子为正、对费米子为负。减法常数对于标量和费米子为 $c_j=3/2$，对于有质量矢量为 $5/6$。写作 $m_j^2(I)=m_{j0}^2+a_jI^2+\cdots$。由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\left(\ln\frac{x}{Q^2}-c_j\right)\right]=2x\left[\ln\frac{x}{Q^2}-c_j+\frac{1}{2}\right], \tag{E.2}$$

$I^2/2$的系数为

$$\Delta m_I^2=\sum_j \frac{n_j a_j m_{j0}^2}{16\pi^2}\left[\ln\frac{m_{j0}^2}{Q^2}-c_j+\frac{1}{2}\right]. \tag{E.3}$$

为计算系数，在固定 R的情况下，对位移真空关于 I^2 求导:

$$\begin{pmatrix}d_v\\ d_w\end{pmatrix}\equiv\frac{\partial}{\partial I^2}\begin{pmatrix}v^2\\ w_I^2\end{pmatrix}=-\mathsf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\kappa_\phi\\ \kappa_S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9.99\times10^{-17}\\ -1.9001\times10^{-18}\end{pmatrix}. \tag{E.4}$$

对于矢量和两个 Yukawa质量， $M_X^2=e_X^2(v^2+w_I^2)$ 以及 $m_F^2=y_F^2v^2/2$、 $m_\Psi^2=y_\Psi^2v^2/2$。因此

$$a_X=e_X^2(d_v+d_w)=-3.66480\times10^{-17},\qquad a_F=a_\Psi=\frac{0.2^2}{2}d_v=-1.9980\times10^{-18}. \tag{E.5}$$

对式（D.5）求导得到径向系数。如果 $\Delta_r=\sqrt{(A_r-D_r)^2+4B_r^2}$，则

$$a_\pm=\frac{1}{2}\left[A_r'+D_r'\pm\frac{(A_r-D_r)(A_r'-D_r')+4B_rB_r'}{\Delta_r}\right], \tag{E.6}$$

其中撇号表示对 I^2 求导。矩阵元素给出 $A_r'=2\lambda_p d_v$、$D_r'=2\lambda_S d_w$ 和 $B_r'=B_r\,(d_v/v^2+d_w/w_I^2)\,/2$。数值上， $a_-\simeq-1.9980\times10^{-18}$ 和 $a_+\simeq-1.9002\times10^{-18}$。

取方程（E.3）中的对数括号为量级为 1 的数，轻径向模、重径向模、矢量、双重态和单态费米子的绝对分子贡献约为

$$\begin{aligned}\sum_j|n_ja_jm_j^2|\simeq(&4.00\times10^{14}+1.32\times10^{18}+2.79\times10^{19}\\&+3.20\times10^{15}+1.60\times10^{15})\,\mathrm{GeV}^2.\end{aligned} \tag{E.7}$$

重数分别为 1，1，3，-8，-4。将总和除以 $16\pi^2$ 得到 1.85×10^{17} 吉电子伏^2,，对应于 $|\Delta\eta_V|\sim9.73\times10^{-8}$。这是一个数量级估计，匹配尺度选取在相关质量附近。要得到重整化预测，必须明确反项和对数项。来自可见衰变相互作用和动能混合的较大修正将在下文单独计算。

F 相位归一化与等曲率扰动

一个缓慢变化的径向极小值 $F_\chi = vw_I/\sqrt{v^2+w_I^2}$。其对数变化为
At

$$\delta \ln F_\chi = \frac{1}{2}\left[\frac{w^2}{v_\phi^2+w^2}\frac{\delta v^2}{v_\phi^2} + \frac{v_\phi^2}{v_\phi^2+w^2}\frac{\delta w^2}{w^2}\right] = -3.74\times 10^{-11}. \tag{F.1}$$

积分掉矢量后，角向作用量为 $\frac{1}{2}F_\chi^2(t)(\partial\theta)^2 - V(\theta)$，其中 $\theta = -\chi/F_\chi$对于恒定的真空值成立。其均匀方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^3 F_\chi^2 \dot\theta\right) + a^3\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0. \tag{F.2}$$

当暴胀期间角向力可以忽略时， $a^3F_\chi^2\dot\theta$ 保持不变。因此，膨胀会阻尼初始角速度，使角度几乎保持不变。

正则归一化轻标量在每个波数对数区间内的涨落振幅为 $H_*/(2\pi)$。对于缓慢变化的 F_χ，这给出 $\delta\theta = H_*/(2\pi F_{\chi,*})$。晚期密度通过以下关系响应：

$$\frac{\delta\rho_{\rm coh}}{\rho_{\rm coh}} = D_\theta\delta\theta, \qquad D_\theta \equiv \frac{\partial \ln\rho_{\rm coh}}{\partial\theta_i}. \tag{F.3}$$

对于占暗物质比例 $f_{\rm coh}$ 、且与暴胀子涨落不相关的情况，等曲率扰动功率为

$$\mathcal{P}_S = f_{\rm coh}^2 D_\theta^2\left(\frac{H_*}{2\pi F_{\chi,*}}\right)^2, \qquad \beta_{\rm iso} = \frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{P}_\mathcal{R}+\mathcal{P}_S}. \tag{F.4}$$

响应 D_θ 可以由辐射主导期间的余弦演化复现。令 $x = m_{\chi,0}t$ 以及 $H = 1/(2t)$，则方程和晚期密度不变量为

$$\theta'' + \frac{3}{2x}\theta' + \sin\theta = 0, \qquad \mathcal{J}(\theta_i) = \left\langle x^{3/2}\left(\frac{1}{2}\theta'^2 + 1 - \cos\theta\right)\right\rangle. \tag{F.5}$$

该方程中的撇号表示对/求x导数。正则初始解为 $\theta = \theta_i - \sin\,\theta_i\,x^2/5 + \cdots$。由于最终密度与$\mathcal{J}$成正比，有限差分给出

$$D_\theta \simeq \frac{\ln\mathcal{J}(\theta_i+\delta) - \ln\mathcal{J}(\theta_i-\delta)}{2\delta} = 6.20353, \quad \theta_i = 0.3252048, \quad \delta = 10^{-4}. \tag{F.6}$$

我们积分至 $x = 1000$ ，并对 $800 < x < 1000$取平均。谐波估计 $2/\theta_i \simeq 6.15$解释了该导数的大小。

对于 $f_{\rm coh} = 1$，枢轴值给出$\mathcal{P}_S = 6.26454\times10^{-11}$ 和 $\beta_{\rm iso} = 0.028967$。求解$\beta_{\rm iso} < \beta_{\rm max}$ ，可得暴胀尺度

$$H_* < \frac{2\pi F_{\chi,*}}{f_{\rm coh}|D_\theta|}\sqrt{\frac{\beta_{\rm max}}{1-\beta_{\rm max}}\mathcal{P}_\mathcal{R}} = 9.1590\times10^{11}\ \text{GeV} \quad (\beta_{\rm max} = 0.038). \tag{F.7}$$

这里采用了参考文献 [35]中的非相关等曲率扰动极限。该功率也低于参考文献1.1×10^{-10} 联合分析中给出的振幅上限 [37], ，其分析采用了尺度不变性假设。在 H/F_χ近似恒定的六十多个e折数内，独立的长波长增量给出$\langle\delta\theta^2\rangle^{1/2} \simeq \sqrt{60}H_*/(2\pi F_\chi) = 9.88\times10^{-6}$.

对邻近种子尺度重复进行背景匹配，得到 $H_* \simeq 5.9695\times10^{11}$吉电子伏,$n_s \simeq 0.96932$, $\beta_{\rm iso}\simeq 0.01650$，以及 $H_* \simeq 6.9644\times10^{11}$ 吉电子伏， $n_s \simeq 0.96936$, $\beta_{\rm iso}\simeq 0.02233$。这些数值复现了论文中列出的其他示例。将 $n_s = 0.96940$ 与文献 [36]中给出的边缘化数值 0.9709 ± 0.0038 和约 0.974 ± 0.003 进行比较，偏差分别约为 0.4 和 1.5 个标准差。这类比较沿用已发表的宇宙学假设；模型似然则会联合拟合标量谱和等曲率扰动谱。

G 微扰再加热与暴胀子涨落

在 $I=0$ 附近展开势，得到

$$U=\frac{U_0}{\mu_I^2}I^2-\frac{U_0}{\mu_I^4}I^4+\cdots=\frac{1}{2}m_I^2I^2+\frac{\lambda_4}{24}I^4+\cdots,\quad m_I^2=\frac{2U_0}{\mu_I^2},\quad \lambda_4=-\frac{24U_0}{\mu_I^4}. \tag{G.1}$$

该基准点给出 $m_I=7.85164\times10^{14}$吉电子伏 和 $\lambda_4=-0.20233$。尽管这个局部四次项为负，精确势能在下方仍有界。

令可见衰变相互作用为 $-IF_Y^2/(4\mathcal{M}_Y)$。对于两个无质量规范玻色子，顶角与 $(k_1\cdot k_2)g^{\mu\nu}-k_1^\nu k_2^\mu$ 成正比。对横向极化求和得到 $\sum|\mathcal{A}|^2=m_I^4/(2\mathcal{M}_Y^2)$。二体相空间计入相同粒子因子后，得到

$$\Gamma_{I\to YY}=\frac{\sum|\mathcal{A}|^2}{32\pi m_I}=\frac{m_I^3}{64\pi\mathcal{M}_Y^2}. \tag{G.2}$$

在再加热结束时，近似 $H_R=\Gamma_I$ 和 $\rho_R=\pi^2g_{*,R}T_R^4/30$ 给出

$$\Gamma_I=\sqrt{\frac{\pi^2g_{*,R}}{90}}\frac{T_R^2}{\overline{M}_{\rm Pl}},\qquad T_R=\left(\frac{90}{\pi^2g_{*,R}}\right)^{1/4}\sqrt{\Gamma_I\overline{M}_{\rm Pl}}. \tag{G.3}$$

对于在 10^{10} 吉电子伏下由可见部门主导的再加热，结果为 $\Gamma_I=140.512$吉电子伏、$\mathcal{M}_Y=1.30894\times10^{20}$ 吉电子伏 和 $M_{\rm Pl}/\mathcal{M}_Y=0.018603$。枢轴展开参数为 $I_*/\mathcal{M}_Y=0.004113$。

振荡规范动能系数的变化为 $q_Y=\mathcal{I}_{\rm amp}/\mathcal{M}_Y$。末态总能量通过 $U(\mathcal{I}_{\rm amp})\le\rho_{\rm end}$ 给出振幅的上界，因此

$$\mathcal{I}_{\rm amp}\le\mu_I\sqrt{\frac{\rho_{\rm end}/U_0}{1-\rho_{\rm end}/U_0}}=4.9423\times10^{16}\,\text{GeV}. \tag{G.4}$$

因此 $q_Y\lesssim3.7758\times10^{-4}$ 并且 $q_Y^2m_I/H_{\rm end}\lesssim1.4168\times10^{-4}$。在窄共振带中，增长率的量级为 q_Ym_I 而膨胀使一个模穿越相对带宽所需的时间量级为 q_Y/H。两者的乘积给出估算值 $q_Y^2m_I/H$ [38]。该估算支持对这一可见衰变通道采用微扰处理。所示的重隐藏粒子在暴胀子二体衰变中运动学上不可达：$m_I/(2m_F)=0.02776$。

暴胀子本身也可能发生自共振。将其方程在均匀解附近线性化，对于远在哈勃半径以内的模，有

$$\delta\ddot{I}_k+3H\delta\dot{I}_k+\left(\frac{k^2}{a^2}+U''(I)\right)\delta I_k=0. \tag{G.5}$$

方程（C.2）给出 $U''<0$，适用于 $|I|>\mu_I/\sqrt{3}$。因此，具有足够小物理动量的模可以在振荡的这一阶段增长。要确定碎裂和产生的压强 [39]，需要进行非线性计算。均匀计算通过将后期平均压强替换为 $w_I=1/3$，并重复振幅和膨胀匹配，来估计这一不确定性。随后得到 $N_*=53.3147$、$\mu_I=6.71157\times10^{15}$吉电子伏以及$n_s=0.971433$。这一替换是针对给定的压强历史进行的敏感性计算。

H 动能混合与暴胀子斜率

可见衰变算符也会通过超荷–门户动能混合影响重矢量玻色子。定义 $A_Y(I)=1+I/\mathcal{M}_Y$。超荷矢量和门户矢量的二次动能矩阵为

$$\mathsf{K}=\begin{pmatrix}A_Y & \epsilon\\ \epsilon & 1\end{pmatrix},\qquad \mathsf{M}^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & M_X^2\end{pmatrix}. \tag{H.1}$$

物理极点由 $\det(m^2\mathbb{K}-\mathbb{M}^2)=0$ 确定。展开行列式得 $m^2[m^2(A_Y-\epsilon^2)-A_Y M_X^2]=0$，因此有质量极点为

$$m^2_{X,\mathrm{pole}}(I)=\frac{A_Y M_X^2}{A_Y-\epsilon^2},\qquad \frac{\mathrm{d}m^2_{X,\mathrm{pole}}}{\mathrm{d}I}=-\frac{M_X^2\epsilon^2}{\mathcal{M}_Y(A_Y-\epsilon^2)^2}. \tag{H.2}$$

当 $A_Y>\epsilon^2$ 时，动能矩阵为正。将这个质量代入式（E.1）的矢量部分，并取重数为三，可得

$$\Delta U'_Y=\frac{3}{32\pi^2}m^2_{X,\mathrm{pole}}\frac{\mathrm{d}m^2_{X,\mathrm{pole}}}{\mathrm{d}I}\left[\ln\frac{m^2_{X,\mathrm{pole}}}{Q^2}-\frac{1}{3}\right]. \tag{H.3}$$

对于 $A_Y\simeq 1$，当 ϵ 和 $Q\simeq M_X$ 较小时，可得

$$|\Delta U'_Y|\simeq\frac{\epsilon^2M_X^4}{32\pi^2\mathcal{M}_Y},\qquad \frac{|\Delta U'_Y|}{|U'|}\simeq 294.6\left(\frac{\epsilon}{10^{-3}}\right)^2. \tag{H.4}$$

要使这个未抵消的估算低于所需斜率的百分之一，必须满足 $|\epsilon|\lesssim 5.83\times10^{-6}$。实际的重整化斜率还包括局域反项。因此，所采用的平台需要调整这些反项，或借助某种机制来保护其形状。

可见费米子同时带有超荷和 $B-L$，因此会产生动能混合。电荷乘积在电荷共轭下保持不变，因此可以对物理的左手性和右手性电荷求和。在一代中，

$$\begin{aligned}\sum Y(B-L)=6\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\\ +2\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)+(-1)(-1)+0=\frac{8}{3}.\end{aligned} \tag{H.5}$$

这些项分别对应夸克双重态、上型单态、下型单态、轻子双重态、带电轻子和右手中微子。三代合计为 8；可见希格斯的 $B-L$ 为零。因此，单圈大小为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\ln\mu}\right|=\frac{g_Y g_X}{16\pi^2}\frac{2}{3}8=\frac{g_Y g_X}{16\pi^2}\frac{16}{3}\simeq 0.00405\quad(g_Y=0.4,\ g_X=0.3). \tag{H.6}$$

这解释了为什么若要使某一尺度上的小重整化混合在相当大的尺度范围内仍保持很小，就需要进一步加以控制。

I 温度界限与隐藏的再加热分数

在暴胀子缓慢衰变期间，辐射温度可以超过 T_R [40]。其能量密度的上限由暴胀结束时可用的总能量决定。将这一上限等同于可见辐射密度，可得

$$T_{\max}\le\left(\frac{30\rho_{\mathrm{end}}}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4}=7.4987\times10^{14}\,\mathrm{GeV}\quad(g_*=106.75). \tag{I.1}$$

对于保守的正热源 $0\le c_{\phi,\ \mathrm{th}},\ c_{S,\ \mathrm{th}}\le T^2_{\max}$，式（D.3）给出

$$\frac{|\delta v^2|}{v_\phi^2}\lesssim\frac{100T^2_{\max}}{v_\phi^2}\simeq 0.00563,\qquad \frac{|\delta w^2|}{w^2}\lesssim\frac{2.0001T^2_{\max}}{w^2}\simeq 1.62\times10^{-6}. \tag{I.2}$$

允许两个正源独立变化，可得此处所列的分量界限。按照手稿中的数值检验，令二者均等于 $T^2_{\max}$，则得到 0.005617 和

1.539×10^{-6}。这两种选择都保留了非零真空值。这些界限针对的是假定的热质量系数；较冷的隐藏等离子体会带来更小的修正。对于具有 $\lambda_{12} = 0$、 $v_1 = v_2 = 1.40414 \times 10^{17}$吉电子伏和 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.01$ 的第二个模型，同样的计算得到 $\delta v_i^2/v_i^2 = -3.86 \times 10^{-11}$、 $\delta F_2/F_2 = -1.93 \times 10^{-11}$ ，热界限为 0.00285。

令 $\xi_R = T_{D,R}/T_R$ 表示再加热后不久的隐藏扇区与可见扇区温度比，并假设隐藏胶子已在内部达到热化。隐藏扇区和可见扇区的能量密度分别为$\rho_D = (\pi^2/30) 6 T_{D,R}^4$和 $\rho_{\rm vis} = (\pi^2/30) g_{*,R} T_R^4$。因此

$$\frac{B_D}{B_{\rm vis}} = \frac{\rho_D}{\rho_{\rm vis}} = \frac{6}{g_{*,R}} \xi_R^4 . \tag{I.3}$$

因子六表示三个隐藏规范玻色子种类各自具有两个横向极化。手稿将 $\xi_* = 10^{-3}$ 用作相对于可见扇区熵温度的晚期非禁闭辐射外推。可见扇区熵守恒将其归一化与再加热联系起来：

$$\xi_R = \xi_* \left(\frac{g_{*s,R}}{g_{*s,0}} \right)^{1/3} = 0.00301137, \qquad \frac{B_D}{B_{\rm vis}} = 4.6221 \times 10^{-12} . \tag{I.4}$$

这一外推归一化用于确定初始隐藏扇区熵。之后形成的禁闭粒子群需要使用其自身的演化方程。

对于隐藏扇区衰变算符 $-I W_D^a W_D^a / (4 \mathcal{M}_D)$，三个规范玻色子种类给出

$$\frac{\Gamma_{I \to WW}}{\Gamma_{I \to YY}} = 3 \left(\frac{\mathcal{M}_Y}{\mathcal{M}_D} \right)^2 . \tag{I.5}$$

如果这些算符主导再加热，则所需的能量分数意味着

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}_D}{\mathcal{M}_Y} &\gtrsim \sqrt{\frac{3}{4.6221 \times 10^{-12}}} = 8.0564 \times 10^5, \qquad \mathcal{M}_D \gtrsim 1.0545 \times 10^{26}\,\text{GeV}, \\ d_Y &\equiv \frac{\overline{M}_{\rm Pl}}{\mathcal{M}_Y} = 0.018603, \qquad |d_D| \equiv \frac{\overline{M}_{\rm Pl}}{\mathcal{M}_D} \lesssim 2.3091 \times 10^{-8} . \end{aligned} \tag{I.6}$$

尺度 $\mathcal{M}_Y$ 和 $\mathcal{M}_D$ 参数化算符系数的倒数。较大的数值可能表示在较低物理截断尺度下的较小无量纲耦合。模型中展示的规范对称性允许这两个算符存在，因此其系数的层级关系需要额外的微观输入。

非线性碎裂以及再加热层级的微观起源仍然是彼此独立的动力学计算。标量示例在给定其势和耦合后，确立了所述的条件演化。

参考文献

[1] L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine andE. Witten，作为宇宙学暗物质的超轻标量，《物理评论D辑》95 (2017) 043541，arXiv:1610.08297。[2] K. K. Rogers and H. V. Peiris，莱曼α森林对规范超轻轴子暗物质的强约束，物理评论快报 126 (2021) 071302，arXiv:2007.12705。[3] P. Svrček and E. Witten，弦理论中的轴子，JHEP 06 (2006) 051，arXiv:hep-th/0605206。[4] A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, N. Kaloper and J. March-Russell，弦轴子宇宙，《物理评论D辑》81 (2010) 123530，arXiv:0905.4720。[5] R. D. Peccei and H. R. Quinn，赝粒子存在时的CP守恒，物理评论快报 38 (1977) 1440–1443，doi:10.1103/PhysRevLett.38.1440。[6] G. Grilli di Cortona, E. Hardy, J. Pardo Vega and G. Villadoro，精确地研究QCD轴子，JHEP 01 (2016) 034，arXiv:1511.02867。

[7] A. Ayala, I. Domínguez, M. Giannotti, A. Mirizzi and O. Straniero，重新审视球状星团对轴子-光子耦合的约束，物理评论快报 113 (2014) 191302，arXiv:1406.6053。[8] CAST合作组, V. Anastassopoulos et al.，轴子-光子相互作用的新CAST界限，Nature Phys. 13 (2017) 584–590，arXiv:1705.02290。[9] C. Corianò, M. Guzzi, A. Mariano and S. Morelli，标准模型异常阿贝尔扩展中的轻超对称轴子，《物理评论D辑》80 (2009) 035006，arXiv:0811.3675。[10] C. Corianò and P. H. Frampton，在 $E_6 \times U(1)_X$ GUT中将暗物质视为具有QCD轴子的超轻轴子样粒子，《物理快报B辑》782 (2018) 380–386，arXiv:1712.03865。[11] C. Corianò, P. H. Frampton, N. Irges and A. Tatullo，含斯图克尔伯格轴子的暗物质，Front. Phys. 7 (2019) 36，arXiv:1811.05792。[12] C. Corianò and S. Lionetti，异常 $U(1)$门户中的拓扑轴子-希格斯动力学，预印本（2026年），arXiv:2609.29207。[13] C. Corianò, N. Irges and E. Kiritsis，论低尺度定向子弦真空的有效理论，Nucl. Phys. B 746 (2006) 77–135，arXiv:hep-ph/0510332。[14] C. Corianò and M. Guzzi，大型强子对撞机中的相交膜轴子与退耦手征费米子，Nucl. Phys. B 826 (2010) 87–147，arXiv:0905.4462。[15] K. S. Babu, B. Dutta and R. N. Mohapatra，规范U(1)产生的偶然佩奇-奎因对称性与高质量轴子，arXiv:2412.21157。[16] L. Forestell, D. E. Morrissey and K. Sigurdson，非阿贝尔暗力与暗胶球的遗迹密度，《物理评论D辑》95 (2017) 015032，arXiv:1605.08048。[17] J. Pollack, D. N. Spergel and P. J. Steinhardt，超强自相互作用暗物质形成超大质量黑洞，Astrophys. J. 804 (2015) 131，arXiv:1501.00017。[18] M. G. Roberts, L. Braff, A. Garg, S. Profumo, T. Jeltema and J. O' Donnell，强自相互作用暗物质坍缩形成超大质量黑洞，JCAP 01 (2025) 060，arXiv:2410.17480。[19] W.-X. Feng, H.-B. Yu and Y.-M. Zhong，以自相互作用暗物质为超大质量黑洞提供种子：包含重子的统一情景，Astrophys. J. Lett. 914 (2021) L26，arXiv:2010.15132。[20] M. G. Roberts, L. Braff, A. Garg, S. Profumo and T. Jeltema，超强自相互作用暗物质形成的小红点，JCAP 05 (2026) 003，arXiv:2507.03230。[21] P. Madau, F. Haardt and M. Dotti，恒星质量种子形成的大质量黑洞的超临界增长，Astrophys. J. Lett. 784 (2014) L38，arXiv:1402.6995。[22] A. Bilal，反常讲义，arXiv:0802.0634。[23] B. Heidenreich, M. Reece and T. Rudelius，弱引力猜想与轴子弦，JHEP 11 (2021) 004，arXiv:2108.11383。[24] D. J. Gross and F. Wilczek，渐近自由规范理论 I，《物理评论D辑》8 (1973) 3633–3652，doi:10.1103/PhysRevD.8.3633。[25] K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl and M. Steinhauser，O(α_s^3)阶退耦关系及其与低能定理的联系，Nucl. Phys. B 510 (1998) 61–87，arXiv:hep-ph/9708255。[26] A. Athenodorou et al. (ALPHA Collaboration)，重海夸克的微扰性有多强？，Nucl. Phys. B 943 (2019) 114612，arXiv:1809.03383。[27] T. Lee，真空能与迹反常，arXiv:1810.08910。[28] S. Coleman and E. Weinberg，辐射修正作为自发对称性破缺的起源，《物理评论D辑》7 (1973) 1888–1910，doi:10.1103/PhysRevD.7.1888。[29] N. Yamada, M. Yamazaki and R. Kitano，有限温度下SU(2)杨-米尔斯理论的子体积方法：拓扑荷分布，arXiv:2403.10767。[30] M. J. Teper， $SU(N)$规范理论中的胶球质量及其他物理性质：面向理论学家的格点结果综述，arXiv:hep-th/9812187。[31] M. Abe, O. Morikawa and H. Suzuki， $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ 杨-米尔斯理论的蒙特卡罗模拟，Prog. Theor. Exp. Phys. 2025 (2025) 063B03，arXiv:2501.00286。[32] B. Lucini and G. Moraitis， $SU(N)$纯规范理论中的耦合常数跑动，《物理快报B辑》668 (2008) 226–232，arXiv:0805.2913。

[33] B. Lucini、M. Teper 和 U. Wenger，《 $SU(N)$规范理论中的高温相变》，JHEP 01 (2004) 061，arXiv:hep-lat/0307017。[34] R. Kallosh 和 A. Linde，《多项式 α吸引子》，arXiv:2202.06492。[35] 普朗克合作组、Y. Akrami 等，《普朗克2018年结果。X. 暴胀约束》，《天文学与天体物理学》641 (2020) A10，arXiv:1807.06211。[36] T. Louis 等，《阿塔卡马宇宙学望远镜：DR6功率谱、似然函数和 ΛCDM参数》，arXiv:2503.14452。[37] E. Calabrese 等，《阿塔卡马宇宙学望远镜：扩展宇宙学模型的DR6约束》，arXiv:2503.14454。[38] L. Kofman、A. Linde 和 A. A. Starobinsky，《迈向暴胀后的再加热理论》，《物理评论D辑》56 (1997) 3258–3295，arXiv:hep-ph/9704452。[39] K. Turzyński 和 M. Wieczorek，《单场暴胀模型中自共振的Floquet分析》，《物理快报B辑》790 (2019) 294–302，arXiv:1808.00835。[40] G. F. Giudice、E. W. Kolb 和 A. Riotto，《辐射时期的最高温度及其宇宙学影响》，《物理评论D辑》64 (2001) 023508，arXiv:hep-ph/0005123。[41] M. Caselle、A. Nada 和 M. Panero，《 $SU(2)$和 $SU(3)$杨–米尔斯理论的哈格多恩谱与热力学》，JHEP 07 (2015) 143，arXiv:1505.01106。[42] D. Yang 和 H.-B. Yu，《具有微分弹性散射的暗物质晕的引力热演化》，JCAP 09 (2022) 077，arXiv:2205.03392。[43] F. C. van den Bosch 和 Y. M. Tokayer，《别急：自相互作用暗物质核心坍缩的校准修订》，《皇家天文学会月报》(2026)，doi:10.1093/mnras/stag2015。