为何等待？跨越生活史、经济学与机器学习的跨期决策最优规则

Elias Tannira[1, 2, *]以及 Luís M. A. Bettencourt[1, 2, 3]1生态与进化系，芝加哥大学，美国伊利诺伊州芝加哥60637²圣菲研究所，美国新墨西哥州圣菲市Hyde Park Road 1399号，邮编87501³数据科学研究所，芝加哥大学，美国伊利诺伊州芝加哥60637（日期：2026年11月25日）

我们应何时选择立即获得较小的奖励，而不是等待稍后获得更大的奖励？这一问题反复出现在进化生物学、《行为生态学》、心理学、经济学和人工智能领域，但各领域对时间折扣的处理方式各不相同。我们表明，这些学科中的跨期决策具有共同结构和单一最优规则：当回报增长率高于贴现率时等待，当两者相等时采取行动。对于单次决策，该规则定义了最优等待时间；对于连续奖励流，它则转化为随时间分配的数量（如消费或生育力）的运动方程。我们从明确的机制中推导出回报率和贴现率，包括死亡率及其他风险、不确定性与风险厌恶、人口增长、资本折旧、恐惧、生存阈值和信息价值，并以实验室选择、退休、成熟、资源开采、资本积累和探索为例。该框架揭示，包括双曲线折扣、符号效应和匮乏状态下的不耐心在内的表面异常，可能源于奖励与风险的相对结构，而非固定偏好。最后，我们明确了在实验和政策中解释并改变时间偏好所必须测量的因素。

arXiv:2611.32748v1 [physics.soc-ph] 24 Nov 2026

I. 引言

耐心通常被视为一种美德，但不耐心却是普遍存在的。这一表面上的悖论见于实验室实验、日常行为和政策之中。儿童常常选择现在得到一颗棉花糖，而不是稍后得到两颗 [1]；鸽子、大鼠和猴子往往更偏好即时获得的少量奖励，而不是延迟获得的较大奖励，即使等待会增加它们的总体食物摄入量 [2, 3]；社会经济地位较低的人往往比富裕人群以更高的比率贴现未来 [4–6]。通过强化学习训练的人工行为主体，其设计本身就被赋予了不耐心：折扣因子对每一个未来步骤的权重都低于前一个步骤 [7], ，即使更多的探索会提升其表现 [8, 9]。所有这些个体都面临同一个两难问题：应该等待多久？

尽管这些问题具有共通之处，但每个学科都形成了自己的研究路径。经济学倾向于通过折现效用模型来表示时间偏好，在这类模型中，未来的效用增益会按照恒定的纯时间偏好率加权 [10–12]。实验室研究记录了许多系统性偏离这一假设的现象：贴现率会随着延迟时间增加而下降，较大的奖励比小奖励受到的贴现程度更低，损失比收益受到的贴现程度更低，以及随着奖励临近而发生偏好反转 [12–16]。这些“异常”已经成为行为经济学这一分支的核心议题，但其中大多数仍未得到解释 [17, 18]。心理学开始用双曲折扣函数来描述其中一些模式 [19–21]，其拟合参数会随商品、主体的年龄及其精神状况而变化 [22–25]。相较之下，进化生物学通过费希尔繁殖价值，从第一性原理推导贴现。未来的繁殖会受到死亡风险和背景人口增长的贬值影响 [26–29], ，由此在生活史理论中预测年龄特异性行为特征 [30–33]。《行为生态学》检验了失去延迟奖励的死亡风险是否能够解释动物的冲动性，但研究往往发现这一风险过弱，这表明还存在其他机制 [3, 34–36]。强化学习是人工智能（AI）的一个重要分支，主要将折扣因子视为出于计算便利而选择的超参数 [7, 37]。人工智能领域的最新发展表明，通过减少贴现来扩大智能体的上下文窗口，可以显著提升其在复杂任务中的表现 [8, 9]。

这些不同领域很少相互借鉴，因此其研究结果和方法一直难以比较 [12,38]。在尚未解决的问题中，测得的贴现率难以得到准确识别，而且对实验室之外的行为预测力很弱 [38–40]。仅凭死亡率所预测的贴现率，比在人类和动物中观察到的数值小一到两个数量级 [3, 41]。由于这些反常现象，各领域都加入了自身的修正因素，包括等待的机会成本 [41, 42], 内生性或状态依赖型不耐心 [43–46], 对.....的不确定性

* tannirae@uchicago.edu

风险 [24, 47, 48], 或最低生存阈值 [49]。一些作者呼吁对这些观点作出更加统一的解释 [32, 33, 41, 42], 但据我们所知，还没有研究跨领域完成这一工作。一个反复出现的难题是，贴现往往被孤立地研究，被视为个体的一种属性，并且采用相对晦涩的数学方法。相比之下，等待的决策具有情境性，也相对直观：在现实情境中，智能体总是必须权衡贴现与奖励及相关资产如何随时间增加。

我们在此探讨，这些领域的跨期决策是否具有某种共同结构，从而使贴现率和等待时间可以被推导出来，而非预先假定。我们的出发点是，每个此类决策都涉及两个时间函数：奖励， R，通常会在等待时增长；以及贴现函数， G，会逐渐下降。它们的对数变化率 γ_R 和 γ_G给出一个统一的决策规则：当 $\gamma_R > \gamma_G$ 时继续等待，而当 $\gamma_R = \gamma_G$时采取行动。我们将点问题与路径问题区分开来：点问题只有一次决策和一个最优等待时间；路径问题则要求个体持续地在当前使用与某种投资之间分配存量。我们表明，对于一段时间内持有的单个边际单位，路径问题可以化约为点问题，因此同一规则分别成为经济学中的欧拉方程、强化学习中的贝尔曼条件，以及生活史理论中的最优性条件，见表I和II。

在这一框架下，贴现有三个主要来源。第一是内在不耐，这在心理学和经济学的大量研究中都被假定存在，但通常没有得到解释。第二，也是最重要的来源，是日后无法获得奖励的风险率：这可能源于个体自身的死亡率或丧失能力，也可能源于环境事件，或奖励本身的易腐性。第三，是根据一个本身随时间变化的标准来评价名义奖励价值，例如生活史理论中的人口增长，或经济学中的通货膨胀和经济增长。其他机制，尤其是不确定性与风险厌恶相结合、收益递减、生存阈值以及信息价值，会作用于奖励的增长，但往往表现为贴现。

本文有三项主要贡献。首先，我们提供了一种通用语言，以单一、透明的决策规则来表述进化、生态学、心理学、经济学和机器学习中的跨期问题。其次，我们展示了贴现率和奖励增长率如何从明确的机制中产生，尤其指出，奖励增长较慢与贴现较快在观测上等价。第三，通过一系列具体示例，我们说明若干著名的异常现象——例如双曲线折扣、符号效应、生命历程中时间偏好的 U 形变化，以及“穷人的不耐”——可能是对奖励与风险率结构的理性反应，而非主观特质。本文结构如下：第II节建立分析框架；第III 节和IV 节给出点问题和路径问题的示例；第V节讨论其影响、拓展方向和未解决的问题。

II. 跨期决策的一般结构

现在，我们来考察后果随时间逐渐显现的决策模型。这通常与个体的生命历程相联系，因此时间也可以理解为年龄。我们区分两类问题：只涉及单次决策的点问题，以及包含一系列随时间展开的决策的路径问题。由于路径问题是点问题的推广，我们将依次讨论。

A. 点问题

点问题只涉及一次选择。例如，选择稍后获得更多货币（或棉花糖、食物），而不是现在获得较少的；或者选择稍后承受较大的损失，而不是现在承受较小的损失。这些是心理学和行为经济学实验室环境中研究的典型决策 [12, 38, 40]。

设 $R(\tau, t) \geq 0$ 表示在时间 $\tau \geq t$收集的奖励大小，其中 t 是最早可能的收集时间。在有趣的问题中， R 随 τ 增加，因此若不考虑其他因素，等待是值得的。随时间增长的损失与此正好相反（即负奖励），因此若不考虑贴现，就永远不应该等待。虽然奖励会随时间增加，但假定个体在较晚收到奖励时对其评价较低。这种效应称为时间折扣：我们用函数 $0 < G(\tau, t) \leq 1$表示，其中 $G(t, t) = 1$。 R和 G共同定义了在 τ收集的奖励的主观价值，

$$V(\tau, t) = R(\tau, t)\, G(\tau, t), \tag{1}$$

即需要最大化的量。当 $t = 0$（例如出生）时，我们写作 $R(\tau)$、 $G(\tau)$ 和 $V(\tau)$。奖励和贴现由其时间速率表征，

$$\gamma_R(\tau, t) \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \ln R(\tau, t), \qquad \gamma_G(\tau, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial \tau} \ln G(\tau, t), \qquad \frac{\partial \ln V}{\partial \tau} = \gamma_R - \gamma_G, \tag{2}$$

从而 $G(\tau, t) = \exp[-\int_t^\tau \gamma_G(u)\, du]$，其中 u 是哑积分变量（时间）； γ_G 可能取决于环境因素或心理因素。该贴现率 γ_G是心理学和经济学实验中估计的量 [12, 38, 39]。常数 γ_G 会产生指数贴现，而递减的 γ_G 会产生双曲线贴现，见下文。

方程（2）给出了决策规则。如果 $\gamma_R < \gamma_G$，主观价值会随时间下降，因此应立即领取奖励。如果 $\gamma_R > \gamma_G$，主观价值会上升，个体就应等待。等待会在时刻 τ_* 结束，此时 $\gamma_R(\tau_*) = \gamma_G(\tau_*)$ 且 $\gamma_R - \gamma_G$ 由正变负。此时， τ_* 就是最优等待时间。点问题很简单，因为 R 和 G 都是已知的时间函数。实验室实验可以通过设计构造出这种结构，但现实中的决策会受到不确定性的影响，而且往往允许个体随着时间推移逐步消费或投资。这种连续动态分配就成为路径问题。

B. 路径问题

在路径问题中，个体随时间连续做出决策。解决方案是一条时间轨迹，体现最优行为，例如储蓄率、消费率或（生物学上的）投资率。考虑一个资源存量为$k(t)$的个体，该存量以 $h(k)$的速率增长，并通过消费 $x(t)$而耗减，

$$\dot{k} = h(k) - x. \tag{3}$$

个体可以在连续的消费轨迹 $x(s)$ 中进行选择，其中 $s \geq t$，以最大化总折现奖励

$$W(t) = \int_t^\infty F[x(s)]\, G(s,t)\, ds. \tag{4}$$

这里， $F[x(s)]$ 表示在时间 s 消费所获得的奖励流。它通过 $G(s,t)$ 进行时间贴现。存量 $k(t)$ 可以是经济学中的资本、生活史理论中的体重，或地下的自然资源。当奖励流集中于单一收集时间 τ，使得 $F[x(s)] = R(\tau,t)\delta(s-\tau)$ 时，我们便得到点问题。最优轨迹取决于测量在两个时间之间转移少量消费所产生的后果。假设个体在时间 t 放弃少量消费 ε，并将其投资至 $s > t$。该消费单位被加入存量，并按以下因子升值

$$\Phi(s,t) = \exp\left[\int_t^s h'\big(k(u)\big)\, du\right], \qquad \Phi(t,t) = 1. \tag{5}$$

The 将 ε 在两个时间之间转移所导致的消费路径变化 is

$$\delta x(u) = -\varepsilon\delta(u-t) + \varepsilon\Phi(s,t)\delta(u-s). \tag{6}$$

一阶近似下，总折现奖励的相应变化为

$$\delta W = \varepsilon\left[\underbrace{F'[x(s)]\Phi(s,t)}_{R(s,t)}\, G(s,t) - \underbrace{F'[x(t)]}_{R(t,t)}\right] = \varepsilon\left[V(s,t) - V(t,t)\right]. \tag{7}$$

持有一单位的奖励为 $R(s,t) = F'[x(s)]\,\Phi(s,t)$。这就是将其兑现所得的价值乘以升值后的结果。由于单位可以在时间之间向任一方向移动，并且每个可行变化都是此类移动的叠加（附录 C），最优解要求 $\delta W = 0$ 对于所有 s。因此， $V(s,t)$ 会随着 s 变化而保持不变，而不是在某个单一值处达到峰值，并且

$$\gamma_R(s) = \frac{d\ln F'\big[x(s)\big]}{ds} + h'\big(k(s)\big) = \gamma_G(s) \quad \text{for all } s. \tag{8}$$

由于 $x(s)$ 出现在 γ_R 中，这是一个运动方程：最优跨期行为。

我们面对的是点问题还是路径问题，取决于 F的曲率。如果 F 关于 x 是线性的（或奖励不可分割）， R 就不取决于路径，所有效用单位都应在 V达到峰值时兑现，此时我们面对的是点问题。如果 F 是凹的，在同一时间兑现更多奖励会降低边际奖励，从而促使我们将 x 分散到一段时间内，直到 V 变为平坦，这就构成了路径问题。表 I 总结了这两类问题。表 II 将不同学科中的问题映射到这些共同结构上。以下示例的共同主题是，较高的贴现会降低总奖励，例如成熟时规模或终生效用。然而，在高风险率、不确定性、背景增长或折旧下，当下导向行为才是真正理性的应对，而不是性格缺陷或不受欢迎的特质 [24, 50, 51]。

	点问题	**路径问题**
选择	单一收集时间 $\tau \geq t$	轨迹 $x(s)$, $s \geq t$
目标	$V(\tau,\ t) = R(\tau,\ t)\ G(\tau,\ t)$	$W(t) = \int_t^\infty F[x(s)]\, G(s,\ t)\ ds$，受限于 $\dot{k} = h(k) - x$
持有单位	奖励本身	一单位 x的边际单位，在 t 被保留并兑现在 s
奖励 R	τ的给定函数	$F'[x(s)]\ \Phi(s,\ t)$：兑现价值 $\times$ 升值
最优性	$\gamma_R(\tau_*) = \gamma_G(\tau_*)$：$V$达到峰值	对于所有 s，$\gamma_R(s) = \gamma_G(s)$：$V$保持平坦，$\delta W = 0$
结果	最优等待时间 τ_*	$x(s)$的运动方程
出现于	不可分割奖励，或 $F(x) \propto x$	具有收益递减的可分割存量 ($F'' < 0$)
限制	$\gamma_R > \gamma_G$ 始终：永远等待；$\gamma_R < \gamma_G$ 始终：立即收集	约束起作用时（例如生存约束），$\gamma_R \neq \gamma_G$

表一。两类跨期决策问题。决策总是比较回报增长率，γ_R与贴现率，γ_G，式（2）。点问题是奖励流集中在单一时间点的路径问题。升值因子 Φ由存量动态推得，见式（5）。

传统	**目标**	**贴现率 γ_G（来源）**	**点问题 $\gamma_R = \gamma_G$**	**路径问题 $\gamma_R = \gamma_G$**
心理学，行为经济学	$V = RG$ 以获得奖励（损失）	不耐心；风险率；恐惧，享受	线性奖励，$R \propto \tau$：$1/\tau_* = \gamma_G$；损失：$\gamma_L = \gamma_G$；带噪奖励：$g - \eta\frac{\sigma^2}{2} = \gamma_G$	很少被提出
经济学	$\int u(c)\, e^{-\gamma_G t}\, dt$，主体资本增长	纯时间偏好；风险，$\eta\sigma^2/2$；生存	退休时机	Hotelling：$\dot{p}/(p - c_e) = \gamma_G$；RCK：$f' - \delta_k - \eta\frac{\dot{c}}{c} = \gamma_G$
生活史理论	最大化 r，约束条件为 Euler–Lotka 方程	$r + \mu$：人口增长和死亡率	成熟年龄：$m'/m = r + \mu_J$；线性 ϕ：$P'(w_*) = r + \mu$	生长与繁殖，凹的 ϕ：$P'(w) - \eta\,\dot{c}/c = r + \mu$
强化学习	$\mathbb{E}\sum_j \gamma^j F_j$ 贝尔曼方程	风险率 $-\ln\gamma$；或每步的风险率	探索与利用：$\ln(1 + D/\Delta) = -\ln\gamma$；吉廷斯指数 ν	生长存量马尔可夫决策过程：$\ln A + \ln\frac{x_j}{x_{j+1}} = -\ln\ \gamma$

表 II。跨领域的跨期问题。在每个单元格中，决策规则使奖励的有效增长率 γ_R （左侧）与贴现率 γ_G （右侧）相等。各种方法的主要差异在于 γ_G的来源：在心理学、经济学和强化学习中，它是一个偏好参数；而在生活史理论中，它是内生的（人口增长加死亡率）。所有符号均汇总于附录 G。

III. 点问题：最优等待时间和贴现率 S

A. 指数型和线性奖励

最简单的情形具有恒定的奖励和贴现率：$R(\tau,\ t) = R_0\, e^{\gamma_R(\tau - t)}$ 以及 γ_G。如果 $\gamma_R > \gamma_G$，个体应当等待（偏好“较大但较晚”选项，LL）；如果 $\gamma_R < \gamma_G$，则应立即领取（“较小但较早”，SS）。无差异点 $\gamma_R = \gamma_G$ 不随时间变化，因此不存在偏好逆转：一个开始等待的个体会永远等待，也不存在最优等待时间。

偏好逆转和最优等待时间要求这两个速率随时间发生不同的变化。例如，考虑一个线性增长的奖励，$R(\tau) = R_0\,\tau$（例如，以恒定速率累积的资源），其指数贴现率为常数 γ_G。那么

$$V(\tau, t) = R_0\,\tau\, e^{-\gamma_G(\tau - t)}; \qquad \frac{\partial \ln V}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau} - \gamma_G. \tag{9}$$

价值起初上升，最终被贴现效应超过（见图 1A）。最优领取时间是 $\tau_* = 1/\gamma_G$，从任意 $t < 1/\gamma_G$开始。对于 $t \geq 1/\gamma_G$，应立即领取奖励。因此，个体会等待（LL）

在生命早期，并在 τ_* 时转而选择 SS。在一项实验室选择中，若在 t 或 $\tau > t$ 时领取奖励，个体当且仅当

$$\frac{R(\tau)}{R(t)} > \exp\left(\int_t^\tau \gamma_G(u)\,du\right) \tag{10}$$

（具体案例见附录 III 中的表 A ）。由于奖励会增长，较小的 γ_G 会在 τ_*带来更大的奖励。如果贴现源于心理因素，个体应努力降低贴现；如果贴现反映了环境风险，则可能超出个体的控制范围，需要政策或制度干预。

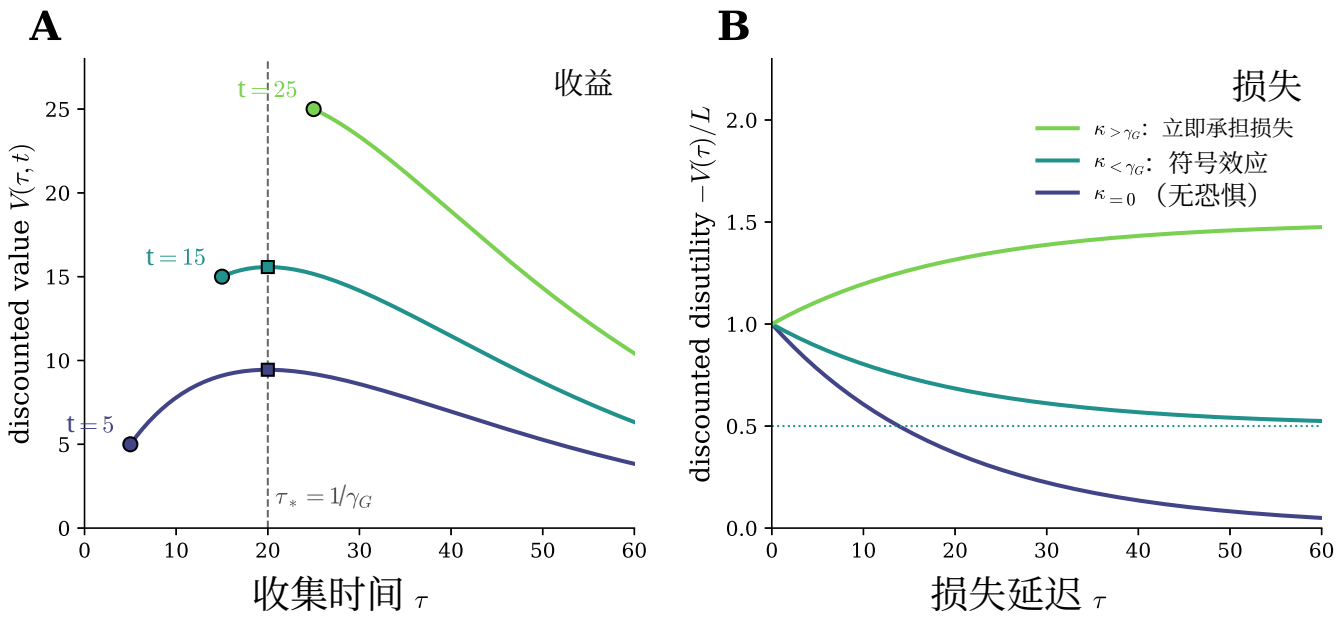

图 1。（A）收益：在线性增长的奖励于 $\tau \geq t$ 领取时，其贴现价值 $V(\tau, t) = R_0\,\tau\,e^{-\gamma_G(\tau - t)}$，其中 $t \in \{5, 15, 25\}$（圆圈）、$R_0 = 1$和 $\gamma_G = 0.05$。随着奖励增加，价值先上升，随后因贴现占主导而下降。对于 $t = 5$和 $t = 15$，最优领取时间为 $\tau_* = 1/\gamma_G = 20$（虚线，方块）；在 $t = 25$ 或更晚时可获得的奖励，最好立即领取。（B）损失：固定大小为 L、在延迟 τ 后到期的损失，其等待期间每单位时间产生 κL 的恐惧成本，$-V/L = G_{\text{eff}}(\tau)$，见公式（11），适用于 $\gamma_G = 0.05$。没有恐惧（$\kappa = 0$）时，损失的贴现方式与收益相同。存在轻微恐惧（$\kappa = 0.025 < \gamma_G$）时，负效用趋于稳定在 κ/γ_G（点线），因此损失看起来比收益的贴现程度更低（符号效应）。存在强烈恐惧（$\kappa = 0.075 > \gamma_G$）时，延迟会增加负效用，因此最好立即承受该损失。

B. 损失、恐惧与享受

同样的数学也适用于损失，但其行为后果有所不同。由于损失是一种负奖励，个体现在会最小化贴现损失 $L\,G$，其中 $\partial_\tau \ln(L\,G) = \gamma_L - \gamma_G$以及 $\gamma_L = \partial_\tau \ln L$。条件$\gamma_L = \gamma_G$ 再次定义了 τ_*，此时它是贴现损失的最小值。例如，$L = L_0\,e^{\lambda\tau^2/2}$ 在 γ_G 恒定时给出 $\gamma_L = \lambda\tau$ 和 $\tau_* = \gamma_G/\lambda$。只要损失增长得比贴现使其缩减的速度更慢，个体就应推迟损失，$\gamma_L < \gamma_G$。这意味着，最优等待时间要求损失加速增长，而对于收益，则要求奖励减速增长。如果 $\gamma_L < \gamma_G$ 始终成立，累积的损失就会被无限期推迟，形成一种看似“理性”却会导致毁灭的路径；个人债务或国债失控时，人们对此并不陌生。

两种行为效应已有充分记录。许多人会提前承担损失，倾向于尽早承受较大的惩罚，而不是稍后承受较小的惩罚，以便“尽快结束” [52, 53]。此外，同等大小的损失通常比收益贴现得更缓慢：这被称为“符号效应” [12–14]。这两种效应都可以用预期（“恐惧”）来解释，因为预期会叠加到损失本身之上 [52]。为说明这一点，设一个大小恒定的损失 L，应在 τ发生，在等待期间每单位时间产生恐惧成本 κL 。采用指数贴现（且 $t = 0$），其贴现负效用总量为

$$-V(\tau) = L\,G(\tau) + \int_0^\tau \kappa L\,G(s)\,ds = L\,G_{\text{eff}}(\tau), \qquad G_{\text{eff}}(\tau) = e^{-\gamma_G\tau} + \frac{\kappa}{\gamma_G}\left(1 - e^{-\gamma_G\tau}\right), \tag{11}$$

因此，短延迟下的有效折扣率为 $\gamma_G-\kappa$。当 $0<\kappa<\gamma_G$时， G_{eff} 衰减得比 G 更慢，并趋于 κ/γ_G：损失似乎贴现得更缓慢（符号效应；见图1B）。当 $\kappa>\gamma_G$时，有效折扣率为负，延迟会增加总贴现负效用，个体会立即承担损失，$\tau_*=0$。与此一致的是，在实验环境中，等待期间神经反应上升得越陡峭的个体，越倾向于选择更大但较早的冲击 [53]。对收益的积极预期（“享受”）具有对称作用。通过降低未来奖励的有效折扣，享受可能使人们“把最好的留到最后” [52]。

C. 不确定性、风险厌恶与双曲线折扣

不确定性是从潜在过程推导出 R 和 G 的第一步。它的作用方式取决于其影响的是奖励还是贴现。

不确定性奖励。 令资源 y 按照几何布朗运动增长，这是种群动力学和金融学中随机增长的标准模型 [54],

$$dy=g\,y\,dt+\sigma\,y\,dB, \tag{12}$$

其平均增长率为 g、波动性为 σ，布朗增量为 dB。则 $y(\tau)=y_0\exp[(g-\sigma^2/2)\tau+\sigma B_\tau]$ 服从对数正态分布。对于幂律效用（恒定相对风险厌恶，CRRA）， $u(y)=y^{1-\eta}/(1-\eta)$，其中 $\eta\geq 0$ 是相对风险厌恶 [55]（附录 B），$\mathbb{E}[y^{1-\eta}]=y_0^{1-\eta}\exp[(1-\eta)(g-\eta\sigma^2/2)\tau]$。将奖励视为确定性等价物，CE $=u^{-1}(\mathbb{E}[u(y)])$,

$$R(\tau)=y_0\,e^{(g-\eta\sigma^2/2)\tau},\qquad \text{so that the decision boundary is}\qquad g-\eta\frac{\sigma^2}{2}=\gamma_G. \tag{13}$$

我们看到，波动性和风险厌恶共同对奖励增长率施加惩罚，这与进入社会贴现率预防性修正的项相同 [56]。更高的波动性会使个体减少等待，并接受较小的奖励。如果平均增长率下降，例如 $g(\tau)=g_0\,e^{-\tau/\tau_0}$，则存在一个最优等待时间，$\tau_*=\tau_0\ln(g_0/\gamma_{\text{eff}})$，其中 $\gamma_{\text{eff}}=\gamma_G+\eta\sigma^2/2$。我们看到，奖励增长率的下降等价于贴现率的上升。在 $\gamma_G=0$ 的情况下，贴现完全源于面对环境变异性时的风险厌恶。

斯通–盖里效用 [57, 58], $u(y)=(y-\bar{y})^{1-\eta}/(1-\eta)$，加入了生存水平 $\bar{y}$，其相对风险厌恶为$\eta\,y/(y-\bar{y})$。对于富裕个体，它简化为 η， $y\gg\bar{y}$，但在 $y\to\bar{y}$ 时会发散。因此，在接近生存水平时，有效折扣对不确定性 [49] 变得极其敏感。

异质风险。 假设贴现率本身存在不确定性，或者由许多风险构成，其服从均值为 $\bar{\gamma}_G$ 、形状参数为 n的伽马分布。取平均后得到

$$G(\tau)=\mathbb{E}\big[e^{-\gamma\tau}\big]=\Big(1+\frac{\bar{\gamma}_G}{n}\,\tau\Big)^{-n},\qquad \gamma_G(\tau)=\frac{\bar{\gamma}_G}{1+\bar{\gamma}_G\,\tau/n}, \tag{14}$$

这会产生一个随延迟时间增加而下降的贴现率。因此，起初缺乏耐心的个体会改变其态度，在延迟时间较长时更愿意等待。方程（14）是 Loewenstein 和 Prelec 提出的广义双曲线 [14], ，其特例 $n=1$， $G=1/(1+\bar{\gamma}_G\tau)$ 是心理学中广泛使用的双曲函数 [19, 20]；当 $n\to\infty$时，则可还原为指数贴现。在生物学和心理学中，从不确定风险推导双曲线折扣的规范性推导 [24, 47] 以及经济学中社会贴现率递减的推导 [59, 60]，都以同样的平均过程为基础。

总之，资产生长的不确定性会降低有效奖励，起到贴现的作用；而风险的分布越宽，贴现率就会随时间推移而下降，因此等待时间越长，贴现程度越低。这两者都是人类行为中常见的模式 [12, 38]。

D. 探索即投资：多臂老虎机

强化学习（RL）研究的是学习如何采取行动以最大化贴现奖励的个体 [7] （附录F）。其贴现函数为 $G(j)=\gamma^j$ 每一步 j，因此 $\gamma_G=-\ln\gamma$。一个经典问题是多臂老虎机：个体必须通过拉动各个臂来发现它们的收益。考虑一个每次拉动支付 F_s 的安全臂，$0<F_s<1$以及一个若为良好状态则支付1 、若为不良状态则支付0 的风险臂，其处于良好状态的先验概率为 $\psi<F_s$ ；拉动一次即可揭示其类型。探索的选择是一个点问题，其中奖励就是信息。拉动风险臂一次会使期望即时收益减少 $\Delta=F_s-\psi$ 。作为交换，个体以 ψ 的概率找到更好的臂，并在之后的每次拉动中获得 $1-F_s$ ：该信息就像一种资产，每一步支付期望股息 $D=\psi(1-F_s)$ 。因此，投资于探索的一个单位每一步带来 D/Δ，所以其奖励以

$$\gamma_R=\ln\Big(1+\frac{D}{\Delta}\Big)=\ln\Big[1+\frac{\psi(1-F_s)}{F_s-\psi}\Big], \tag{15}$$

并且当 $\gamma_R > \gamma_G$时，探索带来 $\sum_{j\geq 1}\gamma^j D > \Delta$。等价地，个体会进行探索，当且仅当

$$F_s < \nu \equiv \frac{\psi}{1-\gamma+\gamma\psi}, \tag{16}$$

其中 ν 是风险臂的吉廷斯指数 [61, 62]，使个体处于无差异状态的安全收益。短视型主体（$\gamma \to 0$，$\gamma_G \to \infty$）具有 $\nu = \psi$，只比较即时收益。耐心型主体（$\gamma \to 1$，$\gamma_G \to 0$）具有 $\nu \to 1$，并始终进行探索。对于任何 $\gamma > 0$，$\nu > \psi$：即使风险臂的预期收益较低，个体仍会进行探索。溢价 $\nu - \psi$ 就是信息价值，其作用类似于其他问题中的资产增值。不耐心会抑制探索并降低终身收益，这种联系在人类选择中也有所观察 [63]。当结果存在噪声时，决策会在每一步重复进行，并成为一个最优停止问题。

E. 生命历程奖励：何时退休

将退休视为一个点问题：何时停止累积工资流。我们用一条 S 形（戈珀茨）曲线对生命历程中的工资进行建模，$R(\tau) = R_{\max}\, e^{-e^{-\omega(\tau-\tau_w)}}$，童年时期接近于零，在年龄 τ_w时增长最快，并逐渐趋近于 $R_{\max}$（图 2A）。我们令拐点较晚时的平台值更高，$dR_{\max}/d\tau_w > 0$，这代表对技能的持续投资，例如接受高等教育。于是，$\gamma_R(\tau) = \omega\, e^{-\omega(\tau-\tau_w)}$，它随年龄单调递减。我们将贴现率设为戈珀茨–梅克汉姆死亡风险率 [64, 65]，$\gamma_G(\tau) = \mu(\tau) = \mu_0 + \alpha\, e^{\beta\tau}$；该风险率在成年早期较低，并随年龄呈指数增长。

下降的 γ_R 和上升的 γ_G 意味着存在一个获取奖励的最佳年龄，$\gamma_R(\tau_*) = \mu(\tau_*)$。代表较高教育程度的奖励流会带来更长的耐心（图2B），这在定性上与高收入、受教育程度较高者表现出更强耐心的测量结果一致 [4, 5]。这里观察到的耐心差异完全源于奖励流的差异，因为我们（简单地）假设贴现相同。在这些参数下，最佳退休年龄为 62 至 67 岁，与美国观察到的退休年龄接近。只有将死亡率设得低于这些年龄对应的时期生命表数值时，仅凭死亡率才能得到符合现实的年龄（这里$\mu(65) \approx 0.007$ 每年，相比之下约为0.01–0.016），这表明死亡率也会随工资和教育程度而变化，正如实证观察到的那样 [66–68]。

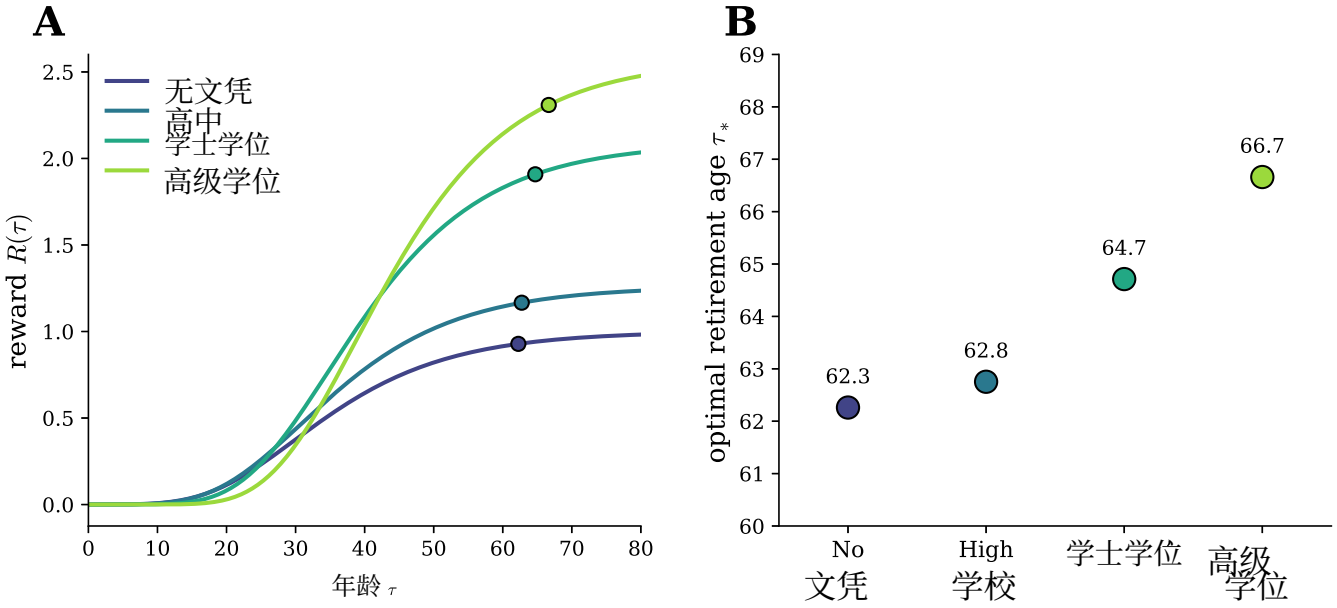

图 2。（A）在不同年龄上升并趋于平稳的奖励流，近似表示生命历程中的工资；$\omega = 0.08$（共享）和（τ_w，$R_{\max}$）：无文凭（29.73，1.00）、高中（30.73，1.26）、学士学位（34.73，2.09）、高级学位（38.73，2.57）。圆圈标出每条曲线上最优的退休年龄。（B）各奖励流的最优领取时间 τ_*，根据 $\gamma_R(\tau_*) = \gamma_G(\tau_*)$，其中戈珀茨–梅克汉姆死亡率为 $\mu_0 = 5\times10^{-4}$，$\alpha = 2\times10^{-5}$，$\beta = 0.09$。

F. 生活史理论：成熟期与繁殖时机

生活史理论将生长、繁殖和死亡时机视为由自然选择塑造的策略 [69–71]。该理论用人口统计量来解释奖励和贴现，因此无需作出任何心理学假设。奖励以年龄 τ [26]时的费希尔繁殖价值来衡量，

$$v(\tau) = \frac{1}{l(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} e^{-r(a-\tau)}\, l(a)\, m(a)\, da, \quad \rightarrow \quad \int_{0}^{\infty} e^{-ra}\, l(a)\, m(a)\, da = 1, \tag{17}$$

其中， $l(a)$ 是存活至年龄 a 的概率， $\mu(a) = -d\ln\, l/da$ 是年龄特异性死亡率， $m(a)$ 是繁殖力， r 是种群增长率。将 $v(0) = 1$ 归一化后，得到右侧的欧拉–洛特卡方程。这里，奖励流是繁殖力 $F = m(a)$，折扣因子为 $G(a) = e^{-ra}\, l(a)$，贴现率 $\gamma_G = r + \mu(a)$ 由种群增长率（它会稀释较晚出生的后代）和年龄特异性死亡率构成。这就是罗杰斯等人所指出的时间偏好的进化起源 [28, 29, 31, 32]。对 v 求导，得到价值恒等式（附录 E）

$$\frac{dv}{d\tau} = (r + \mu)\, v - m, \tag{18}$$

该恒等式指出，对于任何生活史，繁殖价值的增长率 v'/v 加上奖励收益率 m/v，等于贴现率 $r + \mu$。

进化论中的最优性原则使 r最大化。对欧拉–洛特卡方程作变分，可得适合度的敏感性（附录E）

$$\frac{\delta r}{\delta \mu(a)} = -\frac{e^{-ra}\, l(a)\, v(a)}{T}, \qquad \frac{\delta r}{\delta m(a)} = \frac{e^{-ra}\, l(a)}{T}, \tag{19}$$

其中 $T = \int_0^{\infty} a\, e^{-ra}\, l(a)\, m(a)\, da$ 是世代时间。这些就是汉密尔顿选择力 [27, 72]。而最优性要求，在生物体的选择（例如成熟年龄）发生变分时， r 保持稳定， τ_M。将欧拉–洛特卡积分写作 $W(r;\, \tau_M) = 1$，其中 $\partial W/\partial r = -T$，可得 $dr/d\tau_M = T^{-1}\, \partial W/\partial \tau_M$。因此，最大化 r 等价于在固定 r时令价值积分的变分为零 [73, 74]。

成熟年龄。设成熟前繁殖力为零，成熟后为 $m(\tau_M)$，死亡率恒定，为 μ。欧拉–洛特卡方程变为 $1 = m(\tau_M)\, e^{-(r+\mu)\tau_M}/(r + \mu)$，因此 $R = m(\tau_M)$， $G = e^{-(r+\mu)\tau_M}$，最优成熟年龄满足

$$\gamma_R = \frac{1}{m}\frac{dm}{d\tau_M} = r + \mu = \gamma_G. \tag{20}$$

当繁殖力随年龄增长的速度快于死亡率与人口增长之和时，生物体应推迟成熟。死亡率较高（环境更严酷）或人口增长更快，都会使繁殖转向更年轻的年龄；这是与 r–K选择 [69, 75, 76] 相关的经典权衡。当幼体死亡率 μ_J 不同于成体死亡率 μ_A 时，方程变为 $1 = m(\tau_M)\, e^{-(r+\mu_J)\tau_M}/(r + \mu_A)$，最优值为 $m'/m = r + \mu_J$。我们可以看到，只有幼体死亡率会对等待进行贴现，而且较低的 μ_J 可能会促使成熟期延后。

生育力或存活率改善：越早越好，还是越晚越好？ 选择力，方程（19），回答了与较小但较早和较大但较晚选择相对应的进化类比问题：在什么年龄，生育力或存活率的改善对适合度最有价值？每种敏感度都具有如下点形式： $V = R\, G$。

生育力。在年龄 τ, $\delta m(a) = \varepsilon\, m(\tau)\ \delta(a - \tau)$ 时，繁殖力按比例增加，会得到 $\delta r = \varepsilon\, e^{-r\tau}\, l(\tau)\ m(\tau)/T$。奖励为 $R = m(\tau)$，贴现函数为 $G = e^{-r\tau} l(\tau)$，其中 $\gamma_G = r + \mu$，因此最有价值的年龄满足 $m'/m = r + \mu$：稳定人口中母亲年龄分布的众数。对于类人生命史（附录 E），这对应于 $\tau_* \approx 26.4$ 年，略早于 27.2 岁的繁殖力峰值。

存活。在年龄 τ时，固定幅度的死亡率降低 $\delta\mu$（a） $= -\varepsilon\, \delta$（$a - \tau$）会带来 $\delta r = \varepsilon\, e^{-r\tau} l$（$\tau$）$v$（$\tau$）$/T$。现在$R = 1$ 以及 $G = e^{-r\tau} l\, v = \int_{\tau}^{\infty} e^{-ra} l\, m\, da$ 是未来仍将发生的繁殖，其贴现率为 $\gamma_G = m/v \geq 0$（附录 E）。由于奖励不会增长，存活改善总是（至少弱）偏好更早发生，并且在繁殖结束后毫无价值。这就是汉密尔顿随年龄递减的选择力 [27], ，也反映了健康收益在人生早期更受重视这一经验发现 [22]。

IV. 路径问题：持续的跨期最优行为 R

路径问题通常采用最优控制或动态规划来处理 [77, 78]。这里我们采取捷径，着重强调第IIB节中奖励与升值的结构。我们先从生活史入手，此时单一选择会形成一条轨迹，随后展示经济学中也存在相同的结构。

A. 生长与繁殖

当繁殖力随体型增大而提高时，经典的生活史权衡便是生长与繁殖之间的权衡 [70,79, 80]。设一个质量为 w 、净能量产出为 $P(w)$ 的生物体，将其能量分配于繁殖 c和生长，

$$\dot{w} = P(w) - c, \tag{21}$$

具有生育力度 $m = \phi(c)$ 和恒定死亡率 μ。适合度由 Euler–Lotka 方程得出 on,

$$1 = \int_0^\infty e^{-(r+\mu)a}\, \phi[c(a)]\, da.$$

在年龄 t 时，将一单位能量从繁殖中抽出并投入生长，到年龄 τ 时会累积为 $\Phi(\tau,\ t)$ 单位；根据方程（5），$h' = P\prime(w)$, 得到

$$R(\tau,t) = \phi'\big[c(\tau)\big]\, \Phi(\tau,t), \qquad G(\tau,t) = e^{-(r+\mu)(\tau-t)}, \tag{22}$$

以及条件 $\gamma_R = \gamma_G$，方程（8），

$$P'(w) - \eta\, \frac{\dot{c}}{c} = r + \mu, \qquad \eta \equiv -\frac{c\,\phi''(c)}{\phi'(c)}. \tag{23}$$

曲率 η 在此发挥的作用与第 IIIC 节中的相对风险厌恶相同。对于 $\eta = 0$，方程（23）仅是关于状态的条件，解是一个点；否则，解是关于 c 的轨迹。

如果繁殖力与分配的能量成正比，$\phi = \phi_0 c$，那么 $\eta = 0$：所有能量都用于生长，直到达到某一体型w_*，此时 $P'(w_*) = r + \mu$；之后则用于繁殖。这是一种对应于有限生长的开关式解 [79, 80]。对于 West等人 [81]的个体发育生长模型，$P(w) = a_0 w^{3/4} - b_0 w$，可得

$$w_* = \Big[\frac{3a_0}{4(b_0 + r + \mu)}\Big]^4, \tag{24}$$

因此，较高的贴现率（较高的死亡率或较快的人口增长）会导致较小的成体体型。如果繁殖力的收益递减，$\phi'' < 0$（例如，较大的窝产仔数会降低后代存活率），我们会得到一个路径问题，

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{P'(w) - r - \mu}{\eta}, \tag{25}$$

以及 $\dot{w} = P(w) - c$。生物体随时间生长并繁殖；贴现率越高，繁殖投入增长得越慢，并随着生长减缓而趋近于最大体型。S形的 ϕ将这两种模式结合起来，使行为更加贴近现实：生物体先生长，接着在达到某一阈值体型时转而开始繁殖，然后沿着一条生长和繁殖都逐渐减少的路径发展，类似于凹函数情形。

B. 经济学中的资源开采与资本积累

经济学中的许多跨期问题都会最大化贴现效用 [10, 82], ，其定义为

$$W = \int_0^\infty u[c(t)]\, e^{-\gamma_G t}\, dt, \tag{26}$$

其中，u 是效用流，$c(t)$是在时间 t的消费，γ_G 是纯时间偏好率（通常写作ρ），并受一个存量动态的约束，该存量在前面的示例中发挥了体重的作用。我们将考察两个经典模型。

霍特林法则。拥有初始储量 q_0 的垄断者可开采资源，价格为 $p(t)$，开采成本为 c_e，以离散或连续时间进行开采，$\int_0^\infty e^{-\gamma_G t}[p(t) - c_e]\, q(t)\, dt$ [83] 最大化。这里 $h = 0$：地下的单位既不会生长也不会消失，$\Phi = 1$，且每单位具有点结构 $V = RG$，其中有 $R = p - c_e$。如果租金的增长速度快于 γ_G，所有者就会等待；如果增长较慢，他们就会立即全部出售。由于收益关于 q 呈线性，每位所有者都会在 V 的峰值时出售，但如果所有人都这么做，价格就会暴跌。因此，市场均衡

要求 V 保持平坦，由此得出霍特林法则：可耗竭资源的租金以贴现率实现最优增长，$R/R = \gamma_G$ [83]。给定需求曲线 $p(q)$，可得开采计划 $\dot{q} = \gamma_G(p - c_e)/(dp/dq) \leq 0$；对于线性需求，$p = a - bq$ 且 $c_e = 0$，$p(t) = p_0 e^{\gamma_G t}$，存量决定了耗竭时间。该法则确定租金的增长率，而存量则确定其水平。

资本积累。在拉姆齐–卡斯–库普曼斯（RCK）模型中，[82, 84, 85]，方程（26）在以下约束条件下达到最大值：

$$\dot{k} = f(k) - \delta_k\, k - c, \tag{27}$$

其中，$f(k)$ 是资本的生产性产出（收益），而 δ_k 计入了折旧和人口增长造成的稀释，因此 $h = f - \delta_k k$。不同于霍特林问题，该存量会增值，且效用是非线性的。在 t 时放弃一单位消费并在 τ 时消费它，可得到（附录D）

$$R(\tau, t) = u'\big[c(\tau)\big]\, \exp \int_t^\tau \big[f'(k(u)) - \delta_k\big]\, du, \qquad G(\tau, t) = e^{-\gamma_G(\tau - t)}. \tag{28}$$

对于CRRA效用，$\gamma_R = f'(k) - \delta_k - \eta\, \dot{c}/c$。对于线性效用（$\eta = 0$），这再次成为一个点问题。但对于凹效用，保持在 $\gamma_R = \gamma_G$ 上会得到凯恩斯–拉姆齐法则 [82, 84]，

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \delta_k - \gamma_G}{\eta}, \tag{29}$$

该法则与资本方程及横截条件共同决定了（k，c）的鞍路径。在稳态下，$f'(k_*) = \gamma_G + \delta_k$：等待的物理回报等于完整的贴现率，而折旧起到了贴现的作用。方程（29）与生命史条件（方程（23）相同，只是用资本替代了体重。它还说明了政策中使用的消费贴现率 $\gamma_G + \eta\, \dot{c}/c$为何不同于纯时间偏好率 [86]。

生存与穷人的不耐心。陡峭的贴现通常与贫困相关 [4, 6, 41, 87]。采用斯通–盖里效用时，$u(c) = (c - \bar{c})^{1-\eta}/(1 - \eta)$，边际效用 $u' = (c - \bar{c})^{-\eta}$ 给出

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \delta_k - \gamma_G}{\eta}\, \frac{c - \bar{c}}{c}, \qquad f'(k) - \delta_k = \gamma_G + \eta\, \frac{c}{c - \bar{c}}\, g_c, \tag{30}$$

其中 $g_c = \dot{c}/c$。随着 $c \to \bar{c}$，消费增长趋于消失：当个体接近生存水平时，几乎无力储蓄。此外，要证明任何给定消费增长合理所需的资本回报率必须变得非常高。由此产生的当下导向并非源于更高的 γ_G，而是因为生存阈值越近，放弃消费就越困难；这与近期关于贫困与贴现的基于阈值的模型一致 [41, 49]。然而，采用标准方法测量时，这样的个体仍会显得具有（非常）高的贴现率 [4, 38]。

V. 讨论

权衡时间带来的成本与奖励，是自然界和社会中最具深远影响的问题的核心，涉及从进化背后的繁殖策略、合作困境，到学习、创新和经济增长。在本文中，我们旨在探讨，分别在进化、生态学、心理学、经济学和机器学习领域研究的跨期决策，是否具有共同的结构。我们已经表明，答案是肯定的，而且其内在逻辑可以变得简单明了。在所有情形中，最优决策都会比较两个时间速率：持有一单位商品或资产所带来的奖励增长率，γ_R与贴现率，γ_G。对于单次决策，二者相等决定了最优等待时间是否存在及其取值。对于连续分配问题，这一条件会转化为运动方程，例如经济学中的凯恩斯–拉姆齐法则、生活史理论中的生长–繁殖权衡，或强化学习中的贝尔曼条件。升值因子 Φ 通过将所持资产随时间增值的效应纳入决策，连接了这两种情形。表I 和II总结了这种对应关系。

本文发展的比较形式化视角凸显了几个要点。在我们看来，当各个领域被孤立地考察时，这些要点往往会被掩盖。首先，折扣率总是相对的，而不是绝对的。等待的决策取决于 $\gamma_R - \gamma_G$，而不取决于 γ_G 本身。这意味着，利率差具有不变性：只要通过另一利率进行补偿，每个利率都可以发生平移。特别是，奖励增长放缓在观测上等价于更快的贴现（第 IIIC节）。因此，仅测量折扣率会将个体的贴现与其对奖励如何演变的预期混杂在一起，包括奖励的增长、波动性、易腐性以及其价值函数的曲率（效用、生育力）。这或许有助于解释，为何折扣率会随商品 [22] 和规模 [13, 14]，而变化，却难以

通过实验加以识别，并且难以准确预测现实世界中的行为 [38, 39]。易腐性较强的食物具有负评价率， $h' < 0$，因此相比更为稳定且能够赚取利息的货币，即使二者具有相同的 γ_G，食物也应表现出更陡峭的贴现。在实验室之外，由于奖励难以轻易确定，要解释和改变跨期行为，就必须像关注贴现一样关注奖励流。

其次，贴现率有其根本原因。经济学和机器学习通常将其贴现率视为外生偏好或超参数 [7, 10, 12]。相比之下，生活史理论完全从人口统计学出发推导贴现率，即死亡风险加上种群增长率 [26, 28, 29]。在某些情况下，经济学已部分实现贴现的内生化，尤其是就死亡率而言 [88, 89], ，而不耐心程度可能取决于个体的状态或投资 [43–45], 不过，这是否与观察到的消费模式一致，仍存在争议 [90]。折旧会进入有效折扣率 $\gamma_G + \delta_k$，而消费贴现率取决于相关效用函数的生长和曲率 [86]。第III 节和第IV 节的例子表明，风险、不确定性、背景增长和折旧分别产生有效折扣率的（加性）组成部分。这为长期以来的发现提供了一种解释：死亡率远不足以解释观察到的不耐心程度 [3, 35, 41]。在我们的框架中，死亡率只是其中一个贡献因素 γ_G。等待的机会成本 [41, 42], 、波动性与风险厌恶相结合的影响，以及接近生存阈值，都会通过 γ_R 发挥作用；至少在较短的时间尺度上，这些影响可能大得多。

第三，这类比较分析也会导出一系列候选机制，包括各种风险，如死亡、中断和易腐性。此外，当风险存在异质性或不确定性时，其平均效应会产生双曲线折扣中逐渐下降的贴现率 [24, 47, 59]。这些机制还包括奖励的不确定性，它会按风险厌恶程度相应降低奖励的有效增长。对于极度匮乏或走投无路的个体而言，生存阈值可能至关重要，进而导致风险厌恶、异常强烈的当下导向行为，以及对高收益策略的寻求——尽管这些策略成功的可能性微乎其微，例如购买彩票 [49]。折旧和稀释也很重要，包括通货膨胀、资本折旧和人口增长；更广义地说，还包括任何改变评估奖励所依据标准的因素，例如个体在竞争者中的相对位置。等待期间的心理流也可能发挥作用，例如恐惧和享受，它们会改变损失与收益的有效增长率 [52, 53]。在长期问题中，信息价值十分重要：如果能够学习，个体就会更多地探索，而不是立即利用现有机会。每一种机制都会使当下导向行为成为个体应对自身处境的理性选择，而非性格缺陷或主观偏好 [24, 50, 51, 87]。同样，针对人类数据的元分析 [23] 和生命史模型 [31–33] 发现，时间偏好随年龄变化呈 U 形；当奖励增长随年龄下降、而死亡风险上升时，这种模式便会自然出现，正如我们的退休和成熟期示例所示。因此，在现实情境中，重要的是检验上述哪些类型的效应可能正在发挥作用，以及它们在多大程度上主导贴现幅度，或是否有多种效应共同（以加和方式）产生了观察到的行为。

为便于进行清晰的比较分析，我们对跨期贴现问题的处理有意保持了简约，因此存在若干局限。例如，我们的大多数例子都是确定性的，或使用简单的随机过程。我们只考虑了单一个体，并且在大多数情况下将贴现函数视为既定条件。我们没有推导准双曲线类型的当下偏误 [15, 16]。我们还忽略了总体（相关）风险对时间偏好的演化 [48], 的影响，也忽略了自然觅食选择中的前景—背景结构；这种结构可以使冲动规则在不进行贴现的情况下具有适应性 [3, 42]。所有这些情形都可以用 R 和 G的语言来表述，但需要各自展开论述。

本文提出的框架指向了若干有趣的开放性问题。实验和实地研究应明确地将奖励动态（生长、波动性和易腐性）与风险分别操纵和测量，从而使 γ_R 和 γ_G 能够被分别识别，而不是将其作为单一贴现率 [38, 39]进行估计。社会性和策略性风险，例如竞争、冲突以及他人的动作，是现实个体面临的不确定性的主要来源，但在本文所回顾的各种传统中，这些因素很少得到明确建模。相对社会地位或许有助于解释与较低社会经济地位相关的高贴现率 [6, 87]。此外，现实个体必须根据经验估计自身面临的风险和奖励流。他们如何进行估计，以及这些估计中的误差如何传递到行为 [24, 31], ，还有学习型个体如何进行适应性贴现 [37, 91]，仍是神经科学和在长期时间范围内行动的人工行为主体所面临的开放性问题。最后，如果高贴现率反映的是奖励流和风险，而非固定偏好或心理特质，那么能够允许并提高等待回报的干预措施，例如生活工资、各种形式的保险、信贷获取、降低波动性和提供更好的信息，应能提高耐心，并帮助人们摆脱贫困陷阱 [6, 41]。同样的逻辑也适用于跨越世代的集体问题，例如气候变化；在这些问题中，贴现率的选择主导着政策 [56, 59, 92, 93]。因此，更清晰、更全面地理解不同领域中人们如何感知并获得贴现和奖励流，应有助于设计这样的环境：在短期内，耐心是可负担的；在一生的时间范围内，耐心能够带来回报；同时，使学习和创新背后的有益冒险行为变得更加普遍可及。

致谢

感谢Jordan Kemp、Andrew Stier和Marc Berman所进行的讨论，也感谢圣菲研究所人类发展心理学工作组的成员；他们的讨论激发了最初的问题，并促成了本项工作。本研究部分获得了卡尔顿学院Paglia学士后研究奖学金（授予ET）的支持，也获得了Conard自然与社会复杂性基础倡议（授予LMAB）的支持。**作者贡献**。 E.T.：概念化、形式分析、可视化、撰写；L.M.A.B.：概念化、形式分析、监督、撰写。所有作者均最终批准发表。

数据可用性。 本文没有额外数据。用于生成图表的代码可在以下位置获取： https://github.com/Urban-Science-Lab/temporal_discounting。

利益冲突。 我们声明不存在任何利益冲突。

附录 A：较早与较晚奖励之间的选择

情景	t	τ	$\tau - t$	$R(\tau)/R(t)$ 指数	$\left(\int_t^\tau \gamma_G(u)\,du\right)$ 决策
基准窗口	5	25	20	5.000	2.718	LL
τ 向前推移 5	40		35	8.000	5.755	LL
	5	60	55	12.000	15.643	SS
t 向前推移 15	20		5	1.333	1.284	LL
	20	25	5	1.250	1.284	SS
	25	30	5	1.200	1.284	SS

表 III。在现在（ t，SS）还是稍后（ τ，LL）领取奖励的选择，式（10），对于线性增长的奖励 $R(\tau) = R_0\,\tau$，以及以恒定速率 $\gamma_G = 0.05$进行指数贴现，从而 $\tau_* = 1/\gamma_G = 20$。当 $R(\tau)/R(t)$ 超过折扣因子时，受试者选择 LL。

附录 B：相对风险厌恶与确定性等价物

相对风险厌恶 [55] 是边际效用相对于资源的负弹性， y：资源每增加一个百分点，边际效用下降的百分比。对于 CRRA 效用， $u(y) = y^{1-\eta}/(1-\eta)$， $u'(y) = y^{-\eta}$且

$$\mathrm{RRA} = -\frac{d\ln u'(y)}{d\ln y} = \eta. \tag{B1}$$

如果资源增加时边际效用迅速下降，个体就非常厌恶损失一部分资源。当消费增长时，同一个参数也决定边际效用如何随时间变化， $d\ln u'/dt = -\eta\,\dot{c}/c$。因此， η 既出现在不确定性成本（第IIIC节）中，也出现在第IV节的路径条件中；在后者中，它衡量效用曲率，或繁殖力 $\phi(c)$ 随 $\eta = -c\,F''/F'$ 变化的曲率。

确定性等价物。对于随机变量 y 上的赌博，确定性等价物（CE）是效用相同的确定金额，CE $= u^{-1}(\mathbb{E}[u(y)])$。对于 CRRA 效用，CE $= (\mathbb{E}[y^{1-\eta}])^{1/(1-\eta)}$。对于对数正态 y，其中 $\ln y \sim N(m_y, s^2)$，CE $= \exp[m_y + (1-\eta)s^2/2]$；当 $\eta = 0$ 时，它等于均值；当 $\eta = 1$时，它等于中位数。

附录 C：升值因子与可行变分

在此我们说明，式（ Φ5）中的升值因子表达了式（3）所示的动力学约束，并且式（6）中的双脉冲变分能够生成路径的所有可行变分。

兑现额的变化 δx 会导致存量的变化 δk。在最优路径附近对 $k = h(k) - x$ 进行线性化，得到

$$\delta\dot{k} = h'\big(k(s)\big)\,\delta k - \delta x. \tag{C1}$$

升值因子是该方程的传播子，

$$\partial_s \Phi(s,t) = h'\big(k(s)\big)\,\Phi(s,t), \qquad \Phi(t,t)=1, \tag{C2}$$

从而得到公式（5）。将存量变动除以 Φ，

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\delta k(s)}{\Phi(s,t)}\right] = \frac{\delta\dot{k} - h'\,\delta k}{\Phi} = -\frac{\delta x(s)}{\Phi(s,t)}. \tag{C3}$$

因此，平减存量 $\delta k/\Phi$ 除了在效用单位被兑现时之外，始终保持不变： Φ 将时间 s 的效用单位转换为时间 t 的效用单位。从 t 积分到 ∞，并令 $\delta k(t) = 0$ （已知 t 时的存量），且在长时间范围内令 $\delta k/\Phi \to 0$ （横截性条件），即可得到可行变分的预算约束，

$$\int_t^{\infty} \frac{\delta x(s)}{\Phi(s,t)}\, ds = 0. \tag{C4}$$

将任意可行变分写为 $\varepsilon(s) \equiv \delta x(s)/\Phi(s,\ t)$，并利用 $F'[x(s)]\,G(s,\ t)\ \delta x(s) = V(s,\ t)\ \varepsilon(s)$，其中 $V = F\prime\Phi\,G$，则价值的一阶变化为

$$\delta W = \int_t^{\infty} V(s,t)\,\varepsilon(s)\,ds, \qquad \int_t^{\infty} \varepsilon(s)\,ds = 0. \tag{C5}$$

引入拉格朗日乘子 λ_t 后，对每个 ε， $\delta W = \int_t^{\infty}[V(s,t)\ -\lambda_t]\,\varepsilon(s)\,ds$ 都必须为零，因此 $V(s,t) = \lambda_t$ 在 s 中为常数：这就是第二节B中用到的 V 的平坦性。每一种双脉冲变动都是特例 $\varepsilon(u) = \varepsilon\,[\delta(u-s)\ -\delta(u-t)],$，而每个可行的 ε 都是此类变动的叠加。

对于霍特林问题， $h=0$，因此 $\Phi = 1$ 且公式（C4）可写为 $\int \delta q\, ds = 0$：单位只是在时间上移动。对于线性存量动态， $h\ （k）\ = \bar{r}\,k$，约束恰好成立：$\int_t^{\infty} x\ （s）\ e^{-\bar{r}(s-t)}ds\ =\ k\ （t）$，这就是熟知的终身预算约束。

附录D：Ramsey–Cass–Koopmans模型的细节

奖励 $R(\tau,\ t)$是在时间 τ储蓄一个边际商品单位所带来的效用增益：该单位最终转化成的商品数量，乘以每件商品在消费时带来的效用。从最优路径（$c,\ k$）出发，在时间 t少消费ε，并将其加入资本，在时间 τ消费累积的额外资本。这样 k 就回到了原来的路径，因此该扰动是可行的。

因素1：商品按净边际产出增长。对 $k\ =\ f(k) - \delta_k k - c$ 进行线性化，并固定 c，得到$d\,\delta k/ds = [f'(k(s))\ - \delta_k]\,\delta k$，其中 $\delta k(t) = \varepsilon$（这里 δ_k 是折旧率， δk 是资本的扰动），因此

$$\delta k(\tau) = \varepsilon\,\exp\int_t^{\tau}\big[f'(k(s)) - \delta_k\big]\,ds = \varepsilon\,\Phi(\tau,t). \tag{D1}$$

因素 2：每单位商品的价值等于其边际效用。在 τ消费额外商品，会使效用按一阶近似增加 $u'[c(\tau)]\,\delta k(\tau)$。因此

$$R(\tau,t) = u'\big[c(\tau)\big]\,\exp\int_t^{\tau}\big[f'(k(s)) - \delta_k\big]\,ds, \qquad \gamma_R = \frac{\partial \ln R}{\partial \tau} = f' - \delta_k - \eta\,\frac{\dot{c}}{c}, \tag{D2}$$

使用 $c\,u''/u' = -\eta$。在 $\tau = t,\ \ R = u'[c(t)]$, 立即消费该单位商品的效用。 γ_R 的第一项是等待所带来的物理回报；第二项则是消费增加时因边际效用递减而产生的损失。

附录 E：繁殖价值与选择力

价值恒等式。写出

$$v(\tau) = \frac{e^{r\tau}\,I(\tau)}{l(\tau)}, \qquad I(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-ra}\,l(a)\,m(a)\,da.$$

由于 $d\ln[e^{r\tau}/l(\tau)]/d\tau = r+\mu$ 且 $I' = -e^{-r\tau}\,l(\tau)\,m(\tau)$，我们得到 $v' = (r+\mu)\,v - m$，即公式 (18)。等价地，$v(\tau) = \int_\tau^\infty m(a)\,G(a,\tau)\,da$ 其中

$$G(a,\tau) = \exp\Big[-\int_\tau^a \big(r+\mu(s)\big)\,ds\Big]:$$

繁殖价值是形如方程（4）的价值积分，其中回报流为 m，贴现率为 $r+\mu$。**对死亡率的敏感性**。变化量 $\mu \to \mu + \delta\mu$ 使存活率变化为 $\delta l(a) = -l(a)\int_0^a \delta\mu(s)\,ds$。由于欧拉–洛特卡方程仍必须成立，$0 = -T\,\delta r + \int_0^\infty e^{-ra}\,\delta l(a)\,m(a)\,da$。代入 δl 并交换积分次序，

$$\delta r = -\frac{1}{T}\int_0^\infty \delta\mu(s)\left[\int_s^\infty e^{-ra}\,l(a)\,m(a)\,da\right]ds = -\frac{1}{T}\int_0^\infty \delta\mu(s)\,e^{-rs}\,l(s)\,v(s)\,ds, \tag{E1}$$

方程（19）中的第一个方程。均匀缩减 $\delta\mu = -\varepsilon$后，得到 $\delta r = \varepsilon$，这是精确成立的，因为

$$\int_0^\infty e^{-rs}\,l(s)\,v(s)\,ds = T:$$

mo死亡率和人口增长仅通过它们的和（即贴现率 $r+\mu$）进入。
对繁殖力的敏感性。由于 m 在线性地进入欧拉–洛特卡方程，$0 = -T\,\delta r + \int_0^\infty e^{-ra}\,l(a)\,\delta m(a)\,da$，由此得到方程（19）中的第二个方程。
类人生命史。对于第 III F 节的示例，我们使用 Siler 死亡率曲线

[94] $\mu(a) = \alpha_1 e^{-\beta_1 a} +$, (), 其中 , , , , （每年），

$\mu_0 + \alpha\,e^{\beta a}$ $\alpha_1 = 0.15$ $\beta_1 = 1.2$ $\mu_0 = 0.005$ $\alpha = 3\times10^{-5}$ $\beta = 0.10$
以及生育力曲线$m(a) = m_0\exp[-\vartheta_1(a-a_m)^2 + \vartheta_2/(a+1)]$ [95], , 其中 $m_0 = 0.1748$、$\vartheta_1 = 0.015$、$a_m = 27$、$\vartheta_2 = -5$。数值求解欧拉–洛特卡方程得到 $r \approx 0.018$ 每年。密度 $e^{-ra}l(a)m(a)$在 $\tau_* \approx 26.4$ 年时达到峰值，此时$m'/m = r+\mu$，而 $m(a)$本身在 27.2 年时达到峰值。

存活改善的贴现率。对于在年龄 τ 时幅度固定的死亡率降低，$G(\tau) = e^{-r\tau}\,l(\tau)\,v(\tau) = I(\tau)$，因此

$$\gamma_G(\tau) = -\frac{d\ln I}{d\tau} = \frac{m(\tau)}{v(\tau)}, \tag{E2}$$

这也可由式（18）得出：$\gamma_G = (r+\mu) - v'/v = m/v$。

附录 F：强化学习基础

强化学习将个体与环境在离散步骤中的交互形式化，$j = 0, 1, 2, \ldots\ldots$，将其表示为马尔可夫决策过程 [7, 78]。在每一步中，个体观察一个状态 k_j，选择一个动作 x_j，获得奖励$F_j = F(x_j)$，而环境则转移到一个新状态 k_{j+1}。个体寻求能够最大化期望折扣回报的政策，

$$\mathcal{V}(k) = \max\,\mathbb{E}\left[\sum_{j\ge0}\gamma^j F_j \,\middle|\, k_0 = k\right], \tag{F1}$$

式（4）的离散版本，其中 $G(j) = \gamma^j$ 且 $\gamma_G = -\ln\gamma$。折扣因子 $\gamma \in (0,\,1)$ 通常被解释为每一步交互继续进行的概率，因此 $1-\gamma$ 是终止风险，如生活史理论中所述 [7]。最优解满足贝尔曼方程 [78]，

$$\mathcal{V}(k_j) = \max_{x_j}\Big\{F(x_j) + \gamma\,\mathbb{E}\,\mathcal{V}(k_{j+1})\Big\}. \tag{F2}$$

从贝尔曼方程到路径条件。让未兑现的存量以确定性的方式增长，$k_{j+1} = h(k_j - x_j)$。一阶条件为 $F'(x_j) = \gamma\,h'(k_j - x_j)\,\mathcal{V}'(k_{j+1})$，包络定理给出 $\mathcal{V}'(k_j) = F'(x_j)$。向前移动一步并代入，

$$F'(x_j) = \gamma\,h'(k_j - x_j)\,F'(x_{j+1}) \quad\Longleftrightarrow\quad \underbrace{\ln h'(k_j - x_j) + \ln\frac{F'(x_{j+1})}{F'(x_j)}}_{\gamma_R} = \underbrace{-\ln\gamma}_{\gamma_G}, \tag{F3}$$

第IIB 节中相邻步骤之间的双脉冲条件。

一个最短路径问题。 取 $F(x) = \ln x$ 和 $h(z) = A\,z$。上述条件给出 $x_{j+1}/x_j = \gamma A$，而贝尔曼方程与 $\mathcal{V}(k) = \text{const} + \ln k/(1-\gamma)$给出最优策略 $x_j = (1-\gamma)\,k_j$, $k_{j+1} = \gamma A\,k_j$。当 $\gamma A > 1$ 时，消费增加；当 $\gamma A < 1$时，消费减少。在线性奖励下，$F(x) = x$，问题变为一个点问题：若 $\gamma A < 1$，则现在立即消费全部；若 $\gamma A > 1$，则永不消费。

探索与利用。 在老虎机问题中，状态是个体对每个臂的信念。臂的价值由其吉廷斯指数概括；对于独立臂，最优策略是选择指数最高的臂 [61, 62]。探索是一种投资：眼前的预期损失换取信息，而信息的回报则是未来一系列更好的选择。

附录 G：符号说明

符号	含义	符号	含义
通用框架			
t	参考（决策）时间	$\tau,\ \tau_*$	收集时间；最优等待时间
$R(\tau,\ t)$	在 τ 收集的一个单位的奖励	$G(\tau,\ t)$	贴现函数，$G(t,\ t) = 1$
$V = R\,G$	主观（贴现后）价值	$W(t)$	奖励流的价值积分
$\gamma_R,\ \gamma_G$	奖励增长率；贴现率	$F[x]$	回报流
x	每单位时间的兑现额	$k,\ h\,(k)$	存量；其增长函数，$\dot{k} = h\,(k)\ - x$
$\Phi(\tau,\ t)$	从 t扣留一个效用单位所得的效用单位 τ	$\varepsilon,\ \delta x,\ \delta W$	扰动的大小；变分
点问题			
$L,\ \gamma_L$	损失幅度；其增长率	$\lambda,\ \kappa$	损失加速度；恐惧强度
$y,\ \bar{y}$	资源；生存水平	$g,\ \sigma,\ B$	漂移；波动性；布朗运动
η	相对风险厌恶 / 曲率	$g_0,\ \tau_0$	初始漂移；其衰减时间
$\bar{\gamma}_G,\ n$	伽马分布的均值和形状	CE	确定性等价物
$R_{\max},\ \tau_w,\ \omega$	速率 工资平台期、拐点年龄、速率	$\mu_0,\ \alpha,\ \beta$	Gompertz–Makeham参数
生活史理论			
a	年龄（积分变量）	r	种群增长率（适合度）
$l\,(a)\ ,\ \mu\,(a)$	存活函数；死亡风险	$m(a)$	年龄特异性繁殖力
$v(\tau)$	费希尔繁殖价值	T	世代时间
τ_M	成熟年龄	$\mu_J,\ \mu_A$	幼体、成体死亡率
$w,\ P\,(w)$	体重；净能量产出	$\phi(c)$	繁殖分配产生的繁殖力 c
$a_0,\ b_0$	个体发育生长参数	$\alpha_1,\ \beta_1$	Siler幼年死亡率项
$m_0,\ \vartheta_1,\ _2,\ a_m$	繁殖力曲线参数		
经济学与强化学习			
$c,\ u\,(c)\ ,\ \bar{c}$	消费；效用；生存	$f\,(k)\ ,\ \delta_k$	产出；折旧率
g_c	消费增长率	$S、\ q、\ p、\ c_e$	资源存量、开采、价格、成本
$a,\ b$	线性需求参数	$\gamma、\ F_j$	逐步贴现因子；第 j 步的奖励
$F_s,\ \psi,\ \nu$	安全收益；先验；吉廷斯指数	$\mathcal{V},\ A$	强化学习价值函数；总回报
$\Delta,\ D$	探索成本；信息红利		

表四。全文使用的符号说明。

[1] W. Mischel、Y. Shoda 和 M. L. Rodriguez，儿童延迟满足，《科学》**244**，933（1989）。[2] B. Y. Hayden，动物的时间折扣与时间偏好：一篇批判性综述，Psychonomic Bulletin & Review **23**，39（2016）。[3] D. W. Stephens、B. Kerr 和 E. Fernández-Juricic，无需贴现的冲动性：生态理性假说，《英国皇家学会学报B辑》**271**，2459（2004）。[4] E. C. Lawrance，贫困与时间偏好率：来自面板数据的证据，《政治经济学杂志》**99**，54（1991）。

[5] S. Reimers, E. A. Maylor, N. Stewart, and N. Chater, 一次性延迟折扣测量与年龄、收入、教育及现实世界冲动行为之间的关联，《人格与个体差异》47, 973 (2009). [6] J. Haushofer and E. Fehr, 论贫困心理学，《科学》344, 862 (2014). [7] R. S. Sutton and A. G. Barto,《强化学习：导论》，第2版（麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州，2018）。[8] V. Jiang et al., 重新思考折扣正则化：新解读与新方案，《机器学习研究杂志》25, 1 (2024). [9] L. Chen, K. Lu, A. Rajeswaran, K. Lee, A. Grover, M. Laskin, P. Abbeel, A. Srinivas, and I. Mordatch, 决策变换器：通过序列建模进行强化学习，《神经信息处理系统进展》34, 15084 (2021). [10] P. A. Samuelson, 关于效用测量的注记，《经济学研究评论》4, 155 (1937). [11] I. Fisher,《利息理论》（麦克米伦，纽约，1930）。[12] S. Frederick, G. Loewenstein, and T. O'Donoghue, 时间折扣与时间偏好：批判性综述，《经济文献杂志》40, 351 (2002). [13] R. Thaler, 关于动态不一致性的一些经验证据，《经济学通讯》8, 201 (1981). [14] G. Loewenstein and D. Prelec, 跨期选择中的异常现象：证据及其解释，《经济学季刊》107, 573 (1992). [15] R. H. Strotz, 动态效用最大化中的短视与不一致性，《经济学研究评论》23, 165 (1955). [16] D. Laibson, 金蛋与双曲线折扣，《经济学季刊》112, 443 (1997). [17] D. Laibson, 金蛋与双曲线折扣，《经济学季刊》112, 443 (1997). [18] S. Frederick, G. Loewenstein, and T. O' Donoghue, 时间折扣与时间偏好：批判性综述，《经济文献杂志》40, 351 (2002). [19] G. Ainslie, 虚幻奖励：冲动性与冲动控制的行为理论，《心理学公报》82, 463 (1975). [20] J. E. Mazur, 一种研究延迟强化的调整程序，载于《行为的定量分析》第5卷：《延迟与中间事件对强化价值的影响》，M. L. Commons, J. E. Mazur, J. A. Nevin, and H. Rachlin 编（Erlbaum，希尔斯代尔，新泽西州，1987），第55–73页。[21] H. Rachlin, 关于贴现的札记，《行为实验分析杂志》85, 425 (2006). [22] A. L. Odum, R. J. Becker, J. M. Haynes, A. Galizio, C. C. J. Frye, H. Downey, J. E. Friedel, and D. M. Perez, 不同结果的延迟折扣：综述与理论，《行为实验分析杂志》113, 657 (2020). [23] J. Lu, J. Yao, Z. Zhou, and X. T. Wang, 延迟折扣的生命周期年龄效应：用于理论比较与模型开发的元分析方法，《心理学公报》149, 447 (2023). [24] G. W. Story, M. Moutoussis, and R. J. Dolan, 精神障碍中异常延迟折扣的计算分析，《心理学前沿》6, 1948 (2016). [25] W. K. Bickel and L. A. Marsch, 迈向对药物依赖的行为经济学理解：延迟折扣过程，《成瘾》96, 73 (2001). [26] R. A. Fisher,《自然选择的遗传学理论》（克拉伦登出版社，牛津，1930）。[27] W. D. Hamilton, 自然选择对衰老的塑造，《理论生物学杂志》12, 12 (1966). [28] A. R. Rogers, 自然选择下时间偏好的演化，《美国经济评论》84, 460 (1994). [29] I. Hansson and C. Stuart, 偏好的马尔萨斯式选择，《美国经济评论》80, 529 (1990). [30] A. R. Rogers, 时间维度上的进化与人类选择，载于《刻画人类心理适应》（西巴基金会专题讨论会208），G. R. Bock and G. Cardew 编（Wiley，奇切斯特，1997），第231–252页。[31] P. D. Sozou and R. M. Seymour, 增强折扣：老化与时间偏好行为之间的交互，《英国皇家学会学报B辑》270, 1047 (2003). [32] C. Y. C. Chu, H.-K. Chien, and R. D. Lee, 时间偏好的演化理论与代际转移，《经济行为与组织杂志》76, 451 (2010). [33] J. Kageyama, 消费的跨期配置、时间偏好与生活史策略，《生物经济学杂志》13, 79 (2011). [34] A. Kacelnik, 决策的规范性与描述性模型：时间折扣与风险敏感性，载于《刻画人类心理适应》（西巴基金会专题讨论会208），G. R. Bock and G. Cardew 编（Wiley，奇切斯特，1997），第51–70页。[35] S. E. Henly, A. Ostdiek, E. Blackwell, S. Knutie, A. S. Dunlap, and D. W. Stephens, 中断折扣假说：模型与实验，《行为生态学》19, 154 (2008). [36] J. R. Stevens and D. W. Stephens, 冲动性的适应性本质，载于《冲动性：折扣的行为科学与神经科学》，G. J. Madden and W. K. Bickel 编（美国心理学会，华盛顿特区，2010），第361–387页。[37] W. Fedus, C. Gelada, Y. Bengio, M. G. Bellemare, and H. Larochelle, 多重时间范围上的双曲线折扣与学习，arXiv:1902.06865 (2019). [38] J. Cohen, K. M. Ericson, D. Laibson, and J. M. White, 时间偏好测量，《经济文献杂志》58, 299 2020( ). [39] S. A. Lipman and A. E. Attema, 折扣率测量独特方法的系统综述，《风险与不确定性杂志》69, 145 (2024). [40] O. Urminsky and G. Zauberman, 跨期偏好的心理学，载于《威利-布莱克威尔判断与决策手册》，G. Keren and G. Wu 编（Wiley，奇切斯特，2015），第141–181页。[41] H. Mell, N. Baumard, and J.-B. André, 时间就是金钱。等待成本解释了为何自然选择偏好匮乏环境中更陡峭的时间折扣，《进化与人类行为》42, 379 (2021).

[42] T. W. Fawcett、J. M. McNamara 和 A. I. Houston，何时保持耐心具有适应性？评估延迟奖励的一般框架，《行为过程》89，128（2012）。[43] M. Obstfeld，跨期依赖、不耐心与动态，《货币经济学杂志》26，45（1990）。[44] H. Hayakawa 和 S. Ishizawa，消费者行为连续时间建模中的跨期优化基础，《日本经济评论》48，1（1997）。[45] G. S. Becker 和 C. B. Mulligan，时间偏好的内生决定，《经济学季刊》112，729（1997）。[46] P. A. Trostel 和 G. A. Taylor，时间偏好理论，《经济探究》39，379（2001）。[47] P. D. Sozou，论双曲线折扣与不确定的风险率，《英国皇家学会学报B辑》265，2015（1998）。[48] A. J. Robson 和 L. Samuelson，总体不确定性下时间偏好的演化，《美国经济评论》99，1925（2009）。[49] B. de Courson、W. E. Frankenhuis 和 D. Nettle，为什么贫困会增加时间折扣？一个数学模型（2023），预印本。[50] C. Kidd、H. Palmeri 和 R. N. Aslin，理性零食选择：幼儿在棉花糖任务中的决策受到其对环境可靠性的信念调节，《认知》126，109（2013）。[51] M. Daly 和 M. Wilson，及时行乐：适应与未来贬值，《生物学季刊评论》80，55（2005）。[52] G. Loewenstein，延迟消费的预期与估值，《经济学杂志》97，666（1987）。[53] G. S. Berns、J. Chappelow、M. Cekic、C. F. Zink、G. Pagnoni 和 M. E. Martin-Skurski，恐惧的神经生物学基础，《科学》312，754（2006）。[54] R. C. Merton，不确定性下的终身投资组合选择：连续时间情形，《经济学与统计学评论》51，247（1969）。[55] J. W. Pratt，小规模与大规模风险厌恶，《计量经济学》32，122（1964）。[56] C. Gollier，对不确定的未来进行贴现，《公共经济学杂志》85，149（2002）。[57] R. Stone，线性支出系统与需求分析：英国需求模式的应用，《经济学杂志》64，511（1954）。[58] R. C. Geary，关于“生活成本的常效用指数”的注释，《经济学研究评论》18，65（1950）。[59] M. L. Weitzman，伽马贴现，《美国经济评论》91，260（2001）。[60] P. Dasgupta 和 E. Maskin，不确定性与双曲线折扣，《美国经济评论》95，1290（2005）。[61] J. C. Gittins 和 D. M. Jones，序贯实验设计的动态分配指数，载于《统计学进展》，J. Gani、K. Sarkadi 和 I. Vincze 编（North-Holland，阿姆斯特丹，1974），第241—266页。[62] J. C. Gittins，多臂老虎机过程与动态分配指数，《英国皇家统计学会志B辑》41，148（1979）。[63] N. D. Daw、J. P. O’Doherty、P. Dayan、B. Seymour 和 R. J. Dolan，人类探索性决策的皮层基础，《自然》441，876（2006）。[64] B. Gompertz，论表达人类死亡率规律的函数的性质，以及确定生命或有事项价值的新方法，《伦敦皇家学会哲学汇刊》115，513（1825）。[65] W. M. Makeham，论死亡率规律与年金表的编制，《保险杂志与精算师协会会刊》8，301（1860）。[66] S. H. Preston，死亡率与经济发展水平之间关系的变化，《人口研究》29，231（1975）。[67] S. J. Olshansky、T. Antonucci、L. Berkman、R. H. Binstock、A. Boersch-Supan、J. T. Cacioppo、B. A. Carnes、L. L. Carstensen、L. P. Fried、D. P. Goldman 等，种族与教育差异导致的预期寿命差距正在扩大，许多人可能无法赶上，《卫生事务》31，1803（2012）。[68] R. Chetty、M. Stepner、S. Abraham、S. Lin、B. Scuderi、N. Turner、A. Bergeron 和 D. Cutler，美国收入与预期寿命之间的关联，2001—2014年，《美国医学会杂志》315，1750（2016）。[69] S. C. Stearns，《生活史的进化》（牛津大学出版社，牛津，1992）。[70] D. A. Roff，《生活史进化》（Sinauer出版社，桑德兰，马萨诸塞州，2002）。[71] B. Charlesworth，《年龄结构种群中的进化》，第2版（剑桥大学出版社，剑桥，1994）。[72] H. Caswell，《矩阵种群模型：构建、分析与解释》，第2版（Sinauer出版社，桑德兰，马萨诸塞州，2001）。[73] H. M. Taylor、R. S. Gourley、C. E. Lawrence 和 R. S. Kaplan，生活史特征的自然选择：解析方法，《理论种群生物学》5，104（1974）。[74] W. M. Schaffer，选择最优生活史：年龄结构的影响，《生态学》55，291（1974）。[75] E. R. Pianka，论r选择与K选择，《美国博物学家》104，592（1970）。[76] E. L. Charnov，《生活史不变量》（牛津大学出版社，牛津，1993）。[77] M. I. Kamien 和 N. L. Schwartz，《动态优化：经济学与管理学中的变分法和最优控制》，第2版（North-Holland，阿姆斯特丹，1991）。[78] R. Bellman，《动态规划》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1957）。[79] J. Kozłowski，资源向生长与繁殖的最优配置：对成熟年龄与体型的影响，《生态学与进化趋势》7，15（1992）。[80] N. Perrin 和 R. M. Sibly，能量分配与投资的动态模型，《生态学与系统学年度评论》24，379（1993）。[81] G. B. West、J. H. Brown 和 B. J. Enquist，个体发育生长的一般模型，《自然》413，628（2001）。[82] F. P. Ramsey，储蓄的数学理论，《经济学杂志》38，543（1928）。[83] H. Hotelling，可耗竭资源的经济学，《政治经济学杂志》39，137（1931）。

[84] D. Cass，聚合资本积累模型中的最优增长，《经济学研究评论》32，233（1965）。[85] T. C. Koopmans，论最优经济增长的概念，载于《发展规划的计量经济学方法》（North-Holland，阿姆斯特丹，1965），第225—287页。[86] G. Heal，贴现：基础经济学评述，《芝加哥大学法律评论》74，59（2007）。[87] G. V. Pepper 和 D. Nettle，匮乏的行为特征群：原因与后果，《行为与脑科学》40，e314（2017）。[88] M. E. Yaari，不确定寿命、人寿保险与消费者理论，《经济学研究评论》32，137（1965）。[89] S. Acharya 和 R. J. Balvers，内生生存条件下的时间偏好与生命周期消费，《经济探究》42，667 2004（）。[90] H. Hayakawa，时间偏好、跨期优化与永久收入—生命周期假说，《生长》6，1 2019（）。[91] Z. Kurth-Nelson 和 A. D. Redish，具有分布式表征的时序差分强化学习，PLoS ONE 4，e7362（2009）。[92] N. Stern，《气候变化经济学：斯特恩评论》（剑桥大学出版社，剑桥，2007）。[93] W. D. Nordhaus，关于气候变化经济学《斯特恩评论》的评述，《经济文献杂志》45，686 2007（）。[94] W. Siler，动物死亡率的竞争风险模型，《生态学》60，750（1979）。[95] F. Colchero，生态学与进化中的年龄别生育率推断：向其他学科学习并改进现状，《生物统计学》81，ujaf081（2025）。