FIAN/TD-20/26

Koornwinder-van Diejen可积系统的 Baker-Akhiezer函数

Liudmila Bishler

bishlerlv@lebedev.ru

Lebedev Physical Institute, Moscow 119991, Russia

arXiv:2611.32744v1 [hep-th] 24 Nov 2026

摘要

Koornwinder-van Diejen可积系统是三角型 Ruijsenaars 可积系统（与根系 A_n 相关）在根系（$C_n^\vee$, C_n）情形下的对应系统。它依赖于标准的 Macdonald参数 q 和 t，以及 Koornwinder（Askey-Wilson）参数 a、b、c、d。参数的不同特化将其与（$C_n^\vee$, C_n）族中的其他经典根系联系起来。

Koornwinder-van Diejen可积系统的特征函数是对称Koornwinder多项式；对于参数 t、a、b、c、d 的某些取值，它们与 O.A.Chalykh 为经典根系 BC_n 引入的 Baker-Akhiezer函数在 Weyl群上的求和相一致。本文的主要思想是阐明 Chalykh 形式体系，并将其应用于其他仿射根系。我们为 $(C_n^\vee, C_n)$ 族中的所有根系定义 Baker-Akhiezer 函数。我们还给出了 Baker-Akhiezer 函数的一些显式表达式。

1 引言

Koornwinder-van Diejen可积系统由 n 个对易哈密顿量组成，这些哈密顿量由 T. Koornwinder [1] 和 J.F. van Diejen [2]构造。它依赖于标准 Macdonald参数 q和 t，以及参数 a、b、c、d，并且在 a、b、c、d的置换下保持对称。Koornwinder 在寻找 Askey-Wilson多项式 [3] 的多变量模拟时发现了这一系统，并将对应于经典根系 [4, 5] （根系 A_n除外）的几个 Macdonald多项式推广为一个统一的构造，称为 Koornwinder多项式。他发现了第一个 Koornwinder 哈密顿量，后来 van Diejen 将其扩展为对易哈密顿量系统。Koornwinder多项式是变量 x_1、...、x_n中的 Laurent多项式，在超八面体群的作用下保持对称，因此既在变量的置换下对称，也在变量的求逆 $x \to x^{-1}$下对称。它们还依赖于参数 q 和 t 以及 a、b、c、d。

Koornwinder-van Diejen可积系统对应于仿射根系 $(C_n^\vee, C_n)$（采用 Macdonald 记号为 [6]），为简便起见记作 $C^\vee C$ 。Koornwinder 参数的特化可得到与其他经典仿射根系相关的可积系统：约化 B_n, C_n, D_n, $B_n^\vee$, $C_n^\vee$以及 BC_n 非约化（BC_n, C_n）、（$C_n^\vee, BC_n$）、（$B_n^\vee, B_n$）。参数列于下表 1 中。

I. Cherednik 提出了另一种借助双仿射Hecke代数（DAHA）研究 Macdonald 多项式的方法 [7, 8]。他发现了一个更初等的可积系统，由 Cherednik算子构成。其特征函数是非对称麦克唐纳多项式 [9–11], 通过加权对称化可得到相应的对称多项式。非对称Koornwinder系统由 $C^\vee C$ DAHA[12–18]描述。在 DAHA 框架下，非对称Koornwinder多项式可以通过 Knop-Sahi递推关系的类似形式递归构造 [19, 20]。

Koornwinder可积系统是与根系 A_n相对应的三角Ruijsenaars可积系统[22, 23] 的对应系统 [21] 。它可以由Ding-Iohara-Miki（DIM）代数 [24, 25] 的一条垂直射线 (0，1) 描述，并在描述DIM中的可积系统方面发挥着重要作用。由于DIM与球面双仿射Hecke代数 [26]之间存在对应关系，它与类型为 A_n 的DAHA相连。

三角Ruijsenaars可积系统的特征函数构成 Macdonald 三元组 [27, 28]: Noumi-Shiraishi幂级数 [29], Macdonald多项式以及在 $t = q^{-m}$ — Baker-Akhiezer（BA）函数

表1：Koornwinder 参数

	根系	参数
约化	B_n	$(a,b,c,d) = (-q,-1,q,t_s^2)$
	C_n	$(a,b,c,d) = (-t_l,-qt_l,t_l,qt_l)$
	D_n	$(a,b,c,d) = (-q,-1,q,1)$
	$B_n^\vee$	$(a,b,c,d) = (-q,-t_l,q,t_l)$
	$C_n^\vee$	$(a,b,c,d) = (-t_s,-1,q,qt_s)$
	BC_n	$(a,b,c,d) = (-qt_l,-1,qt_l,t_s^2)$
非约化	(BC_n, C_n)	$(a,b,c,d) = (-t_s,-qt_l,t_l,qt_l)$
	$(C_n^\vee, BC_n)$	$(a,b,c,d) = (-t_s,-qt_s,q,t_l)$
	$(B_n^\vee, B_n)$	$(a,b,c,d) = (-q,-t_s,q,t_l)$

[30]。Macdonald多项式和BA函数是 Noumi-Shiraishi幂级数的两种多项式约化。为一般 $C^\vee C$ 情形构造一个三元组的宏伟计划似乎不太可能实现 [21]；然而，在特殊情形下，三元组的类似物可能存在。在本文中，我们将仔细研究这些潜在三元组中的一个元素——Baker-Akhiezer函数。

O.A. Chalykh [30] 研究了处于

$$t_\alpha = q^{-m_\alpha}, \quad m_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{1}$$

以及第一个 Koornwinder 哈密顿量[1]

$$a = -q^{-m_1},\ b = -q^{-m_2},\ c = q^{-m_3},\ d = q^{-m_4},\ t = q^{-m}, \quad m_1, m_2, m_3, m_4, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{2}$$

并发现了另一类非对称特征函数：Baker-Akhiezer函数。Chalykh针对有限约化不可约根系和非约化根系 BC_n 制定了其方法。他研究了相应哈密顿量的极点，并制定了其特征函数消除这些极点的条件。他证明了这些条件是线性方程。更重要的是，这些线性方程与适当的基函数一起唯一确定相应哈密顿量的特征函数。当我们考察 Macdonald 多项式和 Koornwinder多项式时，参数（1）和（2）的特殊地位也十分明显：在这些参数下，单项式前的一些系数趋于零，初始多项式分裂为变量置换后的 Chalykh方法 Baker-Akhiezer函数之和。

在本文中，我们考察参数集合 a、 b、 c、 d ，它们对应于表 1 中的不同仿射根系。我们详细研究 Chalykh方法如何应用于这些仿射根系，并计算一些 BA 函数。Chalykh 形式体系包含三个分量：基函数，由与正根对应的单项式组成；求和域，用于确定系数的数量；最后是方程。这些方程将 BA 函数唯一确定到一个归一化系数。

本文的结构安排如下。在第2 节中，我们概述 Koornwinder-van Diejen 可积系统。该系统已知有两类特征函数：对称Koornwinder多项式和 Baker-Akhiezer函数。本文专注于 Baker-Akhiezer函数。在第3 节中，我们考察 Chalykh 对有限约化不可约根系以及非约化不可约根系 BC_n的 Baker-Akhiezer函数的定义。在第 4 节中，我们展示 Chalykh方法如何应用于 $C^\vee C$ 族中的其他仿射根系。我们在表2 中总结了不同情形，并在第5节中更详细地描述秩一情形。在第6 节中，我们考察根系 D_n (D_1 情形是平凡的)的第一个非平凡情形，并给出根系 D_2的 BA 函数。第7 节为结论。

记号。 注意，我们使用的参数是 q^2 和 t^2 ，这与 Chalykh 的原始记号有所不同。表 1 中的参数也记作 q^2、 t_s^2、 t_l^2。对于根系 B_n ，我们使用参数 t_s^2 而不是 t_s （与 [21, 31]中的分类相比），以统一获得该根系 BA 函数的两种方式：通过约化根系的 Chalykh 标准形式体系，以及通过根系 BC_n的 Chalykh 形式体系。

[1]请注意，这些参数还需满足其他条件，我们将在第3节中讨论这些条件。

记号 x^y 表示对于 n 变量 x_i、 y_i、 $i=1$、.....、 n，其含义是

$$x^y := \prod_{i=1}^{n} x_i^{y_i} \tag{3}$$

类似地， $x^{\vec{y}}$。

我们定义量子数

$$[x]_q := \frac{q^x-1}{q-1}$$

以及

$$\{x\} := x - x^{-1}.$$

2 Koornwinder-van Diejen 可积系统

第一个 Koornwinder 哈密顿量由 Koornwinder 构造 [1]（请注意，参数 q 和 t 与原始 Koornwinder记号相比均已平方）：

$$H_1^K(x_1,\dots,x_n) := \sum_{i=1}^{n} t^{2(1-n)} \frac{(1-ax_i)(1-bx_i)(1-cx_i)(1-dx_i)}{\eta(1-x_i^2)(1-q^2x_i^2)} \prod_{j\neq i} \frac{(1-t^2x_ix_j)(1-t^2x_i/x_j)}{(1-x_ix_j)(1-x_i/x_j)} \left(q^{2\hat{D}_i}-1\right) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} t^{2(1-n)} \frac{(1-ax_i^{-1})(1-bx_i^{-1})(1-cx_i^{-1})(1-dx_i^{-1})}{\eta(1-x_i^{-2})(1-q^2x_i^{-2})} \prod_{j\neq i} \frac{(1-t^2x_i^{-1}x_j^{-1})(1-t^2x_j/x_i)}{(1-x_i^{-1}x_j^{-1})(1-x_j/x_i)} \left(q^{-2\hat{D}_i}-1\right), \tag{4}$$

其中 $\eta = \frac{\sqrt{abcd}}{q}$， $\hat{}D_i = x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$。

在最简单的秩一情形（Askey–Wilson情形）中，系统仅依赖一个变量 x，第一个哈密顿量如下

$$H_1^K(x) := \frac{(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)}{\eta(1-x^2)(1-q^2x^2)} \left(q^{2\hat{D}}-1\right) + \frac{(1-ax^{-1})(1-bx^{-1})(1-cx^{-1})(1-dx^{-1})}{\eta(1-x^{-2})(1-q^2x^{-2})} \left(q^{-2\hat{D}}-1\right). \tag{5}$$

第一个 Koornwinder 哈密顿量嵌入由 van Diejen [2] 构造的 n 个对易哈密顿量系统中：

$$H_r^K = \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\},\,|J|=r\\ \varepsilon_j=\pm1,\,j\in J}} \sum_{\substack{\emptyset\subsetneq J_1\subsetneq\dots\subsetneq J_s=J\\ 1\le s\le r}} (-1)^{s-1} \prod_{1\le s'\le s} h_{\varepsilon(J_{s'}\setminus J_{s'-1});J_{s'}^C}(q^{2\sum_{j\in J_1}\varepsilon_j\hat{D}_j}-1). \tag{6}$$

第一个求和遍历所有具有 r 个元素的 $\{1,\dots,n\}$ 的子集，以及所有符号反转 $\varepsilon=\{+1,-1\}$。第二个求和遍历 J 中所有严格递增的子集序列。

J^C 是相对于 $\{1,\dots,n\}$ 而言的 J 的补集，

$$h_{\varepsilon J;K} := \prod_{j\in J}\frac{1}{\eta}\frac{(1-ax_j^{\varepsilon_j})(1-bx_j^{\varepsilon_j})(1-cx_j^{\varepsilon_j})(1-dx_j^{\varepsilon_j})}{(1-x_j^{2\varepsilon_j})(1-q^2x_j^{2\varepsilon_j})} \times \prod_{\substack{j,j'\in J\\ j<j'}}\frac{1}{t^2}\frac{(1-t^2x_j^{\varepsilon_j}x_{j'}^{\varepsilon_{j'}})}{(1-x_j^{\varepsilon_j}x_{j'}^{\varepsilon_{j'}})}\frac{(1-q^2t^2x_j^{\varepsilon_j}x_{j'}^{\varepsilon_{j'}})}{(1-q^2x_j^{\varepsilon_j}x_{j'}^{\varepsilon_{j'}})}\times$$
$$\times\prod_{\substack{j\in J\\ k\in K}}\frac{1}{t^2}\frac{(1-t^2x_j^{\varepsilon_j}x_k)}{(1-x_j^{\varepsilon_j}x_k)}\frac{(1-t^2x_j^{\varepsilon_j}/x_k)}{(1-x_j^{\varepsilon_j}/x_k)}. \tag{7}$$

作为一个可积系统，它与 $C^\vee C$ DAHA 相联系：当作用于 Weyl对称函数时，第一个 Koornwinder 哈密顿量与 Cherednik哈密顿量的 Weyl对称组合重合：

$$H_1^K = \sum_{i=1}^{n}(C_i+C_i^{-1}) - [n]_t\left(t^{n-1}\eta+\frac{1}{t^{n-1}\eta}\right)\Big|_{symm}. \tag{8}$$

3 Chalykh 形式体系

O.A.Chalykh [30,32] 为 Macdonald算子和特殊参数取值下的第一个 Koornwinder 哈密顿量构造了特征函数。这些特征函数不是像 Macdonald多项式那样由杨图编号，而是由一组任意复数组 λ进行编号。

Chalykh 形式体系背后的理念是研究相应哈密顿量的极点，并制定其特征函数的条件以消去这些极点。这些条件是线性方程，结合适当的基函数后，可以唯一确定相应哈密顿量的特征函数。

首先，我们描述 Chalykh方法对于根系 $R = A_n$、B_n、C_n、D_n 以及例外根系 E_6、E_7、E_8、F_4 和 G_2 的形式体系。在这种情况下，方程源自相应的 Macdonald算子。对于根系 A_n ，这些算子与 Ruijsenaars哈密顿量重合。关于根系 A_n 情形下 Chalykh方法的详细描述，参见 [33]。

除了约化不可约根系之外，Chalykh 还研究非约化有限根系BC_n。在这种情况下，Chalykh 形式体系围绕 Koornwinder 哈密顿量（ 4 ）构建。我们将在本节的第二部分对其进行讨论。

与 Chalykh 的论文不同， [30], 我们在基函数（10）、（20）以及周期性条件（12）和（22）—（31）的定义中交换了空间与余空间，从而使所得的 BA 函数与 Macdonald的定义中的相应 Macdonald 多项式和 Koornwinder 多项式相匹配 [4]。在 [34–36]中给出了一些显式表达式。另一个区别是，Chalykh 的方程是针对 q^2写出的。

3.1 约化根系

设 R 是一个约化不可约根系， W_R —其 Weyl群， R_+ —一组正根。对于 Weyl群的每个轨道，都有不同的 $m_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$t_\alpha = q^{-m_\alpha}. \tag{9}$$

基函数是关于任意系数 $\psi_{\{k_\alpha\}}$ 的单项式 $q^{k_{\alpha(\alpha|z)}}$ 之和，变量为 $x_i = q^{z_i}$。求和一直进行到 $k_\alpha = m_\alpha$ ，并使用 ρ_m 平移求和域，使其关于零对称:

$$\Psi_{\{m_\alpha\}}(\vec{x},\vec{y};\,q^2) = q^{(\lambda+\rho_m|\,z)}\sum_{\{k_\alpha\}}\psi_{\{k_\alpha\}}q^{-\sum_{\vec{\alpha}\in R_+}k_\alpha(\alpha|z)}, \tag{10}$$

其中，对每个正根 $\alpha \in R_+$， $x_i = q^{z_i}$ 和 $y_i = q^{\lambda_i}$，$(x|y)$ 表示 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$之间的标量积，

$$\vec{\rho}_m = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} m_\alpha\vec{\alpha}. \tag{11}$$

基函数（10）满足以下方程（对每个 $\alpha \in R_+$）

$$\Psi_{\{m_\alpha\}}\left(\vec{z}+j\vec{\alpha}^\vee,\vec{y};\,q^2\right) = \Psi_{\{m_\alpha\}}\left(\vec{z}-j\vec{\alpha}^\vee,\vec{y};\,q^2\right) \quad \text{for} \quad j=1,\dots m_\alpha \quad \text{at} \quad q^{(\alpha|z)}=1. \tag{12}$$

3.2 非约化有限根系 BC_n

Koornwinder BA 函数针对以下参数选择 a， b， c， d 定义:

$$t = q^{-m}, \quad a = -q^{-m_1}, \quad b = -q^{-m_2}, \quad c = q^{-m_3}, \quad d = q^{-m_4}, \tag{13}$$

其中 m， m_1， m_2， m_3， $m_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，并且满足以下条件:

$$m_1+m_2+1 = 2M_1 \quad \text{and} \quad m_3+m_4+1 = 2M_2, \quad M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{14}$$

尽管 Koornwinder 多项式在参数 a， b， c， d的置换下具有对称性，但我们仍选择了具有不同符号的参数，从而将它们区分开来。此外，根据（14），每一对参数内部应具有不同的“奇偶性”，例如:

$$a = -q^{-(2m_a+1)}, \quad b = -q^{-2m_b}, \quad c = q^{-(2m_c+1)}, \quad d = q^{-2m_d}, \tag{15}$$

其中所有 m_a、m_b、m_c、$m_d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

根系 BC_n 由根系 B_n 和 C_n中的根组成，因此其中既有短 ε_i 根和长 $2\varepsilon_i$根，也有标准根 $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$。然而，只需使用根系 B_n 中的根来构造根系的 BA 基函数 BC_n （见 [1,30]）。根系 B_n 的正根如下

$$R_+^{B_n} = \{\varepsilon_i | 1 \le i \le n\} \cup \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j | 1 \le i < j \le n\}, \tag{16}$$

因此有两个参数 分别对应短根和标准根。我们将它们分别记为 m_α 和 m_ε。 y:

$$m_\varepsilon = M_1 + M_2 = 1 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4), \tag{17}$$

$$m_{\varepsilon\pm\varepsilon} = m. \tag{18}$$

Weyl 向量的定义与上一节相同，对于参数 m_ε 和 $m_{\varepsilon\pm\varepsilon}$，它如下所示

$$(\vec{\rho}_m)_i = m(n-i) + \frac{M_1 + M_2}{2}. \tag{19}$$

Koornwinder BA 基函数具有相同的结构（10），但使用了一组特定的单项式：

$$\Psi^K_{m,m_1,m_2,m_3,m_4}(\vec{x},\vec{y};\,q^2) = \\ = \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i + m(n-i) + \frac{M_1+M_2}{2}} \sum_{\{k_i\}=0}^{M_1+M_2} \sum_{\{l_{ij},l'_{ij}\}=0}^{m} \psi_{\{k_i,l_{ij},l'_{ij}\}} \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i}\right)^{k_i} \prod_{1\le i<j\le n} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{l_{ij}} \left(\frac{1}{x_i x_j}\right)^{l'_{ij}} \right). \tag{20}$$

这些方程是针对哈密顿量（4）的分母写出的。对于参数（15），周期性条件具有如下形式（对于 $i = 1$、.....、 n）：

$$\Psi^K_{m,m_1,m_2,m_3,m_4}(x_i q^s,\vec{y};\,q^2) = \Psi^K_{m,m_1,m_2,m_3,m_4}(x_i q^{-s},\vec{y};\,q^2), \tag{21}$$

其中

$$s = 1, 3 \ldots, 2m_a + 1 \qquad \text{at } x_i = -1, \tag{22}$$

$$s = 2, 4 \ldots, 2m_b \qquad \text{at } x_i = -1, \tag{23}$$

$$s = 1, 3 \ldots, 2m_c + 1 \qquad \text{at } x_i = 1, \tag{24}$$

$$s = 2, 4 \ldots, 2m_d \qquad \text{at } x_i = 1, \tag{25}$$

我们还有以下方程：

$$\Psi^K_{m,m_1,m_2,m_3,m_4}(x_i q^{2s},\vec{y};\,q^2) = \Psi^K_{m,m_1,m_2,m_3,m_4}(x_j q^{2s},\vec{y};\,q^2), \quad s = 1,\ldots,m \qquad \text{at} \quad x_i = x_j, \tag{26}$$

$$\Psi^K_{m,m_1,m_2,m_3,m_4}(x_i q^{2s},\vec{y};\,q^2) = \Psi^K_{m,m_1,m_2,m_3,m_4}(x_j q^{-2s},\vec{y};\,q^2), \quad s = 1,\ldots,m \qquad \text{at} \quad x_i = x_j^{-1}. \tag{27}$$

方程（22）-（25）是在参数（13）满足 m_1、 m_2、 m_3、 $m_4 \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$时写出的。然而，表1 中对应于其他根系的参数取值并不满足这些条件。Chalykh 形式体系仍然可以应用，但需要进行修改；特别是，对于方程（21），某些移位（22）-（23）会消失。下一节将汇总与表 1 中不同参数集合相关的 BA 函数定义。

$C^\vee C$ 族根系的第 4 个 BA 函数

BA 函数定义中的基本要素是通过 q、 t_s、t_l 指定参数 a、 b、 c、 d （其中 t_s 和 t_l 分别表示与短根和长根相关的参数）。此外，还需要对 t_s 和 t_l 施加对 BA 函数存在性至关重要的条件、短根 N 的求和范围，以及方程中对应于短根的移位集合 s。

此处的基函数相同

$$\Psi^K_{\{m\}}(\vec{x},\vec{y};\,q^2) = \\ = \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i + m(n-i) + \rho} \sum_{\{k_i\}=0}^{N} \sum_{\{l_{ij},l'_{ij}\}=0}^{m} \psi_{\{k_i,l_{ij},l'_{ij}\}} \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i}\right)^{k_i} \prod_{1\le i<j\le n} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{l_{ij}} \left(\frac{1}{x_i x_j}\right)^{l'_{ij}} \right), \tag{28}$$

其中 $\{m\}$ 表示相应根系的 Weyl群每个轨道的一组参数 m_α ρ, N 以及 X 均列于表 2 ； 平移 s 及该方程的条件如下:

$$\Psi^K_{\{m\}}(x_i q^s, \vec{y};\, q^2) = \Psi^K_{\{m\}}(x_i q^{-s}, \vec{y};\, q^2). \tag{29}$$

BA 函数还满足以下方程:

$$\Psi^K_{\{m\}}(x_i q^{2s}, \vec{y};\, q^2) = \Psi^K_{\{m\}}(x_j q^{2s}, \vec{y};\, q^2), \quad s = 1, \ldots, m \qquad \text{at} \quad x_i = x_j, \tag{30}$$

$$\Psi^K_{\{m\}}(x_i q^{2s}, \vec{y};\, q^2) = \Psi^K_{\{m\}}(x_j q^{-2s}, \vec{y};\, q^2), \quad s = 1, \ldots, m \qquad \text{at} \quad x_i = x_j^{-1}. \tag{31}$$

Aske与根系 R 相关的 y-Wilson Baker-Akhiezer（AW BA）函数具有如下形式

$$\Psi^{AW}_{\{m\}}(x, y;\, q^2) = x^{\lambda+\rho} \sum_{l=0}^{N} \psi_l \left(\frac{1}{X}\right)^l, \tag{32}$$

并满足以下方程

$$\Psi^{AW}_{\{m\}}(xq^s, y;\, q^2) = \Psi^{AW}_{\{m\}}(xq^{-s}, y;\, q^2). \tag{33}$$

对于一组 s 在 $x = \pm 1$ 表2中。

表2：BA 函数定义的关键分量

Root 系统	**参数** a, b, c, d	**基函数分量**	**平移**
$(C^\vee, C)$	$a,\ b,\ c,\ d$ $a = -q^{-m_1},\ b = -q^{-m_2},$ $c = q^{-m_3}$、 $d = q^{-m_4}$ $m_1 + m_2 + 1 = 2M_1$ $m_3 + m_4 + 1 = 2M_2$ M_1、 $M_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$X = x,$ $N = M_1 + M_2$ $\rho = N/2$	$s = 1$、 3、 ……、 m_1 at $x = -1$、 $s = 2$、 4、 ……、 m_2 at $x = -1$、 $s = 1, 3, \ldots, m_3$ at $x = 1,$ $s = 2, 4, \ldots, m_4$ at $x = 1$
B	$-q,\ -1,\ q,\ t_s^2$ $t_s = q^{-m_s}$ $m_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$X = x,$ $N = m_s,$ $\rho = N/2$	$s = 2, 4, \ldots, 2m_s$ at $x = 1$
C	$-t_l,\ -qt_l,\ t_l,\ qt_l$ $t_l = q^{-m_l}$ $m_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$X = x^2,$ $N = m_l,$ $\rho = N$	$s = 1, 2,$ ……, m_l at $x^2 = 1$
$B^\vee$	$-q,\ -t_l,\ q,\ t_l$ $t_l = q^{-m_l}$ $m_l = 0,\ 2,$ ……（仅偶数）	$X = x^2,$ $N = m_l/2,$ $\rho = N$	$s = 2, 4,$ ……, m_l at $x^2 = 1$
$C^\vee$	$-t_s, -1,\ q,\ qt_s$ $t_s = q^{-m_s}$ $m_s = 1, 3, \ldots$ (仅奇数)	$X = x,$ $N = m_s,$ $\rho = N/2$	$s = 2, 4 \ldots, m_s - 1$ at $x = 1$ $s = 1, 3 \ldots, m_s$ at $x = -1$

表2 （续）

Root 系统	参数 a, b, c, d	基函数 分量	平移
BC	$-qt_l,\ -1,\ qt_l,\ t_s^2$ $t_s = q^{-m_s},\ t_l = q^{-m_l}$ $m_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m_l = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots$ （仅偶数）	$X = x,$ $N = m_s + m_l,$ $\rho = N/2$	$s = 2, 4 \ldots\ldots, 2m_s$ at $x = 1,$ $s = 1,\ 3 \ldots\ldots,\ m_l - 1$ at $x^2 = 1$
$(BC,\ C)$	$-t_s,\ -qt_l,^{\ t_l,\ qt_l}$ $t_s = q^{-m_s},$ $t_l = q^{-m_l},$ $m_s,\ m_l = 0,\ 2、4 \ldots\ldots$或 $m_s,\ m_l = 1,\ 3、5 \ldots\ldots$	$X = x,$ $N = (m_s + 3m_l)/2,$ $\rho = N/2$	对于奇数 m_s, m_l: $s = 1, 3, \ldots m_s$ at $x = -1,$ $s = 2, 4, \ldots m_l - 1$ at $x^2 = 1,$ $s = 1, 3, \ldots m_l$ at $x = 1,$ 对于偶数 m_s, m_l: $s = 1,\ 3,\ \ldots m_l - 1$ at $x^2 = 1,$ $s = 2, 4, \ldots m_s$ at $x = -1,$ $s = 2,\ 4,\ \ldots m_l$ at $x = 1$
$(C^\vee,\ BC)$	$-t_s,\ ^{-qt_s,\ \ q,\ \ t_l}$ $t_s = q^{-m_s},$ $t_l = q^{-m_l},$ $m_l = 0、2、4 \ldots\ldots$ $m_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$X = x,$ $N = m_s + m_l/2,$ $\rho = N/2$	$s = 1, 2, \ldots m_s$ at $x = -1,$ $s = 2、4、\ \ldots m_l$ at $x = 1$
$(B^\vee,\ B)$	$-q,\ ^{-t_s、\ \ q、\ \ t_l}$ $t_s = q^{-m_s},$ $t_l = q^{-m_l},$ $m_s、\ m_l = 0、2、4 \ldots\ldots$	$X = x,$ $N = \ (m_s + m_l)\ /2,$ $\rho = N/2$	$s = 2、4、\ \ldots m_s$ at $x = -1,$ $s = 2,\ 4,\ \ldots m_l$ at $x = 1$

对于根系 D_n 不存在与参数 a、 b、 c、 d 相关的方程，并且除 $t = q^{-m}$之外没有其他参数。这就是我们将其从表中省略的原因。我们在第6节中讨论 D_2 情形。

5 Askey-Wilson Baker-Akhiezer函数

单变量Koornwinder多项式不依赖参数 t，实际上它就是 Askey-Wilson多项式 [3], 显然由公式给出 [36]

$$K_{[n]}(x) = \frac{(ab, ac, ad; q^2)_n}{a^n (q^{2(n-1)}abcd; q^2)_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-2n}, q^{2(n-1)}abcd, ax, ax^{-1}; q^2)_k}{(q^2, ab, ac, ad; q^2)_k} q^{2k}, \tag{34}$$

其中 n 是整数，并且

$$(x; q^2)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(x^{1/2} q^j - x^{-1/2} q^{-j} \right). \tag{35}$$

5.1 最一般情形：仿射根系 $(C_1^\vee, C_1)$

$$a = -q^{-m_1}, \quad b = -q^{-m_2}, \quad c = q^{-m_3}, \quad d = q^{-m_4}, \tag{36}$$

其中

$$m_1 + m_2 + 1 = 2M_1, \quad m_3 + m_4 + 1 = 2M_2, \qquad M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{37}$$

$$M_1 + M_2 = 1 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4). \tag{38}$$

由于每一对中都应有一个奇数和一个偶数，因此我们约定 m_1, m_3 为奇数， m_2, m_4为偶数。

基函数

$$\Psi^{(C_1^\vee, C_1)}_{m_1,m_2,m_3,m_4}(x, y;\, q^2) = x^{\lambda+1/2(M_1+M_2)} \sum_{l=0}^{M_1+M_2} \psi_l \left(\frac{1}{x}\right)^l \tag{39}$$

满足方程

$$\Psi^{(C_1^\vee, C_1)}_{m_1,m_2,m_3,m_4}(xq^j, y;\, q^2) = \Psi^{(C_1^\vee, C_1)}_{m_1,m_2,m_3,m_4}(xq^{-j}, y;\, q^2) \tag{40}$$

for

$$j = 1, 3, \ldots m_1 \qquad \text{at} \quad x = -1, \tag{41}$$
$$j = 2, 4, \ldots m_2 \qquad \text{at} \quad x = -1, \tag{42}$$
$$j = 1, 3, \ldots m_3 \qquad \text{at} \quad x = 1, \tag{43}$$
$$j = 2, 4, \ldots m_4 \qquad \text{at} \quad x = 1. \tag{44}$$

如果 $c = -a$ 和 $d = -b$ ，则得到 C型 BA 函数，其基函数依赖于 m_1、 m_2 和$M_1 = 1/2(m_1 + m_2 + 1)$:

$$\Psi^{C^\vee C_1}_{m_1,m_2}(x, y;\, q^2) = x^{\lambda+M_1} \sum_{l=0}^{M_1} \psi_l \left(\frac{1}{x^2}\right)^l. \tag{45}$$

它满足方程

$$\Psi^{C^\vee C_1}_{m_1,m_2}(xq^j, y;\, q^2) = \Psi^{C^\vee C_1}_{m_1,m_2}(xq^{-j}, y;\, q^2) \tag{46}$$

for

$$j = 1, 3, \ldots m_1 \qquad \text{at} \quad x^2 = 1, \tag{47}$$
$$j = 2, 4, \ldots m_2 \qquad \text{at} \quad x^2 = 1. \tag{48}$$

5.2 根系 B_1

与根系 B_n 对应的 BA 函数可以通过 Chalykh 标准方法获得，因为B_n 是一个约化不可约有限根系。它也可以在 Koornwinder BA 函数的框架下进行描述。对于 B_n， Koornwinder 参数为 (a、 b、 c、 d) =($-q$、 -1、 q、 t_s^2)。这两个方向导出相同的基函数和相同的方程，并且在秩一情形下给出一个因式分解解。

正根如下

$$R_+^{B_n} = \{\varepsilon_i | 1 \le i \le n\} \cup \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j | 1 \le i < j \le n\}. \tag{49}$$

对于根系 B_1 ， 我们只有短根和参数:

$$t_s = q^{-m_s}, \tag{50}$$

于是 Weyl 向量

$$\rho_m = \frac{1}{2} m_s \tag{51}$$

以及基函数

$$\Psi_{m_s}(x, y;\, q^2) = x^{m_s/2+\lambda/2} \sum_{l=0}^{m_s} \psi_l \left(\frac{1}{x}\right)^l. \tag{52}$$

Chalykh 形式体系中的 Macdonald算子方程（12）：

$$\Psi_{m_s}(xq^{2j}, y;\, q^2) = \Psi_{m_s}(xq^{-2j}, y;\, q^2) \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, m_s \quad \text{at} \quad x = 1. \tag{53}$$

另一方面，也可以从 Koornwinder 哈密顿量出发:

$$H_1^{K(B_1)}(x) := \frac{(1 - t_s^2 x)}{\eta(1 - x)} \left(q^{2\hat{D}} - 1\right) + \frac{(1 - t_s^2 x^{-1})}{\eta(1 - x^{-1})} \left(q^{-2\hat{D}} - 1\right), \tag{54}$$

其中 th 这里仅有一个极点，位于 $x=1$，它对应于（25），这正是方程（53） .

在这种情况下，BA 函数有一个优美的解

$$\Psi^{B_1}_{m_s}(x,y;q^2)=x^{\frac{\lambda+m_s}{2}}\sum_{k=0}^{m_s}q^{2k\lambda}x^{-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{[2(m_s-j+1)]_q[2(j-\lambda-m_s-1)]_q}{[2j]_q[2(\lambda-j)]_q}, \tag{55}$$

其中 $[x]_q=\frac{q^x-1}{q-1}$。

我们想指出，由于参数 λ 是任意的，我们可以选择它使其与 ρ对齐。对于 B_1，我们取 $\lambda/2$，对于其他根系，则取 $C_1^\vee$和 λ。

5.3 根系 C_1

正根如下

$$R^{C_n}_+=\{2\varepsilon_i|1\le i\le n\}\cup\{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j|1\le i<j\le n\}. \tag{56}$$

C_n的 Koornwinder 参数为（$a,\ b,\ c,\ d$）=（$-t_l,\ -qt_l,\ t_l,\ qt_l$）。在 C_1的情形下:

$$t_l=q^{-m_l},\ \rho_m=m_l \tag{57}$$

$$\Psi^{C_1}_{m_l}(x,y;\,q^2)=x^{m_l+\lambda}\sum_{l=0}^{m_l}\psi_l\left(\frac{1}{x^2}\right)^l. \tag{58}$$

Chalykh 形式体系给出的 Macdonald算子方程（12）:

$$\Psi^{C_1}_{m_l}(xq^j,y;\,q^2)=\Psi^{C_1}_{m_l}(xq^{-j},y;\,q^2)\quad\text{for}\quad j=1,\dots,m_l\quad\text{at}\quad x^2=1 \tag{59}$$

另一方面，也可以从 Koornwinder 哈密顿量出发:

$$H_1^{K(C_1)}(x):=\frac{(1-t_l^2x^2)(1-q^2t_l^2x^2)}{\eta(1-x^2)(1-q^2x^2)}\left(q^{2\hat D}-1\right)+\frac{(1-t_l^2x^{-2})(1-q^2t_l^2x^{-2})}{\eta(1-x^{-2})(1-q^2x^{-2})}\left(q^{-2\hat D}-1\right). \tag{60}$$

这里所有方程（22）-（25）都起作用，并给出精确方程（59）。

解如下:

$$\Psi^{C_1}_{m_l}(x,y;\,q^2)=x^{m_l+\lambda}\sum_{k=0}^{m_l}q^{2k\lambda}x^{-2k}\prod_{j=1}^{k}\frac{[2(m_l-j+1)]_q[2(j-\lambda-m_l-1)]_q}{[2j]_q[2(\lambda-j)]_q}=\Psi^{B_1}_{m_l}(x^2,y;\,q^2). \tag{61}$$

5.4 根系 D_1

在此情况下，BA 函数是平凡的。 D_2 情况见第6节。

5.5 仿射根系 $B_1^\vee$

$B_n^\vee$的 Koornwinder 参数为（$a,\ b,\ c,\ d$）=（$-q,\ -t_l,\ q,\ t_l$）。此时的 Koornwinder 哈密顿量为:

$$H_1^{K(B_1^\vee)}(x):=\frac{(1-t_l^2x^2)}{\eta(1-x^2)}\left(q^{2\hat D}-1\right)+\frac{(1-t_l^2x^{-2})}{\eta(1-x^{-2})}\left(q^{-2\hat D}-1\right). \tag{62}$$

极点位于 $x^2=1$ （方程（23）、（25））， 由此得到方程

$$\Psi^{B_1^\vee}_{m_l}(xq^j,y;\,q^2)=\Psi^{B_1^\vee}_{m_l}(xq^{-j},y;\,q^2)\quad\text{for}\quad j=2,4,\dots,2m_l\quad\text{at}\quad x^2=1. \tag{63}$$

参数

$$t_l=q^{-2m_l}\quad\text{for}\quad m_l\in\mathbb{Z}_{\ge0}, \tag{64}$$

基函数:

$$\Psi^{B_1^\vee}_{m_l}(x,y;\,q^2)=x^{m_l+\lambda}\sum_{l=0}^{m_l}\psi_l\left(\frac{1}{x^2}\right)^l. \tag{65}$$

以及通解:

$$\Psi^{B_1^\vee}_{m_l}(x,y;\,q^2)=x^{m_l+\lambda}\sum_{k=0}^{m_l}q^{4k\lambda}x^{-2k}\prod_{j=1}^{k}\frac{[4(m_l-j+1)]_q[4(j-\lambda-m_l-1)]_q}{[4j]_q[4(\lambda-j)]_q}=\Psi^{B_1}_{m_l}(x^2,y;\,q^4). \tag{66}$$

5.6 仿射根系 $C_1^\vee$

$C_n^\vee$ 的 Koornwinder 参数为 $(a,b,c,d) = (-1,-t_s,qt_s,q)$，以及

$$t_s = q^{-m_s}, \quad m_s = 2m_b + 1 = 1,3,\ldots \quad \text{(only for odd values of the parameter)} \tag{67}$$

此时的 Koornwinder 哈密顿量：

$$H_1^{K(C_1^\vee)}(x) := \frac{(1+t_s x)(1-qt_s x)}{\eta(1-x)(1+qx)}\left(q^{2\hat{D}}-1\right) + \frac{(1+t_s x^{-1})(1-qt_s x^{-1})}{\eta(1-x^{-1})(1+qx^{-1})}\left(q^{-2\hat{D}}-1\right). \tag{68}$$

这次我们只剩下方程（22）和（25）：

$$\Psi_{m_s}^{C_1^\vee}(xq^j,y;\,q^2) = \Psi_{m_s}^{C_1^\vee}(xq^{-j},y;\,q^2) \quad \text{for} \quad j = 2,4,\ldots,m_s-1 \quad \text{at} \quad x = 1, \tag{69}$$

$$\Psi_{m_s}^{C_1^\vee}(xq^j,y;\,q^2) = \Psi_{m_s}^{C_1^\vee}(xq^{-j},y;\,q^2) \quad \text{for} \quad j = 1,3,\ldots,m_s \quad \text{at} \quad x = -1. \tag{70}$$

基函数：

$$\Psi_{m_s}^{C_1^\vee}(x,y;\,q^2) = x^{m_s/2+\lambda/2}\sum_{l=0}^{m_s}\psi_l\left(\frac{1}{x}\right)^l \tag{71}$$

以及解：

$$\Psi_{m_s}^{C_1^\vee}(x,y;\,q^2) = \Psi_{m_s}^{B_1}(x,y;\,-q) = x^{\frac{\lambda+m_s}{2}}\sum_{k=0}^{m_s}(-q)^{k\lambda}x^{-k}\prod_{j=1}^{k}\frac{[(m_s-j+1)]_{-q}[(j-\lambda-m_s-1)]_{-q}}{[j]_{-q}[(\lambda-j)]_{-q}}. \tag{72}$$

在接下来的几节中，我们将转向具有三种不同长度根的系统。

5.7 仿射根系 BC_1

对于 BC_n，Koornwinder 参数为 $(a,\ b,\ c,\ d) = (-qt_l,\ -1,\ qt_l,\ t_s^2)$。
Koornwinder 哈密顿量：

$$H_1^{K(BC_1)}(x) := \frac{(1-t_s^2 x)(1-q^2t_l^2x^2)}{\eta(1-x)(1-q^2x^2)}\left(q^{2\hat{D}}-1\right) + \frac{(1-t_s^2x^{-1})(1-q^2t_l^2x^{-2})}{\eta(1-x^{-1})(1-q^2x^{-2})}\left(q^{-2\hat{D}}-1\right). \tag{73}$$

BA 函数存在的条件是

$$t_s = q^{-m_s}, \quad m_s = 0,1,2,\ldots, \tag{74}$$
$$t_l = q^{-m_l}, \quad m_l = 0,2,4,\ldots. \tag{75}$$

$$\Psi_{m_s,m_l}^{BC_1}(x,y;\,q^2) = x^{\lambda+m_s/2+m_l/2}\sum_{l=0}^{m_s+m_l}\psi_l\left(\frac{1}{x}\right)^l \tag{76}$$

剩下的方程为（22）、（24）、（25）：

$$\Psi_{m_s,m_l}^{BC_1}(xq^j,y;\,q^2) = \Psi_{m_s,m_l}^{BC_1}(xq^{-j},y;\,q^2) \quad \text{for} \quad j = 2,4,\ldots,2m_s \quad \text{at} \quad x = 1, \tag{77}$$
$$\Psi_{m_s,m_l}^{BC_1}(xq^j,y;\,q^2) = \Psi_{m_s,m_l}^{BC_1}(xq^{-j},y;\,q^2) \quad \text{for} \quad j = 1,3,\ldots,m_l-1 \quad \text{at} \quad x^2 = 1. \tag{78}$$

5.8 仿射根系 $(BC_1,\ C_1)$

Koornwinder 参数为

$$a = -t_s, \quad b = -qt_l, \quad c = t_l, \quad d = qt_l \tag{79}$$

$$t_s = q^{-m_s}, \quad t_l = q^{-m_l} \tag{80}$$

当参数 m_s 和 m_l 均为奇数或均为偶数时，BA 函数存在。

基函数

$$\Psi^{(BC_1,C_1)}_{m_s,m_l}(x,y;\,q^2)=x^{\lambda+(m_s+3m_l)/4}\sum_{l=0}^{(m_s+3m_l)/2}\psi_l\left(\frac{1}{x}\right)^l \tag{81}$$

满足方程

$$\Psi^{(BC_1,C_1)}_{m_s,m_l}(xq^j,y;\,q^2)=\Psi^{(BC_1,C_1)}_{m_s,m_l}(xq^{-j},y;\,q^2), \tag{82}$$

当 m_s, m_l 为奇数时

$$j=1,3,\dots m_s \qquad \text{at} \quad x=-1, \tag{83}$$
$$j=2,4,\dots m_l-1 \qquad \text{at} \quad x^2=1, \tag{84}$$
$$j=1,3,\dots m_l \qquad \text{at} \quad x=1, \tag{85}$$

当 m_s, m_l 为偶数时:

$$j=1,3,\dots m_l-1 \qquad \text{at} \quad x^2=1, \tag{86}$$
$$j=2,4,\dots m_s \qquad \text{at} \quad x=-1, \tag{87}$$
$$j=2,4,\dots m_l \qquad \text{at} \quad x=1. \tag{88}$$

5.9 仿射根系 $(C_1^\vee, BC_1)$

Koornwinder 参数为

$$a=-t_s,\quad b=-qt_s,\quad c=q,\quad d=t_l \tag{89}$$

$$t_s=q^{-m_s},\quad t_l=q^{-m_l} \tag{90}$$

当参数 m_l 为偶数时，BA 函数存在， $m_s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。

基函数

$$\Psi^{(C_1^\vee,BC_1)}_{m_s,m_l}(x,y;\,q^2)=x^{\lambda+m_s/2+m_l/4}\sum_{l=0}^{m_s+m_l/2}\psi_l\left(\frac{1}{x}\right)^l \tag{91}$$

满足方程

$$\Psi^{(C_1^\vee,BC_1)}_{m_s,m_l}(xq^j,y;\,q^2)=\Psi^{(C_1^\vee,BC_1)}_{m_s,m_l}(xq^{-j},y;\,q^2), \tag{92}$$

其中

$$j=1,2,3,\dots m_s \qquad \text{at} \quad x=-1, \tag{93}$$
$$j=2,4,6,\dots m_l \qquad \text{at} \quad x=1. \tag{94}$$

5.10 仿射根系 $(B_1^\vee,\ B_1)$

Koornwinder 参数为

$$a=-q,\quad b=-t_s,\quad c=q,\quad d=t_l, \tag{95}$$

$$t_s=q^{-m_s},\quad t_l=q^{-m_l}. \tag{96}$$

当参数 m_l 和 m_s 均为偶数时，BA 函数存在。

基函数

$$\Psi^{(B_1^\vee,B_1)}_{m_s,m_l}(x,y;\,q^2)=x^{\lambda+m_s/4+m_l/4}\sum_{l=0}^{m_s/2+m_l/2}\psi_l\left(\frac{1}{x}\right)^l \tag{97}$$

满足方程

$$\Psi^{(B_1^\vee B_1)}_{m_s,m_l}(xq^j,y;\,q^2)=\Psi^{(B_1^\vee B_1)}_{m_s,m_l}(xq^{-j},y;\,q^2) \tag{98}$$

其中

$$j=2,4,\dots m_s \qquad \text{at} \quad x=-1, \tag{99}$$
$$j=2,4,\dots m_l \qquad \text{at} \quad x=1. \tag{100}$$

6 根系 D_2的 Baker-Akhiezer 函数

Koornwinder 参数为

$$a=-q,\quad b=-1,\quad c=q,\quad d=1. \tag{101}$$

对于根系 D_n，其根为

$$R=\{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j|1\le i<j\le n\},\qquad W\simeq S_n\ltimes(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}, \tag{102}$$

$$R^+=\{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j|1\le i<j\le n\}. \tag{103}$$

因此它们的长度都相同，且只有一个参数 $t=q^{-m}$。

基函数

$$\Psi_m^{D_n}(\vec{x},\vec{y};\,q^2)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i+m(n-i)}\sum_{\{k_{ij},k'_{ij}\}=0}^{m}\psi_{\{k_{ij},k'_{ij}\}}\left(\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{k_{ij}}\left(\frac{1}{x_ix_j}\right)^{k'_{ij}}\right) \tag{104}$$

满足方程

$$\Psi_m^{D_n}(x_iq^{2s},\vec{y};\,q^2)=\Psi_m^{D_n}(x_jq^{2s},\vec{y};\,q^2),\quad s=1,\dots,m\qquad\text{at}\quad x_i=x_j, \tag{105}$$

$$\Psi_m^{D_n}(x_iq^{2s},\vec{y};\,q^2)=\Psi_m^{D_n}(x_jq^{-2s},\vec{y};\,q^2),\quad s=1,\dots,m\qquad\text{at}\quad x_i=x_j^{-1}, \tag{106}$$

对于根系 D_2，BA 函数如下

$$\Psi_m^{D_2}(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2;q^2)=x_1^{\lambda_1+m}x_2^{\lambda_2}\;\Phi_m\left(\frac{x_1}{x_2},q^{2(\lambda_1-\lambda_2)}\right)\Phi_m\left(x_1x_2,q^{2(\lambda_1+\lambda_2)}\right), \tag{107}$$

其中

$$\Phi_m(x,a;q^2)=\sum_{k=0}^{m}x^{-k}\frac{(q^{-2m},q^2)_k}{(q^2,q^2)_k}\frac{(aq^{2m},q^{-2})_k}{(aq^{-2},q^{-2})_k}, \tag{108}$$

$$(x,q)_k=\prod_{i=0}^{k-1}(1-xq^i). \tag{109}$$

答案（107）与同构完全一致 $D_2\cong A_1\times A_1$，因为A_1 的 BA 函数如下 [33]:

$$\Psi_m^{A_1}(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2;q^2)=x_1^{\lambda_1+m/2}x_2^{\lambda_2-m/2}\;\Phi_m\left(\frac{x_1}{x_2},q^{2(\lambda_1-\lambda_2)}\right). \tag{110}$$

7 结论

本文致力于研究 Chalykh方法，即在参数取负整数次幂 q这一特殊情形下，构造 Koornwinder 哈密顿量的特征函数。这种情形与仿射根系 $C^\vee C$ 以及 $C^\vee C$族中的其他仿射根系有关。我们在表2中明确列出了定义 BA 函数所需的所有可能参数集及其他要素。我们还给出了根系 D_2 （107）对应 BA 函数的显式公式。

我们密切沿用了针对与根系 A_n 对应的 Ruijsenaars 可积系统所发展的方法。该可积系统具有一组三元特征函数（Macdonald 三元组）：Noumi-Shiraishi幂级数（通解）及其两种多项式约化，即 Macdonald多项式和 Baker-Akhiezer函数。Koornwinder 多项式是对称 Macdonald多项式的对应物，本文研究 $C^\vee C$ 族根系的 Baker-Akhiezer 函数。尽管在 $C^\vee C$ 情形下构造通解似乎过于复杂，但 $C^\vee C$ 族根系仍可能存在特征函数三元组。未来研究的一个重要方向，是构造这类 Macdonald 三元组的类似物，其中 Baker-Akhiezer 函数作为其组成元素之一。

致谢

作者感谢 A. Mironov 和 A. Popolitov 富有启发性的讨论，以及他们在准备本文过程中提供的宝贵帮助。本研究得到俄罗斯科学基金会（RSF）第 26-72-00081 号项目的资助。

参考文献

[1] T.H Koornwinder, 《B[2] C型根系的Askey-Wilson多项式》，载于：《正性域上的超几何函数、Jack多项式及其应用》（美国佛罗里达州坦帕，1991），Contemp. Math. 138（1992）189–204[3] J.F. van Diejen, 《具有多项式特征函数的对易差分算子》，Comp. Math. 95（1995）183-233，funct-an/9306002 [4] R. Askey，J. Wilson, 《推广Jacobi多项式的若干基本超几何正交多项式》，Memoirs AMS 54，第319号（1985）`I.G. Macdonald, 《与根系相关的正交多项式》，S[5] eminaire Lotharingien Combin. 45（2000），文章B45a，共40页，arXiv:math/0011046[6] I.G. Macdonald, 《根系的若干猜想》，SIAM J.Math. Anal. 13:6（1982）988-1007 ηI.G. Macdonald, 《仿射根系与Dedekind的[7] -函数》，Invent. Math. 15（1972）91–143[8] I. Cherednik, 《双仿射Hecke代数与Macdonald猜想》，The Annals of Mathematics，第二辑，141（1995）191-216[9] I. Cherednik, 《双仿射Hecke代数》，剑桥大学出版社（2005）[10] E.M. Opdam, 《分次Hecke代数某些表示的调和分析》，Acta Mathematica，175(1)（1995）75–121[11] I.G. Macdonald, 《仿射Hecke代数与正交多项式》，Asterisque-Societe Mathematique de France，237（1996）189-208[12] I. Cherednik, 《非对称Macdonald多项式》，IMRN，1995(10)（1995）483，q-alg/9505029[13] M. Noumi, 《Macdonald-Koornwinder多项式与仿射Hecke环》，Surikaisekikenkyusho Kokyuroku 919（1995），第44–55页（日文）[14] S. Sahi, 《非对称Koornwinder多项式与对偶性》，Ann. Math. 150（1999）267–282，q- alg/9710032[15] S. Sahi, 《Koornwinder多项式的若干性质》，Contemp. Math. 254（2000）395-411[16] J. Stokman, 《Koornwinder多项式与仿射Hecke代数》，IMRN 19（2000），1005–1042，math/0002090[17] O. Chalykh, 《通过Dunkl算子与Cherednik算子构造量子Lax对》，Commun. Math. Phys. 369(1)（2019）261-316，arXiv:1804.01766[18] O. Chalykh, 《Dunkl算子与Cherednik算子》，Encyclopedia of Mathematical Physics（第二版），Academic Press，2025，第309-327页，arXiv:2409.09005[19] L. Colmenarejo，A. Ram, 《c函数与Koornwinder多项式》，The Quarterly Journal of Mathematics，76(3)（2025）983-1031，arXiv:2410.19957[20] F. Knop，S. Sahi, 《Jack多项式的递推与组合公式》，Invent. Math. 128（1997）9-22，q-alg/9610016[21] J. Haglund，M. Haiman，N. Loehr, 《非对称Macdonald多项式的组合公式》，Am.J.Math. 130(2)（2008）359-383，math/0601693 $C^\vee C$L. Bishler，A. Mironov，A. Popolitov, 《受DAHA和Ding-Iohara-Miki代数启发的可积系统： A型与型》，arXiv:2607.06738

[22] S.N.M. Ruijsenaars，H. Schneider，《一类新的可积系统及其与孤子的关系》，Annals Phys.（NY），170（1986）370[23] S.N.M. Ruijsenaars，《相对论性 Calogero-Moser 系统的完全可积性与椭圆函数恒等式》，Comm.Math.Phys. 110（1987）191-213[24] J. Ding，K. Iohara，《Drinfeld 量子仿射代数的推广》，Lett. Math. Phys. 41（1997）181-193，q-alg/9608002[25] K. Miki，《A（q，γ）型 $W_{1+\infty}$ 代数的类似物》，J. Math. Phys. 48（2007）123520[26] P. Di Francesco，R. Kedem，《（t，q）Q-系统、DAHA与量子环面代数：通过广义Macdonald算子》，Comm. Math. Phys. 369(3)（2019）867-928，arXiv:1704.00154[27] A. Mironov，A. Morozov，A. Popolitov，《Macdonald理论中的基本三元组》，Phys. Lett. B869（2025）139840，arXiv:2411.16517[28] P. Di Francesco，R. Kedem，《Macdonald 对偶性与量子 Q-系统猜想的证明》，Selecta Math. 30（2024）第2号，23，arXiv:2112.09798[29] M. Noumi，J. Shiraishi，《关于 Ruijsenaars-Macdonald q-差分算子双谱问题的直接研究》，arXiv:1206.5364[30] Oleg Chalykh，《Macdonald多项式与代数可积性》，Adv. in Math. 166(2)，193-259（2002），arXiv:math/0212313[31] Kohei Yamaguchi，Shintarou Yanagida，《将Koornwinder多项式特化为 B、C、D 和 BC型的Macdonald多项式》，J. Algebraic Combin. 57（2023），171–226，arXiv:2105.00936[32] Oleg Chalykh，Pavel Etingof，《多变量Baker-Akhiezer函数的正交关系与Cherednik 恒等式》，Advances in Mathematics 238.1（2013）：246-289，arXiv:1111.0515[33] A. Mironov，A. Morozov，A. Popolitov，《关于Chalykh方法处理DIM诱导的可积哈密顿量特征函数的方法》，Phys. Lett. B 863（2025）139380，arXiv:2410.10685[34] Boris Feigin，Ayumu Hoshino，Masatoshi Noumi，Jun Shibahara，Jun'ichi Shiraishi，《 C_n 型和 D_n型单行Macdonald多项式的表格式公式》，SIGMA 11（2015），100，arXiv:1412.8001[35] Hoshino，Ayumu，和Jun'ichi Shiraishi，《具有单列图示的 C_n 型Macdonald多项式与变形 Catalan 数》，SIGMA 14（2018）：101，arXiv:1801.09939[36] Y. Komori，M. Noumi，J. Shiraishi，《Ruijsenaars 型差分算子的核函数及其应用》，SIGMA 5（2009），054，arXiv:0812.0279