arXiv:2611.32741v1 [econ.TH] 24 Nov 2026

何谓服从

Mark Whitmeyer*

2026年11月25日

摘要

在代理人参与同时行动博弈之前，设计者承诺采用一种向每位代理人发送信号的装置，并根据一个（豪斯多夫）连续函数评价由此产生的均衡集合。在不完全信息博弈中，我证明：当且仅当设计者假定将实现其偏好均衡时，她才可以在不损失最优性的情况下，将注意力限制于直接服从装置。在完全信息博弈中，我刻画了单调评价，其中包括最大乐观评价和最大悲观评价。

服从原则指出，只需“以一种让他们愿意服从的方式告诉他们该做什么”即可。这是机制设计和信息设计的一个基本特征。事实上，相关均衡和贝叶斯相关均衡的概念在很大程度上都将这一原则视为既定前提。

但让我们从委托人的角度来看问题：她设计相关装置（以及可能提供信息的装置）。她对博弈中所采取的行动组合具有偏好，并根据函数 V 评估博弈中由均衡产生的收益集合；该函数的定义域是实数的非空紧集的集合 K(R)

*致 KS。

（并且我还假设它是（豪斯多夫）连续且内在[1]）。如果服从原则在所有（有限）不完全信息博弈中都成立——也就是说，对于设计者而言，将注意力限制在服从型直接装置上并不会损失最优性——那么这说明 $\mathcal{V}$ 什么?

也就是说，假设对于委托人而言，在每个环境中将注意力限制在直接服从装置上均不损害最优性（环境由有限状态的元组、共同的全支持先验分布、有限个代理人的效用和有限行动集，以及委托人的状态依赖效用函数构成）。那么，任何连续的内在 V 必须采取什么形式?

我论证，**必然有** V =最大值。由于在设计最优均衡选择下，服从原则经典地成立，这就完全刻画了服从原则成立时的 V。

为证明必要性，我构造了一族双人协调博弈，其中未知状态是二维的：一个维度对应代理人的“目标”，另一个对应其“角色”。在这些博弈中，仅仅建议行动必然会使代理人无法确定自己的角色，从而产生额外的均衡；与其最偏好的均衡相比，这些均衡会给委托人带来更低的收益。一个同时向代理人揭示其角色的间接装置，则会使期望的行为成为唯一均衡。因此，对于除最大值之外的任何评价函数而言，该装置对委托人都严格更优。简言之，从间接装置转向直接装置所造成的信息损失总是可能带来损害，因为它为以有害方式进行协调创造了机会。

那是针对贝叶斯相关均衡而言的，它适用于不完全信息博弈。那么，对于完全信息博弈，装置的唯一作用是进行协调，又该如何呢？显然，V =最大值如今足以满足服从原则。**但现在，**V =最小值**也同样足够！**事实上，请注意，装置下的任何均衡集合都必须包含纳什均衡（毕竟，装置的输出不过是廉价的

[1]Me意味着 V 产生的收益介于最差和最佳均衡收益之间

talk 建议），而且总能通过某个直接装置使这些均衡服从。

事实上，即使我只考虑单调的评价（即只要委托人对行动的效用逐点增加，评价就必须增加），满足服从原则的评价集合也更大。我证明，对于这类单调（且连续、内在的）V，服从原则成立，当且仅当对每个 $S \in \mathbf{K}(\mathbf{R})$，都有 $\mathrm{V}(S) = \text{最大值}\{\text{最小值 } S,\ h(\text{最大值 } S)\}$，其中存在某个递增且连续的 $h\colon \mathbf{R} \to [-\infty, \infty)$，满足对每个 b 都有 $h(b) \leq b$，且 $h(b) = \inf_{a \leq b} \mathrm{V}(\{a,\ b\})$。

必要性论证分为两部分。首先，我证明评价的单调性迫使其只取决于最佳和最差均衡收益。随后（与不完全信息情形类似），我构造一些博弈，其中间接装置能够避开一个低收益均衡，而任何趋近最佳收益的直接装置都必然会导致该均衡。这些博弈表明，只要委托人的评价高于其最差收益，在保持最佳收益不变的同时降低最差收益，就不可能改变其评价；否则，她就会严格偏好间接装置，而非任何直接装置。总之，只有当委托人依据装置所对应的最差均衡来评价该装置时，她才会在意其最差均衡的恶化。

关于充分性，正如我在上文指出的，委托人无法摆脱纳什均衡收益。另一方面，她显然不可能取得高于自己最偏好的相关均衡收益。因此，最差纳什均衡收益与h最高相关均衡收益中的较大者，为委托人的评价提供了上界。如果该上界由最差纳什均衡收益决定，那么她始终可以通过服从型直接机制实现这一收益。否则，来自能使她获得最高收益的相关均衡的建议即可达到该上界。无论哪种情况，服从型直接机制都是最优的。

相关工作

标准的服从原则允许委托人将任意信息装置的一个均衡结果，复现为

直接装置的服从性均衡结果。[2] 直接装置无需复现原装置的其他均衡，服从原则（或委托人）也不会排除直接装置所引发的额外均衡。[3] 我探讨的是：当委托人评估完整的均衡收益集合时，何时仍能将注意力限制在服从性建议上。

Murra-Anton 等人 (2025) 也刻画了推荐原则成立的条件。他们允许接收者的效用以非线性方式取决于其信念，并找出这样的条件：合并那些诱导相同行动的消息，不会损害其最优性。他们的要求（与我的不同）是传统要求——即某个最优响应能够诱导出期望的结果。

与本文更为接近的是那些规定或研究信息设计者如何处理均衡多重性的论文。有些论文要求选择其最偏好的均衡；另一些则要求对抗性地选择其最不偏好的均衡。[4] Bergemann 等人(2024) 赋予设计者一个定义在均衡结果集合上的任意豪斯多夫连续目标函数，并证明，对于一大类信息设计问题，简单的信息结构已足够。Zeng (2026) 给出了这样的条件：当代理人的响应必须遵守指定的选择限制时，设计者可以通过同时推荐行动并提供有关代理人猜想的信息，保留一个完美贝叶斯均衡结果。

早期研究还探讨了相关装置的其他均衡。特别值得注意的是Ray (2002构造了一个双人博弈，其中服从和不服从都是直接装置的均衡。他构造了一个非规范装置

[2]关于相关均衡，参见 Aumann（1974）和 Aumann（1987）；关于贝叶斯相关均衡，参见 Bergemann 和 Morris（2016）。[3]直接建议也可能无法保留均衡精炼。Dhillon 和 Mertens（1996）针对完美相关均衡证明了这一点，而 Luo 等（2022）则为一种允许依赖消息的微扰的替代精炼得出了揭示原理。[4]Taneva（2019）研究了博弈中的设计者最优信息设计。Bergemann 和 Morris（2019）解释了为什么对抗性均衡选择会使通常的服从论证失效。Mathevet 等（2020）允许采用不同的选择规则，并研究了对抗性选择下的投资博弈；另见 Morris 等（2024），他们研究了对抗性选择下二元行动超模博弈中的信息设计。

该装置会诱导出服从性结果，但在该装置下，相应的不服从响应组合并不是均衡。[5] 我的完全信息构造建立在他的双人博弈及其装置族中的一个装置之上。我进一步证明，该装置的任何均衡都不会诱导出不希望的行动分布；随后加入第三个代理人，使其在该装置下的最佳响应能够在前两个代理人的均衡行动分布下为委托人带来规定的收益，同时不改变他们的激励。[6]

最后，在机制设计中，完全实施要求均衡结果的完整集合与期望集合一致。[7] 在与本文配套的另一篇论文中，Whitmeyer（2026），我刻画了揭示原理何时普遍成立。在没有转移支付的情况下（如本文），委托人的评价必须是最大值；有转移支付时，这一点（近似地）无关紧要。

1 直觉

我先从较简单的情形开始：不完全信息博弈。对于这类博弈，关键论证包含在引理 3.2 中。为简单起见，考虑一个收益二元集合 $F = \{b,\ a\}$ $(a < b)$。我构造了一个有两个代理人的不完全信息博弈，其中每一个使委托人获得 b 收益的服从型直接机制，也会诱导出一个严格均衡，使委托人获得 a收益；然而，存在一种非直接机制，在唯一均衡中使委托人获得 b 收益。

状态有两个维度。一个维度为每位代理人指定两个可选目标行动中的一个；另一个维度指定每位代理人的角色。第一种角色使

[5]另见Ray（2008）。

[6]我利用由此得到的三代理人博弈来证明：每一个接近委托人可获得的最高均衡收益的直接装置，也存在一个均衡，使她获得的收益低于间接装置的最差均衡收益。

[7]Palfrey 和 Srivastava(1989) 提出了一个分配规则的例子：尽管每个等价的直接机制都有额外的均衡结果，但间接机制仍能完全实施该分配规则。Kar 等(2010) 表明，一类相关均衡的选择规则违反 Maskin 单调性，因而无法在纳什均衡中得到完全实施。

代理人选择自己的目标行动时获得收益 0，选择其他行动时获得收益 -1 ，无论另一位代理人作何选择：

	目标	其他行动
目标	$(0,\ 0;\ b)$	$0,\ -1;\ \dfrac{3a-b}{2}\Big)$
其他行动	$-1,-2;\ \dfrac{3a-b}{2}\Big)$	$(-1,1\ ;\ a)$。

如果另一位代理人担任这一角色，情况也对称。

对代理人的效用取平均值（两种角色出现的可能性相同）：

	目标	其他行动
目标	$(0,\ 0;\ b)$	$-1,\ -1;\ \dfrac{3a-b}{2}\Big)$
其他行动	$-1,\ -1;\ \dfrac{3a-b}{2}\Big)$	$(0,\ 0;\ a)$。

任何能为委托人带来 b 最大收益的直接装置 q^0 都必须指示每位代理人选择其目标。然而，这样的装置无法揭示他们的角色（否则它就不再是直接装置）。此外，对该装置作出响应的其他每个均衡都会给委托人带来 a的收益。

第二个装置 λ^+同样会揭示代理人的角色。一旦角色被揭示，具有第一个角色的代理人无论另一位代理人如何选择，都会严格偏好其目标。在该选择给定的情况下，另一位代理人也会严格偏好其目标。因此， λ^+会产生唯一均衡：两位代理人都选择各自的目标，而委托人获得 b。

这一构造很容易推广到任意有限的收益集 $F=\{b=a_0>a_1>\cdots>a_k\}$。[8] 现在，每个代理人都有 $k+1$ 个目标和行动，沿圆周排列。我构造代理人的效用，使得当直接装置揭示目标但不揭示角色时（任何 b-达成的直接装置都会如此），他们

[8]由于我所构造的均衡具有严格性、各个空间具有紧致性，以及评价函数 V 的连续性，该结论可推广到紧集。

会产生相互协调的激励：每个代理人都希望最小化其差值（其行动与目标之差按模 $k+1$计算）和另一代理人的差值之间的期望平方距离。这会产生 $k+1$ 个纯策略均衡，在这些均衡中，每个人都选择相同的差值；而在其他均衡中，每个代理人的差值无条件分布都均匀分布在两个相邻整数上。我选择委托人的收益，使得这些纯策略均衡穷尽了 F 中的收益（且均为严格均衡），其余均衡产生的收益则是 F 中除 b 以外的收益。再次揭示角色后，选择目标就成为唯一均衡，并为委托人带来 b。

有了这个引理，定理 3.1 几乎可以立即得到。充分性是经典的。为证明必要性，假设 $\mathcal{V}$ $\neq$ 最大值。于是存在一个非空紧集 S 使得 $\mathcal{V}(S)$ $<$ 最大值 S。由 $\mathcal{V}$ 的连续性，我可以选择一个有限集 F，其最大值为 b，使得 $\mathcal{V}(F) < b$。引理 3.2 提供了一个装置 λ^+，该装置具有唯一均衡，并为委托人带来 b；而每个直接装置的价值都严格低于 b。

1.1 完全信息

对于完全信息博弈，关键论证包含在两个引理——引理 4.5 和 4.6——中。在第一个引理中，我利用评价 V 的单调性来简化其可能采取的形式，从而筛选出二元收益集合，作为刻画 V 所需的“测试集合”。具体而言，我证明了：V 满足单调性，当且仅当存在一个连续函数 f在 $\{(m, M) \in \mathrm{R}^2 : m \leq M\}$上，该函数关于每个自变量均为递增的，并满足 $m \leq f(m, M) \leq M$，使得对于每个 $S \in \mathrm{K(R)}$，$\mathrm{V}(S) = f(\min S, \max S)$。在这种情况下，$f(m, M) = \mathrm{V}(\{m, M\})$。

在证明中，我采用以下双人博弈（以正规形式表示）——无论我想要什么 k，它都恰好有 k 个均衡——以及会

输出常数信号的平凡装置。

	1	2	$\cdots$	$k-1$	k
1	$(1,1)$	$(0,0)$	$\ldots$	$(0,0)$	$(0,1)$
2	$(0,0)$	$(1,1)$	$\ldots$	$(0,0)$	$(0,1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	$(0,0)$	$(0,0)$	$\ldots$	$(1,1)$	$(0,1)$
k	$(1,0)$	$(1,0)$	$\ldots$	$(1,0)$	$(1,1)$.

有了这个博弈，我只改变委托人的收益。在一种设定下，均衡 $(1,1)\ldots,(k,k)$ 给她带来 $(x_1,\ldots,x_k)$，其中 $m=x_1\leq\cdots\leq x_k=M$。在另一种设定下，她得到 $(m,\ldots,m,M)$；在第三种设定下，她得到 $(m,M,\ldots,M)$；而这三种设定在非对角线上都给她 0。由于 $(m,\ldots,m,M)\leq(x_1,\ldots,x_k)\leq(m,M,\ldots,M)$，单调性意味着，委托人对 $\{x_1,\ldots,x_k\}$ 的评价必须介于她对另外两者的评价之间。此外，两个比较对象产生完全相同的收益集合 $\{m,M\}$，因此 $V(\{x_1,\ldots,x_k\})=V(\{m,M\})$。随后，我利用 V 的连续性，将这一结论从有限集推广到紧集。反过来则几乎显而易见：如果 V 仅通过函数 f 依赖最小值和最大值，且该函数对每个自变量都递增，那么提高委托人在每一种行动组合下的收益，会同时提高其均衡收益集合的两个端点，因而不会降低她的评价。

我还需要的另一个引理是，引理 4.6，它涉及的内容更多。在该引理中，我构造了一个具有若干有用特性的博弈。先设委托人收益的二元集合为 $\{a,b\}$，其中 $c<a<b$。有两位代理人，1 和 2，他们参与一个二元反协调博弈，该博弈有三个纳什均衡：两个严格的纯策略均衡，在这两个均衡中，他们的行动不协调；以及一个混合策略均衡。随后，我选择一个直接装置 q^*，在该装置下，服从和（始终）不服从都是严格均衡，后者会导致行动分布 q^-。我还构造了一个间接装置 λ_0，它有一个导致 q^* 的均衡，但没有导致 q^- 的均衡，[9] 而其余均衡导致

[9]新装置可以分解为两部分。首先，揭示两个公共组成部分中的一个。其次，在两个已实现的组成部分中的一个里，代理人不再收到任何信息，因此代理人

仅有有限多个其他行动分布。

然后，我构造一个函数 F，该函数取决于两个代理人的行动分布，使得F（q^-）$=c$、F（q^*）$=b$，并且 $F=a$ 对于由 λ_0 生成的每一个其他均衡分布（包括博弈的每一个纳什均衡分布），均满足[10]。为了使这些成为委托人的实际收益，我随后通过加入第三个代理人来修改博弈：每当前两个代理人的行动分布为 P 时，第三个代理人的每一个最佳响应都会使委托人的收益为 F（P）。代理人 1 和 2 保留其原有收益，而这些收益不取决于代理人 3 的行动。我通过为代理人 3 提供一个常数信号，将 λ_0 扩展到三代理人博弈中；该信号现在为委托人产生收益集合 $\{a、b\}$，而每个纳什均衡都会为委托人带来收益 a。

关键区别在于，直接装置无法在产生高收益 b 的同时不产生低收益 c。如果直接装置的某个均衡给予委托人的收益为 b，那么无论代理人 3 观察到什么，前两个代理人的行动分布都必须是 q^*。否则，由于 q^* 唯一地最大化了 F，委托人的平均收益就会严格低于 b。但反过来做则会诱导出 q^-。由于前两个代理人的激励在该均衡中严格成立，对于最高均衡收益充分接近 b 的每一个直接装置，同样的结论也近似成立：这种装置还必须存在一个收益接近 c 的均衡。

有了这些引理，我便证明该定理。关于必要性，引理 4.5 将问题归结为理解 $f(m,\ M)$ 如何随最差收益 m 变化，同时最佳收益 M 保持不变。我先取 $c<a<B$，并证明如果 $f(a,\ B)>a$，那么在保持最佳收益 B 固定的情况下，将最差收益从 a 降低至 c，不会

采用该博弈的某个纳什均衡。在另一个博弈中，代理人会收到额外的私人建议；这些建议经过精心选择，使得对这些建议可能作出的最佳响应，加上另一个组成部分中的纳什均衡行为，为某个特定行动组合的可实现概率设定了一个上限，而且该上限严格低于在 q^- 下的概率。[10]由于 λ_0 只产生有限多个均衡分布，且其中没有一个等于 q^-，我可以选取 q^* 和 q^- 的不相交邻域，使其中不包含其他此类分布；令 F 在这些邻域之外等于 a，并使它在 q^* 处升至 b，在 q^- 处降至 c。更具体地说，我选择 F，使其成为有限多个仿射函数的两个最大值之差。

改变评价。反之，假设 $f(c,B) < f(a,B) =: r$，并令 b为 $[a,B]$中满足 $f(a,b) = r$的最小元素。引理 4.6 随即给出一个包含某个装置的环境，该装置的收益集合为 $\{a,b\}$。这带来了委托人价值 r；由于该环境中的每个装置都在其均衡收益中包含 a，且在 $[c,b]$之外没有均衡收益，因此该价值在所有装置中也是最佳的。

但是，没有任何直接装置能够达到这个值，甚至无法近似达到。如果其最高均衡收益接近 b，引理 4.6就会迫使另一个均衡收益接近c；此时，f的单调性和连续性加上 $f(c,B)$的 $< r$意味着，其值将严格低于 r。如果其最高均衡收益与 b相差甚远，那么 b 的最小性又会使其值严格低于 r。因此，对于每个B，$f(m,B)$要么等于 m，要么一旦超过 m，便会随着 m下降而保持不变：用符号表示，定义 $h(B) := \inf_{m \le B} f(m,B)$，$f(m,B) = \max\{m, h(B)\}$，而 f 的单调性、连续性和内点性则推出 h的其他性质。

为证明充分性，取任意一个环境，并令 a 为委托人最差的纳什均衡收益，B为她最高的相关均衡收益。无论采用何种装置，代理人都可以忽略收到的信号，转而进行任意一个纳什均衡，因此委托人的最差收益不高于 a。显然，在任何装置下，她的最高均衡收益都不高于 B。因此，$\max\{a, h(B)\}$ 是任何装置下委托人收益的上界。一个服从型直接机制可以达到该上界。如果 $h(B) \le a$，只需使用由能给委托人带来 a的纳什均衡策略所生成的直接机制。如果 $h(B) > a$，则使用一个服从型直接机制，使其服从性均衡向委托人提供收益 B。

2 设计问题

存在一位委托人（女性）和一个代理人有限集，$\{1、\ldots\ldots、n\}$，$(n \ge 1)$。每位代理人 i 同时从一个有限非空集中选择一个行动 A_i。记作 $A = \times_i A_i$。存在一个状态 θ，它属于一个有限非空集 Θ，并根据一个具有满支集的共同先验 $\mu \in \Delta^\circ(\Theta)$抽取。如果在状态

θ，代理人 i 获得效用 $u_i(\theta,\ a)$，委托人获得收益 $v(\theta,\ a)$。元组$E=(\Theta,\ \mu,\ (A_i,\ u_i)_i,\ v)$是环境，这是共同知识。

委托人选择有限个信号集合 T_i，并承诺在自然抽取状态之前，在 $T=\times_i T_i$ 上采用一个装置（实验）$\lambda(t\mid\theta)$，由该装置私下向每位代理人发送其信号。随后，代理人同时选择行动。玩家 i 的响应策略为 $\sigma_i\colon\ T_i\to\Delta(A_i)$。响应均衡是响应策略中的贝叶斯纳什均衡。[11] 我用 $\mathsf{Eq}(\lambda)$ 表示响应均衡的集合。记作$\sigma(t)=\times_i\sigma_i(t_i)$，在均衡时，没有代理人能够通过偏离获利：

$$\sum_{\theta,t_{-i}}\mu(\theta)\lambda(t_i,t_{-i}\mid\theta)\left[u_i(\theta,\sigma(t))-u_i(\theta,b_i,\sigma_{-i}(t_{-i}))\right]\geq 0 \tag{1}$$

对每个 i，t_i和 $b_i\in A_i$均成立。委托人收益及其收益集合为

$$\Pi_v(\lambda,\sigma)=\sum_{\theta,t}\mu(\theta)\lambda(t\mid\theta)v(\theta,\sigma(t))\qquad\&\qquad S_v(\lambda)=\{\Pi_v(\lambda,\sigma)\colon\sigma\in\mathsf{Eq}(\lambda)\},$$

当委托人收益固定时，省略下标 v。$S(\lambda)$非空且紧致。

一个直接装置包含 $T_i=A_i$，并规定 $q(a\mid\theta)$。如果遵循建议构成均衡，则该装置是服从型的。等价地，

$$\sum_{\theta,a_{-i}}\mu(\theta)q(a_i,a_{-i}\mid\theta)[u_i(\theta,a_i,a_{-i})-u_i(\theta,b_i,a_{-i})]\geq 0 \tag{2}$$

对每个 i，a_i，b_i均成立。若此条件成立，则状态与行动上的联合分布 $\psi(\theta,\ a)=\mu(\theta)q(a\mid\theta)$是 E的贝叶斯相关均衡。我用 $\mathsf{Q}^O(E)$表示服从型直接装置。

令 $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 的非空紧致子集，并配备 Hausdorff 距离 d_H。委托人通过 $\mathsf{V}(S(\lambda))$ 评估装置 λ。下文始终假设

[11]如果每个 $\sigma_i(t_i)$都是退化的，那么响应均衡就是纯粹的。如果对于每个代理人和每个以严格正概率出现的信号，该代理人都严格偏好不偏离，那么纯响应均衡就是严格的。

V：K(R) $\to$ R 是连续的，并且是内在的：

$$\min S \le \mathcal{V}(S) \le \max S \qquad (S \in \mathcal{K}(\mathbf{R})). \tag{3}$$

注意，这意味着 V($\{s\}$) $= s$。

委托人在所有装置以及所有服从型直接装置中的最优值分别为[12] $W(E) := \sup_\lambda V(S(\lambda))$ 和 $W^O(E) := \sup_{q \in Q^O(E)} V(S(q))$，其中 λ 遍历所有装置。

我将 $B(E) := \max_{q \in Q^O(E)} \sum_{\theta,a} \mu(\theta) q(a \mid \theta) v(\theta, a)$ 写作委托人从服从型直接装置的服从性均衡中能够获得的最大收益。

完全信息环境 是 Θ 为单元素集合时的特殊情形；在此情形下，我省略状态和先验分布，将 $E = ((A_i, u_i)_i, v)$ 写作，将装置与其分布 $\lambda \in \Delta(T)$ 等同，并将 $CE(E) = Q^O(E)$ 写作 $\Delta(A)$ 中的普通相关均衡多面体。令 $N(E)$ 表示由 $(A_i, u_i)_i$ 的纳什均衡所产生的委托人收益集合。

3 不完全信息

在不完全信息下，当且仅当委托人根据其偏好的均衡来评估每个装置时，服从原则才在每个环境中成立。

定理 3.1。 以下各项等价。

(i) $W^O(E) = W(E)$ 对于每个环境均成立。(ii) 在每个环境中，对于每个装置 λ，都存在一个服从型直接机制 q，使得 $\mathcal{V}(S(q)) \ge \mathcal{V}(S(\lambda))$。(iii) $\mathcal{V}(S)$ = 最大值 S 对于每个非空紧致 $S \subset \mathbf{R}$均成立。否则，存在一个包含两个代理人和一个装置 λ 的环境，该装置具有唯一

[12]两个类均非空：代理人可以接收无信息信号，并参与这样一个博弈的纳什均衡，在该博弈中，我对每个效用函数在 μ 上取平均。该均衡的乘积分布定义了一个独立于状态的服从性直接实验。由于 v 有界，V 的内点性使这两个值均为有限值。

均衡，使得 上确界$_{q\in\Delta(A)^\Theta}\,\mathcal{V}(S(q))\ <\mathcal{V}(S(\lambda))\ =W(E)$。

当这些条件成立时，两个最优值均能达到，且都等于贝叶斯相关均衡中最大的委托人收益 $B(E)$。由 (iii) 推出其他命题是标准的。同样，由 (ii) 推出 (i) 显而易见，因为每个服从型直接机制确实都是一种装置。

若同一环境中的两个装置满足以下条件，则称它们互为重新标记：对于每个代理人 i，都存在一个双射 π_i，将它们的信号集相互对应，使得对于每个 (t,θ)，都有 $\lambda'(\pi(t)\mid\theta)=\lambda(t\mid\theta)$，其中 $\pi(t)=(\pi_i(t_i))_i$。

引理 3.2。取一个有限集 $F=\{b=a_0>a_1>\cdots>a_k$，其中 $k\geq 1$。存在一个有两名代理人的环境、一个服从型直接机制 q^0 和一个装置 λ^+，满足以下性质。

(i) 在每个状态和行动组合下，委托人收益至多为 b。(ii) $S(q^0)=F$，并且对于 F 中的每个元素，都存在一个严格纯策略响应均衡，产生该收益。(iii) λ^+ 有一个唯一响应均衡，该均衡是严格的，且产生收益 b。(iv) 任何具有产生收益 b 的响应均衡的直接装置，都是 q^0 的重新标记。

此外，对于每个 $\eta>0$，都存在 $\delta>0$，使得每个直接装置 q 都满足

$$\max S(q)>b-\delta \quad\Longrightarrow\quad d_H(S(q),F)<\eta. \tag{4}$$

证明。设 $N=k+1$，并且两个代理人的行动集均为 $\{0,\ldots\ldots,\ k\}$。状态为 $\theta=(t_1,\ t_2,\ z)$，其中 $t_1,\ t_2$ 在 $\{0,\ldots\ldots,\ k\}$ 上相互独立且服从均匀分布，而 z 在 $\{1,\ 2\}$ 上独立且服从均匀分布。

实现的 t_i 是代理人 i的目标。实现的 z 为代理人分配两个角色：代理人 z 获得下面的第一个收益，另一名代理人获得第二个收益。对于代理人 i的行动 x_i，令 j_i为$\{0,\ldots,\ k\}$ 中与 x_i-t_i同余的唯一元素

模 N。令

$$u_i(\theta, x) = \begin{cases} -j_i^2, & z = i, \\ j_i^2 - 2(j_i - j_{-i})^2, & z \neq i. \end{cases}$$

如下定义对称矩阵 W

$$W_{jj} = a_j \quad (0 \le j \le k), \qquad W_{j,j+1} = W_{j+1,j} = \frac{3a_{j+1} - a_j}{2} \quad (0 \le j < k),$$

并将其余所有元素都设为等于 a_k。委托人获得 $v(\theta, x) = W_{j_1 j_2}$。只有$W_{00}$ 等于 b: 其余每个对角元素都低于 b，且每个被指定的非对角元素都低于相邻对角元素中较小者。因此，委托人获得的数额从不超过 b ，并且恰好在 $x_1 = t_1$ 与 $x_2 = t_2$时获得 b 。

考虑向每个代理人推荐 $x_i = t_i$ （且不揭示 z）的直接装置 q^0 。对任意策略组合，令 $r_i(j) = \frac{1}{N} \sum_{t_i=0}^{k} \sigma_i((t_i + j) \bmod N \mid t_i)$为代理人 i的差值的无条件分布。以其目标为条件，代理人i 对两个角色赋予相等的概率。若他选择差值 j_i，则当我在这些角色上对其效用取平均时，项 $-j_i^2$与 j_i^2 相互抵消，留下期望效用$-\mathbb{E}[(j_i - j_{-i})^2]$, ，其中期望是对其对手的差值取的。在均衡中， r_i 的支集中的每个差值都必须针对 r_{-i}达到最优。

当对手的差值均值为 m时，代理人 i的期望效用中依赖于自身差值 j 的项为 $-j^2 + 2jm$，因此，他的最佳回应是最接近 m的整数。如果任一代理人采用纯差值 j，另一方的唯一最佳回应就是 j。否则，每个代理人的混合在其支集中恰好包含两个相邻整数。当他们的支集为$\{j, j+1\}$ 和$\{\ell, \ell+1\}$时，第一个代理人的无差异条件要求第二个代理人的均值为 $j + 1/2$，该均值严格介于 ℓ 和 $\ell + 1$之间，这迫使 $\ell = j$。随后，两个无差异条件都要求在 $j, j+1$上赋予相等的概率。

如果两者 代理人选择相同的相邻差值 j 的概率为 1，委托人

获得 的 a_j。如果双方在两个相邻差值上进行等概率随机化，她将获得

$$\frac{1}{4}a_j + \frac{1}{4}a_{j+1} + \frac{1}{2}\frac{3a_{j+1} - a_j}{2} = a_{j+1}.$$

因此，每个均衡收益都属于 F。反过来，任取 j ，并让每个代理人在每个信号下都选择其目标加上 j 模 N 。任何改为选择不同差值的偏离，都会使其期望效用至少降低一。此类严格纯策略均衡实现了 F中的每个元素。 $j = 0$ 是服从。

在装置 λ^+下，代理人 i 观察到（t_i， z）。在每个实现的角色下，无论另一位代理人的行为如何，代理人 z 都严格偏好零差值。随后，另一位代理人面对零差值，其效用为 $j_i^2 - 2j_i^2 = -j_i^2$，因此他也严格偏好零差值。因此，在唯一响应均衡中，每位代理人在每个信号下都选择其目标，委托人获得 b。与 q^0 相比，唯一新增的信息是对角色 z的公开宣布。

令 q 为任意直接装置，并设某个响应均衡使委托人获得收益b；此时不难看出，q 必定是 q^0的重新标记。假设（4）不成立。那么，对某个 $\eta > 0$，存在直接装置 q_m ，使得最大值 $S(q_m) > b - 1/m$，且 $d_H(S(q_m)\ F) \geq \eta$。取达到最大值 $S(q_m)$的 $\sigma_m \in \mathrm{Eq}(q_m)$。直接装置的空间和响应策略组的空间都是紧致的。因此，我可以取一个子序列，使装置 q_m 收敛到一个直接装置 q^* ，且其均衡响应方案 σ_m 收敛到一个响应策略组 σ^*。（1）中的不等式关于两个自变量都是连续的，因此 $\sigma^* \in \mathrm{Eq}(q^*)$。委托人收益的连续性以及界限 $v \leq b$ 意味着 $\Pi_v(q^*, \sigma^*) = b$。此外， q^* 与 q^0 的区别仅在于其信号的标签。因此， $S(q^*) = F$，并且该集合中的每个元素都能由一个严格纯策略均衡实现。

q^* 下的每个信号都有 $1/N$的概率。固定一个纯策略均衡，在该均衡中，两个代理人选择相同的差异。在 q_m 下，对于所有充分大的 m，其有限个严格激励不等式继续成立。因此，同一个策略组合在 q_m下也是一个均衡，并且其收益收敛于相应的

F的成员。由于 F是有限的，最大值$_{y\in F}$dist$y$， $S(q_m) \to 0$。

还需证明，在 q_m 下的每个均衡收益都接近于 F。否则，选取其收益始终与 F 保持严格正距离的响应均衡，并取其策略的一个收敛子列。由于均衡不等式关于装置和策略是连续的，极限策略满足 q^* 下的均衡不等式。因此，极限收益属于 F。随后，委托人收益的连续性与所选均衡收益始终与 F保持严格正距离这一点相矛盾。因此，最大值$_{y\in S(q_m)}$ 距离（y， F） $\to 0$同样会导致矛盾，从而与 d_H（S（q_m） F） $\geq \eta$矛盾，并证明（4）。■

3.1 必要性

我证明（i） $\Longrightarrow$（iii）的逆否命题以及 定理 3.1中的最后一个陈述。

设对于某个非空紧集 S，V(S) $<$ 最大值 S。选取包含最大值 S 且在豪斯多夫距离下收敛于 S 的 S 的有限子集。由 V 的连续性，其中一个有限集 F 满足 V(F) $< b =$ 最大值 F。由于 V 的内点性意味着 V({b}) $= b$， F 不是单元素集，因此我可以应用引理 3.2。

Set $\gamma =$ ($b -$ V(F))$/3 > 0$。由 V 在 F 处的连续性，存在 $\eta > 0$，使得

$$d_H(K, F) < \eta \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V}(K) < \mathcal{V}(F) + \gamma = b - 2\gamma.$$

选取 $\delta > 0$，使其属于 (4)。每个满足 q 且 最大值 $S(q) > b - \delta$ 的直接装置，其值都小于 $b - 2\gamma$。根据 最大值 $S(q) \leq b - \delta$ 以及 $\mathcal{V}$ 的内点性，其余每个直接装置的值都至多为该值。因此，

$$\sup_{\text{direct } q} \mathcal{V}(S(q)) \leq \max\{b - 2\gamma, b - \delta\} < b.$$

该装置 λ^+ 具有收益集合 $\{b\}$，因此，价值为 b。由于 $v(\theta, a) \leq b$ 在每个状态和行动组合下，$\mathcal{V}$的内点性也意味着 $W(E) \leq b$。因此， $W^O(E) <W(E) = b$，这与条件 (i) 矛盾，从而完成了 定理 3.1 的证明。

4 完全信息与收益单调性

现在我将注意力限制在没有随机状态的完全信息环境中。我还对委托人的评估施加以下附加性质：在代理人的效用和装置保持不变的情况下，在每个行动组合下提高她的收益，不会降低她的评估：

公理1（收益单调性）。如果两个委托人收益函数 v，w：$A \to \mathbf{R}$满足：对每个 $a \in A$，$v(a) \leq w(a)$，那么 $\mathsf{V}(S_v(\lambda)) \leq \mathsf{V}(S_w(\lambda))$。

代理人在 v 和 w下所面对的是同一个博弈，因此它们具有相同的均衡。每个均衡策略组合在 w下都会为委托人带来弱更高的期望收益，而该公理也要求她的评价相应地弱递增。

定理 4.1。假设 $\mathcal{V}$ 满足公理*1*。以下各项等价：

（*i*）对于每个完全信息环境 E，$W^O(E) = W(E)$。（*ii*）在每个完全信息环境 E中，对于每个装置 λ，存在一个$q \in CE(E)$，使得 $V(S(q)) \geq V(S(\lambda))$。（*iii*）存在一个递增函数 $h: R \to [-\infty, \infty)$，其在扩展实数拓扑下[13] 连续，并且对每个 b满足 $h(b) \leq b$，使得

$$\mathcal{V}(S) = \max\{\min S, h(\max S)\} \qquad for\ every\ S \in \mathcal{K}(\mathbf{R}). \tag{5}$$

函数 h 是唯一的，并满足 h（b）$=$下确界$_{a \leq b}\, \mathcal{V}$（$\{a, b\}$）。

反之，每个 h 具有所述性质的函数，都通过（5）定义出一个满足收益单调性及其等价条件的连续内在评价。

推论 4.2。若 定理 *4.1* 中的等价条件成立，$W(E) = W^O(E)$ =最大值{最小值 $\mathsf{N}(E)$ $h(B(E))$}。

[13]即，$b_n \to b \implies h(b_n) \to h(b)$，其中，收敛到有限值具有通常的含义，而$h(b_n) \to -\infty$ 表示：对于每个 $C \in \mathbf{R}$，当 n足够大时，$h(b_n) < C$ 均成立。

命题 4.3。 若 定理 *4.1* 中的等价条件不成立，则存在一个包含完整信息的环境，其中有三位代理人，两位代理人的行动集为二元行动集，并且存在一个装置 λ，其满足 $|S(\lambda)| = 2$，使得 上确界$_{q\in\Delta(A)}\, \mathcal{V}(S(q)) < \mathcal{V}(S(\lambda)) = W(E)$。

符合（5）所规定形式的评价示例包括最小值（取 $h \equiv -\infty$ 时得到）和最大值（取 $h(b) = b$ 时得到）。它们还包括如下评价：对于 $c \geq 0$，$\max\{\min S, \max S - c\}$；以及对于固定的 $k \in \mathbf{R}$，$\max\{\min S, \min\{\max S, k\}\}$。

以下是完全信息情形的三个性质，它们说明悲观委托人转而采用服从装置不会有任何损失。

引理 4.4。 固定一个环境 E。则，

(i) 每个装置 λ 都满足 $\mathsf{N}(E) \subseteq S(\lambda)$。(ii) 任何装置的任何响应均衡所诱导的行动分布都属于 $\mathsf{CE}(E)$。(iii) 若 $p = \prod_i p_i$ 是纳什均衡的行动分布，则直接装置 p 具有服从性，且 $S(p) = \mathsf{N}(E)$。

证明。 (i)成立，因为每个代理人都可以直接忽略装置，并假设其他所有人也这样做；(ii)和(iii)同样显而易见。■

$\mathsf{N}(E)$ 非空且紧致，$\mathsf{CE}(E)$ 是非空紧致多面体，因此存在某个相关均衡可达到 $B(E)$。这些事实和引理 4.4 表明，对于每个装置 λ，$\min S(\lambda) \leq \min \mathsf{N}(E)$ 且 $\max S(\lambda) \leq B(E)$。

引理 *4.5*。评价 V 满足收益单调性，当且仅当存在一个定义在 $\{(m, M) \in R^2 : m \leq M\}$ 上的连续函数 f，该函数关于每个自变量递增，并满足 $m \leq f(m, M) \leq M$，使得对于每个$S \in K(R)$，$V(S) = f(\min S, \max S)$。在这种情况下，$f(m, M) = V(\{m, M\})$。

证明。 首先，假设 V 满足收益单调性。固定 $k \in \mathbf{N}$，给两个代理人各自的行动集合为 1、……、k，并设 $u_1(i, j) = \mathbf{1}\{i = k \text{ 或 } i = j\}$ 以及 $u_2(i, j) = \mathbf{1}\{j = k \text{ 或 } i = j\}$。

纳什均衡恰好是纯策略组合 (i,i)。[14] 使用一个向每位代理人发送常数信号的装置。给定向量 $x,y \in \mathbb{R}^k$，其中 $x_i \le y_i$ 对每个 i都成立，我为委托人指定两个收益函数 v和 w，使得 $v(i,i) = x_i, w(i,i) = y_i$，并且$v(i,j) = w(i,j) = 0$只要 $i \neq j$成立。V 的收益单调性意味着

$$\mathcal{V}(\{x_1,\dots,x_k\}) \le \mathcal{V}(\{y_1,\dots,y_k\}). \tag{6}$$

现在，任取一个有限集 $\{x_1,\dots,x_k\}$，使得 $m = x_1 \le \cdots \le x_k = M$并且 $k \ge 2$。式（6）以及 $(m,\dots,m,M) \le (x_1,\dots,x_k) \le (m,M,\dots,M)$ 推出 $V(\{x_1,\dots,x_k\}) = V(\{m,M\})$。若该集合是单点集 $\{m\}$，则 $M = m$ 且 $\{m,M\} = \{m\}$，因此 V 的内点性意味着 $V(\{m\}) = m$。定义 $f(m,M) := V(\{m,M\})$。应用式（6）可得，f 在每个自变量上递增；而 V 的连续性和内点性意味着 f具有连续性和内点性。对于任意非空紧致集 S，选取包含 $\min S$ 和 $\max S$ 的有限集S_n，使其在豪斯多夫距离下收敛于 S。我们已证明，对每个 n，$V(S_n) = V(\{\min S, \max S\})$，因此由 V 的连续性可得 $V(S) = f(\min S, \max S)$。

反过来，假设对于每个 $S \in K(\mathbb{R})$，此类 f 都满足 $V(S) = f(\min S, \max S)$。固定代理人的效用和一个装置 λ，并将委托人的收益从v 逐点提高到 w。博弈中的均衡不会改变，并且对于每个 $\sigma \in Eq(\lambda)$，都有 $\Pi_v(\lambda, \sigma) \le \Pi_w(\lambda, \sigma)$，这意味着该集合上的最小值和最大值都弱增加。由此，f 的单调性意味着 V 具有收益单调性。■

引理 4.6。固定 $c < a < b$。存在一个有三名代理人的环境 E，其中两名代理人拥有二元行动集，以及一个装置 λ，使得以下结论成立：

(i) $N(E) = \{a\}$ 和 $S(\lambda) = \{a,b\}$。(ii) 任何装置下由响应均衡产生的每个委托人收益都属于 $[c,b]$。(iii) 某个服从型直接机制 $q \in CE(E)$ 满足 最大值 $S(q) = b$。

[14]事实上，行动 k 保证获得 1 的收益。如果代理人 1 以严格正概率选择 $i < k$，那么其最优性要求代理人 2 选择 i。随后，代理人 2 的最优性要求代理人 1 选择 i。如果代理人 1 只选择 k，那么代理人 2 的唯一最佳响应是 k。每个对角策略组合本身都是一个均衡。

(iv) 对于每个 $\eta > 0$，存在 $\delta > 0$，使得每个直接装置 $q \in \Delta(A)$ 都满足

$$\max S(q) > b - \delta \implies \min S(q) < c + \eta.$$

证明。 首先，我明确代理人 1 和 2 所进行的博弈。每位代理人的行动集为 $\{x,\ y\}$，其收益为

	x	y
x	$(4/3, 4/3)$	$(7, 2)$
y	$(2, 7)$	$(5, 5)$.

这是一个标准的反协调博弈：当另一位代理人采取 x 的概率低于 $3/4$ 时，每位代理人都严格偏好 x；当该概率高于 $3/4$ 时，都严格偏好 y；当该概率等于 $3/4$ 时，则无差异。三个纳什均衡分别为（x，y）、（y，x），以及对称混合均衡：每位代理人以 $3/4$ 的概率选择 x。

考虑直接推荐分布 q^*，其行详细列出代理人 1 的推荐，其列详细列出代理人 2 的推荐，二者均按 x，y 的顺序排列：

$$q^* = \begin{pmatrix} 1/8 & 7/16 \\ 7/16 & 0 \end{pmatrix}.$$

存在一个严格响应均衡，其中每个代理人都遵循其推荐。还存在一个严格响应均衡，其中每个代理人在收到推荐 x 后选择 y，在收到推荐 y后选择 x。在某个代理人收到推荐 x的条件下，另一个代理人以概率 $7/9$选择 x；在该代理人收到推荐 y的条件下，另一个代理人选择 x 的概率为零。这个响应均衡产生的行动分布为 q^-：

$$q^- = \begin{pmatrix} 0 & 7/16 \\ 7/16 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

现在考虑联合信号分布 λ_0：[15]

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/7 \\ 1/8 & 7/16 & 0 \\ 33/112 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

每个代理人的信号都标识出该分布的两个组成部分之一。孤立信号对以概率 $1/7$ 诱导出原双代理人博弈。剩余部分的未归一化分布为

$$M = \frac{1}{112}\begin{pmatrix} 14 & 49 \\ 33 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 x_1，x_2 表示代理人 1 在该组成部分的两个信号下选择 x 的概率，并令 y_1，y_2 表示代理人 2 的概率。用 $\beta(p)$ 表示：面对以概率 p 选择 x 的代理人时，选择 x 的最优概率；因此，对于 $p < 3/4$，$\beta(p) = \{1\}$，而对于 $p > 3/4$，$\beta(3/4) = [0,1]$，且 $\beta(p) = \{0\}$。在均衡状态下，必须有

$$x_2 \in \beta(y_1), \quad y_2 \in \beta(x_1), \quad x_1 \in \beta\left(\frac{2y_1 + 7y_2}{9}\right), \quad \& \quad y_1 \in \beta\left(\frac{14x_1 + 33x_2}{47}\right).$$

满足这四个均衡条件的响应方案如下表所示。最后一列给出了该组成部分对 $(y,\ y)$ 的无条件概率的贡献；对于响应方案 $(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)$，该贡献为

$$\frac{14(1-x_1)(1-y_1) + 49(1-x_1)(1-y_2) + 33(1-x_2)(1-y_1)}{112}.$$

[15]代理人 1 和 2 所参与的博弈以及包含其信号装置的族 λ_0 是Ray(2002，例 2.1 和图 4）。下面我将加入第三个代理人，以便为委托人生成所需的均衡收益集合。

A以下是满足四个均衡条件的响应方案 s:

x_1	x_2	y_1	y_2	对 $\mathbb{P}(y,\ y)$ 的贡献
0	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	85/132	3/4	0	47/1792
3/4	1	0	27/28	63/1792
3/4	0	1	19/28	63/1792
3/4	3/4	3/4	3/4	3/56

设 R 为在 λ_0 下由响应均衡诱导的行动分布集合。每个 $Q \in$R 都满足

$$Q(y,y) \le \frac{3}{56} + \frac{1}{7}\frac{1}{16} = \frac{1}{16}.$$

同一个数组 q^*，现在将其视为行动组合上的一个分布，它属于 R。在表格的 M 分量中使用第三个响应方案，并在孤立信号对处采取 $(y,\ x)$。按照行动组合的顺序 $(x,\ x)$，$(x,\ y)$、$(y,\ x)$、$(y,\ y)$ 列出，所诱导的分布为

$$\frac{1}{112}(14,49,33,0) + \frac{1}{7}\delta_{(y,x)} = \frac{1}{112}(14,49,49,0) = q^*,$$

其中 δ_z 表示行动组合 z上的退化分布。代理人也可以忽略自己的信号，采取三个纳什均衡中的任意一个，因此 $\delta_{(x,y)}$，$\delta_{(y,x)}$，$\nu \in$ R，其中 $\nu = (9,\ 3,\ 3,\ 1)/16$ 是混合纳什均衡中的行动分布。

记 $\Delta_{12} := \Delta(\{(x,\ x)、(x,\ y)、(y,\ x)、(y,\ y)\})$。由于 R 是有限集，我可以选取$\varepsilon \in (0,\ 1/32)$，使得以 q^* 为中心、半径为 ε 的上确界范数闭球不包含 R 中的其他元素。对于 $P \in \Delta_{12}$，定义

$$d_+(P) = \frac{\|P - q^*\|_\infty}{\varepsilon}, \quad d_-(P) = \frac{\|P - q^-\|_\infty}{\varepsilon}, \quad \& \quad t_\pm(P) = \max\{1, d_\pm(P)\} - d_\pm(P),$$

并设定 $F(P) = a + (b-a)t_+(P) - (a-c)t_-(P)$。

两个函数 t_+、t_- 的支集不相交，因为 $\|q^* - q^-\|_\infty = 1/8$。此外，$t_-$ 在 R 上处处为零：R 中的每个元素赋予 (y, y) 的概率至多为 $1/16$，而 $q^-(y, y) = 1/8$。因此，$F(q^-) = c \leq F(P) \leq b$，且 $F(P) = b \Leftrightarrow P = q^*$。由于 t_+ 在 $\mathrm{R} \setminus \{q^*\}$ 上也为零，对于每个 $Q \in \mathrm{R} \setminus \{q^*\}$，都有 $F(Q) = a$。三个纳什均衡分布 $\delta_{(x,y)}$、$\delta_{(y,x)}$、ν 都属于此集合，因此 F 在它们每一个处都等于 a。

现在加入第三个代理人，使得每当前两个代理人的行动具有分布 P 时，他的每个最佳响应都会给委托人带来收益 $F(P)$。为构造他的收益，定义 $p_\pm(P) =$最大值$\{1, d_\pm(P)\}$，并写作 $F = g_1 - g_2$，其中

$$g_1 = a + (b-a)p_+ + (a-c)d_-, \qquad \& \qquad g_2 = (b-a)d_+ + (a-c)p_-.$$

注意，对于有限集 I, J 和仿射函数 ℓ_r, m_s，我可以写成 $g_1(P) =$最大值$_{r \in I}\, \ell_r(P)$，以及 $g_2(P) =$最大值$_{s \in J}\, m_s(P)$。

令代理人 3 的行动集为 $I \times J$，并在行动组合 $(z, (r, s))$ 下，将他的效用和委托人的收益定义为

$$u_3(z, (r, s)) = \ell_r(\delta_z) + m_s(\delta_z), \qquad \& \qquad v(z, (r, s)) = \ell_r(\delta_z) - m_s(\delta_z).$$

代理人 1 和 2 保留其原有的效用。面对分布 P 时，代理人 3 最大化 $\ell_r(P) + m_s(P)$。由于他的行动集为 $I \times J$，行动 (r, s) 当且仅当 r 最大化 $\ell_r(P)$ 且 s 最大化 $m_s(P)$ 时对他而言是最优的。每个这样的行动，以及这些行动的每一种混合，都会给委托人带来期望收益 $g_1(P) - g_2(P) = F(P)$。

我给代理人 1 和 2 提供装置 λ_0，给代理人 3 提供常数信号。前两位代理人的均衡行动分布遍历 R，而代理人 3 的最佳响应带来$F(\mathrm{R}) = \{a, \ b\}$。在由此形成的三代理人博弈的每个纳什均衡中，前两位代理人都会采取其双代理人博弈的三个纳什均衡之一，因此代理人 3 的最佳响应会给委托人带来收益 a。

现在固定任意一个装置和任意一个响应均衡。对于代理人 3 的每个以严格正概率出现的信号，令 P 表示在给定该信号的条件下，前两位代理人行动的条件分布

。由于代理人 3 在该信号之后作出最佳响应，委托人的期望收益在该信号条件下为 $F(P) \in [c, b]$。委托人的事前收益是这些条件收益在代理人 3 的信号上的平均值，因此也属于 $[c, b]$。最后，向代理人 1 和 2 推荐 q^*，并向代理人 3 给出一个针对 q^* 使其效用最大化的恒定推荐。该直接装置具有服从性，并且在服从条件下为委托人带来 b 的收益。

假设直接装置 q 的一个响应均衡为委托人带来收益 b。对于代理人3的每个以严格正概率出现的信号，令 P 表示前两位代理人行动的条件分布。委托人的条件收益为 $F(P) \leq b$。由于这些条件收益的平均值为 b，且 q^*唯一最大化了 F，因此每个这样的条件分布都是 q^*。所以，它们的无条件行动分布也为 q^*。

前两位代理人中，没有任何一位会在跟随一个以严格正概率出现的信号时进行随机化；又由于在 q^*下，每位代理人选择 x 和 y 的概率都严格为正，因此每位代理人在两个信号中的一个信号下选择 x，在另一个信号下选择 y。对于这两位代理人中的每一位，将诱导 x 的信号重新标记为 x，将诱导 y 的信号重新标记为 y。对于代理人3的每个以严格正概率出现的信号，前两位代理人信号的分布于是为 q^*。因此$q(t_1, t_2, t_3) = q^*(t_1, t_2)p_3(t_3)$，其中 p_3 是代理人3信号的边际分布。如果两位代理人都互换 x 和 y，他们就会进行严格响应均衡，并诱导出q^-，且与代理人3的信号无关。令代理人3在每个信号下选择最佳响应。于是，这些策略构成一个响应均衡，其委托人收益为$F(q^-) = c$。

对于最后的断言，假设存在 $\eta > 0$和直接装置 q_j 满足最大值 $S(q_j) \to b$ 以及最小值 $S(q_j) \geq c + \eta$。选择 $\sigma_j \in \mathsf{Eq}(q_j)$ 分别达到每个最大值。取一个子序列后，令 $q_j \to q_\infty$ 和 $\sigma_j \to \sigma_\infty$。(1) 左侧的表达式关于装置和策略组合是连续的，因此 $\sigma_\infty \in \mathsf{Eq}(q_\infty)$。委托人的期望收益的连续性意味着，该均衡达到 b。

按照上述方法，根据前两个代理人在 σ_∞ 下的行动重新标记其信号，并对 q_∞ 以及每个 q_j 采用相同的重新标记。这不会改变任何收益集合。于是，$q_\infty(t_1,\ t_2,\ t_3) = q^*(t_1,\ t_2)p_3(t_3)$。在 q_∞ 下，前两个代理人的每个标签都以严格为正的概率出现。对于交换 x 和 y 的响应，其激励中的严格不等式因此在 q_j 下对所有足够大的 j 仍然成立。对于每个这样的 j，令前两个代理人采用该响应，并令代理人 3 在其每个信号下选择最佳响应。这些策略构成 q_j 的响应均衡，因为前两个代理人的效用不取决于代理人 3。

对于代理人 3 的每个信号 t_3，若 $p_3(t_3) > 0$，则给定 t_3 时前两位代理人行动的条件分布收敛至 q^-。F 的连续性意味着，给定 t_3 时委托人的期望收益收敛至 c。满足 $p_3(t_3) = 0$ 的信号 t_3 的总概率趋于零，而其条件委托人收益始终处于 $[c, b]$。因此，这些响应均衡的事前委托人收益收敛至 c，这与 $\min S(q_j) \geq c + \eta$ 矛盾。■

4.1 完成必要性证明

证明(i) $\Longrightarrow$ (iii) 中的定理 *4.1*。假设在每个环境中两个上确界都相等。根据引理 4.5，我可以写出$\mathcal{V}(S) = f$(最小值 S，最大值 S)，其中 f在每个自变量上都是连续的、内在的且递增的。我首先证明

$$c < a < B, \quad f(a, B) > a \quad \Longrightarrow \quad f(c, B) = f(a, B). \tag{7}$$

由于 f 在其第一个参数上递增，因此只需排除 $f(c,\ B) < f(a,\ B)$。

假设这一严格不等式成立，并将 $r = f(a,\ B) > a$ 记为。令 b 为 $[a, B]$ 中满足 $f(a,\ b) = r$ 的最小元素。f 的连续性以及 $f(a,\ a) = a < r = f(a,\ B)$ 保证 b 存在且属于 $(a,\ B]$。由于 f 在其第二个参数上递增，对于每个 $z \in [a, b)$，都有 $f(a,\ z) < r$。

应用引理 4.6于 $c < a < b$。在所得的环境中，每个装置λ' 都满足 $S(\lambda') \subseteq [c, b]$ 和 $a \in S(\lambda')$，而引理中的装置满足

$S(\lambda) = \{a, b\}$。因此，委托人将此装置赋值为 r。此外，f 的单调性将每个装置的值限制在 $f(a, b) = r$ 以内。因此，$W(E) = r$。

现在我将每个直接装置的值严格限制在 r 以下。由于 $b \leq B$，f 的单调性意味着 $f(c, b) \leq f(c, B) < r$。根据 f 的连续性，我可以选择 $\eta \in (0, a - c)$，使得 $f(c + \eta, b) < r$。引理 4.6 提供了 $\delta \in (0, b - a)$，使得每个直接装置 q 满足

$$\max S(q) > b - \delta \quad \Longrightarrow \quad \min S(q) < c + \eta.$$

对于这样的装置，f 的单调性意味着 $V(S(q)) \leq f(c + \eta, b) < r$。每个剩余的直接装置都有 $\min S(q) \leq a$，且 $\max S(q) \leq b - \delta$，因此 $V(S(q)) \leq f(a, b - \delta) < r$。因此，

$$\sup_{q \in \Delta(A)} V(S(q)) \leq \max\{f(c + \eta, b), f(a, b - \delta)\} < r,$$

这与上确界相等相矛盾，从而证明了（7）。

对于每个 $B \in \mathbb{R}$，定义 $h(B) = \inf_{m \leq B} f(m, B)$。对于每个 $m \leq B$，V 的内点性意味着 $f(m, B) = V(\{m, B\}) \leq B$，因此 $h(B) \leq B$。如果 $f(m, B) = m$，那么 $h(B) \leq m$，所以 $f(m, B) = \max\{m, h(B)\}$。如果 $f(m, B) > m$，则（7）意味着对于每个 $c < m$，$f(c, B) = f(m, B)$。由于 f 随其第一个参数增加，其对所有 $c \leq B$ 的下确界为 $f(m, B)$。这再次得到 $f(m, B) = \max\{m, h(B)\}$。该表示还唯一确定了 h，因为 $\inf_{m \leq B} \max\{m, h(B)\} = h(B)$。

对于 $B < B'$，f 的单调性意味着只要 $m \leq B$，就有 $f(m, B) \leq f(m, B')$。令 $m \to -\infty$，可得 $h(B) \leq h(B')$。为检验点 B_0 处的连续性，若 $h(B_0) > -\infty$，取 $m < h(B_0)$。那么 $f(m, B_0) = h(B_0) > m$。由 f 的连续性，对于 B_0 附近的 B，$f(m, B) > m$，因此该表示式意味着在此处 $h(B) = f(m, B)$。于是，h 在 B_0 处连续。若 $h(B_0) = -\infty$，取任意 $C \in \mathbb{R}$，并选取 $m < \min\{C, B_0\}$。由于 $f(m, B_0) = m < C$，由 f 的连续性可知，对于 B_0 附近的 B，$h(B) \leq f(m, B) < C$。这证明了在扩展实数拓扑下的连续性。

如果 re 定理中的表述若不成立，那么（7）必定不成立，因为前面的

论证是从该恒等式中得到这一表示的。接着，同样的构造便证明了命题 4.3。■

4.2 充分性与最优值

定理 4.1 中 (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) 的证明。反过来，取一个具有所述性质的函数 h，并通过 (5) 定义 V。该评价在两个端点上都是内在且递增的。由于 h 连续，对于满足$h(\max S)$ 有限的任意集合，V 都是豪斯多夫连续的。若 $h(\max S) = -\infty$，则选取一个严格小于 $\min S$ 的数。对于每个在豪斯多夫距离上足够接近 S 的紧集，h 在扩展实数拓扑下的连续性保证其在最大值处的取值仍低于该数，而最小值仍高于该数。因此，在这个邻域内，V 等于最小值，而最小值是豪斯多夫连续的。由于委托人的收益逐点增加会使其在固定响应均衡下的收益集合的两个端点都增加，V 满足收益单调性。

固定一个环境 E，记 $N = \mathrm{N}(E)$，并令 $a = \min N$ 和 $B = B(E)$。根据引理 4.4，每个装置都允许代理人进行每一个纳什均衡，而任何响应均衡下的行动分布都是相关均衡。因此，委托人的最差均衡收益不能超过 a，其最佳均衡收益也不能超过B。由于 h 递增，对于每个装置 λ，都有 $\mathrm{V}(S(\lambda)) \le \max\{a, h(B)\}$。

如果 $h(B) \le a$，纳什均衡生成的独立推荐的收益集合恰好为 N。由于 $h(\max N) \le h(B) \le a$，该装置的价值为 a。如果$h(B) > a$，则选择一个相关均衡 q 达到 B。服从可带来 B，每种响应的收益至多为 B，且 $S(q)$ 包含 N。因此，$\max S(q) = B$ 且 $\min S(q) \le a < h(B)$，所以该直接装置的价值为 $h(B)$。无论哪种情况，一个服从型直接装置都能达到上界，并且弱优于任何装置。因此，这两个最优值均存在，且等于 $\max\{\min N, h(B)\}$。这证明了 (iii) $\Longrightarrow$ (ii)。条件 (ii) 蕴含 (i)，因为服从型直接装置确实是装置。结合必要性的证明，这就确立了 (i)、(ii) 和 (iii) 的等价性。这也

证明了推论 4.2。 ■

参考文献

Robert J. Aumann。《随机化策略中的主观性与相关性》。《数学经济学杂志》，1(1):67–96，1974。

Robert J. Aumann。相关均衡是贝叶斯理性的体现。《计量经济学》，55(1)：1–18，1987。

Dirk Bergemann 和 Stephen Morris。博弈中的贝叶斯相关均衡与信息结构比较。《理论经济学》，11(2)：487–522，2016。

Dirk Bergemann 和 Stephen Morris。信息设计：统一视角。《经济文献杂志》，57(1)：44–95，2019。

Dirk Bergemann、Stephen Morris 和 Rafael Veiel。信息结构上的战略拓扑。未发表稿，2024。

Amrita Dhillon 和 Jean-François Mertens。完美相关均衡。《经济理论杂志》，68(2):279–302，1996。

Anirban Kar、Indrajit Ray 和 Roberto Serrano。实施相关均衡分布的一项难题。《博弈与经济行为》，69(1):189–193，2010。

Xiao Luo、Yongchuan Qiao 和 Yang Sun。颤抖手完美性下相关均衡的揭示原理。《经济理论杂志》，200：105396，2022。

Laurent Mathevet、Jacopo Perego 和 Ina Taneva。《博弈中的信息设计》。《政治经济学杂志》，128(4)：1370–1404，2020 年。

Stephen Morris、Daisuke Oyama 和 Satoru Takahashi。二元行动超模博弈中的信息设计实施。《style id='1'>《计量经济学》，92(3)：775–813，2024 年。

Zeky Murra-Anton、Giacomo Rubbini 与 Roberto Serrano。信息设计中的推荐原理。未刊稿，2025。

Thomas R. Palfrey 与 Sanjay Srivastava。交换经济中不完全信息下的实施。《计量经济学》，57(1):115–134，1989。

Indrajit Ray。多重均衡问题与非典范相关装置。未刊稿，2002。

Indrajit Ray。典范与非典范相关装置中的均衡多重性：一个例子。*Arthaniti*, 7(1–2):74–84，2008。

Ina Taneva。信息设计。《美国经济学杂志：微观经济学》，11 (4):151–185, 2019。

Mark Whitmeyer。揭示原理的主要揭示。未刊稿，2026。

Yishu Zeng。对相互作用接收者的劝说。《博弈与经济行为》，158：563–583, 2026年。