arXiv:2611.32743v1 [cond-mat.stat-mech] 24 Nov 2026

手性随机运动的格点模型：简要综述

Erik Kalz ,[1] Jan Wójcik ,[2] Joshua Uhlig ,[3] Nir Sherf ,[4] Yael Roichman ,[4,5,6] 和 Ralf Metzler [3,*]

[1]斯特拉斯堡大学，超分子科学与工程研究所，*67000* 斯特拉斯堡，法国[†2]格但斯克大学，理论物理与天体物理研究所，*80-308* 格但斯克，波兰[3]波茨坦大学，物理与天文学研究所，*14476* 波茨坦，德国[4]特拉维夫大学，化学学院，特拉维夫 *6997801*，以色列[5]特拉维夫大学，物理与天文学学院，特拉维夫 *6997801*，以色列[6]特拉维夫大学，生命系统物理与化学中心，特拉维夫 *6997801*，以色列（日期：2026年11月25日）

手性是一种系统性的旋转偏置，广泛存在于许多随机运动模式中：从在表面附近做圆周游动的细菌细胞和旋转胶体，到在磁场影响下扩散的带电粒子。在二维中，手性使随机输运呈现奇性：扩散张量获得一个反对称部分，该部分不改变均方位移，却会改变通量和边界流。随机运动的格点模型是研究手性的自然框架，因为这类模型可以精确求解，能够直接连接到非均匀介质、元胞自动机和可编程机器人，并且在离散时间下允许存在具有局域化体输运和边缘输运的完全手性极限。自1960年以来，带有旋转偏置的格点行走已在不同学术领域中多次被提出，但彼此之间始终缺乏共同语言和概念上的联系。本文从这样一个视角出发综述这些模型：在晶格上，手性需要记忆。我们以近期提出的手性随机游走模型为模板，用一个内部自由度描述行走者。在具有手性偏置的更新规则下，这个手性行走者的完整扩散张量变为奇性。在这一框架下，我们可以将持续性行走和手性游走、跑动-翻滚运动以及循环随机运动统一起来。我们讨论记忆如何延伸至环境中——例如洛伦兹晶格气体、动力学行走和转子行走，以及随机奇环境——以及如何延伸至路径中，例如螺旋自避免游走。

谨献给 Ewa Gudowska-Nowak

I. 引言

在其 1888 年的著作《偶然的逻辑》[1], 中，John Venn 写道：“我不知道是否有人提出过这样一种画线方式：线条的形状和位置都具有纯粹随机的特征。”事实上，Venn 展示了这种随机线条的绘制方式，也就是我们现在所称的随机游走。“随机游走”这一名称后来由统计学家 Karl Pearson 在 1905 [2] 中提出。Pearson 对这一过程的兴趣源于他的同事 Ronald Ross；Ross 因发现蚊子传播疟疾而获得了 1902年诺贝尔生理学或医学奖。Ross 在 [3] 中描述了理解受感染蚊子如何从繁殖池扩散出去的基本思想：“假设一只蚊子出生在某个地点，在它的一生中，它为了寻找食物或交配，会在一个对它普遍具有吸引力且适宜生存的地区内，随意地来回游荡，向左或向右。过了一段时间，它会死去。那么，在距离其出生地给定距离处发现其尸体的概率是多少？”

应皮尔逊求助之请，约翰·威廉·斯特拉特勋爵（瑞利勋爵）给出的解答是，经过多步之后，随机行走者的位置服从高斯分布或正态分布 [2, 4]。事实上，随机游走与爱因斯坦和斯莫卢霍夫斯基在1905年和1906年提出的布朗运动数学理论十分接近[5–7]。如今，随机游走几乎无处不在，是一种用途极其广泛的工具，可用于量化从单个分子到动物等实体的随机扩散、模拟聚合物链，或捕捉金融市场的随机动力学 [8–13]。简单随机游走的直接推广可用于模拟反常扩散[14–24], 电话通信中的误差 [25, 26],用于脑纤维生长的持久性聚合物模型 [27–29],或捕捉金融数据中的非高斯分布和“粗糙性”[13, 30–32]。

在“奇迹年”1905年，医学领域也报告了另一项突破。弗里茨·绍丁和埃里希·霍夫曼发现，细菌梅毒螺旋体 是梅毒的病原体。不过，他们在研究中也描述了螺旋状的细胞体如何在流体中主动扭转并作螺旋运动 [33, 34]。如今，人们对细菌、其他单细胞以及高等生物螺旋运动的兴趣依然不减，研究范围从螺旋运动在高速运动中的作用
细菌海洋磁球菌 [35], 手性细胞群体新出现的涡旋动力学 [36], 到寄生虫的运动，例如布氏锥虫 [37]。当前的研究问题之一是，手性是否可能对小型活性粒子（例如细菌或变形虫）在狭窄空间（如土壤或脑组织）中的运动具有有益作用，参见例如 [38–40] 及其中的参考文献。

* ralf.metzler@uni-波茨坦.de
† erikkalz98@gmail.com

来自尺度差异极大的各种系统的实验观测，具体揭示了手性运动。细菌在固体边界附近做圆周游动 [41], ，而非对称自驱动胶体则在基底上沿圆形轨迹运动 [42]。在集体层面，旋转胶体形成具有持久边缘流和奇异流体动力学响应的手性流体[43]。更直接地说，奇异输运如今已在粒子层面通过实验得到解析。在手性活性浴中，碰撞将手性传递给嵌入其中的被动示踪粒子，使其产生圆周运动；在外力作用下，还会产生系统性的横向漂移 [44]。奇扩散本身已在由空气驱动的手性转子组成的二维流体中得到测量；在该系统中，反对称扩散系数会随涡量改变符号 [45]。这些实验说明了为什么手性可能隐藏在传统的扩散度量中：如下文所述，扩散张量的反对称部分不会出现在均方位移中。相反，手性的影响会体现在交叉关联、通量、边界、碰撞以及固有的横向响应中。

在这里，我们关注随机运动与手性的结合，具体而言，是定量描述二维条件下的手性随机游走，以及它与“奇”扩散和流动性的联系。我们概述具有旋转偏置的格点行走的发展历史，并以记忆为切入点，为这类模型提出一种通用表述；我们认为，记忆是它们最根本的共同点。具体来说，我们介绍近期由我们提出的手性随机游走 （CRW）模型。

在二维中，手性体现为输运张量的反对称非对角元素。有趣的是，它并不影响行走的各向同性，反而构成了二维各向同性输运张量最一般的形式 [46]。这类系统也称为“奇”[47] ，其缘由很快便会明了。二维中最一般的各向同性扩散张量，即“奇扩散张量”，写作 [48, 49]

$$\mathbf{D} = D_{\parallel}\mathbf{1} + D_{\perp}\boldsymbol{\epsilon} = D_{\parallel}(\mathbf{1} + \kappa\boldsymbol{\epsilon}), \tag{1}$$

其中，$\mathbf{1}$ 为单位矩阵， $\boldsymbol{\epsilon}$ 为完全反对称的列维-奇维塔符号（$\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = 1$ ，其他情况下为零），$\kappa = D_{\perp}/D_{\parallel}$ 为“奇异参数”。“奇异扩散率” $D_{\perp}$ 通常与微观手性直接相关，并在宇称或时间反演下改变符号 [47], ，因此在手性反向时表现出奇性，这也是此类奇异系统名称的由来。需要注意的是，仅基于位置变量的可观测量对奇异扩散率 [50]不敏感。直观地说，这是因为奇异扩散率会从扩散方程中的扩散项 $\nabla\cdot(\mathbf{D}\nabla P) = D_{\parallel}\nabla^2 P$ 中消失，因此不会在自由粒子的均方位移（MSD）中留下痕迹。相反，它会通过依赖通量的可观测量表现出来，例如在边界处以及与障碍物或其他粒子发生碰撞时[49]。

这种不可见性解释了一个有趣的历史事实。具有首选旋转方向的格点行走曾被多次提出，但一直缺少一个能够统摄相关文献并指出其共同主题的总称——如今，“奇异输运”这一概念正好提供了这样的总称。由于输运通常通过均方位移（MSD）来刻画，此类格点行走中的奇异部分便一直未被察觉。本文围绕这一核心思想组织这些模型：在晶格上，手性需要记忆，并展示历史上分散在各处的手性格点行走主要区别在于这种记忆与什么相关联：是与行走者本身相关，还是与环境相关。最近提出的 CRW模型 [51] 作为我们的范本；该模型为行走者配备了一个内部自由度，从而存储两步动力学信息。

本综述的结构如下：第II 节阐述奇性与手性的语言，并提出我们的核心假设：手性的涌现需要记忆。第III 节具体介绍作为特例的 CRW模型。第IV 节归纳手性位于行走者“内部”的相关研究；第V 节则归纳手性是环境属性的相关研究。最后，我们在第VI 节展望当代文献。

II. 为什么手性需要记忆 RY

我们考虑方格晶格上的随机行走者（$\ell\mathbb{Z}$），其晶格常数为 ℓ，并携带一种内部取向 $d \in \mathcal{D} = \{\rightarrow, \downarrow, \leftarrow, \uparrow\}$，使得空间$\mathcal{D}$ 按顺时针方向排列。相关的 $z = 4$ 单位位移向量 $\mathsf{e}_d = \mathsf{E}|d\rangle$ 被收集于晶格几何矩阵E[1]中，其中 z 为该晶格的配位数。位置与内部自由度的联合概率 $P_d(\mathbf{r}\ t)$ 构成向量$|\rho(t)\rangle = \sum_{\mathbf{r}\ d} P_d(\mathbf{r}\ t)\,|\mathbf{r}\rangle \otimes |d\rangle$；其中，乘积态$|\mathbf{r}\rangle \otimes |d\rangle \equiv |\mathbf{r}\ d\rangle$ 位于乘积空间（$\ell\mathbb{Z}$）$^2 \otimes \mathcal{D}$中。完整的时间演化作用于乘积态，并使概率向量随时间演化为

$$|\rho(t+1)\rangle = \mathsf{S}\left(\sum_{\mathbf{r}} |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}| \otimes \mathsf{C}_{\mathbf{r}}\right)|\rho(t)\rangle, \tag{2}$$

每一步由两个操作组成：硬币 $\mathsf{C}_{\mathbf{r}}$ 是一个$z\times z$ 随机矩阵，仅作用于取向——其元素 $\langle d'|\mathsf{C}_{\mathbf{r}}|d\rangle$ 表示位于格点 $\mathbf{r}$、取向为 d 的行走者d'采用新取向的概率，因此 $\sum_{d'}\langle d'|\mathsf{C}_{\mathbf{r}}|d\rangle = 1$。条件平移 $\mathsf{S} = \sum_{\mathbf{r}\ d} |\mathbf{r}\ + \ell\mathsf{e}_d\rangle\langle\mathbf{r}| \otimes |d\rangle\langle d|$ 随后使行走者沿其新取向移动一个晶格间距。索引

[1] 我们遵循参考文献[60] 中的约定，该约定与参考文献中的原始模型 [51] 仅相差一个置换 $\mathcal{D}$。

$\mathbf{r}$ 允许硬币随空间变化，以考虑非均匀环境[52]，见第 V节。在各向同性的均匀系统中，硬币处处相同，即C $_{\mathbf{r}}$ = C，一步算符简化为U = S($\mathbf{1}\otimes$ C)，我们将沿用这一形式，直至第 V节。这种硬币—平移结构借鉴自离散时间量子游走[53]，，其中以随机硬币取代酉硬币；有趣的是，这也使我们能够梳理手性游走的历史文献。

对于具有平稳（取向）分布 $\boldsymbol{\pi}$ 的均匀无偏游走，满足 C$\boldsymbol{\pi}$ = $\boldsymbol{\pi}$ 并可写为 Π = diag($\boldsymbol{\pi}$)，根据离散格林-久保关系 [51, 54] ，我们可以将长时间扩散张量写为

$$\mathbf{D} = \frac{\ell^2}{\Delta t}\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\mathbf{1} + \sum_{t=1}^{\infty}\mathrm{C}^t\right)\Pi\mathrm{E}^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

其中，总和的第 t 项表示某一步与其之后第 t 步之间的相关性，$\langle \mathrm{e}_{d_{s+t}}\otimes \mathrm{e}_{d_s}\rangle$，而 e$_{d_s}$ 表示时刻 s 的方向。位置密度ρ(r t) 的通量 = $\sum_d P_d$(r t)，即 $|\rho(t)\rangle$ 在取向上的边缘分布，因此可写为 j = –D$\nabla\rho$，并且只有 D 的对称部分决定扩散范围。

方程（3）使我们能够更精确地表述本综述的核心假设：在晶格上，手性需要记忆，也就是说，奇扩散张量要求下一步至少取决于前一步，并且在参数固定时，这种依赖不具有时间反演不变性。由此假设可得出三个观察结果：

(i) 如果行走者的步伐彼此不相关，C = $\pi\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$[55], 增量彼此独立，所有含有 $t \geq 1$ 的项都消失。$\mathbf{D}$ = $(\ell^2/2\Delta t)$ EΠE^{T} 于是是对称的：没有记忆，行走就不是奇函数。

(ii)如果方向动力学在固定参数下满足细致平衡，C Π = ΠC^{T} [56]，那么EC^{t}ΠE^{T} = (EC^{t}ΠE^{T})^{T} 对所有 t 都成立，且 $\mathbf{D}$ 是对称的 [2]：仅有记忆并不足够，还必须打破时间反演对称性。

(ii*) 反之，如果时间反演动力学与手性来源反向后的动力学相同[3]，，因而属于 Onsager-Casimir 对称性这一类，[57], 那么 CΠ = Π $\tilde{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}$ ，扩散张量的奇对称部分便是允许存在的，$\mathbf{D}$(C) =$\mathbf{D}$($\tilde{\mathrm{C}}$)^{T}。

对于均匀行走，观察（i）和（ii）证明了这一假设。然而，当记忆存在于环境或路径中（第 V 节）时，它则充当我们的组织原则。观察（ii*）反映了平衡系统中的昂萨格–卡西米尔互易关系；这类系统的参数在时间反演下为奇变量，例如处于磁场中的带电布朗粒子 [57], ，其遵循平衡动力学 [58] 且为奇变量 [59]。因此，手性行走描述的是平衡系统还是主动系统，取决于其手性来源是否在时间反演下发生反向：磁场会发生反向，而主动扭矩则不会。由方程（2）支配的行走者将所需的记忆储存在其取向中；同样，这些记忆也可以存在于环境或行走者的路径中，见图 1 和 2。

我们从方格晶格上的基本运动开始，其配位数为 z = 4。按照上文所述的顺时针顺序，将取向标记为 $d_0 = \rightarrow$、$d_1 = \downarrow$、$d_2 = \leftarrow$ 和 $d_3 = \uparrow$，我们定义旋转 R$|d_m\rangle$ = $|d_{m+1}\rangle$，其中指标按模四计算；该旋转使行走者顺时针（右）旋转 $\pi/2$；其逆元 L = R^{-1} 使行走者逆时针（左）旋转。若一个硬币与该旋转可交换，即 RC = CR，则称其为各向同性硬币；也就是说，每种转向的概率都不取决于当前取向。这里的各向同性仅指旋转，因为晶格的反射会将 L 映射为 R。由于 R 的四个特征值各不相同，任何与 R 可交换的矩阵都是 R 的多项式，因此各向同性硬币是四种基本运动的组合：持久性 I = R^0, 右转 R、反向 B = R^2, 以及左转 L = R^3 = R^{-1} [60]。

根据此定义，一般硬币矩阵是循环群 C$_4$，的群代数中的一个元素，其形式为

$$\mathrm{C} = q_I\mathrm{I} + q_L\mathrm{L} + q_B\mathrm{B} + q_R\mathrm{R} + q_M\mathrm{M}, \tag{4}$$

其中，非负概率权重 q_i 由于归一化而总和为 $\mathbf{1}$。我们在附录 A 中给出了基本算符的矩阵表示以及一般硬币的特征值。混合算符 M = (I + L + B + R)/4 = $\boldsymbol{\pi}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ 会随机化取向，并表示上述观察步骤 (i) 中的无记忆步。权重 q_i 的物理解释可以通过将 z = 4维硬币算符投影到物理晶格空间来阐明，[60], 注意到 EC = cE 其中 c = $q_p\mathbf{1} + q_c\boldsymbol{\epsilon}$ 是硬币的二维（空间）表示。这里，$q_p = q_I - q_B$ 衡量“持久性”，即向前步数与向后步数之差，$q_c = q_R - q_L$量化手性，即向右步数与向左步数之差。

如果我们定义复参数 $\lambda = q_p + \mathrm{i}q_c$，则方程（3）将成为关于c的几何级数，从而得到$\mathbf{D}$ = $(\ell^2/4\Delta t)$ $(\mathbf{1}+\mathrm{c})$ $(\mathbf{1}-\mathrm{c})^{-1}$; 具体来说，

$$\mathbf{D} = \frac{\ell^2}{4\Delta t}\left(\frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2}\mathbf{1} + \frac{2\,\mathrm{Im}(\lambda)}{|1-\lambda|^2}\boldsymbol{\epsilon}\right) \tag{5a}$$

$$= \frac{\ell^2}{4\Delta t}\left(\frac{1-q_p^2-q_c^2}{(1-q_p)^2+q_c^2}\mathbf{1} + \frac{2q_c}{(1-q_p)^2+q_c^2}\boldsymbol{\epsilon}\right). \tag{5b}$$

因此，奇扩散系数 $D_\perp \propto q_c$ 由行走的手性 q_c 所诱导。由于各向同性硬币是

[2] 当细致平衡条件与所有步的反向结合时，同样成立，CΠ = ΠBC^{T} B，其中 B$|d\rangle$ = $|-d\rangle$ 由于反转取向，EB = –E。[3] 对于方程（4）中的各向同性硬币，$\tilde{\mathrm{C}}$ 由C 交换 q_L 和 q_R即可得到。

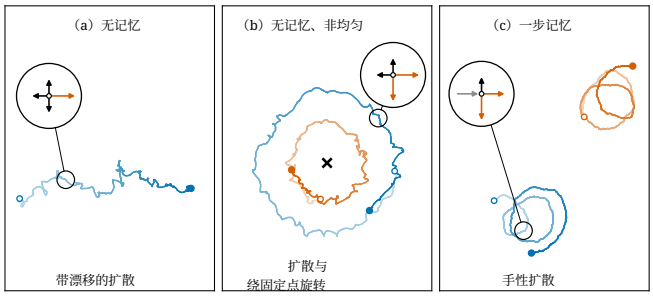

图 1. 随机游走中记忆作用的示意图。空心圆点标示初始位置，实心圆点标示所示轨迹的最终位置。放大插图展示步进概率，橙色箭头表示概率较高的方向。(a) 偏向在空间中固定的无记忆行走者会以系统性漂移的方式扩散，这是一种没有旋转的极性响应。(b) 偏向指向某个固定点（×）的无记忆行走者（此处为切向偏向）会绕该点循环运动：没有记忆时，旋转需要一个提供中心的非均匀环境，参见图 2(c)。(c) 偏向取决于前一步（灰色箭头）的行走者，此处更倾向于直行和右转，如同主动手性随机游走中的持续手性硬币；它会绕着自身移动的中心转圈，并发生手性扩散。

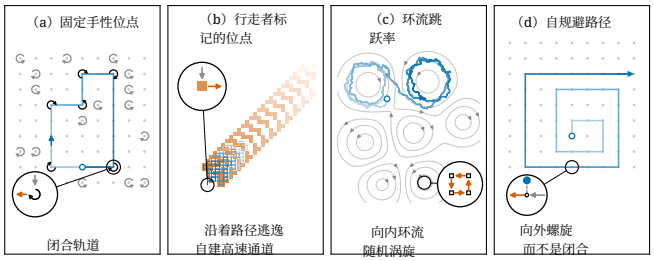

图 2. 环境与路径中的记忆。(a) 固定手性位点：在含有空位点的旋转器洛伦兹晶格气体中（弯曲箭头表示旋转器，访问过的以黑色标示），粒子作弹道运动，并在每个旋转器处转向；此处它沿闭合轨道运动；插图展示了一个向右转的旋转器。(b) 行走者标记的位点：朗顿蚂蚁在白色方格上右转，在涂色（橙色）方格上左转，并翻转方格颜色；经过很长的暂态后，它沿着自己搭建的周期性高速通道逃逸。(c) 环流跳跃率：一个没有内部状态的行走者，其跳跃率包含由随机流函数（灰色等高线）的晶格旋度给出的反对称部分，因此会在形成的随机涡旋中环流；插图展示了基本方格周围的环流速率。(d) 自规避路径：螺旋式自规避游走只向前或向右迈步，且绝不重访任何格点；若右转会撞上自己的路径（插图中的蓝点），它就必须直行，因此会向外盘旋，而不是闭合。

双随机的，时间反演会将 C 映射为 C^{T}，从而交换 L 和 R，并因此反转 q_c；晶格的反射 P 也会产生相同效果，即 $\mathrm{PCP} = \mathrm{C}^{\mathrm{T}}$。因此，手性硬币 $q_c \neq 0$会分别破坏宇称和时间反演对称性（但不会破坏二者的组合），并产生奇扩散；若其手性的来源在时间反演下反转，如观察结果 (ii*) 所示，这种情况会在平衡态发生。

我们注意到，λ 是四个极性特征值 1、i、−1和 −i 的组合；这些特征值分别对应于 I、R、B和L，并按相应的硬币概率加权，因此所有硬币算子都映射到正方形 $|q_p| + |q_c| \leq 1$ [60]上。在具有 $z \geq 3$ 个等价方向的晶格上，基本运动是循环群 C_z的旋转，而 λ 位于由 z次单位根张成的正多边形内，且方程（5）保持不变。对于 $z \to \infty$，λ 充满整个单位圆盘。

等价地，$q_p = \langle \cos \Delta\theta \rangle$和 $q_c = \langle \sin\ \Delta\theta \rangle$分别是转向角 $\Delta\theta$的余弦和正弦的平均值，因此复参数 $\lambda = q_p + \mathrm{i}q_c = \langle \exp(\mathrm{i}\Delta\theta) \rangle$ 就是平均转向相位。注意，这一平均值也可用于定义具有任意角度的晶格的手性。

III. 手性随机行走

参考文献 [51] 中的 CRW模型是方程（4）一般形式的一个特例。具体而言，它在无记忆硬币与完全手性硬币之间插值，$\mathrm{C}_{\mathrm{CRW}} = (1-\chi)\mathrm{M} + \chi\mathrm{R}$ 其中 $0 \leq \chi \leq 1$，因此 $\lambda = \mathrm{i}\chi$ 并且根据方程（5），

$$D_{\parallel}^{\mathrm{CRW}} = \frac{\ell^2}{4\Delta t}\frac{1-\chi^2}{1+\chi^2}, \qquad D_{\perp}^{\mathrm{CRW}} = \frac{\ell^2}{4\Delta t}\frac{2\chi}{1+\chi^2}. \quad (6)$$

$D_{\parallel}^{\mathrm{CRW}}$随 χ单调递减。当 $\chi \to 1$时，行走者主要围绕单个基本方格运动。在 $\chi = 1$的极限下，傅里叶变换后的传播子 $\hat{}\ \hat{}\ \mathrm{U}(\mathrm{q}) = \mathrm{S}(\mathrm{q})\mathrm{R}$，其中步进算符$\hat{}\mathrm{S}(\mathrm{q}) = \mathrm{diag}(\exp(-\mathrm{i}\ell\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_d))$ 变为幺正算符并满足 $\hat{}\mathrm{U}(\mathrm{q})^4 = \mathbf{1}$，因此其谱是平坦的，不再发生耗散体输运；形式上，见方程（6）。参考文献 [51] 将这一极限视为一种拓扑非平凡离散时间量子游走，其中顺时针游走和逆时针游走属于不同的相。拓扑保护系统著名的体—边对应关系同样成立：反射边界会产生边缘态。在耗散区域中，这一现象在定量上也得以保留 $\chi < 1$：初始态位于边界的状态比体内状态衰减显著更慢。因此，CRW从全新视角对奇扩散系统中观察到的稳健边界通量进行建模并加以解释 [47, 48] 。

这一观察带来了一个现象学预测：环境中的适度异质性应有利于奇扩散运动。因此，在文献 [52]，中，CRW 被置于位点渗流簇上。可访问位点以占据概率 p出现，而阻塞位点则用反射硬币 B 建模。退火硬币 $\mathrm{C}_{\mathrm{ann}} = p\mathrm{C}_{\mathrm{CRW}}(\chi) + (1-p)\mathrm{B}$ 具有

$\lambda = -(1-p) + \mathrm{i}p\chi$，而方程（5）给出

$$D_{\parallel}^{\mathrm{ann}} = \frac{\ell^2}{4\Delta t}\frac{p[2-(1+\chi^2)p]}{(2-p)^2+\chi^2p^2},$$
$$D_{\perp}^{\mathrm{ann}} = \frac{\ell^2}{4\Delta t}\frac{2p\chi}{(2-p)^2+\chi^2p^2}. \tag{7}$$

在固定 p时，这个 $D_{\parallel}^{\mathrm{ann}}$会随着$\chi$再次单调下降。在 p中，然而， $D_{\parallel}^{\mathrm{ann}}$则呈非单调变化：无关联的反向会截断手性轨道，因此障碍物会增强强手性行走者的扩散率，使其高于无障碍物时的数值。相比之下，关于淬火介质，文献[52] 报告了一种最优手性 $\chi^*(p)$，在渗流阈值以上的每种障碍物密度下，它都能使扩散最大化，增幅最高接近三倍。当手性行走者沿着障碍物簇的墙壁行走约半个典型周长时，这种效应便会出现；它源于淬火关联，让人想起奇扩散系统中的碰撞增强自扩散[49, 61, 62]。

迄今为止， λ 是纯虚数，因此手性与持久性的损失相耦合。文献 [60] 中的主动手性随机游走则采用完整的硬币矩阵（4），因此也将持久性运动与手性混合起来。方向相关性 $\langle \mathsf{e}_{d_{s+t}} \otimes \mathsf{e}_{d_s}\rangle$ 现在按 $|\lambda|^t$ 衰减，并且每步旋转 $\arg(\lambda)$；水动力学粗粒化和格林 - 久保方法均可导出方程（5）。在弱转向极限下， $\lambda \approx 1-(D_r - \mathrm{i}\omega)\Delta t$，主动手性随机游走能够重现具有转动扩散 $D_r = (1-q_p)/\Delta t$ 和主动扭矩$\omega = q_c/\Delta t$ [63]的手性主动布朗粒子模型的输运特征。然而，强手性和反持续性$q_p < 0$仍具有本质上的离散性 [60]。文献[64] 提出的拓扑手性随机行走者与文献[51] 中的CRW模型大约同时问世；它加入了不伴随平移的转动噪声步，并呈现拓扑保护边缘流，使其能够走出迷宫。

IV. 行走者的记忆

我们将在离散时间和连续时间的框架下讨论记忆。

A. 离散时间：关联持续随机游走

具有内部自由度概念的行走会追踪运动方向，其历史可追溯至 Patlak 于1953年开展的研究 [65]，，但当时尚无手性偏置。我们所知最早明确提出的手性晶格随机游走，是 Gillis 在1960 [66]中的研究。该研究计算了行走者在方格晶格上每一步都以概率$(1\pm\alpha)/2$、 $-1 \le \alpha \le 1$向右或向左转时的精确返回概率。用我们的术语来说，相应的硬币 $[(1+\alpha)\mathrm{R} + (1-\alpha)\mathrm{L}]/2$ 与 CRW 共享 $\lambda = \mathrm{i}\alpha$，因此具有与方程（6）相同的扩散张量，包括其中的奇扩散部分。Kareiva 和 Shigesada [67] 随后考虑了步长为随机值 ℓ且转向角连续变化 θ的行走，即对于 $z \to \infty$。此处$\lambda = \langle\cos\theta\rangle + \mathrm{i}\langle\sin\theta\rangle$，奇异扩散张量的形式为

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\Delta t}\left[\langle\ell^2\rangle\mathbf{1} + 2\langle\ell\rangle^2\,\mathrm{c}(\mathbf{1}-\mathrm{c})^{-1}\right],$$
$$\mathrm{c} = \langle\cos\theta\rangle\,\mathbf{1} + \langle\sin\theta\rangle\,\boldsymbol{\epsilon}, \tag{8}$$

化简为方程（5），当 ℓ为常数时[68] 以及任意的 [69]转移矩阵所对应的格点行走属于方程（3）的范畴，此外，Larralde 对非对称角核的显式手性持久行走精确传播子[71] 以及由非对称转向分布产生的螺旋路径[72] 也完善了这一脉络。记住前几个步长的行走具有更大的内部状态，即包含了超出两步的记忆。

B. 连续时间：手性跑动-翻滚和循环随机运动

在连续时间中，硬币变成了生成元。如果行走者以概率 $\gamma_k\Delta t$ 每步转过角度 $\theta_k = 2\pi k/z$并施加 R^k，其中 $1 \le k < z$，同时移动距离 $\ell = v\Delta t$，则硬币为 $\mathsf{C}_{\mathrm{cont}} = \mathsf{I} + \mathsf{Q}\,\Delta t$。这里，$\mathsf{Q} = \sum_k \gamma_k(\mathsf{R}^k - \mathsf{I})$ 是方向动力学的生成元[56]。对于 $\Delta t \to 0$，方程（2）变为$\partial P_d/\partial t = -v\,\mathsf{e}_d\cdot\nabla P_d + \sum_{d'} Q_{dd'}P_{d'}$，这是一个具有连续位置和离散航向的速度跳跃过程[74]。硬币的极化特征值为 $\lambda = 1-(\Gamma - \mathrm{i}\Omega)\Delta t$，其中去相关率为 $\Gamma = \sum_k \gamma_k(1-\cos\theta_k)$，平均角速度 $\Omega = \sum_k \gamma_k \sin\theta_k$。方程（3）随后变为 $\mathbf{D} = v^2\int_0^\infty \mathrm{d}t\, E\exp(\mathsf{Q}t)\,\Pi\mathsf{E}^{\mathrm{T}} = (v^2/2)(\Gamma\mathbf{1} - \Omega\boldsymbol{\epsilon})^{-1}$，即我们有

$$D_{\parallel}^{\mathrm{cont}} = \frac{v^2}{2}\frac{\Gamma}{\Gamma^2+\Omega^2}, \qquad D_{\perp}^{\mathrm{cont}} = \frac{v^2}{2}\frac{\Omega}{\Gamma^2+\Omega^2}. \tag{9}$$

对于四个方向， $\Gamma = \gamma_L + 2\gamma_B + \gamma_R$和 $\Omega = \gamma_R - \gamma_L$，其中 $\gamma_{R,\,B,\,L} = \gamma_{1,\,2,\,3}$，再现了 Hargus等人[48] 的手性随机运动，以及 Mallikarjun 和 Pal [75], 的手性奔跑-翻滚行走者，并以正交 [76]和经典的 [77] 奔跑-翻滚行走作为相关模型。对于 $z \to \infty$[4]、 $\Gamma \to D_r$ 和 $\Omega \to \omega$，则恢复了手性活性布朗粒子模型[48, 78]。

这些行走的奇性 $\kappa = D_{\perp}^{\mathrm{cont}}/D_{\parallel}^{\mathrm{cont}} = \Omega/\Gamma$，比较的是航向旋转的速度与其失去相关性的速度。行走者转过角度 θ_k时，其转向为前者贡献 $\gamma_k\sin\theta_k$，为后者贡献 $\gamma_k(1-\cos\theta_k)$，而它们的大小

[4] 例如，仅以最小角度 $\pm\Delta\theta = \pm 2\pi/z$转向，速率为 $\gamma_{R,\,L} = D_r/\Delta\theta^2 \pm \omega/(2\Delta\theta)$时，航向表现为漂移旋转布朗运动，其中 $\Gamma = 2D_r(1-\cos\Delta\theta)/\Delta\theta^2 \to D_r$ 且 $\Omega = \omega\sin\Delta\theta/\Delta\theta \to \omega$。

之比 $|\cot(\theta_k/2)|$，在晶格所允许的最小转向下最大 $\theta_k = \pm 2\pi/z$。因此 $|\kappa| \le \cot(\pi/z)$，等号在循环运动的情况下成立。因此，在连续时间下，只有极限 $z \to \infty$ 才能使 κ无界；这与离散时间的情况形成对比，在离散时间下，CRW 的 $\chi \to 1$ 极限在形式上对应于 $\kappa \to \infty$ [51]。因此，只有晶格上的离散时间才能实现完全局域化以及第 III 节中的边缘态。

完全手征生成元 $\mathsf{Q} = \gamma(\mathsf{R}^{\pm 1} - \mathsf{I})$ 定义了概率论中 [79–85] 的循环运动。由于 $\mathsf{R}^{\pm 1}$ 将概率从 $d_{m\mp 1}$ 转移到 d_m，速度跳跃方程变为 $A_{d_m} P_{d_m}(\mathbf{r}\ t) = \gamma P_{d_{m\mp 1}}(\mathbf{r}\ t)$，其中 $A_d = (\partial/\partial t + \gamma + v\mathbf{e}_d \cdot \nabla)$。由于 $\det(\mathsf{A} - \gamma \mathsf{R}^{\pm 1}) = \prod_d A_d - \gamma^z$，对于 $\mathsf{A} = \mathrm{diag}(A_d)$，边缘密度 $\rho = \sum_d P_d$ 满足

$$\left[\prod_{d\in\mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma + v\,\mathbf{e}_d \cdot \nabla\right) - \gamma^z\right] \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \qquad (10)$$

该电报方程适用于 $z = 2$ 一维情形。三个平面方向，$z = 3$，产生三阶贝塞尔函数[79, 80, 82]，以及 $\mathbb{R}^d$ (d（此处特指空间维数）中的最小运动，并得到超贝塞尔函数[85]，，其推广适用于正交 [81,86]，三维 [83]，相关 [87] 及一般[84] 情形。涡旋中的平面运动 [88] 是硬币（4）的连续时间版本。

V. 环境与路径中的记忆

在目前为止所考察的所有行走中，每个格点上的硬币都相同，因此在傅里叶空间中，方程（2）可化简为 $z \times z$ 矩阵 $\mathrm{S}(\mathbf{q})\mathrm{C}$，而输运由参数 λ编码。一旦硬币取决于位置或历史，这种化简便不再成立；本节的精确结果则依赖于可逆性、映射到渗流包络、欧拉回路的组合学，以及随机环境的极限定理。

A. 洛伦兹晶格气体

在洛伦兹晶格气体中，[89]，粒子沿晶格键作弹道运动，通常每个格点都带有一个来自方格的 $\mathsf{C}_\mathbf{r}$ 对称群的确定性硬币算子 D_4，它以正交矩阵 $\mathsf{EC}_\mathbf{r} = \mathsf{c}_\mathbf{r}\mathsf{E}$ 的形式作用于行走者的运动方向，见图 2(a)。旋转格点（“旋转器”）执行 R 或 L 操作，且 $\mathsf{c} = \pm\epsilon$，因此具有手性。对角反射格点（“对角镜”）绕自身轴反射内部自由度，即将 $d = \rightarrow$ 变为 $d = \uparrow$，将 $d = \uparrow$ 变为 $d = \rightarrow$。然而，对角格点是无手性的，因为每个格点在晶格镜像反射下都保持不变。请注意，这种对角镜像操作不同于后向散射硬币算子 B，后者对应于旋转 π，且 $\mathsf{c} = -\mathbf{1}$。由于所有这些操作都是置换，时间演化操作 $\mathsf{S}[\sum_\mathbf{r} |\mathbf{r})(\mathbf{r}| \otimes \mathsf{C}_\mathbf{r}]$ 是状态$|\mathbf{r}\ d)$的一个置换：轨迹永不合并，且每条轨迹要么闭合，要么无界。由两种对角镜等量覆盖的方格晶格会使所有轨迹都闭合于临界渗流外壳[90, 91]，；而仅部分覆盖对角镜的晶格则呈现反常扩散[91, 92]。相比之下，旋转器会在除临界线之外的所有浓度下困住粒子，并呈现相同的动力学指数[91, 93, 94]。在每一步对硬币算子取平均，即采用洛伦兹气体动力学理论中的玻尔兹曼近似[95, 96]，，可得 $\mathsf{c} = \sum_s \phi_s \mathsf{c}_s$，其中 ϕ_s表示物种 s 的浓度。由于镜子和反向散射器只贡献对称矩阵，$D_\perp$ 仅源于旋转器。因此，若仅考虑旋转器，$\lambda = 1 - \phi_R - \phi_L + \mathrm{i}(\phi_R - \phi_L)$[5]，，由方程 (5) 可得 $D_\perp \propto (\phi_R - \phi_L)$。含有反向散射器、旋转器[97] 或随机散射器 [98]，的混合系统将输运与渗流联系起来；在低浓度极限下，后者在方格晶格上的反向散射器比例为$2/3$时呈现扩散渗流阈值 [98]。因此，旋转器气体——手性散射器中的非手性行走者——以及参考文献 [52] 中的无序经典随机行走——无手性障碍物中的手性行走者——是同一概念的两种实现方式。

B. 动力学行走与自修改环境

现在我们考虑这样一类硬币 $\mathsf{C}_\mathbf{r}$：行走者访问特定格点时，硬币会发生变化，从而形成一个储存行走历史的环境。在参考文献 [99, 100]，的生成外壳的行走中，每枚硬币在首次访问时生成，随后被冻结：蜂窝结构上的行走者根据前方六边形是否被占据，以概率 p向左转或向右转。这构成了一种“淬火无序”，在行走过程中即时采样；从历史上看，这种方法曾被用于数值生成渗流团簇。因此，该行走产生了一个由旋转器组成的洛伦兹气体 [90]，旋转器转过 $\pm\pi/3$，且左转多于右转 $q_L - q_R = 2p - 1 = 2(p - p_c)$，其中 $p_c = 1/2$ 是三角晶格上格点渗流的阈值。在 p_c 处，该行走发生渗流，其标度极限对应于 Schramm–Loewner 演化 SLE_6 [101, 102]，，对应的分形维数为 $7/4$ [103]。在参考文献 [104] 中，对于完全手性极限下临界渗流团簇上的 CRW，这一行走维数得到了精确求解，此时行走者沿外壳行走。因此，手性使分形结构上通常为次扩散的随机行走变为超扩散，并具有不同但精确的均方位移指数 [104]。对于 $p \neq p_c$，行走者沿非临界团簇 [105],的周长行走，因而最终形成平台。若每次访问都使硬币翻转，即 $\mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{L}$，则该行走是一种翻转旋转器气体

[5] 在完整旋转器覆盖下，这正是 Gillis硬币 [66]，其中 $\alpha = \phi_R - \phi_L$ [51] $\chi = \phi_R - \phi_L$ 或者同样是参考文献中带有 ()的 CRW。

[89], 也在三角 [106] 晶格和蜂窝结构[93] 上进行了研究，其中包括朗顿蚂蚁 [107], 这是一种著名的元胞自动机：在白色方格上右转、在黑色方格上左转，并翻转方格颜色；其轨迹是无界的 [108], 另见图 2（b）。

如果每次到访都会推进硬币，那么这种行走就是转子行走，或称欧拉行走者 [109]：每个格点都储存一个取向$d_{\mathbf{r}}$，它会将到达的行走者旋转 R，然后沿这一新方向离开。因此，下一步并不取决于行走者的前一步，而是取决于该行走者此前从同一格点出发的方向：从某个格点连续离开的方向会依次旋转 R，这与 CRW 在 $\chi = 1$处的连续步进相似。同样的旋转使 CRW 在单个基本方格上闭合，也使转子行走覆盖其周围区域：在有限晶格上，它会锁定为一条欧拉回路，沿每条键的两个方向各经过一次[109]。在 $\mathbb{Z}^2$中，对于彼此独立且均匀随机的初始转子，已访问区域以半径 $\propto t^{1/3}$增长，并呈现出圆形[109, 110]；范围指数 2/3以及向凸极限形状的收敛如今都已得到证明 [111]。具体而言，随机旋转规则会恢复随机行走的行为[110]。

C. 随机奇环境

没有内部状态的行走者，如果其从格点 $k_{\mathbf{rr'}}$ r 到相邻格点 r′ 的跳跃率随空间变化，也可以打破细致平衡。对于双随机速率 $\sum_{\mathbf{r'}} k_{\mathbf{rr'}} = \sum_{\mathbf{r'}} k_{\mathbf{r'r}}$，正如 Kozma 和 Tóth [112], 所研究的环境一样，均匀密度是平稳的，主方程为 $\partial\rho(\mathbf{r}\ t)/\partial t = \sum_{\mathbf{r'}} k_{\mathbf{r'r}}[\rho(\mathbf{r'}, t) - \rho(\mathbf{r}\ t)]$。速率可分解为对称部分 $s_{\mathbf{rr'}} = (k_{\mathbf{rr'}} + k_{\mathbf{r'r}})/2$ 和反对称部分 $a_{\mathbf{rr'}} = (k_{\mathbf{rr'}} - k_{\mathbf{r'r}})/2$。在方格晶格上没有净流出等价于

$$a_{\mathbf{r},\mathbf{r}+\ell\mathbf{e}} = \psi\left(\bar{\mathbf{r}} - \ell\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{e}/2\right) - \psi\left(\bar{\mathbf{r}} + \ell\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{e}/2\right), \qquad (11)$$

其中，ψ 是定义在晶格基本方格中心的流函数，$\bar{}\mathbf{r} = \mathbf{r} + \ell\mathbf{e}/2$，而 $\bar{}\mathbf{r} \pm \ell\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{e}/2$ 是两个相邻单元的中心。如上文观察（ii）所述，当且仅当 $a = 0$时，细致平衡成立，即 ψ 为常数；否则，增量会通过淬火环境产生相关性，而该环境提供了假设所需的记忆。

对于常数 $s_{\mathbf{rr'}} = s$ 和缓慢变化的 ψ，$a_{\mathbf{r},\ \mathbf{r}+\ell\mathbf{e}} \simeq -\ell(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{e}) \cdot \nabla\psi$，主方程变为 $\partial\rho/\partial t = s\ell^2\nabla^2\rho - \mathbf{u}\cdot\nabla\rho$，其中 $\mathbf{u} = 2\ell^2\boldsymbol{\epsilon}\nabla\psi$。这是因为

$$\nabla\cdot[(D_{\parallel}\mathbf{1} + D_{\perp}(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon})\nabla\rho] = D_{\parallel}\nabla^2\rho - \mathbf{u}\cdot\nabla\rho, \qquad (12)$$

其中 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\epsilon}\nabla D_{\perp}(\mathbf{r})$对应于空间依赖的奇扩散 $D_{\perp} = 2\ell^2\psi$，它由速率的流函数生成，也见 $D_{\parallel} = s\ell^2$ 方程（12）。因此，$D_{\perp}$ 的均值从密度动力学中消去，仅通过通量边界条件起作用[49], ，而其空间变化会影响密度 [113], 并且对于随机的 $D_{\perp}$，表现为随机不可压缩流。若流函数平稳且平方可积 [112, 114]，则中心极限定理成立。

D. 路径中的记忆：螺旋自避免游走

最后，螺旋自避免游走 [115]将记忆存储在路径中。它们直线向前行走，I，或者仅向一个方向转弯，例如 R，但自避性以对整个过去路径的约束取代了硬币，另见图 2（d）。精确解 [116], 在文献中进一步完善。[117,118], 表明，不同的 N步螺旋自避免游走的数量按 $\propto N^{-7/4}\exp(2\pi\sqrt{N/3})$ 增长，这种增长速度低于指数增长。此外，精确解表明，N步行走的端到端距离按 $\propto N^{1/2}\ln N$的规律标度。完全手性与自避性相结合，因而既不会产生扩散行为，也不会产生局域化行为。

VI. 结论与展望

我们围绕一步算符 $\mathrm{S}(\mathbf{1}\otimes\mathrm{C})$ 组织了手性晶格随机游走，并遵循这样一个假设：手性至少需要两步记忆，而这些记忆存储于行走者、环境或路径中。对于各向同性硬币，扩散张量仅取决于极化特征值λ，这使我们的硬币模型 [51, 52, 60] 和历史上的行走处于同一个总括性框架中。图 3提供了图示概览。在所有模型族中，离散时间下的完全手性会闭合轨道，部分手性产生最优值，而边缘承载着流。

当前工作从多个方向扩展了我们综述中的内容。第一个方向是多行走者的情形。在具有优先旋转方向的质量守恒跳跃过程中，彼此独立的单键转移产生对角扩散张量，而最小的手性移动是在两个正交键之间进行的 L 形转移 [119]，即第 III 节两步记忆的多体对应物。随后，奇扩散会产生按 r^{-4} 衰减的密度关联；流动性仍然仅通过 D 的对称部分与稳态涨落相关，而反射壁上会承载稳态边缘电流[119]。第二个方向涉及界面。在具有有偏局部旋转的手性活性格气体中，系统发生相分离，凝聚态界面承载持续的单向边缘电流 [120]。手性伊辛模型，即手性活性模型 B 的平均场理论，展示了粗化停滞，并详细说明微观旋转偏置如何在界面处产生局域化的切向流 [121]。因此，这两项工作都研究了第 III 节边缘输运的多体类比。第三个方向涉及限域条件下以及流场中的主动晶格行走者。对齐粒子会形成堵塞和条带 [122] ，并促使人们对主动 CRW 的硬币语言作出一种解释 [60]。在数学方面，关于转子行走和

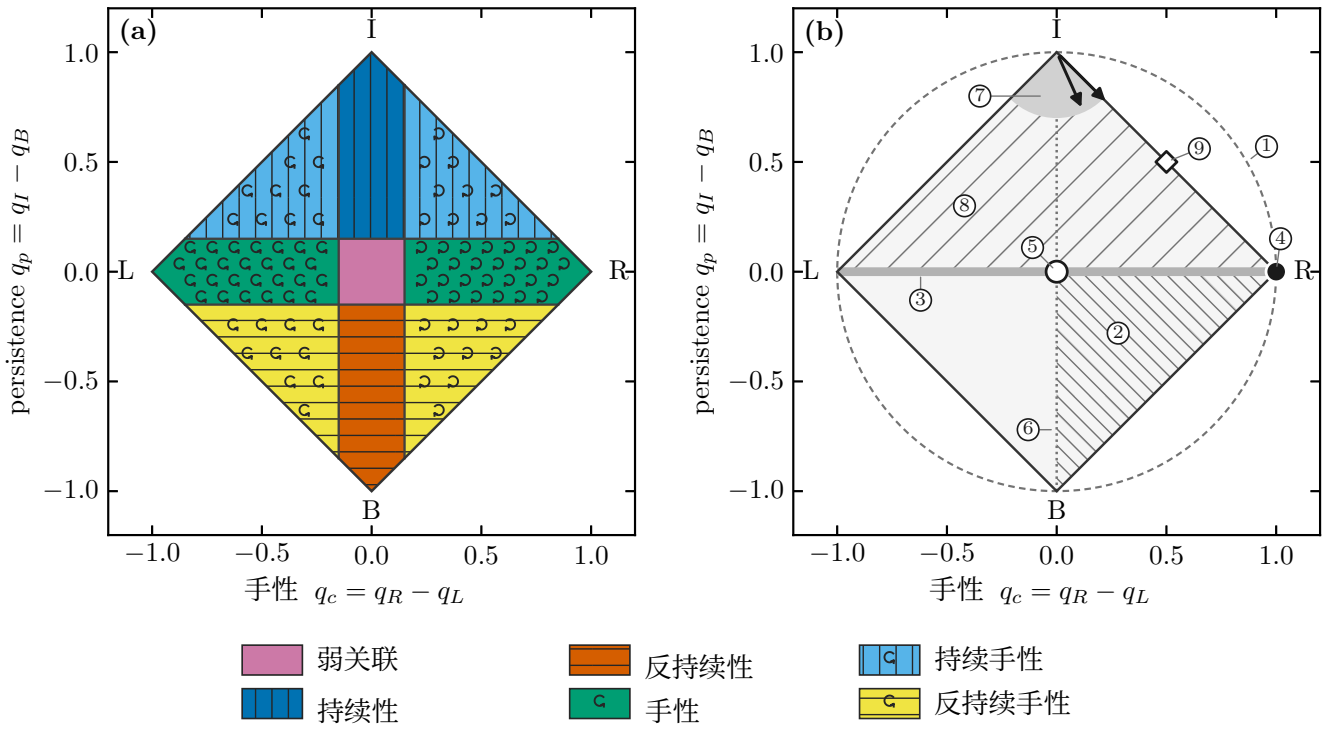

图 3。一般硬币矩阵 (4) 的持续性-手性菱形。菱形表示归一化约束。顶点 I、L、B 和 R 分别是纯持续、左转、反向和右转硬币。(a) 主动手性随机游走可以呈现的动力学行为示意图。(b) 根据其极化特征值 $\lambda = q_p + \mathrm{i}q_c$ 放置的文献中的游走。一般的四转硬币填满整个菱形 [54, 60, 68, 69]，玻尔兹曼近似下混合旋转器和反向散射器的洛伦兹气体也是如此 [97, 98]。(1) 具有连续转向角的游走填满单位圆盘（虚线），其中在方格晶格上只有菱形区域可达 [67, 70–72]。(2) 退火无序环境中的 CRW [52]。(3) $q_p = 0$，手性游走：Gillis游走 [66]，旋转器洛伦兹气体 [89, 91]，朗顿蚂蚁等翻转旋转器 [107, 108]，以及 CRW [51]。(4) 完全手性顶点 R：CRW 位于 $\chi = 1$ [51]，Gillis游走位于 $\alpha = 1$ [66]，拓扑手性随机行走者位于 $D_r = 0, \omega = 1$ [64]。(5) $\lambda = 0$：普通随机游走 [68]。(6) $q_c = 0$：无手性持续性游走 [65]。(7) 连续时间游走，$\lambda = 1 - (\Gamma - \mathrm{i}\Omega)\Delta t$ 其中 $\Delta t \to 0$，位于 I 点，并在楔形区域 $|\kappa| \le 1$ 内离开 I（箭头沿 $\kappa = \Omega/\Gamma$）：手性随机运动 [48]，手性游走和正交奔跑-翻滚游走 [75, 76] 以及主动手性随机游走的弱转向极限 [60]；具有四个方向的循环随机运动 [81] 沿 I-R 和 I-L 的边运行。(8) 在玻尔兹曼近似下，具有空位点的旋转器洛伦兹气体填满上三角形 I-L-R [89, 91, 96]；与 (2) 中无手性障碍物中的手性行走者 [52] 在直线 $q_p = 0$ 上相交。(9) 螺旋自避免游走：硬币 $(\mathrm{I} + \mathrm{R})/2$，位于 $\lambda = (1 + \mathrm{i})/2$，以自避免性为条件 [115, 116]。

无散环境 [111, 114] 的最新证明（见第 V 节）表明，存储在环境中的记忆正变得越来越容易处理。

本文发展的格点视角为使用可编程主动粒子开展直接实验提供了路径。如果能够分别规定持续前进、反向运动以及向左或向右转向，那么式（4）中的硬币便可直接实现，并可对图 3 所示的持续性-手性菱形开展实验探索，其中包括没有简单连续介质对应物的强手性和反持续性状态。

从随机搜索视角 [123]，来看，将CRW及其他格点随机游走模型与随机重置机制相结合将颇具意义[124, 125]。在随机重置中，行走者被“重置”至其起始位置（“完全重置”）[126–134]，或重置至其数值的某一分数（“部分重置”）[135–137]。由于已知重置能够优化平均首次-通过时间（在一定条件下），类似地，应有可能借助随机重置改善手性格点随机游走的空间探索。

最后，我们提出一些开放问题。它们依次变得更具推测性，但从本文采用的格点视角来看，似乎都合乎情理。首先，当记忆存在于非均匀环境或路径中，而非行走者自身时，能否证明手性必然需要记忆，或者用一个反例推翻这一假设，尚不清楚。其次，CRW 具有更新结构，因为每次混合事件都会抹去其取向，而两次事件之间的行走是确定性的；这意味着可能存在闭式传播子，在有界区域中亦是如此。这样的传播子将为手性首次通过建立一套完整理论，超越迄今已找到的最优结果 [52, 75]。第三，手性行走者与手性散射体相遇时，会结合内部记忆和环境记忆；这两种手性究竟相互叠加还是彼此竞争，仍是一个开放问题。

第四，各向同性硬币恰在 $q_L \neq q_R$ 时违反细致平衡，也就是在使其具有奇性的同一条件下；这引出了一个问题：耗散是否会限制奇性，以及它如何区分主动手性与昂萨格-卡西米尔手性。第五，转子规则和翻转转子规则的手性将记忆存储在格点中，但尚不清楚它们是否会在输运中留下奇性特征。最后，在方格晶格之外，三维中的各向同性扩散张量不可能具有奇性，因此那里的手性需要一个优选轴，例如一个场或行走者的螺旋轴；而在网络以及弯曲晶格或含缺陷晶格上，各格点的方向数目会发生变化，硬币也不再是单一旋转的多项式。据我们所知，这两种情形都尚未得到研究。

致谢

E. K. 和 R. M. 感谢他们在 2026 年罗马举行的“第39届马里安·冯·斯莫卢霍夫斯基统计物理研讨会”上的富有成果的讨论，这些讨论促成了本综述。R. M. 感谢德国研究联合会（DFG，资助编号 ME 1535/22-1 和 318763901，属于 CRC 1294“数据同化”项目 B10）提供的经费支持。Y.R. 和 N.S. 感谢以色列科学基金会（资助编号 385/21 和 2013/25）的支持。

附录 A：硬币算子的矩阵表示

CRW 的基本算子包括单位算子 I、右手性算子 R、左手性算子 L、反向算子 B，以及混合（随机化）算子 M。用向量 $|{\rightarrow}\rangle = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$、$|{\downarrow}\rangle = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$、$|{\leftarrow}\rangle = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $|{\uparrow}\rangle = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 表示内部取向的基，可以将这些算子写成 4×4 矩阵，

$$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathrm{L}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ \mathrm{R}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ \mathrm{M}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}. \tag{A1}$$

方程（4）中的一般硬币是由以下矩阵组合而成的：[60]

$$\mathrm{C}=q_I\mathrm{I}+q_R\mathrm{R}+q_L\mathrm{L}+q_B\mathrm{B}+q_M\mathrm{M}, \tag{A2}$$

其中，q_I、q_R、q_L、q_B 和 q_M 分别是选择相应硬币的概率。这些概率在 $[0,1]$ 中有界，并满足归一化条件 $q_I+q_R+q_L+q_B+q_M=1$。C 的特征值为

$$\lambda_0 = 1, \tag{A3a}$$
$$\lambda_1 = (q_I-q_B)+\mathrm{i}\,(q_R-q_L)\equiv q_p+\mathrm{i}\,q_c, \tag{A3b}$$
$$\lambda_2 = (q_I+q_B)-(q_R+q_L)\equiv q_n, \tag{A3c}$$
$$\lambda_3 = (q_I-q_B)-\mathrm{i}\,(q_R-q_L)=\overline{\lambda_1}. \tag{A3d}$$

有关这些特征值的详细讨论，请参见参考文献 [60]。

[1] J. Venn，《偶然的逻辑》（MacMillan & Co.，伦敦，英国，1888年）。[2] K. Pearson，随机游走问题。《自然》**72**, 294（1905年）。[3] R. Ross，蚊虫消减卫生政策的逻辑基础，《科学》**22**, 689（1905年）。[4] 瑞利勋爵，随机游走问题，《自然》**72**, 318（1905年）。[5] A. Einstein，《论布朗运动理论》，《物理学年鉴》（莱比锡）**322**, 549（1905年）。[6] M. von Smoluchowski，《论布朗分子运动与悬浮液的动力学理论》，《物理学年鉴》（莱比锡）**21**, 756（1906年）。[7] E. Gudowska-Nowak、K. Lindenberg 和 R. Metzler 编，《Marian S moluchowski 1916 年的论文——一个世纪的灵感》，专刊序言，《物理学杂志A》**50**, 380301（2017年）。[8] G. H. Weiss，《随机游走的若干方面与应用》（North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1994年），国际标准书号 978-0-444-81606-1。

[9]B. D. Hughes，《随机游走与随机环境》第1卷：随机游走（牛津大学出版社，英国牛津，1995年），国际标准书号 978-0198537885。[10] M. Doi 和 S. F. Edwards，《聚合物动力学理论》（克拉伦登出版社，英国牛津，1986年），国际标准书号 978- 0198519768。[11] N. S. Goel 和 N. Richter-Dyn，《生物学中的随机模型》（学术出版社，美国纽约州纽约，1974年），国际标准书号 978-0-12-287460-4。[12] E. A. Codling、M. J. Plank 和 S. Benhamou，生物学中的随机游走模型，《英国皇家学会界面期刊》**5**，813（2008年）。[13] J.-P. Bouchaud 和 M. Potters，《金融风险理论与衍生品定价》（剑桥大学出版社，英国剑桥，2010年），国际标准书号 978-0521819169。[14] H. Scher 和 E. W. Montroll，非晶态固体中的反常渡越时间色散，《物理评论B》**12**，2455（1975年）。[15] M. Dentz、A. Cortis、H. Scher 和 B. Berkowitz，非均匀介质中溶质运移的时间行为：从反常输运到正常输运的转变，《进展》

《水研究》27，155（2004年）。[16] R. Metzler 和 J. Klafter，《随机游走与反常扩散指南：分数阶动力学方法》，《物理报告》339，1（2000年）。[17] R. Metzler、J.-H. Jeon、A. G. Cherstvy 和 E. Barkai，《反常扩散模型及其特性：单粒子跟踪百年之际的非平稳性、非遍历性和老化》，《物理化学化学物理》16，24128（2014年）。[18] G. Muñoz-Gil、G. Volpe、M. Á. García-March、E. Aghion、A. Argun、C. B. Hong、T. Bland、St. Bo、J. A. Conejero、N. Firbas、Ò. Garibo i Orts、A. Gentili、Z. Huang、J.-H. Jeon、H. Kabbech、Y. Kim、P. Kowalek、D. Krapf、H. Loch-Olszewska、M. A. Lomholt、J.-B. Mas- son、P. G. Meyer、S. Park、B. Requena、I. Smal、T. Song、J. Szwabiński、S. Thapa、H. Verdier、G. Volpe、A. Widera、M. Lewenstein、R. Metzler 和 C. Manzo，《反常扩散解码方法的客观比较》，《自然·通讯》12，6253（2021年）。[19] I. M. Sokolov，《拥挤环境中的反常扩散模型》，《软物质》8，9043（2012年）。[20] Y. Meroz 和 I. M. Sokolov，《确定亚扩散机制的工具箱》，《物理报告》573，1（2015年）。[21] F. Höfling 和 T. Franosch，《生物细胞拥挤世界中的反常输运》，《物理学报告》76，046602（2013年）。[22] H. Seckler 和 R. Metzler，《用于反常扩散分析误差估计的贝叶斯深度学习》，《自然·通讯》13，6717（2022年）。[23] T. Sandev 和 Ž. Tomovski，《分数阶方程与模型》（Springer，柏林，2019年），国际标准书号 978-3-030-29613- 1。[24]L. R. Evangelista 和 E. K. Le nzi，《分数阶扩散方程与反常扩散》（剑桥大学出版社，英国剑桥，2018年），国际标准书号 978- 1107143555。[25] J. M. Berger 和 B. Mandelbrot，《电话线路错误聚集的新模型》，《IBM研究与开发杂志》7，224（1963年）。[26] P. Lewis 和 D. Cox，《电话线路错误数据的统计分析》，《IEEE通信技术汇刊》14，382（1966年）。[27] S. Janušonis、N. Detering、R. Metzler 和 T Vo- jta，《作为分数布朗运动路径的血清素能轴突：对区域密度自组织的启示》，《计算神经科学前沿》14，56（2020年）。[28] S. Janušonis、J. H. Haiman、R. Metzler 和 T. Vo- jta，《预测血清素能轴突的分布：三维小鼠脑模型中反射分数布朗运动的超级计算模拟》，《计算神经科学前沿》17，1189853（2023年）。[29] I. Yurchenko、J. M. V. Basso、V. S. Syrotenko 和 C. Staii，《受控几何形状表面上的神经元生长与反常扩散》，《公共科学图书馆·综合》14，e0216181（2019年）。[30] R. N. Mantegna 和 H. E. Stanley，《经济物理学导论》（剑桥大学出版社，英国剑桥，2010年），国际标准书号 9780511755767。[31] F. Comte 和 E. Renault，《连续时间随机波动率模型中的长记忆》，《数学金融》8，291（1998年）。[32] J. Gatheral、T. Jaisson 和 M. Rosenbaum，《波动率是粗糙的》，《量化金融》18，933（2018年）。[33] F. R. Schaudinn 和 E. Hoffmann，《关于在梅毒病变产物和乳头状瘤中发现螺旋体的初步报告》，《帝国卫生局论文集》（柏林）22，527（1905年）。[34] E. Hoffmann，《培养螺旋体的研究》，《皮肤病学档案》144，306（1923年）。[35] K. Bente、S. Mohammadinejad、M. A. Charsooghi、F. Bachmann、A. Codutti、C T Lefèvre、S. Klumpp 和 D. Faivre，《高速运动源于双毛细菌中协同推动和拉动的鞭毛束》，eLife 9，e47551（2020年）。[36] X. Li 和 B. Chen，《微图案基底上多细胞涡旋运动的动力学》，《美国国家科学院院刊》121，e2400804121（2024年）。[37] D. Alizadehrad、T. Krüger、M. Engstler 和 H. Stark，《模拟布氏锥虫的复杂细胞结构及其运动性》，《公共科学图书馆·计算生物学》11，e1003967（2015年）。[38] T. Bhattacharjee 和 S. S. Datta，《细菌在多孔介质中的跳跃与捕获》，《自然·通讯》10，2075（2019年）。[39] K. B. Velle、M. Ramaswamy、B. V. Hokmabad、T. Martín-Pérez、T. T. Carrasco、W. S. Callahan、H. S. Kim、E. M. Larkin、A. H. ElZafarany、S. M. Jacques、S. S. Datta、M. Edwards 和 L. K. Fritz-Laylin，《纳格勒阿米巴在狭窄空间中寻找限域并持续爬行》，《美国国家科学院院刊》123，e2534165123（2026年）。[40] G. Alexandre，《土壤和根际中的细菌运动》，《应用与环境微生物学》91，e00246-25（2025）。[41] E. Lauga、W. R. Di Luzio、G. M. Whitesides 和 H. A. Stone，《绕圈游动：固体边界附近细菌的运动》，《生物物理学杂志》90，400（2006年）。[42] F. Kümmel、B. ten Hagen、R. Wittkowski、I. Buttinoni、R. Eichhorn、G. Volpe、H. Löwen 和 C. Bechinger，《非对称自推进粒子的圆周运动》，《物理评论快报》110，198302（2013年）。[43] V. Soni、E. S. Bililign、S. Magkiriadou、S. Sacanna、D. Bartolo、M. J. Shelley 和 W. T. M. Irvine，《胶体手性流体的奇异自由表面流》，《自然物理学》15，1188（2019年）。[44] R. Goerlich、A. P. Antonov、K. S. Olsen、L. Caprini、C. Scholz、H. Löwen 和 Y. Roichman，《手性传递与奇异输运的粒子分辨流变学研究》，电子印本 arXiv:2605.25136。[45] F. Vega Reyes、M. A. López-Castaño 和 Á. Rodríguez-Rivas，《二维手性流体中的扩散机制》，《通讯物理学》5，256（2022年）。[46] E. J. Dresselhaus、S. Govindjee 和 K. K. Mandadapu，《各向异性二维材料的反常张量性质》，电子印本 arXiv:2508.20055。[47] M. Fruchart、C. Scheibner 和 V. Vitelli，《奇异黏度与奇弹性》，《凝聚态物理年度评论》14，471（2023年）。[48] C. Hargus、J. M. Epstein 和 K. K. Mandadapu，《手性随机运动的奇异扩散率》，《物理评论快报》127，178001（2021年）。[49] E. Kalz、H. D. Vuijk、I. Abdoli、J. U. Sommer、H. Löwen 和 A. Sharma，《碰撞增强奇异扩散系统中的自扩散》，《物理评论快报》129，090601（2022年）。[50] J. M. Park，《奇异扩散率在状态依赖可观测量多点统计中的作用》，电子印本

arXiv:2607.26824.[51] J. Wójcik 和 E. Kalz，《手性随机游走：奇扩散的量子启发框架》，《新物理学杂志》28，114603（2026年）。[52] J. Uhlig、J. Wójcik、R. Metzler 和 E. Kalz，《手性增强无序环境中的扩散》，《化学物理杂志》165，124118（2026年）。[53] J. Kempe，《量子随机游走：入门概述》，《当代物理学》44，307（2003年）。[54] T. Gilbert 和 D. P. Sanders，《晶格上多步持久随机游走的扩散系数》，《物理学杂志A》43，035001（2010年）。[55] W. Feller，《概率论及其应用导论》，第3版（约翰·威立父子公司，纽约州纽约，1968年），国际标准书号 978-0471257080。[56] J. R. Norris，《马尔可夫链》（剑桥大学出版社，英国剑桥，1998年），国际标准书号 0-521-48181-3。[57] H. B. G. Casimir，《论Onsager微观可逆性原理》，《现代物理评论》17，343（1945年）。[58] V. Balakrishnan，《非平衡统计力学要素》（Springer，柏林，2021年），国际标准书号 978-3-030- 62232-9。[59]H. M. Chun、X. Durang 和 J. D. Noh，《磁性洛伦兹力作用下朗之万动力学中非白噪声的出现》，《物理评论 E》97，032117（2018年）。[60] N. Sherf、J. Uhlig、J. Wójcik、R. Metzler、Y. Roichman 和 E. Kalz，《主动手性随机游走》，电子印本 arXiv:2611.14446。[61] E. Kalz、H. D. Vuijk、J. U. Sommer、R. Metzler 和 A. Sharma，《平衡奇扩散系统中的振荡力自相关》，《物理评论快报》132，057102（2024年）。[62] A. Langer、A. Sharma、R. Metzler 和 E. Kalz，《奇扩散粒子的舞蹈：傅里叶方法》，《物理评论研究》6，043036（2024年）。[63] B. Liebchen 和 D. Levis，《手性活性物质》，《欧洲物理学快报》139，67001（2022年）。[64] S. Osat、E. Meyberg、J. Metson 和 T. Speck，《拓扑手性随机行走者》，电子印本 arXiv:2602.12020。[65] C. S. Patlak，《具有持久性和外部偏置的随机游走》，《数学生物物理学通报》15，311（1953年）。[66] J. Gillis，《一个随机游走问题》，《剑桥哲学学会数学学报》56，390（1960年）。[67] P. M. Kareiva 和 N. Shigesada，《将昆虫运动分析为相关随机游走》，《生态学》56，234（1983年）。[68] R. Henderson、E. Renshaw 和 D. Ford，《二维扩散的相关随机游走模型》，《应用概率学杂志》21，233（1984年）。[69] A. Chen 和 E. Renshaw，《一般相关随机游走》，《应用概率学杂志》31，869（1994年）。[70] H. Larralde，《二维“手性”持续性随机游走的输运性质》，《物理评论 E》56，5004（1997年）。[71] C. Bracher，《二维持久随机游走的特征函数方法》，《物理学 A》331，448（2004年）。[72] Z. Sadjadi、M. R. Shaebani、H. Rieger 和 L. Santen，《持久随机游走方法用于自推进粒子反常输运的研究》，《物理评论 E》91，062715（2015年）。[73] T. Gilbert、H. C. Nguyen 和 D. P. Sanders，《立方晶格上持续性随机游走的扩散性质及其在周期性洛伦兹气体中的应用》，《物理学杂志 A》44, 065001（2011）。[74] H. G. Othmer、S. R. Dunbar 和 W. Alt，生物系统中的散布模型，《J. Math. Biol.》26，263（1988）。[75] R. Mallikarjun 和 A. Pal，手性奔跑-翻滚行走者：输运与优化搜索，《Physica A》622，128821（2023）。[76] L. Angelani，正交奔跑-翻滚游走，《J. Stat. Mech.》2022，123207（2022）。[77] K. Martens、L. Angelani、R. Di Leonardo 和 L. Bocquet，奔跑-翻滚细菌动力学的概率分布：与洛伦兹模型的类比，《Eur. Phys. J. E》35，84（2012）。[78] B. Liebchen、M. E. Cates 和 D. Marenduzzo，具有自推进能力的化学相互作用主动转子中的图案形成，《软物质》12，7259（2016）。[79] A. di Crescenzo，具有三个方向的平面随机运动的精确瞬态分析，《Stochastics》72，175（2002）。[80] E. Orsingher，三阶贝塞尔函数与具有三个方向的循环平面运动的分布，《Stochastics》74，617（2002）。[81] S. Leorato、E. Orsingher 和 M. Scavino，带停顿的交替运动及其相关的具有四个方向的平面循环运动，《Adv. Appl. Probab.》35，1153（2003）。[82] S. Leorato 和 E. Orsingher，玻色–爱因斯坦型统计、次序统计与具有三个方向的平面随机运动，《Adv. Appl. Probab.》36，937（2004）。[83] E. Orsingher 和 A. M. Sommella，具有四个方向和有限速度的 R^3 中的循环随机运动，《Stoch. Stoch. Rep.》76，113（2004）。[84] A. Lachal，$\mathbb{R}^d$空间中具有 n 个方向的循环随机运动，《ESAIM-Prob. Stat.》10，277（2006）。[85] A. Lachal、S. Leorato 和 E. Orsingher，$\mathbb{R}^n$ 中的极小循环随机运动与超贝塞尔函数，《Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Stat.》42，753（2006）。[86] F. Cinque 和 E. Orsingher，具有正交方向的广义平面随机运动的随机动力学，《J. Theor. Prob.》36，2229（2023）。[87] M. M. Marchione 和 E. Orsingher，具有渐近相关分量的平面随机运动，《J. Stat. Phys.》191，121（2024）。[88] E. Orsingher 和 M. M. Marchione，涡旋中的平面随机运动，《J. Theor. Prob.》38，4（2025）。[89] T. W. Ruijgrok 和 E. G. D. Cohen，确定性格子气体模型，《Phys. Lett. A》133，415（1988）。[90] R. M. Ziff、X. Kong 和 E. G. D. Cohen，洛伦兹格子气与动力学行走模型，《Phys. Rev. A》44，2410（1991）。[91] E. G. D. Cohen 和 F. Wang，洛伦兹格子气元胞自动机中扩散的新结果，《J. Stat. Phys.》81，445（1995）。[92] X. P. Kong 和 E. G. D. Cohen，格子气风树模型中的反常扩散，《Phys. Rev. B》40，4838（1989）。[93] F. Wang 和 E. G. D. Cohen，洛伦兹格子气元胞自动机中的扩散：蜂窝结构和准晶格与方格和三角晶格的比较，《J. Stat. Phys.》81，467（1995）。[94] M. S. Cao 和 E. G. D. Cohen，晶格上粒子轨迹的标度，《J. Stat. Phys.》87，147（1997）。[95] M. H. Ernst 和 P. M. Binder，洛伦兹晶格气体：基本理论，《J. Stat. Phys.》51，981（1988）。

[96] G. A. van Velzen，确定性晶格洛伦兹气体：I. 手性模型，《物理学杂志A》24，787（1991）。[97] J. M. F. Gunn 和 M. Ortuño，简单随机环境中的渗流与运动，《物理学杂志A》18，L1095（1985）。[98] L. Acedo 和 A. Santos，具有渗流阈值的晶格洛伦兹气体中的扩散，《物理评论 E》60，1310（1999）。[99] R. M. Ziff、P. T. Cummings 和 G. Stell，通过随机游走生成渗流簇周界，《物理学杂志A》17，3009（1984）。[100] R. M. Ziff，生成边界的游走，《Physica D》38，377（1989）。[101] O. Schramm，环擦除随机游走和均匀生成树的标度极限，《Isr. J. Math.》118，221（2000）。[102] F. Camia 和 C. M. Newman，临界渗流探索路径与 SLE_6：收敛性证明，《Prob. Theory Relat. Fields》139，473（2007）。[103] V. Beffara，SLE曲线的维数，《Ann. Prob.》36，1421（2008）。[104] J. Uhlig、R. Metzler 和 E. Kalz，临界渗流团簇上手性随机行走者的精确超扩散指数与边界探索，电子印本 arXiv:2611.29537。[105] A. Weinrib 和 S. A. Trugman，一种新的动力学游走与渗流周界，《物理评论B》31，2993（1985）。[106] X. P. Kong 和 E. G. D. Cohen，三角晶格洛伦兹气元胞自动机中的扩散与传播，《J. Stat. Phys.》62，737（1991）。[107] C. G. Langton，利用元胞自动机研究人工生命，《Physica D》22，120（1986）。[108] L. A. Bunimovich 和 S. E. Troubetzkoy，洛伦兹晶格气元胞自动机的重现性质，《J. Stat. Phys.》67，289（1992）。[109] V. B. Priezzhev、D. Dhar、A. Dhar 和 S. Krishnamurthy，作为自组织临界性模型的欧拉游走者，《物理评论快报》77，5079（1996）。[110] R. Kapri 和 D. Dhar，欧拉行走者所访问区域的渐近形状，《物理评论 E》80，051118（2009）。[111] A. Bou-Rabee 和 Y. Peres，$\mathbb{Z}^2$ 上的欧拉行走者具有范围指数 $2/3$，电子印本 arXiv:2608.23545。[112] G. Kozma 和 B. Tóth，双随机环境中随机游走的中心极限定理：$\mathcal{H}_{-1}$ 足够，《Ann. Probab.》45，4307（2017）。[113] I. Abdoli、H. D. Vuijk、J. U. Sommer、J. M. Brader 和 A. Sharma，具有洛伦兹力的布朗系统中的非扩散通量，《物理评论 E》101，012120（2020）。[114] B. Tóth，退化无散随机环境中随机游走的中心极限定理：$\mathcal{H}_{-1}$ 在放宽椭圆性条件下重新研究，电子印本 arXiv:2602.16479。[115] V. Privman，螺旋自回避游走，《物理学杂志A》16，L571（1983）。[116] H. W. J. Blöte 和 H. J. Hilhorst，螺旋自回避游走：精确解，《物理学杂志A》17，L111（1984）。[117] A. J. Guttmann 和 N. C. Wormald，关于螺旋自回避游走的数量，《物理学杂志A》17，L271（1984）。[118] R. Brak、A. L. Owczarek 和 C. E. Soteros，关于各向异性螺旋自回避游走，《物理学杂志A》31，4851（1998）。[119] K. Das、A. Hazra 和 P. Pradhan，《手性质量输运过程中的奇扩散与幂律关联》，电子印本 arXiv:2609.16821。[120] B. Wang、P. Pietzonka 和 F. Jülicher，《边缘电流塑造手性活性物质中的凝聚体》，《物理评论研究》8, 043093 (2026)。[121] K. Blom 和 U. Thiele，《手性活性模型 B 的平均场理论：粗化停滞与手性指进不稳定性》，电子印本 arXiv:2607.27305。[122] C. Calascibetta、L. Giraldi、Z. El Khiyati 和 J. Bec，《集体模式、限域和流体流动对活性粒子输运的影响》，《物理评论 E》110, 064601 (2024)。[123] D. Grebenkov、R. Metzler 和 G. Oshanin（编），《目标搜索问题》（Springer，柏林，2024），国际标准书号 978-3-031-67801-1。[124] M. R. Evans 和 S. N. Majumdar，《随机重置下的扩散》，《物理评论快报》106, 160601 (2011)。[125] M. R Evans、S. N. Majumdar 和 G. Schehr，《随机重置及其应用》，《物理学杂志A》53, 193001 (2020)。[126] A. Chechkin 和 I. M. Sokolov，《带重置的随机搜索：统一更新方法》，《物理评论快报》121, 050601 (2018)。[127] A. Pal 和 S. Reuveni，《重启下的首次通过》，《物理评论快报》118, 030603 (2017)。[128] O. Tal-Friedman、A. Pal、A. Sekhon、S. Reuveni 和 Y. Roichman，《随机重置下扩散的实验实现》，《物理化学快报》11, 7350 (2020)。[129] O. Tal-Friedman、T. D. Keidar、S. Reuveni 和 Y. Roichman，《智能重置：随机搜索过程的一种节能策略》，《物理评论研究》7, 013033 (2025)。[130] B. Besga、A. Bovon、A. Petrosyan、S. N. Majumdar 和 S. Ciliberto，《受重置作用的布朗搜索者的最优平均首次通过时间：实验与理论结果》，《物理评论研究》2, 032029(R) (2020)。[131] K. Capał、B. Dybiec 和 E. Gudowska-Nowak，《噪声诱导稳定性与随机重置的相互作用》，《混沌》32, 063129 (2022)。[132] Ł. Kuśmierz 和 E. Gudowska-Nowak，《带随机重置的次扩散连续时间随机游走》，《物理评论 E》99, 052116 (2019)。[133] V. Stojkoski、T. Sandev、L. Kocarev 和 A. Pal，《随机重置下的几何布朗运动：一种平稳但非遍历过程》，《物理评论 E》104, 014121 (2021)。[134] V. Stojkoski、P. Jolakoski、A. Pal、T. Sandev、L. Kocarev 和 R. Metzler，《随机重置下几何布朗运动中的收入不平等与流动性：非遍历性的理论结果与经验证据》，《皇家学会哲学汇刊A辑》380, 20210157 (2022)。[135] M. Dahlenburg、A. V. Chechkin、R. Schumer 和 R. Metzler，《随机振幅重置》，《物理评论 E》103, 052123 (2021)。[136] C. Di Bello、A. V. Chechkin、A. K. Hartmann、Z. Palmowski 和 R. Metzler，《部分重置动力学的时间依赖概率密度函数》，《新物理学杂志》25, 082002 (2023)。[137] C. Di Bello、A. Chechkin、T. Grzywny、Z. Palmowski、K. Szczypkowski

莱维飞行在 d 维数中的重置：相似之处与差异，《混沌》
35，043129（2025）。