arXiv:2611.32737v1 [cond-mat.soft] 24 Nov 2026

Taylor–Aris 色散对受限通道流中化学图案的影响

Yanis Baouche，[1] Ramita Mondal，[1,2] 和 Christina Kurzthaler[1,3,4,*]

[1] *Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Nöthnitzer Straße 38, 01187 Dresden, Germany*

[2] *School of Mathematics, Fry Building, University of Bristol, BS8 1UG, UK*[3] *Center for Systems Biology Dresden, Pfotenhauerstraße 108, 01307 Dresden, Germany*[4] *Cluster of Excellence, Physics of Life, TU Dresden, Arnoldstraße 18, 01062 Dresden, Germany*

化学图案通过不同物种之间的非线性相互作用形成。我们以 Brusselator模型这一典型的激活剂–抑制剂模型为基础，研究受限通道流如何影响图案形成。针对细长通道的不变流形方法可将平流–扩散–反应方程约化为一维空间形式，其中物种以平均流速输运，分子扩散率则由经典泰勒–阿里斯弥散系数取代。我们获得了相图，其变量包括 P´éclet 数（即平流相对于扩散的相对强度）、通道细长比以及物种的扩散率比。我们的分析结果表明，在较大的 P´éclet 数下，经典图灵判据可能发生反转；因此，即使分子扩散率不满足经典图灵条件，通道流也能触发图案形成，反之亦然，通道流还可能破坏预先存在的图案。直接数值模拟证实了这两项预测，模拟显示出对流条纹图案，其波长可由我们的约化理论预测，同时还呈现振荡动力学。这些发现凸显了流体动力学流动能够改变化学混合，并由此深刻影响通道几何中的图案形成。

I. 引言

图案形成是生物系统研究中的核心主题之一 [1–3] ，在包括化学振荡器 [4, 5] 和界面不稳定性 [6]在内的其他多种背景下也受到了广泛关注。图案形成背后的机制多种多样：激活剂–抑制剂动力学可以在化学物种中诱导图灵图案 [1]„ 而活性系统中的机械化学耦合 [7, 8] 或与环境的耦合（包括与边界的结合和解离） [9–11], 也能产生引人入胜的图案，并对生物系统产生深远影响。此外，研究人员还在合成环境中构建了图案，从细菌群体中的基因回路到蛋白质系统的体外重构 [12, 13], ，为检验理论预测提供了可控平台。然而，在现实系统中，图案往往形成于受限且不断流动的流体中；流动会对相互作用的物种产生平流作用，从而改变空间结构的形成。发育生物学提供了典型例子：负责在脊椎动物胚胎中建立左右不对称性的形态发生素，由胚外液的纤毛驱动流进行输运 [14, 15], ；而伸长细胞中的细胞质流则为蛋白质和细胞器跨越细胞长度尺度提供了稳健的输运机制，影响细胞内组织与混合 [16–18]。因此，理解流动在图案形成中的作用，不仅可以为细胞生物学提供关键见解，还可能对生物化学产生基础性影响；在生物化学中，化学反应通常发生于水溶液 [19] ，而流动可能成为构建新型时空图案的一条途径。

尽管这一问题十分重要，但关于流动对图案形成影响的解析预测仍然很少。一种机制上有所不同的途径是差异流诱导的化学不稳定性，即激活剂和抑制剂以不同速率进行平流 [20–25]。此外，文献 [26]针对多种通道几何中的斯托克斯流，建立了反应–扩散–平流不稳定性的线性理论。通过对通道横截面上的流动进行平均，该理论捕捉到了图案由此产生的时空特征，但在两种物种受到相同平流作用时，图灵阈值本身保持不变。与我们的工作最为接近的是，Vasquez [27]通过对二维布鲁塞尔ator的离散化线性稳定性分析，并结合验证性模拟，表明足够强的泊肃叶流能够使原本稳定的均匀态失稳，尽管两种物种共享同一个速度场，仅分子扩散率不同。迄今为止，尚缺乏关于此类流动何时会产生或破坏图案的定量理论。

本文研究受限流体流动在图案形成中的作用。通过不变流形约化，我们为双组分布鲁塞尔ator反应–扩散–平流系统推导出有效的一维方程，该系统处于一个
具有泊肃叶流的狭长平面通道。我们发现，分子扩散率被剪切诱导的泰勒–阿里斯扩散率取代，从而改变了经典图灵阈值。重要的是，我们的解析结果

* ckurzthaler@pks.mpg.de

表明，在强流下，图灵判据会发生反转。因此，当两种物种的扩散率不符合经典图灵排序时，通道流既能触发有限波长不稳定性；而当其符合该排序时，通道流又能抑制这种不稳定性。我们的模型给出了三个明确的阈值，其中两个取决于流动，它们划分出稳定、形成图案、相互竞争和均匀振荡等参数区间。我们将这些阈值与二维线性稳定性分析及完整数值模拟的结果进行了比较。后者显示，条纹会随平均流漂移，并随泊肃叶剖面弯曲。条纹的波长随 Péclet 数增大，这与我们的约化理论预测一致。我们的非线性模拟进一步表明，条纹斑图在远超线性理论预测的区域内，仍能在与均匀振荡的竞争中胜出。

II. 模型设置

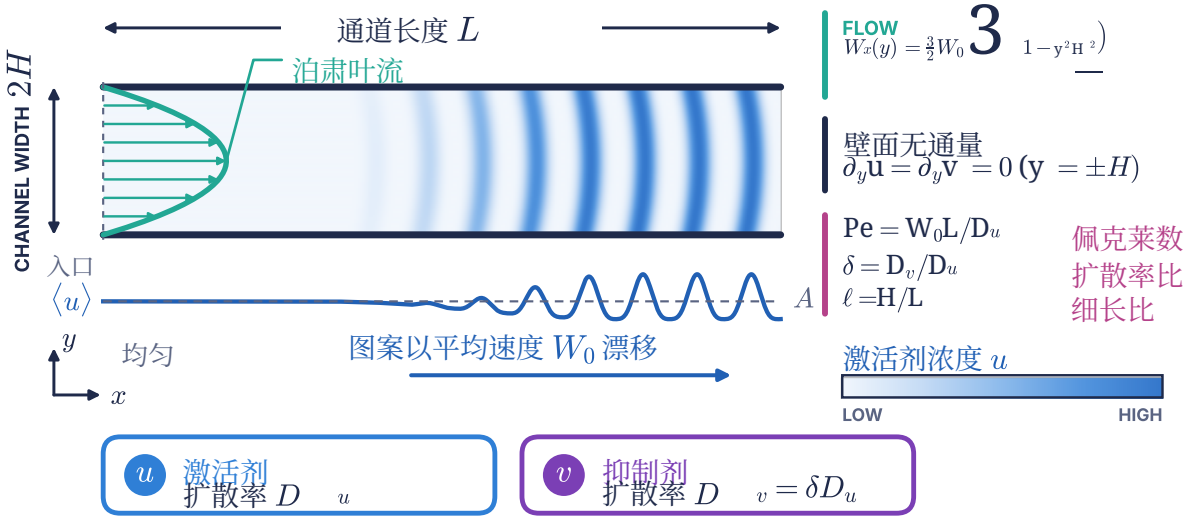

图 1. 模型设置。两种物种——激活剂 u 和抑制剂 v——以分子扩散率 D_u 和 D_v进行扩散。它们通过 Brusselator动力学发生反应，并在通道中受到平面泊肃叶流 $\boldsymbol{W} = W_x(y)\hat{\boldsymbol{x}}$ 的平流作用；通道的长度为 L，宽度为 $2H$。

我们考虑一个由化学物种组成的系统，其浓度为 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r},t) = [c_1(\boldsymbol{r},t)\ldots,c_N(\boldsymbol{r},t)]$，它们随空间位置$\boldsymbol{r} = (x,y)$ 和时间 t而变化。这些物种相互反应、发生扩散，并受到不可压缩流体流动的平流作用（双物种示例见图 1）。它们的动力学遵循以下对流–扩散–反应方程：

$$\frac{D\boldsymbol{c}}{Dt} := \partial_t \boldsymbol{c} + \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{D}\nabla^2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}. \tag{1}$$

这里，$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(D_1,\ldots,D_N)$ 表示常数扩散矩阵，$\boldsymbol{W}$表示流体速度，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c})$ 是反应向量，其中包含不同化学物种之间的非线性耦合。这些化学物种处于一个长度为 L 、宽度为 $2H$的二维通道中：$0 \le x \le L$ 和 $-H \le y \le H$。我们假设沿通道存在压力驱动流，其速度分布为泊肃叶流速度分布：

$$\boldsymbol{W} = W_x(y)\hat{\boldsymbol{x}} \quad \text{with} \quad W_x(y) = \frac{3}{2}W_0\left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right), \tag{2}$$

其中，W_0 为截面平均速度。后者定义为

$$W_0 := \bar{W}_x = \frac{1}{2H}\int_{-H}^{H} W_x(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

¯全文中，我们用上横线或尖括号 $f = \langle f\rangle$表示某个量 f 的截面平均值：对于单个符号使用上横线，对于乘积和较长的表达式使用尖括号。我们进一步对边界处的化学场 $\partial_y \boldsymbol{c}|_{y=\pm H} = \boldsymbol{0}$ 施加无通量边界条件，并在入口和出口处施加周期性边界条件。

A. 无量纲量

我们考虑系统的两个特征时间尺度：首先，化学物种 c_i 通过半宽度 $\tau_{\mathrm{diff},\,i} = H^2/D_i$ 进行扩散所需的时间；其次，通过平流穿过通道 $\tau_{\mathrm{adv}} = L/W_0$所需的时间，从而得到一个无量纲参数

$$\epsilon_i = \frac{\tau_{\mathrm{diff},i}}{\tau_{\mathrm{adv}}} = \frac{W_0 L}{D_i}\frac{H^2}{L^2} := \mathrm{Pe}_i \ell^2. \tag{4}$$

此处， $\ell = H/L$ 表示通道的纵横比（或细长比），而佩克莱数 P´eclet 刻画了沿通道方向的平流相对于物种 i扩散的相对强度，$\mathrm{Pe}_i = W_0 L/D_i$。对于其他物种，我们还可以将无量纲参数写为 $\epsilon_j = \epsilon_i/\delta_{ij}$，其取决于分子扩散率之比

$$\delta_{ij} = \frac{D_j}{D_i}. \tag{5}$$

最后，我们引入化学反应动力学的特征时间 τ_{chem}。由此得到另一个无量纲参数，即达姆科勒数，它衡量反应相对于沿通道方向平流的快慢，$\mathrm{Da} = \tau_{\mathrm{adv}}/\tau_{\mathrm{chem}}$。与横向扩散相比，当 $\tau_{\mathrm{diff},\,i}/\tau_{\mathrm{chem}} = \epsilon_i \mathrm{Da} \ll 1$时，反应较慢。除非另有说明，我们取 $\mathrm{Da} = 1$。

B. 推导　　长细通道中有效平流–扩散–反应方程的推导　　1

为取得解析进展，我们考虑一个纵横比较小的细长通道， $\ell \ll 1$。我们假设通道横向的扩散远快于沿其长轴方向的平流， $\epsilon_i \ll 1$ for $i = 1, \ldots N$，从而实现尺度分离。由于 $\epsilon_j = \epsilon_i/\delta_{ij}$，这一条件对于扩散最慢的物种限制最为严格。这样，我们便可以进行不变流形约化，将空间上的二维问题约化为一维问题。因此，我们用常数基准浓度 $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c}/c_0$对浓度场进行重新标度，用 $x' = x/L$和 $y' = y/H$对长度尺度进行重新标度，用 $t' = t/\tau_{\mathrm{adv}}$对时间尺度进行重新标度，并用 $\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{W}/W_0 = W'_x(y')\hat{\boldsymbol{x}}$对速度进行重新标度，使得 $W'_x(y') = \frac{3}{2}\left(1 - y'^2\right)$ 的截面平均为单位值。反应项按 $\bar{\boldsymbol{R}}' = \boldsymbol{R}/(c_0/\tau_{\mathrm{chem}})$重新标度，从而得到无量纲反应–扩散–平流方程:

$$\partial_{t'}\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{W}' \cdot \boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{c}' = \frac{\boldsymbol{D}'}{\mathrm{Pe}_1}\partial^2_{x'}\boldsymbol{c}' + \frac{\boldsymbol{D}'}{\epsilon_1}\partial^2_{y'}\boldsymbol{c}' + \mathrm{Da}\boldsymbol{R}', \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{D}' = \mathrm{diag}(1, \delta_{12}, \ldots, \delta_{1N})$。我们进一步将 $1/\mathrm{Pe}_1 = \tau_{\mathrm{adv}}/\tau^L_{\mathrm{diff},1} = \epsilon_1\beta$改写为 $\tau^{L_{\text{扩散}\ 1}} = L^2/D_1$和 $\beta = \mathcal{O}(1)$，并令沿通道长轴的分子扩散慢于平流。修正后的方程于是为

$$\partial_{t'}\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{W}' \cdot \boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{c}' = \epsilon_1\beta\,\boldsymbol{D}'\partial^2_{x'}\boldsymbol{c}' + \frac{\boldsymbol{D}'}{\epsilon_1}\partial^2_{y'}\boldsymbol{c}' + \mathrm{Da}\boldsymbol{R}', \tag{7}$$

这里假设反应相对于横向扩散较慢， $\epsilon_i\mathrm{Da} \ll 1$ 对所有物种均成立。对于 $\mathrm{Da} = \mathcal{O}(1)$，这可简化为 $\epsilon_1 \ll 1$。现在我们寻求一个关于 $\epsilon_1 \ll 1$ 的约化摄动方程，其形式为 [28, 29]:

$$\partial_{t'}\bar{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{G}^{(1)}[\bar{\boldsymbol{c}}', \partial_{x'}\bar{\boldsymbol{c}}'] + \epsilon_1\boldsymbol{G}^{(2)}[\bar{\boldsymbol{c}}', \partial_{x'}\bar{\boldsymbol{c}}', \partial^2_{x'}\bar{\boldsymbol{c}}'] + \mathcal{O}(\epsilon_1^2), \tag{8}$$

其中横截面　　平均浓度场为 $\bar{\boldsymbol{c}}' \equiv \bar{\boldsymbol{c}}'(x', t')$，而浓度场展开为 a　　s

$$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{V}^{(0)}[y', t'; \bar{\boldsymbol{c}}'] + \epsilon_1\boldsymbol{V}^{(1)}[y', t'; \bar{\boldsymbol{c}}', \partial_{x'}\bar{\boldsymbol{c}}'] + \epsilon_1^2\boldsymbol{V}^{(2)}[y', t'; \bar{\boldsymbol{c}}', \partial_{x'}\bar{\boldsymbol{c}}', \partial^2_{x'}\bar{\boldsymbol{c}}'] + \mathcal{O}(\epsilon_1^3). \tag{9}$$

展开反应项可得

$$\boldsymbol{R}'(\boldsymbol{c}') = \boldsymbol{R}'(\boldsymbol{V}^{(0)}) + \epsilon_1\boldsymbol{J}(\boldsymbol{V}^{(0)})\boldsymbol{V}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon_1^2), \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 表示雅可比矩阵。将式（7）乘以 ϵ_1 并代入这些展开式，我们得到关于 ϵ_1各阶的一组方程:

$$\epsilon_1^0: \quad \boldsymbol{D}'\partial^2_{y'}\boldsymbol{V}^{(0)} = \boldsymbol{0}, \tag{11a}$$

$$\epsilon_1: \boldsymbol{D}'\partial^2_{y'}\boldsymbol{V}^{(1)} = \boldsymbol{G}^{(1)} + W'_{x'}\partial_{x'}\bar{\boldsymbol{c}}' - \mathrm{Da}\,\boldsymbol{R}'(\boldsymbol{V}^{(0)}), \tag{11b}$$

$$\epsilon_1^2: \boldsymbol{D}'\partial^2_{y'}\boldsymbol{V}^{(2)} = \boldsymbol{G}^{(2)} + \partial_{t'}\boldsymbol{V}^{(1)} + W'_{x'}\partial_{x'}\boldsymbol{V}^{(1)} - \beta\boldsymbol{D}'\partial^2_{x'}\bar{\boldsymbol{c}}' - \mathrm{Da}\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{V}^{(0)})\boldsymbol{V}^{(1)}. \tag{11c}$$

无通量边界条件对应于每一阶 $\boldsymbol{V}^{(i)}$的无通量条件。截面平均得到 $\langle \boldsymbol{V}^{(0)} \rangle = \bar{\boldsymbol{c}}'$，这表明主阶浓度在通道横截面上为常数。由于 $\bar{\boldsymbol{c}}'$ 按定义是 $\boldsymbol{c}'$的截面平均，对式（9）取平均需要满足 $\langle \boldsymbol{V}^{(i)} \rangle = \boldsymbol{0}$，其中 $i \geq 1$，从而封闭该方程组。对一阶方程 [式（11b）] 取平均可得关系式

$$\boldsymbol{G}^{(1)} = -\partial_{x'} \bar{\boldsymbol{c}}' + \mathrm{Da}\, \boldsymbol{R}'(\bar{\boldsymbol{c}}'), \tag{12}$$

由于 $\bar{W}'_{x'} = 1$ 以及无通量边界条件，截面平均 $\langle \partial^2_{y'} \boldsymbol{V}^{(1)} \rangle$ 为零。类似地，对于二阶项，我们得到

$$\boldsymbol{G}^{(2)} = \beta \boldsymbol{D}' \partial^2_{x'} \bar{\boldsymbol{c}}' - \langle W'_{x'} \partial_{x'} \boldsymbol{V}^{(1)} \rangle, \tag{13}$$

这需要知道 $\boldsymbol{V}^{(1)}$的显式形式。后者可将式（12）代入式（11b）得到，即

$$\boldsymbol{V}^{(1)} = \left(\frac{y'^2}{4} - \frac{y'^4}{8} - \frac{7}{120} \right) (\boldsymbol{D}')^{-1} \partial_{x'} \bar{\boldsymbol{c}}'. \tag{14}$$

以此为输入，约化方程变为：

$$\partial_{t'} \bar{\boldsymbol{c}}' + \partial_{x'} \bar{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{D}'_{\mathrm{eff}} \partial^2_{x'} \bar{\boldsymbol{c}}' + \boldsymbol{R}'_{\mathrm{eff}} + \mathcal{O}(\epsilon_1^2), \tag{15}$$

其中有效扩散张量和反应向量为：

$$D'_{\mathrm{eff},i} = \frac{1}{\mathrm{Pe}_i} + \frac{2}{105} \epsilon_i \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{R}'_{\mathrm{eff}} = \mathrm{Da} \boldsymbol{R}'(\bar{\boldsymbol{c}}'). \tag{16}$$

通过代入 $\xi = x' - t'$ 转换到共移动参考系，我们得到有效反应扩散方程：

$$\partial_{t'} \bar{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{D}'_{\mathrm{eff}} \partial^2_{\xi} \bar{\boldsymbol{c}}' + \boldsymbol{R}'_{\mathrm{eff}}. \tag{17}$$

需要注意的是，流动仅通过化学物种的剪切诱导有效扩散率$\boldsymbol{D}'_{\mathrm{eff}}$ 进入约化动力学。这一现象称为经典泰勒–阿里斯弥散 [30, 31], ，其原因在于，通道中心的溶质所经历的流体速度不同于靠近边界处的溶质。由于沿通道横向的分子扩散（从而发生跨越流线的“跳跃”），溶质沿通道轴线的弥散得到增强。用有量纲形式表示时，有效扩散率为：

$$D_{\mathrm{eff},i} = D_i + \frac{2}{105} \frac{W_0^2 H^2}{D_i}, \tag{18}$$

这表明，平面通道中的泊肃叶流会增强各个物种的分子扩散率$D_{\mathrm{eff,\ i}} \sim H^2 W_0^2 / D_i$。这实际上改变了化学物种沿通道的混合过程，从而可能促进图案形成。重要的是，剪切对扩散较慢物种的弥散影响大于对扩散较快物种的影响。为预测后者，我们以简化方程 [式（17）] 作为非线性反应动力学稳定性分析的起点。

III. 细长通道中的线性稳定性分析

简化方程（17）是一个反应–扩散系统，其中流动仅通过有效扩散率产生影响，因此其线性稳定性只通过反应雅可比矩阵依赖于动力学。本节对一般的双物种反应进行稳定性分析。为此，我们先简化记号，并记为：$u = \bar{c}'_1$, $v = \bar{c}'_2$, $d_u = D'_{\mathrm{eff,\ 1}}$, $d_v = D'_{\mathrm{eff,\ 2}}$, $\mathrm{Pe} = \mathrm{Pe}_1$, $\epsilon = \epsilon_1 = \mathrm{Pe}\ell^2$，以及 $\delta = \delta_{12} = D_v / D_u$。

A. 一般双物种动力学

记 $\boldsymbol{R}' = (f, g)^\top$，约化动力学为

$$\partial_t u = d_u \partial^2_{\xi} u + \mathrm{Da} f(u, v), \tag{19a}$$

$$\partial_t v = d_v \partial^2_{\xi} v + \mathrm{Da} g(u, v), \tag{19b}$$

具有有效扩散率 [式（16）]

$$d_u = \frac{1}{\mathrm{Pe}} + \frac{2}{105}\epsilon \quad \text{and} \quad d_v = \frac{\delta}{\mathrm{Pe}} + \frac{2}{105}\frac{\epsilon}{\delta}. \tag{20}$$

我们首先将（$u^\star$, $v^\star$）记为稳态均匀状态，其中 $f(u^\star, v^\star) = g(u^\star, v^\star) = 0$，在该状态附近对方程（19）进行线性化，并寻找形式为 $\delta\boldsymbol{w}(\xi, t) = \hat{\boldsymbol{w}} e^{\lambda t + iq\xi}$ 的扰动，其中无量纲轴向波数为 q，增长率为 $\lambda(q)$，且 $\delta\boldsymbol{w} = (\delta u, \delta v)^\top$。由此得到特征值问题 $\lambda\delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{J}_q\delta\boldsymbol{w}$，其中

$$\boldsymbol{J}_q = \mathrm{Da}\boldsymbol{J} - q^2\begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{(u^\star, v^\star)}. \tag{21}$$

这里，$\boldsymbol{J}$ 是仅由动力学决定的雅可比矩阵，既不依赖于 q，也不依赖于 Da 或流动；而 $\boldsymbol{J}_q$ 是在波数 q 下完整线性化问题的雅可比矩阵。特别地，均匀模态由 $\boldsymbol{J}_0 = \mathrm{Da}\boldsymbol{J}$ 控制，这仅在 $\mathrm{Da} = 1$ 时与 $\boldsymbol{J}$ 重合。

增长率由 $\lambda_\pm(q) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_q) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_q)^2 - 4\det(\boldsymbol{J}_q)}\right]$ ~~给出，其中迹和行~~列式为：

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_q) = \mathrm{Da}T_0 - q^2\Sigma, \tag{22a}$$

$$\det(\boldsymbol{J}_q) = \mathrm{Da}^2\Delta_0 - \mathrm{Da}Sq^2 + q^4 d_u d_v. \tag{22b}$$

这里，我们分别用 $T_0 = a_{11} + a_{22}$ 和 $\Delta_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$表示 $\boldsymbol{J}$ 的迹和行列式，并引入两个量：

$$\Sigma = d_u + d_v \qquad \text{and} \qquad S = a_{11}d_v + a_{22}d_u. \tag{23}$$

我们注意到，当 $\max \mathrm{Re}[\lambda_\pm(q)] > 0$ 时，波数为 q 的模态是线性不稳定的 .

1. *Uniform mode and Hopf threshold*

为研究均匀模态的稳定性，我们令 $q = 0$，此时扩散项消失，且 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_0) = \mathrm{Da}T_0$，$\det(\boldsymbol{J}_0) = \mathrm{Da}^2\Delta_0$。因此，若满足以下条件，均匀态对均匀扰动是稳定的：

$$T_0 < 0 \quad \text{and} \quad \Delta_0 > 0. \tag{24}$$

现在假设 $\Delta_0 > 0$。此时，系统在 $T_0 = 0$处发生霍普夫分岔，其中 $\lambda_\pm(0) = \pm i\mathrm{Da}\sqrt{\Delta_0}$，频率为 $\omega_H = \mathrm{Da}\sqrt{\Delta_0}$。重要的是，Hopf阈值与流动无关，后者无法改变时间振荡的局部反应阈值。

2. *Finite-wavelength instability*

稳态有限波数不稳定性要求均匀态对均匀扰动保持稳定[方程（24）]而某个模态 $q > 0$变得不稳定。由于 $T_0 < 0$，迹 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_q) = \mathrm{Da}T_0 - q^2\Sigma$ [方程（22a）]对于所有 q均为负，因此不稳定性只能源于 $\det(\boldsymbol{J}_q) < 0$。

作为 $s = q^2$的函数，方程（22b）是一条开口向上的抛物线，起始于 $\mathrm{Da}^2\Delta_0 > 0$ [参见图 2 （a）中第 IIIC]节介绍的Brusselator动力学示例。它仅在 $S > 0$ 且其判别式为正时才会变为负值，

$$\Delta_{\det} = \mathrm{Da}^2\left(S^2 - 4d_u d_v\Delta_0\right) > 0. \tag{25}$$

这两个要求合起来构成不稳定条件 [32]

$$a_{11}d_v + a_{22}d_u > 2\sqrt{d_u d_v \Delta_0}. \tag{26}$$

在稳定性起始点，方程（26）成立为等式，$\det(\boldsymbol{J}_q) = 0$ 的两个根重合，且第一个不稳定波数为

$$q_c^2 = \frac{\mathrm{Da}S}{2d_u d_v} = \mathrm{Da}\sqrt{\frac{\Delta_0}{d_u d_v}}, \tag{27}$$

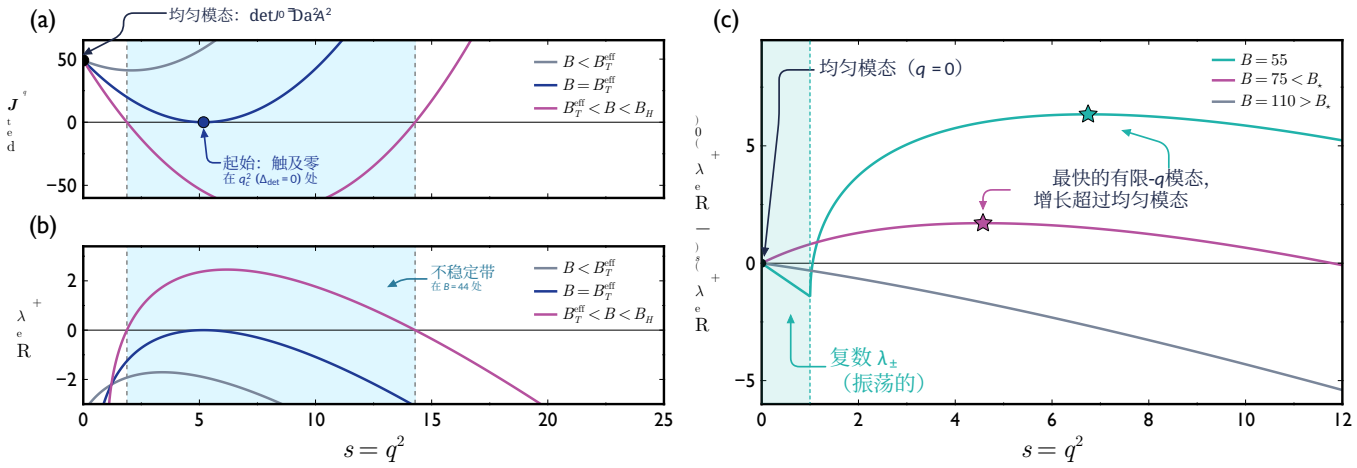

图 2. 约化理论中的有限波长不稳定性与竞争。(a) 行列式 $\det \boldsymbol{J}_q$ [方程 (22b)] 和 (b) 增长率 $\mathrm{Re}\lambda_+$ 随 $s = q^2$ 的变化，分别对应有效图灵阈值以下（$B = 32$）、阈值处（$B = B_T^{\mathrm{eff}} = 38.2$）和阈值以上（$B = 44$）；所有情况均低于 $B_H = 50$。每条曲线均从 $\det \boldsymbol{J}_0 = \mathrm{Da}^2 A^2 > 0$（黑点）开始。起始时，抛物线在 q_c^2 处与零相切（蓝点，$\Delta_{\mathrm{det}} = 0$）。阴影区域：$B = 44$ 处的不稳定带，其中 $\det \boldsymbol{J}_q < 0$ 且 $\mathrm{Re}\lambda_+ > 0$。(c) 高于霍普夫阈值 B_H 时：相对于均匀模态的增长率，其中 $B = 55$（在窗口 $(A-1)^2 < B < (A+1)^2$ 内，此时 $\lambda_\pm(0)$ 为复数）、$B = 75 < B_\star$ 和 $B = 110 > B_\star$（$B_\star = 93.7$）。参数为 $A = 7$，$\mathrm{Da} = 1$，$\mathrm{Pe}_\ell = 20$，$\delta = 0.5$。

见图 2（b），其中展示了第 IIIC节介绍的 Brusselor动力学。现在可以推导出三个必要条件 [32]。首先，$S > 0$ 和 $T_0 < 0$ 要求 a_{11} 和 a_{22} 符号相反。接着，我们用 $a_{11} > 0 > a_{22}$标记这些物种，分别称为 u （激活剂）和 v （抑制剂）。其次，$\Delta_0 > 0$ 要求交叉耦合符号相反，

$$\chi := -a_{12}a_{21} = \Delta_0 + a_{11}|a_{22}| > 0. \tag{28}$$

第三，$S > 0$ 和 $T_0 < 0$ 给出 $d_v/d_u > |a_{22}|/a_{11} > 1$：抑制剂必须具有更大的有效扩散系数 ty.

将方程（26）除以 d_u，可得到关于 $r = \sqrt{d_v/d_u}$、$a_{11}r^2 - 2\sqrt{\Delta_0}r - |a_{22}| > 0$的不等式，其正根结合方程（28）给出

$$\frac{d_v}{d_u} > \rho_c = \left(\frac{\sqrt{\Delta_0} + \sqrt{\chi}}{a_{11}}\right)^2. \tag{29}$$

因此，动力学仅通过单个数值 $\rho_c > 1$进入，而流动则通过比值 d_v/d_u进入，该比值仅依赖于 Pe_ℓ 和 δ，由 [方程（20）] 给出。其物理含义见第 IVA 节。

3. *Fastest-growing mode*

超过不稳定性起始点后，一段波数范围变得不稳定，从微小扰动中产生的图案主要由增长最快的模态决定。因此，我们要寻找 $\mathrm{Re}\lambda_+$ 在 $s = q^2 > 0$上的最大值，其中 $d_v > d_u$根据图样判据的要求。将 $\lambda_+ = \frac{1}{2}[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_q) + R_s]$写成 $R_s = \sqrt{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_q)^2 - 4\det(\boldsymbol{J}_q)}$，方程（22）和（28）给出

$$R_s^2 = [\mathrm{Da}(a_{11} - a_{22}) + (d_v - d_u)s]^2 - 4\mathrm{Da}^2\chi. \tag{30}$$

括号中的项为正，且随 s增大，因此 R_s^2 至多改变一次符号，从负变为正。这将参数区间分为两段 [；对于第2节IIIC]中介绍的 Brusselor动力学，见图2(c)。当 $R_s^2 < 0$时，特征值为复数，且 $\mathrm{Re}\lambda_+ = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_q)/2 = (\mathrm{Da}T_0 - s\Sigma)/2$ 随 s线性递减，因此最大值不可能出现在此处。当$R_s^2 > 0$时，特征值为实数，并且在所有更大的 s下仍为实数，对 λ_+ 求二阶导数可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda_+}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{2\mathrm{Da}^2\chi(d_v - d_u)^2}{R_s^3} < 0. \tag{31}$$

因此，增长率是关于 s的严格凹函数：它至多有一个驻点，且该点就是最大值。求解 $\mathrm{d}\lambda_+/\mathrm{d}s = 0$ 即可得到增长最快（选定）的波数及其增长率，

$$q_{\mathrm{sel}}^2 = \mathrm{Da}\frac{\sqrt{\chi}(d_u + d_v) - (a_{11} - a_{22})\sqrt{d_u d_v}}{(d_v - d_u)\sqrt{d_u d_v}}, \tag{32a}$$

$$\lambda_{\max} = \mathrm{Da}\frac{a_{11}d_v - a_{22}d_u - 2\sqrt{\chi d_u d_v}}{d_v - d_u}. \tag{32b}$$

方程（32a）仅当其右端为正时才描述一个模态，这要求

$$a_{11} - a_{22} < 2\sigma\sqrt{\chi}, \qquad \sigma = \frac{d_u + d_v}{2\sqrt{d_u d_v}} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \geq 1. \tag{33}$$

否则，驻点位于 $s \leq 0$，对于所有 $s > 0$，增长率都会降低，并且没有有限-q 模态的增长速度超过均匀模态。

4. Competition between homogeneous and finite-wavelength modes

为推导有限波长不稳定性的阈值，我们假设均匀态保持稳定。对于 $T_0 > 0$，均匀模态本身是不稳定的，而行列式为负不再表明会形成图案，只能说明有限-模态也不稳定。因此，我们要考察是否存在某个模态 $q > 0$ 的增长速度超过均匀模态，即 $\lambda_{\max}$ [方程（32b）] 是否大于 $\mathrm{Re}\lambda_+$（0）。由于 $T_0^2 - 4\Delta_0 = (a_{11} - a_{22})^2 - 4\chi$，均匀模态特征值$\lambda_\pm$（0）在 $a_{11} - a_{22} \geq 2\sqrt{\chi}$ 时为实数，否则为复数，因此必须分别处理这两种情况。

在第一种情况下，$a_{11} - a_{22} \geq 2\sqrt{\chi}$，增长率 λ_+ 对于所有 $s \geq 0$ [式（31）]均为实数且呈凹形。如果最快模态存在，则选定模态就是最快模态；否则就是均匀模态。因此，当q 时，有限 $q_{\mathrm{sel}}^2 \geq 0$模态的增长速度快于均匀模态，即$a_{11} - a_{22} < 2\sigma\sqrt{\chi}$ [式（33）]。等价地，λ_+ 在 $s = 0$ 处的斜率为正，即 $\mathrm{Da}S > \lambda_+(0)\Sigma$。

在第二种情况下，$a_{11} - a_{22} < 2\sqrt{\chi}$，均匀模态特征值为复数，且 $\mathrm{Re}\,\lambda_+$（0）$= \mathrm{Da}\,T_0/2$。从$s = 0$开始，增长率首先以斜率 $-\Sigma/2$下降，因此斜率判据不成立；然而，当特征值在更大的q 处变为实数后，有限 s [模态的增长速度可能反而更快。对于第2（c）节中介绍的 Brusselor动力学，参见图IIIC]。由于$\sigma \geq 1$，选定模态在此始终存在，见 [式（33）], , 而式（32b）给出

$$\lambda_{\max} - \frac{\mathrm{Da}T_0}{2} = \mathrm{Da}\frac{(a_{11} - a_{22})(d_u + d_v) - 4\sqrt{\chi d_u d_v}}{2(d_v - d_u)}, \tag{34}$$

对于 $a_{11} - a_{22} > 2\sqrt{\chi}/\sigma$ 为正。B

oth 种情况 合并为单一判据：当且仅当有限-q 模态的增长速度超过均匀模态时 if

$$\frac{2\sqrt{\chi}}{\sigma} < a_{11} - a_{22} < 2\sigma\sqrt{\chi}. \tag{35}$$

方程（35）中的各个量都可以直接解释。动力学通过 $a_{11} - a_{22} = a_{11} + |a_{22}|$进入，即激活剂的自增强速率与抑制剂的自衰减速率之和；同时还通过 $\sqrt{\chi}$进入，它表示两个物种之间反馈回路的强度。流动只通过 σ进入，该量衡量两个有效扩散率之间的差异，$\sigma = 1$ 对于 $d_u = d_v$，并且 σ 随 d_v/d_u增大。与 d_v/d_u一样，σ 仅取决于 $\mathrm{Pe}\ell$ 和δ [方程（20）]。在 $\mathrm{Pe}\ell = \sqrt{105\delta/2}$处，剪切使有效扩散率相等（第 IVA节），$\sigma = 1$ 窗口关闭：如果有效扩散率之间没有差异，就不存在有限-q 模态能够超过均匀模态。

B. Damk¨ohler 数的作用

值得一提的是，可以将 Da 从约化线性问题中缩放消去。方程（21）给出

$$\boldsymbol{J}_q = \mathrm{Da}\left[\boldsymbol{J} - \frac{q^2}{\mathrm{Da}}\begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Da}\,\boldsymbol{J}_{q/\sqrt{\mathrm{Da}}}\Big|_{\mathrm{Da}=1}, \tag{36}$$

或在波数 $q/\sqrt{\mathrm{Da}}$ 处计算的 $\mathrm{Da} = 1$ 的雅可比矩阵。因此，特征值满足

$$\lambda_\pm(q; \mathrm{Da}) = \mathrm{Da}\lambda_\pm\left(q/\sqrt{\mathrm{Da}}; 1\right). \tag{37}$$

因此，Da 增大将拉伸色散关系。所有增长率均乘以 Da，所有波数均除以 $\sqrt{\mathrm{Da}}$，但每个增长率的符号以及增长最快的模态都保持不变。因此，方程（24）、（29）和（35）中不包含 Da，而 q_c、$q_{\mathrm{sel}} \propto \sqrt{\mathrm{Da}}$ 和 $\omega_H \propto \mathrm{Da}$。

C. Brusselator模型

为应用我们的理论框架，我们考虑 Brusselator模型 [5, 33–36], 一种最简激活剂（c_1）–抑制剂（c_2）模型，具有局部自增强和长程抑制：

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} k_1 a - k_2 b c_1 + k_3 c_1^2 c_2 - k_4 c_1 \\ k_2 b c_1 - k_3 c_1^2 c_2 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

这里， a 和 b 是外部维持浓度， k_1 和 k_2 是两种物种的生成速率，而k_3 量化了它们之间的非线性相互作用，该相互作用会生成激活剂并消耗抑制剂。激活剂的降解速率 k_4 设定了动力学的特征时间尺度， $\tau_{\mathrm{chem}} = 1/k_4$。按照第II节中的方法，以基准浓度 $c_0 = \sqrt{k_4}/k_3$进行重标度，可得

$$\partial_{t'} c_1' + W_{x'}' \partial_{x'} c_1' = \frac{1}{\mathrm{Pe}_1} \partial_{x'}^2 c_1' + \frac{1}{\epsilon_1} \partial_{y'}^2 c_1' + \mathrm{Da} f(c_1', c_2'), \tag{39a}$$

$$\partial_{t'} c_2' + W_{x'}' \partial_{x'} c_2' = \frac{1}{\mathrm{Pe}_2} \partial_{x'}^2 c_2' + \frac{1}{\epsilon_2} \partial_{y'}^2 c_2' + \mathrm{Da} g(c_1', c_2'), \tag{39b}$$

其中 $A = k_1 a/(k_4 c_0)$ 和 $B = k_2 b/k_4$ 衡量两种物种的生成速度相对于激活剂降解速率的快慢。我们还使用了 $\delta_{1i}/\mathrm{Pe}_1 = 1/\mathrm{Pe}_i$ 和 $\delta_{1i}/\epsilon_1 = 1/\epsilon_i$ ，以逐个物种的方式表示 $\boldsymbol{D}'$ 的对角元素。反应向量 $\boldsymbol{R}' = (f,\ g)^\top$ 变为

$$f(c_1', c_2') = A - (B+1) c_1' + (c_1')^2 c_2', \tag{40a}$$

$$g(c_1', c_2') = B c_1' - (c_1')^2 c_2'. \tag{40b}$$

在约化描述 [方程（19）], 中，横截面平均浓度的方程 $u = \bar{c}_1'$ 和$v = \bar{c}_2'$写作：

$$\partial_t u = d_u \partial_\xi^2 u + \mathrm{Da}\big[A - (B+1)u + u^2 v\big], \tag{41a}$$

$$\partial_t v = d_v \partial_\xi^2 v + \mathrm{Da}\big[B u - u^2 v\big]. \tag{41b}$$

稳态 Brusselator动力学的稳态为$(u^\star,\ v^\star) = (A,\ B/A)$，且我们得到以下量 s:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} T_0 &= B - 1 - A^2, & \Delta_0 &= A^2, \\ \chi &= A^2 B, & a_{11} - a_{22} &= A^2 + B - 1. \end{aligned} \tag{42}$$

方程（21）–（23）变为

$$\boldsymbol{J}_q = \begin{pmatrix} \mathrm{Da}(B-1) - q^2 d_u & \mathrm{Da} A^2 \\ -\mathrm{Da}\, B & -\mathrm{Da}\, A^2 - q^2 d_v \end{pmatrix}, \tag{43}$$

and

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}_q) = \mathrm{Da}\,(B - 1 - A^2) - q^2 (d_u + d_v), \tag{44a}$$

$$\det(\boldsymbol{J}_q) = \mathrm{Da}^2 A^2 - \mathrm{Da}\, S\, q^2 + q^4 d_u d_v, \tag{44b}$$

其中 $S = (B-1)\, d_v - A^2 d_u$。现在我们评估该系统稳定性的一般条件。所得各相汇总于表I。

1. *Hopf threshold*

由于 $\Delta_0 = A^2 > 0$, Hopf分岔 $T_0 = 0$ 发生于

$$B_H = 1 + A^2, \tag{45}$$

频率为 $\omega_H = \mathrm{Da} A$, 与流动无关。

2. *Finite-wavelength instability*

在起始处，方程（26）为 $(B-1)\,d_v - A^2 d_u = 2A\sqrt{d_u d_v}$，对 B 求解可得到有效图灵阈值；高于该阈值时，会出现有限波长不稳定性，

$$B_T^{\mathrm{eff}} = \left(1 + A\sqrt{\frac{d_u}{d_v}}\right)^2, \tag{46}$$

起始波数为 $q_c^2 = \mathrm{Da}A/\sqrt{d_u d_v}$ [式（27）]。等价地，式（29）可写为 $d_v/d_u > \rho_c = A^2/(\sqrt{B}-1)^2$。这里，阈值 B_T^{eff}通过以下量依赖于流动 d_u 以及 d_v。

3. *Competition between homogeneous and finite-wavelength modes*

在 Hopf阈值以上， $B > B_H$，均匀模态不稳定，我们使用式（35）来判断有限-q模态是否仍增长得更快。结合式（42），该判据为

$$\frac{2A\sqrt{B}}{\sigma} < A^2 + B - 1 < 2\sigma A\sqrt{B}. \tag{47}$$

特征值 $\lambda_{\pm}(0)$ 在 $A^2 + B - 1 < 2A\sqrt{B}$ 时为复数，即在窗口 $(\sqrt{B}-1)^2 < B < (A+1)^2$, 内，该窗口包含 B_H。在此处，式（47）中只有下界起作用。当 $B = B_H$ 时，该式为 $A\sqrt{\sigma^2 - 1} > 1$，即 $A > A_c$，其中A_c 图灵–霍普夫点 [式（51）], ，并且对于所有更大的 B仍然满足。对于 $A > A_c$，因此在整个该窗口内，有限-q 模态的增长最快。在其上方， $B > (A+1)^2$, 只有上界起作用。等式$A^2 + B - 1 = 2\sigma A\sqrt{B}$是关于 $\sqrt{B}$ 的二次方程，其较大根为交叉点

$$\sqrt{B_\star} = \frac{A}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) + \sqrt{1 + \frac{A^2}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2}, \qquad r = \sqrt{d_v/d_u}. \tag{48}$$

对于 $B_H < B < B_\star$ 两种模态都不稳定，并且有限q 模态增长最快；对于 $B > B_\star$ 均匀模态增长最快。对于较大的 A，式（48）可化简为 $B_\star \simeq A^2 d_v/d_u$。

B	不稳定模态	最快模态线性预测	
$< B_T^{\mathrm{eff}}$	—	—	均匀
$(B_T^{\mathrm{eff}}, B_H)$	有限-q	有限-q	**图案**
$(B_H, (A+1)^2)$	有限-q 和 $q=0$	有限-q †	**竞争**
$((A+1)^2, B_\star)$	有限-q 和 $q=0$	有限-q	**竞争**
$> B_\star$	有限-q 和 $q=0$	$q=0$	均匀振荡

表 I. 一维理论预测的、取决于反应参数的不同相的总结 B，对于 $A > A_c$ (因此 $B_T^{\mathrm{eff}} < B_H$)。 †在此范围内，均匀模态特征值为复数，斜率判据不适用。最快模态由式（47）的下限确定。

D. 二维系统的数值线性理论

为了进一步深入了解系统的物理机制并进一步验证我们的模型，我们也可以直接对完整二维系统进行线性化，而无需采用一维约化，所使用的单轴向模态为 $\delta\boldsymbol{w} = (\delta u(y)\ \delta v(y))^{\top} e^{\lambda t + iqx}$，其中 $y \in [-1,1]$ 是重缩放横向坐标（这里忽略入口和出口处的边界条件）。需要注意的是，此处的 δu 和 δv 表示完整二维场。在实验室坐标系中，令 $W_x(y) = \frac{3}{2}(1-y^2)$，我们有：

$$\lambda\delta u = -iqW_x(y)\delta u + \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(-q^2\delta u + \frac{\partial_y^2 \delta u}{\ell^2}\right) + \mathrm{Da}\left[(B-1)\delta u + A^2\delta v\right], \tag{49a}$$

$$\lambda\delta v = -iqW_x(y)\delta v + \frac{\delta}{\mathrm{Pe}}\left(-q^2\delta v + \frac{\partial_y^2 \delta v}{\ell^2}\right) + \mathrm{Da}\left[-B\delta u - A^2\delta v\right]. \tag{49b}$$

将 y 在 N_y 个点上离散化（对于我们的结果，取 $N_y = 64$ ）后，可将其转化为一个稠密的 $2N_y \times 2N_y$ 复特征值问题。我们通过构造矩阵 $\mathcal{L}$ 使得 $\lambda(\delta u,\ \delta v) = \mathcal{L}(\delta u,\ \delta v)$ 。需要注意的是，除线性化之外，方程（49a）–（49b）不作任何近似；而在我们的有效一维理论中，特征值 $\lambda_{\pm}(q)$ 是关于 $\epsilon = \mathrm{Pe}\ell^2$ 的展开式的首项。

在二维稳定性分析中，随后按照约化理论的方法，通过比较均匀模态的增长率 $\mathrm{Re}[\lambda(0)]$，与增长最快的有限波数模态的增长率 $\max_{q>0}\mathrm{Re}[\lambda(q)]$，对 (A, B) 平面上的每一点进行分类：如果二者均为负，则系统稳定；如果只有后者为正，则出现图灵相；如果均匀模态不稳定且增长最快，则存在霍普夫相；如果二者均不稳定且有限波数模态增长更快，则产生竞争相。这与 Vasquez [27]最初在其数值稳定性分析中采用的策略一致。这里采用这种方法，是为了作为独立基准，验证我们的有效一维理论所得到的闭式阈值。

最后，我们注意到，我们还对完整的非线性方程 [方程（39a）–（39b）]进行了数值求解，初始状态为受到小幅随机噪声扰动的均匀态。数值方法，以及如何从模拟中读出各相和波长的相关说明，见附录 A。

IV. 结果

这里，我们首先讨论流动对受限通道几何中图案形成的影响，并介绍相关预测（第 IVA节）。具体而言，我们给出约化理论预测的完整相图，并将其与二维数值稳定性分析及非线性数值结果进行比较（第 IVB节）。非线性模拟揭示了涌现的振荡霍普夫相和图灵图案。最后，我们利用约化理论量化后者的波长（第 IVC节）。

A. 细长通道中的剪切诱导图灵图案

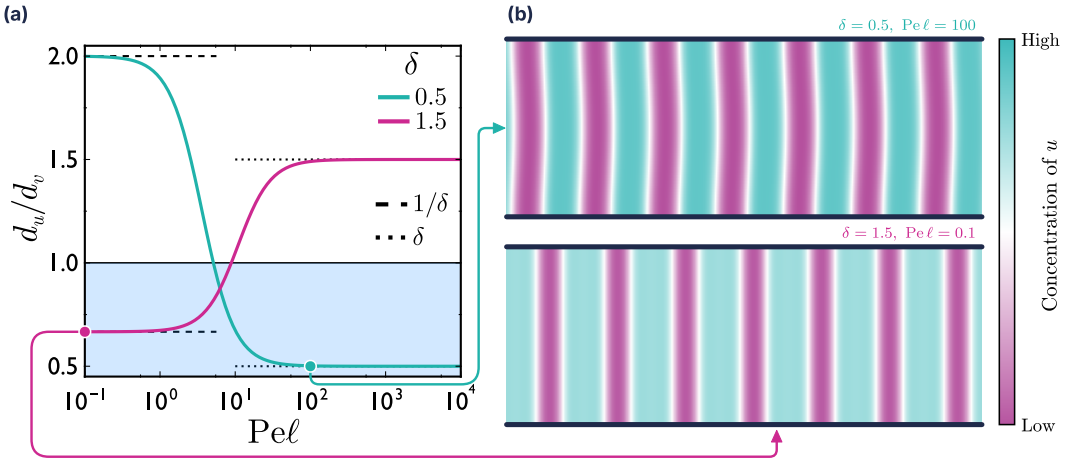

图 3 d_u/d_v ℓ $\delta =$ 。$D_v/D_u = 0.5$ 1.5 $1/\delta$ ℓ 剪切诱导的图案。(a) 有效（Taylor–Aris）扩散率之比随 Pe 的变化，其中 和 。在小 Pe 时，该比值趋近于 （虚线），对应于无流动时的经典图灵不稳定性。在大 Pe 时，该比值收敛至 δ （点线），且仅通过 Peℓ依赖于 Pe 和 ℓ 。阴影区域 $d_u/d_v < 1$ 表示图灵图案可能存在的范围。(b) 两个标记点（$A = 7,\ B = 49$）处模拟得到的激活子场。低浓度以紫色表示，高浓度以蓝绿色表示。上：Pe$\ell = 100$（Pe $= 10^6,\ \ell = 10^{-4}$）时的 $\delta = 0.5$ 。流动改变了扩散率排序，并形成条纹；条纹受泊肃叶剖面影响而弯曲，并随平均流漂移。下：Pe$\ell = 0.1$ （Pe $= 10^2,\ \ell = 10^{-3}$）时的 $\delta = 1.5$ 。此处剪切可以忽略，恢复了具有笔直条纹的经典图灵图案。

在我们的约化理论中，稳定性分析表明，单独的平流不会改变阈值。泊肃叶流的影响源于其相关的剪切（$\propto \partial_y W_x$）对有限波长不稳定性阈值 B_T^{eff} 的作用，该阈值对应于有效图灵阈值。最重要的是，在 $\epsilon = \mathrm{Pe}\ell^2$ 的主导阶中，化学物种的分子扩散率会被有效扩散率所取代；这些有效扩散率在经典泰勒–阿里斯弥散理论中已有充分研究。对于强流，后者按 $D_{\mathrm{eff},\ i} \propto H^2 W_0^2/D_i$ 增长，表明流动能够

增强分子物种的扩散率，并且对于扩散较慢的物种更为重要。这一特征进入图灵阈值 [方程（46）] 中，形式如下：

$$B_T^{\mathrm{eff}} = \left(1 + A\sqrt{\frac{d_u}{d_v}}\right)^2 = \left(1 + A\sqrt{\frac{\delta\left(105 + 2\ell^2\,\mathrm{Pe}^2\right)}{105\,\delta^2 + 2\ell^2\,\mathrm{Pe}^2}}\right)^2 . \tag{50}$$

因此，图案可以存在于窗口 $B_T^{\mathrm{eff}} < B < B_H = 1 + A^2$ 内，但这只有在有效扩散率之比很小的情况下才可能实现 $d_u/d_v < 1$。对于弱流动 $\mathrm{Pe}\ell \ll 1$，阈值趋近于经典图灵阈值：$B_T \approx (1 + A/\sqrt{\delta})^2$ ，其中 $\delta = D_v/D_u$ [3]。这意味着只有在 $1/\sqrt{\delta} < 1$ 时图案才可能出现，这反映出抑制剂的扩散速度必须远高于激活剂： $D_v > D_u$。相反，对于强流动 $\mathrm{Pe}\ell \gg 1$，我们发现$B_T \approx (1 + A\sqrt{\delta})^2$, ，表明强流动会反转图案形成的判据， $\sqrt{\delta} < 1$或 $D_u > D_v$。这说明，在激活剂扩散速度高于抑制剂的系统中，强流动的存在可以使图案形成。

图 3 展示了不同分子扩散率之比 $\delta = 0.5$ 和 $\delta = 1.5$ 下，有效扩散率之比 d_u/d_v 随流动强度 $\mathrm{Pe}\ell$ 的变化。两个有效扩散率在 $(\mathrm{Pe}\ell)^* = \sqrt{105\delta/2}$ 时相等（$d_u = d_v$）。在这一交叉点处，剪切反转了有效扩散率的大小顺序。对于 $\delta = 1$ ，不存在交叉点，因为两个物种受到的弥散相同， $d_u/d_v = 1$ 对每个 $\mathrm{Pe}\ell$ [均成立，因此流动无法产生图案。图灵图案可以存在的参数空间区域以浅蓝色标示。对于 $\delta = 1.5$ ，我们的约化理论预测，弱流动 $\mathrm{Pe}\ell \lesssim 10$ 下的稳定图案会在强流动下消失，这表明流动能够破坏在无流动时稳定的图灵图案。相反，我们发现对于 $\delta = 0.5$ ，稳定图案会在 $\mathrm{Pe}\ell \gtrsim 10$ 增大时出现。我们通过对二维系统进行完整非线性模拟验证了这些预测。有趣的是，对于弱流动 $\mathrm{Pe}\ell \gtrsim 0.1$，且在 $\delta = 1.5$ 的情况下，Brusselator动力学会在通道几何结构中形成条纹斑图。在更强的流动 $\mathrm{Pe}\ell \gtrsim 10$ 下， $\delta = 0.5$ 也观察到了类似的图案。后者的条纹因施加的泊肃叶流速度分布而表现出轻微弯曲。

我们注意到，这两种图案在通道内（沿 y 方向）几乎均匀，这表明约化理论的假设得到了满足。

B. 存在和不存在流动时的相图

为了量化不同的相以及流动的影响，我们展示了（A， B）空间中的相态图，并在图 4 中比较有流动和无流动的情况。在 $\delta = 0.5$ （第一行），经典 Brusselator模型只能处于稳定态或振荡态（霍普夫态），不会呈现任何图案。相比之下，开启流动（右列）并使 $\mathrm{Pe}\ell \geq 10$ 后，会出现图灵带，并形成图案。由于有限 q 模态也不稳定，我们还标出了一个“竞争”区域，在此区域内，霍普夫态和图灵态决定系统的状态。当抑制剂的扩散率高于激活剂时， [图 4，第二行] （$\delta = 1.5$），Brusselator模型在静止时也能呈现图案。在 $\mathrm{Pe}\ell = 20$ 流动下，剪切反转有效扩散率的排序，图灵带和竞争区域随之消失，只剩下稳定态和振荡态。

我们通过将约化模型的预测结果与二维数值稳定性分析所得的各相进行比较，来评估该模型预测的有效性（结果以颜色显示于图 4 中）。对于这组参数，当扰动参数较小时（$\epsilon = \mathrm{Pe}\ell^2 = 0.01$），两种预测结果非常接近，这证实了对于非常狭窄的通道，我们的解析预测是准确的。

为了系统研究约化理论在多大程度上能够组织参数空间中的不稳定性，我们针对不同的 $\epsilon = 0.1$、0.5 绘制了图 5 中的相图。在 $\epsilon = 0.1$ 时，三条边界都与精确线性算子中发现的转变密切吻合。在直接模拟中（面板 c）也恢复了相同的区域排序，但存在一个差异：其中并未出现竞争区域这一独立相，因为模拟通过将系统从受扰动的均匀态演化至最终态来确定实际实现的状态，而最终态可能是均匀态、图案态或振荡态。为了与理论进行比较，我们从 $B_H = B_T^{\mathrm{eff}}$中确定图灵–霍普夫点。对于 $d_u/d_v < 1$ ，其计算结果为：

$$A_c = 2\frac{\sqrt{d_v d_u}}{d_v - d_u}. \tag{51}$$

图灵带（$B_T^{\mathrm{eff}} < B < B_H$）仅在 $A > A_c$条件下存在。由非线性数值计算产生的振荡态与斑图态之间的转变可由 A_c 准确预测，该转变在图5中以蓝色竖线表示。

除稳定态、霍普夫态和图灵态外，模拟还显示出第四种状态，不属于上述任何一类：均匀振荡与静止的局域图灵区域共存，使得 $\langle u\rangle$ 的空间和时间扩展相当。

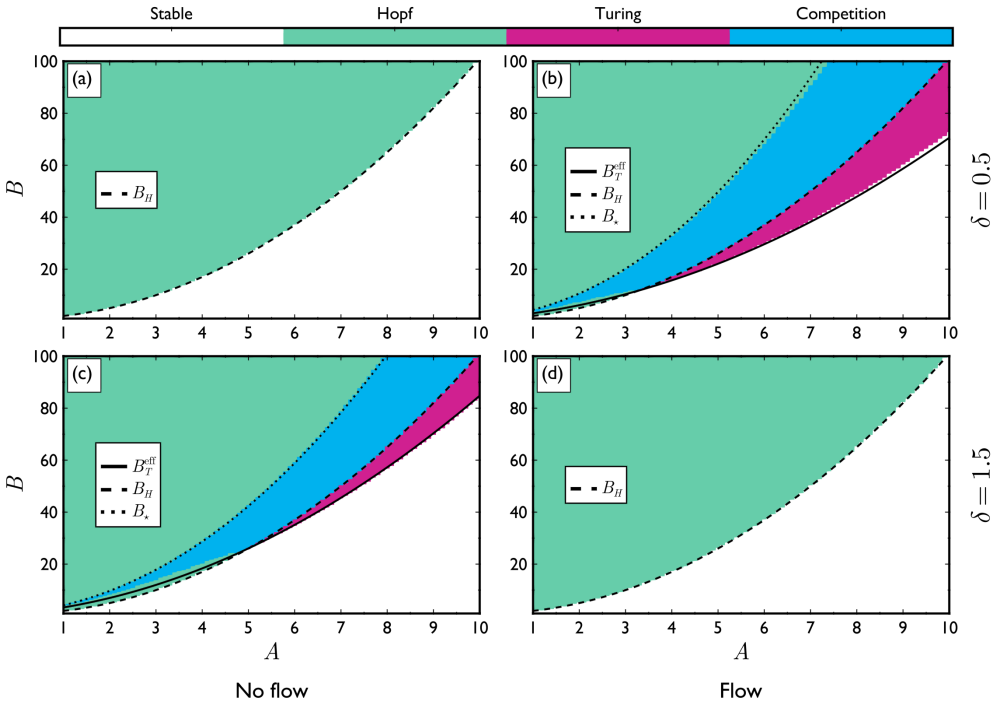

图4. 无流动（左）和有流动（右）（Pe$\ell = 20$）时，(A, B) 平面上的相图，分别对应 $\delta = 0.5$ （上）和 $\delta = 1.5$ （下）。这里，Da $= 1$ 和 $\epsilon = 0.01$。线条表示约化方程线性理论的预测，并按增长最快的模态分类。线条：Hopf阈值 B_H （虚线） [方程（45）], 有效图灵阈值 $B_T^{\rm eff}$（实线） [方程（46）], 交叉点 $B_\star$ （点线） [方程（48）]。颜色表示二维系统数值线性稳定性分析的结果。

这些状态位于 A_c 附近，此处均匀模态和有限波数模态均不稳定，且增长率相当。从线性理论的角度无法判定它们是否存在，因为线性理论只能对增长率排序；但从弱非线性分析的角度来看，预计它们会存在（参见文献 [37, 38]）。

当横向扩散时间与轴向溶质平流时间（$\epsilon = 0.5$）相当时，有效理论便无法准确预测图灵带开启所对应的阈值：时间尺度分离失效。由于约化要求 ϵDa $\ll 1$，Da 越大，这种失效发生时的 ϵ 就越小。均匀模态（$q = 0$）不涉及扩散，因此无论 ϵ 如何，约化都能精确再现该模态。有限-q增长率及其对应的 $B_T^{\rm eff}$ 仅能通过横向粗粒化近似得到；随着 ϵ 增大，这种近似会失效，因为约化忽略了扰动的横向结构。同样的误差会直接传递到图灵–霍普夫点： A_c 由比值 d_v/d_u 确定，且只取决于 Peℓ和 δ，而与 ϵ 无关。因此，非线性模拟中发现的图灵相会跨越阈值 A_c ，无法用约化模型描述。

C. 霍普夫相与图灵相分析

非线性模拟使我们能够观察通道横截面上的浓度分布。在霍普夫相中，浓度在通道横向和纵向均匀分布，并随时间在低值与高值之间振荡，见图 6(a)。这种振荡与流动无关，其周期按 $1/$Da 缩放。接近起始点时，振荡幅度较小且呈谐波形式，频率为线性化动力学预测的 $\omega_H =$DaA 。然而，在图 6(a) 中， $B = 20$ 远高于起始点（$B_H = 5$ 且 7。25 对应 $A = 2$ 且 2。5），此时系统处于弛豫振荡状态，其周期由非线性动力学决定：先是 v （低 u浓度）缓慢累积，随后 u （低 v 浓度）迅速尖峰式上升。更大的 A 仍会产生更多尖峰，但振荡速度慢于线性霍普夫频率 ω_H；该频率仅能描述 B_H附近的小幅振荡。需要注意的是，改变 Da 只会重新缩放时间，而改变 A 则会改变动力学本身。

在图灵相中，我们的结果显示，随着流动强度 Pe 增大，条纹的波长也随之增大ℓ，见图 6(b)。这些条纹以平均流速移动，并会因流动造成的形变而弯曲

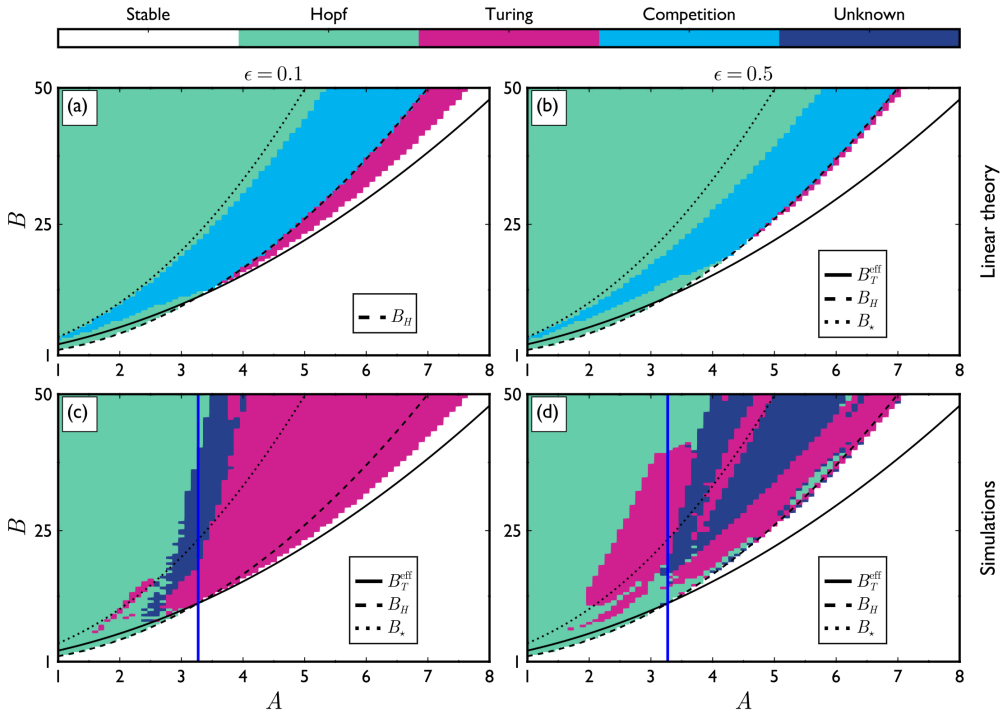

图5。在 Peℓ $= 20$、 $\delta = 0.5$和 Da $= 1$ 下， $\epsilon = {\rm Pe}\ell^2 = 0.1$ （左）和 $\epsilon = 0.5$ （右）的验证结果。 (a)–(b)：二维通道精确线性算子得到的相，由最快增长模态分类。(c)–(d)：从饱和态的噪声播种模拟中读出的相。垂直线为图灵–霍普夫点 $A_c = 3.27$，公式（51）。

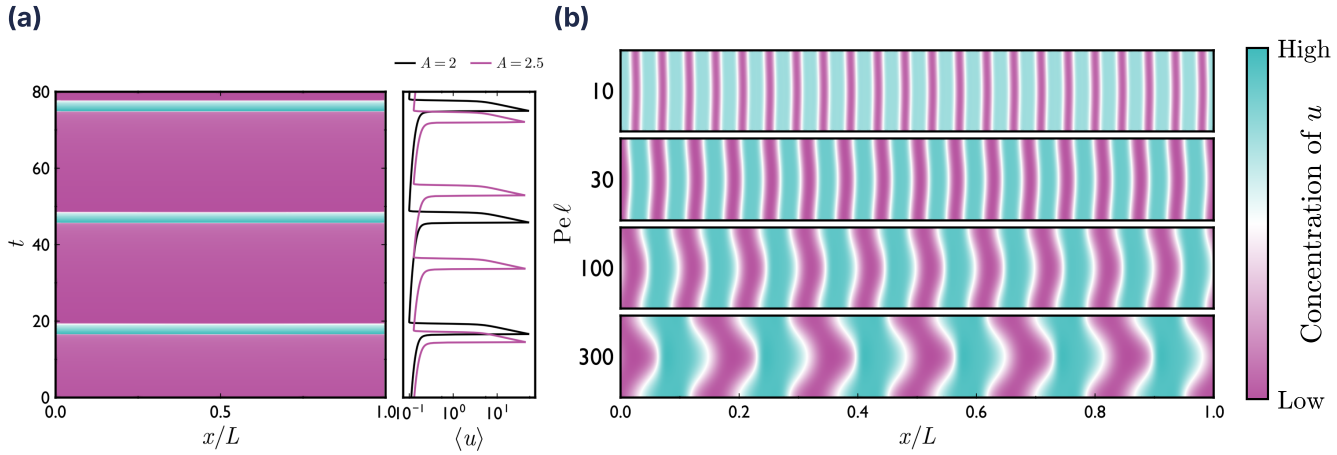

图6。(a) 浓度振荡显示为横截面平均浓度 $\langle u \rangle(x,\ t)$ 的时空图（左），以及沿通道长度 $\langle u \rangle$ 的平均值随时间的变化（右）。参数为 $A = 2$、$B = 20$、 $\delta = 0.5$、Da $= 1$ 和 Pe$\ell = 20$。(b) 不同流动强度 Peℓ 下的图灵图案。参数为 $A = 7$、 $B = 49$、 $\delta = 0.5$、Da $= 1$ 和 $\ell = 0.001$。

剖面。随着流动强度增大，这种现象更加明显。如图 3所示，在存在流动时， $\delta < 1$ （Pe 较大时ℓ）和 $\delta > 1$ （Pe 较小时ℓ）均可出现图案。我们还可以通过计算其波长来进一步量化这些图案；该波长由远离阈值处选定的（即增长最快的）波数确定。对于 Brusselator模型，选定波数 [式（32a）] 为

$$q_{\rm sel}^2 = \frac{{\rm Da}\left[A\sqrt{B}(d_u + d_v) - (A^2 + B - 1)\sqrt{d_u d_v}\right]}{(d_v - d_u)\sqrt{d_u d_v}}, \tag{52}$$

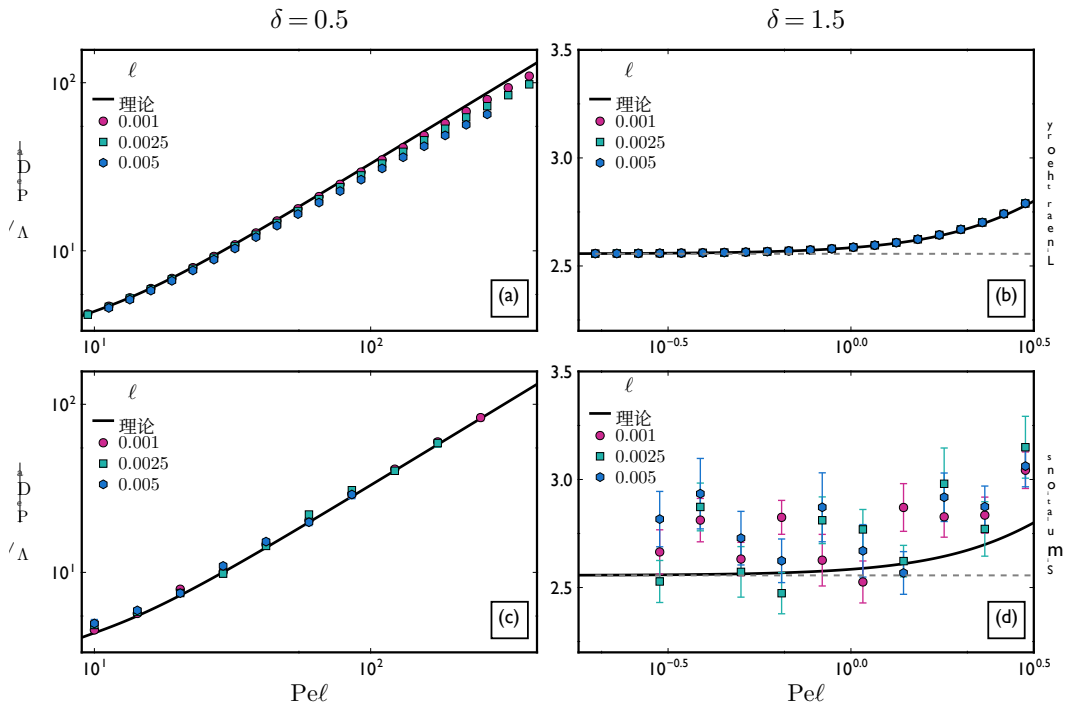

图7. 随 Peℓ 变化的缩放波长：对于 $\delta = 0.5$ （左侧，流动产生图案）和 $\delta = 1.5$ （右侧，流动破坏图案）， $A = 7$、 $B = 49$、Da $= 1$，对应三种纵横比 ℓ。实线：约化理论 [式（52）]，，对所有 ℓ均为一条曲线。(a)–(b)：精确线性算子的增长最快波长。(c)–(d)：模拟中饱和图案的波长，显示为 $\epsilon \lesssim 0.5$。只有波长为 $\Lambda = L_x/n$ 时才能容纳于长度为 L_x的周期性区域中，其中 n 为周期数。误差棒表示 $\pm\Lambda/(2n)$，即与相邻可容许波长 $L_x/(n \pm 1)$ 间距的一半。在 (b) 和 (d) 中，灰色虚线表示式（55）的低 P´eclet 极限。

及其对应的最大增长率 [式（32b）]

$$\lambda_{\max} = \mathrm{Re}\,\lambda_+(q_{\mathrm{sel}}) = \mathrm{Da}\,\frac{\left(A\sqrt{d_u} - \sqrt{Bd_v}\right)^2 - d_v}{d_v - d_u}. \tag{53}$$

因此，我们注意到选定波长可以写为：

$$\Lambda = \frac{2\pi}{q_{\mathrm{sel}}} = \frac{\varphi(\mathrm{Pe}\ell, A, B, \delta)}{\sqrt{\mathrm{PeDa}}}, \tag{54}$$

其中 φ为某个函数。值得注意的是，我们观察到它并不显式依赖于 ℓ；我们可以通过对二维系统进行数值稳定性分析和非线性数值计算，直接检验这一点。

图7展示了重标度后的波长 $\Lambda\sqrt{\mathrm{PeDa}}$ 随 Peℓ 的变化关系，涵盖高 P´éclet 数且$\delta < 1$ 的参数区间，以及低 P´éclet 数且 $\delta > 1$ 的参数区间（如图3所示）。上排将理论曲线与精确线性算子进行比较。与约化理论不同，精确线性算子通过1/Pe 和 $\epsilon = \mathrm{Pe}\ell^2$，分别独立依赖于 Pe 和 ℓ。选定波数取自由式（49a）–（49b）构建的算子的主特征值最大值。在高 Peℓ 面板中，我们发现数据收敛到一条主曲线，这与约化理论的预测一致（图7中的实线）。这种收敛在 Peℓ 跨越两个数量级的范围内都成立，但在 Peℓ达到最大值时开始变差，此时扰动参数 $\epsilon = \mathrm{Pe}\ell^2$ 达到最大。由于 ϵ 在该范围内变化超过一个数量级，这一结果是对约化的真正检验。相比之下，低 Peℓ 面板显示 $\Lambda\sqrt{\mathrm{PeDa}}$ 呈平坦曲线。在低 P´éclet 极限下，当 $d_u/d_v \approx 1/\delta$时，我们发现

$$\Lambda \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{PeDa}}}\sqrt{\frac{(\delta-1)\sqrt{\delta}}{A\sqrt{B}(1+\delta) - (A^2 + B - 1)\sqrt{\delta}}}, \tag{55}$$

从而形成一个由分子扩散率比 δ决定、而非由流动决定的平台。我们注意到，在所绘制的 Pe 范围内，$\ell\,\epsilon$ 从未超过 ≈ 0.02。这里的一致性主要证实了约化模型得到的渐近行为。

底行将同一条约化理论曲线与直接模拟结果进行了比较，其中波长通过盒模读取 $q = 2\pi n/L_x$ ，模拟位于长度为 L_x的周期性区域内，分辨率为 $\Delta\Lambda/\Lambda = 1/(2n)$。由于 Λ 会随着 Pe 增长ℓ ，在该 $\delta < 1$ 分支上， n 在固定长度的盒中会变短，分辨率也会降低。因此，我们选择 L_x 介于 L 和 $4L$ 之间，使其大约包含十个周期，并将误差条限制在该数值的 5% 以内。我们观察到，对于高 Peℓ （以及 $\delta < 1$），所有纵横比下的数值结果都坍缩到一条主曲线上，并且与解析预测吻合良好。对于低 Peℓ （以及 $\delta > 1$）情形，模拟得到的波长系统性地长于增长最快的波长。事实上，在这两种情况下，模拟结果都偏移了相同的绝对量，但这一效应在图 7（c）的对数刻度上完全不可见。因此，约化理论定性地捕捉到了波长如何依赖于流动和几何形状。

V. 总结与结论

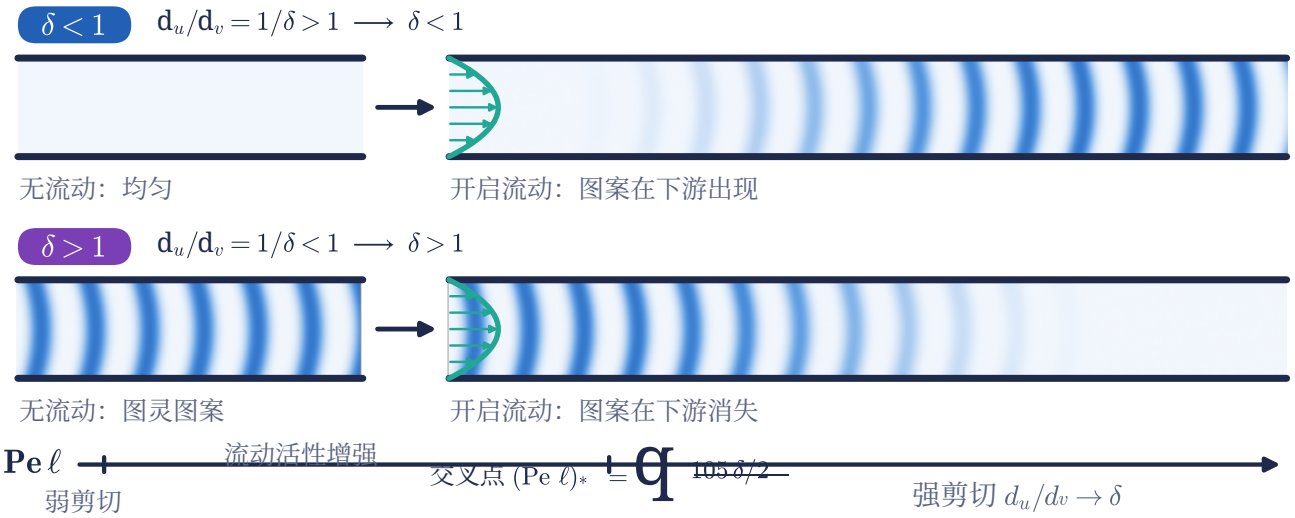

图 8. 剪切诱导的生成以及细长通道中图灵图案的破坏。Taylor–Aris 色散会进一步提高较慢物种的轴向扩散率，因此不稳定性判据 d_u/d_v 会从弱流时的 $1/\delta$ 转变为强流时的 δ 。

本文表明，细长通道中的泊肃叶流可在反应–扩散系统中充当一种独立的图案形成机制，既能生成也能破坏化学图案，而无需改变底层反应动力学。我们研究了由平面流驱动、在细长通道中运行的 Brusselator 系统，并采用不变流形约化，推导出关于横截面平均浓度的有效一维方程。在这些方程中，流动除了表现为平均平流外，还体现为依物种而异的 Taylor–Aris 扩散率， d_u 和 d_v。即使分子扩散率之比 δ违反经典图灵序，它们的比值仍可能越过 1，因此剪切可为 $\delta < 1$打开一个图样形成窗口——在静止时该窗口并不存在；而对 $\delta > 1$，剪切则会关闭一个原本能够稳定形成图案的窗口。在非线性状态下，图案形成横跨通道宽度的条带：通道宽度远小于波长，因此浓度在通道横向上几乎均匀。当流动生成图案时，这些条带会随平均流向下游漂移，并因泊肃叶剖面而弯曲。有趣的是，图案的波长随佩克莱数 P′增大，这与我们的约化理论预测在定量上吻合。

虽然本文考察的是压力驱动的泊肃叶流，但其他流动剖面，例如再循环流或脉动流，也可能与果蝇或秀丽隐杆线虫胚胎中由皮层驱动的流动，以及花粉管和根毛中的流动有关 [18, 39]。此外，不变流形约化方法已应用于时变流动 [29], ，这可能会影响黏菌中的图案形成 [40]。还可以将反应–扩散型系统替换为针对形成凝聚体的蛋白质的反应性相分离模型，从而进一步扩展该框架。在这种情况下，空间组织将源于稠密相和稀相的共存，而不是有限波长图灵不稳定性。将薄通道约化扩展至平流 Cahn–Hilliard 模型，可以研究剪切流如何改变凝聚体粗化、稳态液滴尺寸以及受限几何中的轴向定位。这一方向与秀丽隐杆线虫合子中的 P 颗粒等系统有关；这些颗粒的空间定位通过凝聚与溶解进行调控 [41], ，也与反应性乳液模型有关，在这些模型中化学

反应控制凝聚体的大小和稳定性 [42–44]。

VI. 致谢

感谢 Pierre Haas 和 Fridtjof Brauns 对我们的手稿提出富有帮助的讨论和富有洞见的评论。

附录 A：数值模拟

我们在周期性轴向区域 $x \in [0, L_x)$ 以及通道横向方向上，求解完整的二维方程（39a）–（39b， $y \in [-1, 1]$ 并在无通量壁面条件下，于随平均流移动的参考系中进行计算，其中速度剖面为W_x（y） -1。我们采用斯特朗分裂 [45], 方法，即分别推进反应和输运：每个时间步包括半个时间步的反应、一个完整时间步的输运（平流和扩散），以及第二个半时间步的反应。由于输运是线性的，因此沿通道方向在傅里叶空间中对其进行精确求解，而通道横向方向采用与第 IIID节相同的离散化方式。反应采用显式中点（二阶龙格-库塔法）格式推进，在反应刚性较强时使用子步。我们采用时间步长 $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$， $N_y = 32$ 个通道横向网格点，且沿通道方向至少使用 128 个网格点。计算从均匀态（A， B/A）开始，并加入相对振幅为 $p = 10^{-3}$的白噪声扰动，该噪声在每个网格点处相互独立。

对于每次运行，我们保留运行后半段的横截面平均激活剂 $\langle u \rangle(x,\ t)$， $t \in [T/2, T]$。随后计算两个量：其空间展宽 s（沿 x 的标准差，再对时间取平均），用于衡量图案；以及其空间平均值的时间展宽 τ，用于衡量均匀振荡。若 s/A 和 τ/A 均低于 10^{-3}，则将该次运行归类为稳定，即系统处于不动点 $(A,\ B/A)$。否则，若 $s/\tau > 3$，则归类为图灵型；若 $s/\tau < 1/3$，则归类为霍普夫型；若 $1/3 \le s/\tau \le 3$，则归类为未确定，因为两种展宽均不占主导。阈值通过经验确定。通过检查时空图，将比值 3 设为判定标准，只有一种展宽明显占主导时才赋予相应标签； 10^{-3} 是初始噪声的振幅，因此只有在没有扰动增长时，运行才被归类为稳定。相边界的分辨率为网格尺度， $\Delta A = 0.1$ 和 $\Delta B = 0.5$。

波长由 $\langle u \rangle$ 沿 x的功率谱中读出：它是基模 n，即最低的强模态，因此不会将尖峰图案的谐波误认为波长，并且 $\Lambda = L_x/n$。盒长 L_x 在1到4之间选取（单位为 L），以确保其中至少容纳十个周期；每次运行的持续时间也足够长，使图案达到饱和。

[1] A. J. Koch 和 H. Meinhardt，《生物图案形成：从基本机制到复杂结构》，《现代物理评论》66，1481（1994）。[2] G. B. Ermentrout 和 J. D. Cowan，《视觉幻觉图案的数学理论》，《生物控制论》34，137（1979）。[3] J. D. Murray，*Mathematical Biology*（Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，1989）。[4] J. J. Tyson，《所有人都应了解的别洛乌索夫–扎鲍廷斯基反应》，载于 *Frontiers in Mathematical Biology*，第100卷，S. A. Levin 编（Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，1994），第569–587页。[5] I. Prigogine 和 R. Lefever，《耗散系统中的对称性破缺不稳定性。II》，《化学物理学杂志》48，1695（1968）。[6] M. C. Cross 和 P. C. Hohenberg，《非平衡态图案形成》，《现代物理评论》65，851（1993）。[7] G. F. Oster、J. D. Murray 和 A. K. Harris，《间充质形态发生的力学方面》，《发育》78，83（1983）。[8] A. Mietke、V. Jemseena、K. V. Kumar、I. F. Sbalzarini 和 F. J¨ulicher，《细胞对称性破缺的最简模型》，《物理评论快报》123，188101（2019）。[9] M. Otsuji、S. Ishihara、C. Co、K. Kaibuchi、A. Mochizuki 和 S. Kuroda，《质量守恒反应–扩散系统捕捉细胞极性的特性》，《公共科学图书馆计算生物学》3，e108（2007）。[10] A. B. Goryachev 和 A. V. Pokhilko，《Cdc42网络的动力学体现了酵母细胞极性的图灵型机制》，《欧洲生化学会联合会快报》582，1437（2008）。[11] Y. Mori、A. Jilkine 和 L. Edelstein-Keshet，《双稳态反应–扩散系统中的波钉扎与细胞极性》，《生物物理学杂志》94，3684（2008）。[12] S. Basu、Y. Gerchman、C. H. Collins、F. H. Arnold 和 R. Weiss，《用于程序化图案形成的合成多细胞系统》，《自然》434，1130（2005）。[13] M. Loose、E. Fischer-Friedrich、J. Ries、K. Kruse 和 P. Schwille，《细菌细胞分裂的空间调节因子在体外自组织成表面波》，《科学》320，789（2008）。

[14] S. Nonaka、Y. Tanaka、Y. Okada、S. Takeda、A. Harada、Y. Kanai、M. Kido和N. Hirokawa，《缺失KIF3B运动蛋白的小鼠中，由产生向左流动胚外液的结节纤毛缺失导致的左右不对称性随机化》，《细胞》95，829（1998）。[15] N. Hirokawa、Y. Tanaka、Y. Okada和S. Takeda，《结节流与左右不对称性的产生》，《细胞》125，33（2006）。[16] R. E. Goldstein和J.-W. van de Meent，《细胞质流的物理学视角》，《界面焦点》5，20150030（2015）。[17] M. E. Quinlan，《*Drosophila* **32**, 卵母细胞中的细胞质流》，《细胞与发育生物学年度评论》（）。[18] P. H. Htet和E. Lauga，《伸长细胞中细胞质流的解析方法》，《PNAS Nexus》4，pgaf057（2025）。[19] *Molecular Biology of the Cell*第6版（Garland Science、Taylor and Francis Group，纽约，2015）。[20] A. B. Rovinsky和M. Menzinger，《差异流诱导的化学不稳定性》，《物理评论快报》69，1193（1992）。[21] A. B. Rovinsky和M. Menzinger，《激活剂和抑制剂的差异流诱导的自组织》，《物理评论快报》70，778（1993）。[22] A. B. Rovinsky和M. Menzinger，《无不稳定（激活剂）子系统的动力系统中的差异流失稳》，《物理评论快报》72，2017（1994）。[23] Y. Balinsky (Khazan)和L. M. Pismen，《库埃特流中的差异流诱导化学不稳定性与图灵不稳定性》，《物理评论E》58，4524（1998）。[24] L. Stucchi和D. A. Vasquez，《差异剪切流诱导的图案形成》，《物理评论E》87，024902（2013）。[25] L. Stucchi和D. A. Vasquez，《差异泊肃叶流诱导的图案形成》，《欧洲物理期刊专题》223，3011（2014）。[26] R. A. Van Gorder、H. Kim和A. L. Krause，《复杂区域中反应—扩散过程与斯托克斯流耦合产生的扩散失稳和空间图案形成》，《流体力学杂志》877，759（2019）。[27] D. A. Vasquez，《剪切流诱导的化学不稳定性》，《物理评论快报》93，104501（2004）。[28] G. N. Mercer和A. J. Roberts，《具有变化流动特性的通道中污染物弥散的中心流形描述》，《工业与应用数学学会应用数学杂志》50，1547（1990）。[29] S. Marbach和K. Alim，《具有流动和脉动壁面的通道内弥散的主动控制》，《物理评论：流体》4，114202（2019）。[30] G. I. Taylor，《流经管道的缓慢流动溶剂中可溶物质的弥散》，《伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学》219，186（1953）。[31] R. Aris，《流体流经管道时溶质的弥散》，《伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学》235，67（1956）。[32] L. A. Segel和J. L. Jackson，《耗散结构：一种解释及一个生态学实例》，《理论生物学杂志》37，545（1972）。[33] I. Prigogine和G. Nicolis，《耗散系统中的对称性破缺失稳》，《化学物理学杂志》46，3542（1967）。[34] R. Lefever和G. Nicolis，《化学失稳与持续振荡》，《理论生物学杂志》30，267（1971）。[35] J. F. G. Auchmuty和G. Nicolis，《非线性反应扩散方程的分岔分析——I. 演化方程与稳态解》，《数学生物学通报》37，323（1975）。[36] J. Verdasca、A. De Wit、G. Dewel和P. Borckmans，《重入六边形图灵结构》，《物理快报A辑》168，194（1992）。[37] A. De Wit、D. Lima、G. Dewel和P. Borckmans，《余维二点附近的时空动力学》，《物理评论E》54，261（1996）。[38] M. Meixner、A. De Wit、S. Bose和E. Sch¨oll，《余维二图灵-霍普夫分岔附近的一般时空动力学》，《物理评论E》55，6690（1997）。[39] P. H. Htet和E. Lauga，《伸长细胞中的皮层驱动的细胞质流：流体力学及其在 *Drosophila* 胚胎核运输中的应用》，《皇家学会界面杂志》20，20230428（2023）。[40] L. Schick、E. Eichenlaub、F. Drexel、A. Mayer、S. Chen、M. Roper和K. Alim，《光捕获黏菌中的决策涉及主动机械过程》，《PRX Life》4，023026（2026）。[41] C. P. Brangwynne、C. R. Eckmann、D. S. Courson、A. Rybarska、C. Hoege、J. Gharakhani、F. J¨ulicher和A. A. Hyman，《生殖系P颗粒是通过受控溶解/凝聚实现定位的液滴》，《科学》324，1729（2009）。[42] C. A. Weber、D. Zwicker、F. J¨ulicher和C. F. Lee，《活性乳液的物理学》，《物理学进展报告》（）。[43] J. Janssen、F. J¨ulicher和C. A. Weber，《具有物质供给的乳液动力学理论》，《物理评论E》113，045420（2026）。[44] C. Datt、J. Bauermann、N. B. Budanur和F. J¨ulicher，《化学活性乳液中的流体流动与时空混沌》，《物理评论快报》136，254001（2026）。[45] W. Hundsdorfer和J. Verwer，《*Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations*》，《施普林格计算数学丛书》第33卷（Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2003）。