arXiv:2611.32766v1 [cond-mat.stat-mech] 24 Nov 2026

多物种长程交换过程中的排序信息

Eunghyun Lee纳扎尔巴耶夫大学计算与人工智能学院，哈萨克斯坦阿斯塔纳。通讯请联系： eunghyun.lee@nu.edu.kz

摘要

我们测量整数格点上相互作用粒子的从左到右物种顺序 W_t 在多大程度上揭示其初始构型。对于不同物种，在长程交换下，删除较强粒子后得到的坐标具有独立泊松增量。对于有限支撑初始分布，初始构型的任意函数 U 与 W_t 之间的互信息为 $C_U/t + O(t^{-3/2})$，当 $t \to \infty$时，其中 C_U可能为零，其取值由高斯次序统计量的均值以及给定 U时初始压缩坐标的条件均值决定。对于连续位置上的均匀初始顺序，我们计算了任意物种计数下短时信息损失中 $t\log(1/t)$项的系数。在此情形下，对于三个粒子，长时间 t^{-1} 系数在重复较弱物种而非较强物种时会增至三倍，尽管两种组成具有相同的组成熵和初始顺序熵。无论相同粒子是相互阻挡还是相互推移，这些长时间系数都相同，但非均匀极限输出分布则恰好相反。在普通的多组分完全非对称简单排斥过程（TASEP）中，固定位置上的两个不同粒子若初始顺序均匀，则反而呈现 $t^{-1/2}$ 衰减。

关键词： 相互作用粒子系统；互信息；多物种 TASEP；泊松过程；次序统计量；物种组成；信息衰减。

1 引言

有限粒子构型的物种词按从左到右的顺序列出物种标签。它记录了物种的相对次序，而省略了粒子位置以及相邻粒子之间的间隙。令 W_t 表示时刻 t的该物种词。随着时间推移， W_t 保留了多少关于 W_0的信息？当物种标签重复时，信息损失速率如何取决于各物种的粒子数？我们将物种从 1（弱）到 q （强）编号。若 n_i 表示物种 i的粒子数，则有序向量（n_1、.....、 n_q）就是组成，而$n = \sum_{i=1}^{q} n_i$ 是粒子总数。

我们考虑每个粒子按照独立的单位速率泊松时钟。时钟环事件发生时，该粒子依次扫描其右侧的位置。扫描会跳过更强的粒子。按照 TASEP 型规则，遇到同一物种的粒子时，扫描停止，构型保持不变。按照

落推型规则，扫描会继续越过同一物种的粒子。在这两种规则下，如果扫描到空位，活动粒子就移动到该处；如果扫描到较弱的粒子，则两个粒子交换位置。只有一个物种时，这两种规则分别对应完全非对称简单排斥过程（TASEP）和下落–推动过程。当所有粒子都具有不同的物种标签时，这两种长程交换规则相同。

初始构型指定了占据位点及每个位点上的物种标签。对于固定的组成，我们从给定分布中抽取初始构型，且该抽取独立于时钟。该分布和所选规则决定了 W_0 与 W_t的联合分布。它们的互信息 [3]为

$$I(W_0; W_t) = H(W_0) - H(W_0 \mid W_t),$$

其中 $H(W_0)$ 是初始字的香农熵， $H(W_0 \mid W_t)$ 是给定时刻 t 的字时初始字的条件熵。因此，$I(W_0; W_t)$ 表示观察到 W_t 后，对初始字不确定性的平均减少量。在 $t = 0$ 时，它等于 $H(W_0)$。对于每个 $t \geq 0$，当且仅当 W_0 和 W_t 独立时，其值为零。我们使用自然对数，并以纳特为信息单位。更一般地，我们研究由初始构型确定的任意随机变量 U 的 $I(U; W_t)$。具体而言， U 可以是初始字，也可以是初始构型本身。

1.1 主要结果

定理 4.1 给出了不同物种在长时间情形下、对任意初始输入的信息。定理 6.4 讨论了含有重复物种的前两种组成，而定理 6.2 给出了每种组成的短时间展开。

不同物种的长时间情形。 假设每种物种都只出现一次，因此 $q = n$ 且两种规则一致。我们为每个粒子指定一个压缩坐标，即其位置减去左侧较强粒子的数量。从构型到压缩坐标向量的映射是一个双射，映射到 $\mathbb{Z}^n$ （定理 3.1）。当时钟响起时，响铃粒子的坐标增加一，其余坐标保持不变（定理 3.1）。因此，压缩坐标具有独立的泊松增量。所得的乘积转移核（推论 3.3）也可由 [1, 定理 314]中的贝特 ansatz 公式推出。将初始坐标不同的泊松分布之间的似然比在大 t处展开后，我们证明，对于每个具有有限支撑的初始分布 λ ，以及初始构型的每个函数 U ，

$$I(U; W_t) = \frac{C_U}{t} + O_{n,\lambda}(t^{-3/2}) \qquad (t \to \infty).$$

常数为 $C_U = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(J\Sigma_U)$ ≥ 0。这里， Σ_U是给定 U时初始压缩坐标的条件均值 m_U 的协方差矩阵。矩阵 J 是高斯排序实验在均值相等时的费希尔信息：观测 n 个独立的单位方差高斯变量的排序，并估计它们的均值。对所有坐标施加相同的平移不会改变字，也不会对 C_U 有贡献。

对于共 连续的初始位置和一个均匀初始词，取 $U = W_0$。该常数是 n

$$C_n = \frac{(n-1)(2n+5)}{144} \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}G_{(k)})^2, \tag{1}$$

其中 $G_{(1)} < \cdots < G_{(n)}$ 是 n 个独立标准正态变量的次序统计量。特别地，$C_2 = 1/(8\pi)$ 和 $C_3 = 11/(16\pi)$。在相同设定下，时间 t 的完整构型中的信息也按 t^{-1}衰减，而该字渐近地保留其中的$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}G_{(k)})^2$。对于 $n = 2$，该比例等于 $1/\pi$；它关于 n非递减，并且当 $n \to \infty$ 时趋于 1。

衰减指数取决于交换规则。在普通多物种 TASEP 中，粒子只会与其右侧紧邻的较弱粒子或空位交换。对于固定在位置上的两个粒子，若两个初始词都有正概率，$I(W_0; W_t)$ 则以 $t^{-1/2}$(第5节）。在两个模型中，W_t 在两个初始词下的分布之间的全变差距离以 $t^{-1/2}$的速度衰减。在这两个粒子的比较中，长程交换下 W_t 的极限分布是均匀分布，信息与该距离的平方成正比。在普通 TASEP 中，极限分布集中于一个词，信息与该距离成正比。

含有重复物种的三个粒子的长时间行为。组成 (2，1) 和 (1，2) 各有三个词，且具有相同的组成熵

$$H_{\mathrm{comp}} = -\sum_i (n_i/n)\log(n_i/n),$$

均匀随机选取的粒子的物种标签的熵。假设粒子最初占据位置 0，1，2，并且 W_0 在所选组成的三个词上均匀分布。则 $H(W_0) =$ 在两种情况下均为 log 3。对于每种组成，两条规则给出的 $tI(W_0; W_t)$ 的极限在 $t \to \infty$时相同。当较弱物种出现两次时，该极限是较强物种出现两次时的三倍（定理6.4）。词的极限分布并非均匀分布。对于任一种组成，落推型规则下某个词的极限概率等于 TASEP 型规则下其反转词的极限概率。

任意组分的短时间。固定 n个连续初始位置，并从组成为 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_q)$ 的词中均匀分布地选取 W_0。初始词的熵为 $H(W_0) = S_{\mathrm{ord}}(\boldsymbol{n})$，其中 $S_{\mathrm{ord}}(\boldsymbol{n}) := \log(n!/\prod_{i=1}^{q} n_i!)$。当所有物种遵循相同的规则时，记 $I^{\alpha}_{\boldsymbol{n}}(t) = I(W_0; W_t)$，其中 $\alpha = 0$ 对应 TASEP 型规则，$\alpha = 1$ 对应落推型规则。由于 $t \downarrow 0$,

$$I^{\alpha}_{\boldsymbol{n}}(t) = S_{\mathrm{ord}}(\boldsymbol{n}) - r_{\alpha}(\boldsymbol{n})\, t\log(1/t) + O_{\boldsymbol{n}}(t).$$

系数 $r_\alpha(\boldsymbol{n})$ 等于 n 乘以首次时钟响铃改变物种词的概率（定理 6.2）。

将某个物种拆分为两个相邻的正重数，即将 $a + b$ 中的 $\boldsymbol{n}$ 一项替换为两个相邻的正项 a，b 会严格增大 H_{comp}，S_{ord} 以及 r_α。对 $\boldsymbol{n}$ 中的各项进行置换，不会改变两种熵和落推型系数 r_1。TASEP 型系数 r_0 则可能随置换而变化，并在重数从弱到强非递减时达到最大，也就是说，当 $n_1 \le \cdots \le n_q$（推论 6.3）。

1.2 与现有研究的关系

多物种长程交换模型在 [1] 中被提出。对于落推型规则，该论文确立了 Bethe ansatz 可积性，并给出了有限时间转移概率矩阵的多重围道积分表示（定理 3.14）。后续扩展 [2] 为每个物种

在该物种的两个粒子相遇时，为每个物种分别指定一个参数，用于在 TASEP 型规则与落推型规则之间进行插值。对于单一物种，在 [4] 中求解了该模型与 TASEP 之间的单参数族。关于排斥过程的背景知识，参见 Liggett [5, 第八章]。Tracy 和 Widom [6] 研究了最近邻多物种 ASEP，而 Lee [7] 研究了具有依物种而定的跳跃率的多物种 TASEP。相关模型包括定向交换过程 [8] 以及 TASEP 速度过程 [9]。对于定向交换过程，Bufetov、Gorin 和 Romik [10, 定理 1.2] 证明了经中心化和缩放后的吸收时间收敛于 GOE Tracy–Widom 分布。

其他多物种模型同样可以约化为更少的物种。对于多物种 t- PushTASEP（有限环上），Ayyer、Martin 和 Williams [11, 第2节。1] 表明，将优先级顺序中相邻的物种合并会得到另一个 t-PushTASEP（同一环上）。我们的约化属于另一种类型。在 $\mathbb{Z}$上的长程交换模型中，我们从每个粒子的位置减去其左侧更强粒子的数目。在给定初始构型的条件下，所得坐标按独立的单物种过程演化，每个物种各对应一个（命题 6.1）。

另有两项工作在其他设定中处理相关的信息量。Wood、Blythe 和 Evans [12]计算了开边界 TASEP 平稳构型分布的二阶 Rényi 熵。Jeong、Dytso 和 Cardone [13]研究了从受加性高斯噪声干扰的观测中恢复数据向量顺序时的误差概率。本文则转而度量初始输入与稍后时刻物种顺序之间的互信息。

交错洗牌提供了一个信息论先例。文献 [14, 15]通过熵来衡量一副牌的随机化程度。从固定的 n 张牌的排列开始， [15] 研究经过 k 次洗牌后牌序相对于均匀分布的相对熵；对于由这 k 次洗牌产生的置换 Σ_k ，该熵等于 $\log(n!) - H(\Sigma_k)$。如果初始牌序改为均匀分布且与 Σ_k独立，则无论 k为何，洗牌后的牌序都服从均匀分布，并且同一量就是初始牌序与洗牌后牌序之间的互信息。这些研究考察洗牌次数和牌组大小变化时的熵，而我们的长时间极限是在固定粒子数 n下取得的。

弱信号下信息的二次展开是经典结果 [16, 17]。式$\mathbb{E}G_{(k)}$ （1）中的常数是正态得分秩检验中所使用的期望正态顺序统计量 [18–20]。在定理4.1 中，模型特定的步骤包括坐标表示、从泊松坐标返回离散词，以及系数的计算。在定理6.4 中，单物种过程的经典双粒子转移律 [4, 21] 给出了重复对的边缘分布。新的计算确定了哪些初始位移在投影到物种词后仍然存在，并计算了它们的信息系数。在短时间内（定理6.2），新结果给出了损失系数对组成以及重数排列位置的精确依赖关系。

1.3 论文结构

第2 节定义粒子动力学和排序通道。对于不同物种，第 3节引入具有独立泊松增量的压缩坐标，第4 节利用这些坐标推导 $I(U;\ W_t)$ 的长时间渐近行为。第 5 节比较长程交换与普通多物种 TASEP 中精确的双粒子排序通道，并

确定每个模型中的信息衰减速率。第 6 节研究任意物种组成下的短时信息损失，以及三粒子组成 (2、1) 和 (1、2) 下的长时间信息衰减。第 7 节以讨论和未来问题作结。

所有定理均在正文中证明。补充材料 S1 提供了用于复现数值结果的程序，包括绘制图2 和 3 中所示数据的程序。如致谢中所述，使用了生成式人工智能工具来核验证明、开发验证程序以及生成图和表格。

2 粒子模型与排序信道

考虑 $n \geq 2$ 个粒子位于 $\mathbb{Z}$上，每个格点至多有一个粒子。我们将物种从 1（最弱）到 q（最强）编号。一个构型是映射 $\eta\colon\ \mathbb{Z} \to \{0、1、\ldots\ldots、q\}$，且恰有 n个非零项。在占据位点 x处，标签 $\eta(x)$给出位于 x的粒子所属的物种。空置格点的标签为 0。多个粒子可以属于同一物种。

定义2.1（长程交换动力学）。 每个粒子都有一个独立的单位速率泊松时钟。当位于 x 处、物种为 i 的粒子的时钟响起时，其目标位置由响铃之前的瞬时构型确定。

- *TASEP* 型规则。 目标位置是第一个满足 $y > x$ 且具有 $\eta(y) \leq i$ 的位置。
- 落推型规则。 目标位置是第一个满足 $y > x$ 且具有 $\eta(y) < i$ 的位置。

x 和 y 处的标签随后交换。因此，如果 y 为空置，活跃粒子就跳跃到 y；如果该粒子较弱，则与 y 处的粒子交换位置。在 TASEP 型规则下，同一物种的目标会使构型保持不变。在所有情况下，除 x 和 y 处以外的位置上的标签均保持其原值。

由于只有有限多个位置被占据，因此在 x的右侧总能找到一个空位，所以在任一规则下目标位置都存在。时钟总速率为 n，其中包括使构型保持不变的环事件。从这里直到第 5节，假设每个物种恰好出现一次，因此 $q = n$。于是，定义 2.1 中的两条规则在每次时钟环事件时都给出相同的更新。第 6 节将回到重复物种的情形。

令 r_i 表示物种 i的位置。于是，一个构型表示为

$$r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathcal{X}_n := \{r \in \mathbb{Z}^n : r_i \neq r_j \text{ whenever } i \neq j\}.$$

令 S_n 表示集合 $\{1,\ldots,n\}$的置换，并用单行记法表示。物种词$W(r)$是满足以下条件的唯一置换 $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$：

$$r_{\pi_1} < \cdots < r_{\pi_n}.$$

因此， $W_t = W(r(t))$ 列出了时刻 t从左到右的物种。图 1 展示了连续发生的两次移动。

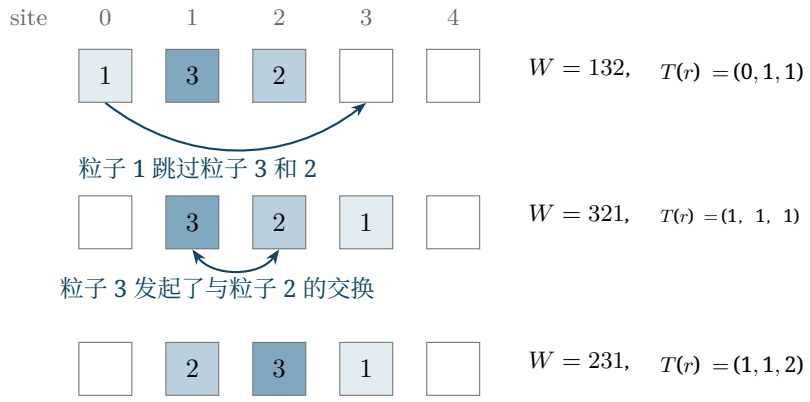


图 1： 对于 $n = 3$，长程交换动力学的连续两次移动。第一次移动跨越三个位置，第二次交换两个粒子。在每个环事件中，活动物种 $T_i(r) = r_i - \#\{j > i : \ r_j < r_i\}$ 的压缩坐标增加 1，所有其他压缩坐标保持不变（定理 3.1）。

固定的初始位置。固定位置 $y_1 < \cdots < y_n$ 于 $\mathbb{Z}$，并记 $Y = (y_1, \ldots, y_n)$。从先验分布 $\rho = (\rho_\nu)_{\nu \in S_n}$中抽取初始字 W_0，且该抽取独立于时钟。对每个 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in S_n$，令 $\mathbb{P}_{Y,\nu}$ 表示以物种 ν_k 位于格点 y_k 为初始状态、运行时长为 $1 \le k \le n$的过程的分布。排序通道 K_t 及其输出分布 μ_t 定义如下：

$$K_t(\nu, \pi) = \mathbb{P}_{Y,\nu}(W_t = \pi), \qquad \mu_t(\pi) = \mathbb{P}(W_t = \pi) = \sum_{\nu \in S_n} \rho_\nu K_t(\nu, \pi). \tag{2}$$

起始配置为每个 ν（包括满足 $\rho_\nu = 0$ 的那些）指定行 $K_t(\nu, \cdot)$。当 $\rho_\nu > 0$ 时，该行是给定 $W_0 = \nu$ 时 W_t 的条件分布。因此，引言中定义的互信息可以写成

$$I(W_0; W_t) = H(W_t) - H(W_t \mid W_0) = H(\mu_t) - \sum_{\nu \in S_n} \rho_\nu H\big(K_t(\nu, \cdot)\big).$$

我们采用约定 $0 \log 0 = 0$。

初始分布。 更一般地，设初始构型 $r(0)$ 在 $\mathcal{X}_n$ 上服从分布 λ，且与时钟独立，并将 $U = f(r(0))$ 作为信道输入。记作 $\omega_u = \mathbb{P}(U = u)$。对于每个满足 $\omega_u > 0$ 的 u，定义

$$K_t(u, \pi) = \mathbb{P}(W_t = \pi \mid U = u), \qquad \pi \in S_n.$$

此行对满足 $f(r) = u$ 的构型 r 的输出分布取平均，权重为$\mathbb{P}(r(0) = r \mid U = u)$。输出分布为

$$\mu_t(\pi) = \sum_{u:\, \omega_u > 0} \omega_u K_t(u, \pi).$$

对于固定的初始位置 Y 和 $U = W_0$，对于每个满足 $\rho_\nu > 0$的 ν，条件行与（2）中的相同，且两个公式给出相同的输出分布。取 $U = r(0)$ 可测量 W_t 保留了多少关于完整初始构型的信息。

对于定义在同一可数字母表 $\mathcal{A}$ 上的概率分布 P 和 Q，相对熵和全变差距离为

$$D(\mathsf{P} \| \mathsf{Q}) := \sum_{\substack{x \in \mathcal{A} \\ \mathsf{P}(x) > 0}} \mathsf{P}(x) \log \frac{\mathsf{P}(x)}{\mathsf{Q}(x)}, \qquad \|\mathsf{P} - \mathsf{Q}\|_{\mathrm{TV}} := \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{A}} |\mathsf{P}(x) - \mathsf{Q}(x)|.$$

当存在某个 x，使得 $\mathsf{P}(x) > 0$ 且 $\mathsf{Q}(x) = 0$ 时，相对熵为 $+\infty$。采用此记号，　　，

$$\begin{aligned} I(U; W_t) &= \sum_{u:\, \omega_u > 0} \omega_u D\big(K_t(u,\cdot) \,\|\, \mu_t\big) \\ &= \sum_{u:\, \omega_u > 0} \omega_u \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ K_t(u,\pi) > 0}} K_t(u,\pi) \log \frac{K_t(u,\pi)}{\mu_t(\pi)}. \end{aligned}$$

内层求和中的每一项都含有 $\mu_t(\pi) \geq \omega_u K_t(u,\ \pi) > 0$。全文中，对条件输入分布的求和均遍历满足 u 且 $\omega_u > 0$的取值。第 4 节的长时间结果假设 λ具有有限支撑。

注 2.2（字上不存在自治马尔可夫动力学）。 考虑顺序为12的两个粒子。如果它们相邻，字会以单位瞬时速率变为 21 。如果它们之间有一个空位，该速率便为零。因此，具有相同字的构型转移到另一个字的速率可能不同。即使固定初始位置 Y，词通道$(K_t)_{t\geq 0}$ 在（2）中也不构成 S_n上的时间齐次马尔可夫半群。任意两个不同输入字对应的行之间的全变差距离，其精确阶为 $t^{-1/2}$ 当 $t \to \infty$时（推论 4.2和 4.5）。在有限状态连续时间马尔可夫半群中，任何趋于零的行间距离都会以指数速度衰减。

对于 $0 \leq s \leq t$，完整构型过程的马尔可夫性质以及恒等映射 $W_t = W(r(t))$ 给出马尔可夫链

$$W_0 \longrightarrow r(s) \longrightarrow r(t) \longrightarrow W_t.$$

因此，数据处理不等式给出

$$I(W_0; W_t) \leq I(W_0; r(t)) \leq I(W_0; r(s)).$$

比较 $I(W_0;\ W_t)$ 与 $I(W_0;\ W_s)$ 需要单独论证。对于位于固定初始位置的两个粒子，命题 5.3 表明，对于初始词上的任意先验分布，$I(W_0;\ W_t)$ 关于 t 均为非增函数。对于位于固定初始位置的 $n \geq 3$ 不同物种，这一单调性问题仍未解决（第 7节）。

3 压缩坐标到泊松坐标

当物种 i 的一个粒子向右扫描时，它会经过每个更强的粒子，并在遇到第一个更弱的粒子或空位时停止。移除被物种 $j > i$ 占据的位置，并闭合由此产生的间隙。r_i 左侧每删除一个位置，其坐标就减一。对于 $r \in \mathcal{X}_n$，令

$$c_i(r) = \#\{j > i : r_j < r_i\}, \qquad T_i(r) = r_i - c_i(r), \qquad T(r) = (T_1(r), \ldots, T_n(r)). \tag{3}$$

每个物种都使用自己的约化格点，因此不同粒子可能具有相同的压缩坐标。在图 1 的顶行中，物种 1、3、2 分别占据物理位置 0、1、2，而位置 3 为空置。对于物种 1，删除位置 1 和 2 后，位置 3 成为 0之后的下一个位置。当物种 1 从 0 跳到 3时，其压缩坐标从 0 变为 $3 - 2 = 1$。

定理 3.1（压缩坐标中的泊松表示）。 在不同物种区域上，映射 $T\colon \mathcal{X}_n \to \mathbb{Z}^n$ 是一个双射。如果物种 i 激活，则压缩向量的变化为 e_i，即 *i-th* 标准基向量。因此，使用与定义 *2.1* 中相同的时钟，

$$Z_i(t) := T_i(r(t)) = T_i(r(0)) + N_i(t), \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{4}$$

其中 $N_1, \dots, N_n$ 是相互独立的单位速率泊松过程。逆映射 $\Psi = T^{-1}$ 满足

$$0 \le \Psi_i(z) - z_i \le n - i. \tag{5}$$

证明。 对于有限个占据位点的集合 $S \subset \mathbb{Z}$，定义

$$F_S(x) = x - \#\{s \in S : s < x\}, \qquad x \in \mathbb{Z} \setminus S.$$

若 $x < y$ 是 S之外的相邻位置，则它们之间的所有 $y - x - 1$ 位置都属于 S。因此$F_S(y) - F_S(x) = 1$。对于非空的 S，当 $x <$取最小值时，有 $F_S(x) = x$；当$x > \max S$时，有 $F_S(x) = x - |S|$。因此，相邻的取值恰好覆盖每个整数一次，并且 F_S 是从 $\mathbb{Z} \setminus S$到 $\mathbb{Z}$的双射。对于 $S = \varnothing$， F_S 是恒等映射。

为了证明 T是满射，固定 $z \in \mathbb{Z}^n$。按顺序放置物种 n、$n-1$、……、1。当更强物种占据 S时，将物种 i 放置在 $F_S^{-1}(z_i)$。之后插入较弱粒子不会改变 T_i，因此所得构型 r 满足 $T(r) = z$。为了证明单射性，假设$T(r) = T(r') = z$。最强物种在两个构型中都位于 z_n。若所有更强物种在 r 和 r'中的位置相同，则相同的集合 S 决定了 $r_i = r'_i = F_S^{-1}(z_i)$。由下降归纳可得 $r = r'$。最后， $\Psi_i(z) - z_i = c_i(\Psi(z))$至多计数 $n - i$ 个更强粒子，由此证明 (5)。

现在考虑物种 i 在 x 处的一次激活，其目标位置为 $y = x + \ell$。 $\ell - 1$ 个中间粒子都比 i 强。如果 y 为空置， r_i 增加 ℓ，而 c_i 增加 $\ell - 1$；因此 T_i 增加一。一个中间粒子比 i 强，因此 i 不会将其计入。位于 $[x, y]$ 之外的粒子仍处于 i 的同一侧。因此，所有其他压缩坐标均保持不变。

如果目标位置包含物种 $j < i$，同样的计算可得 T_i 增加一。物种 j 向左移动 ℓ。其计数 c_j 减少 ℓ，因为它越过了物种 i 以及 $\ell - 1$ 个中间的较强粒子。因此， T_j 保持不变。对于严格位于 x 和 y 之间的第三个粒子，其物种 k 满足 $k > i > j$。两个移动的粒子都不会计入其计数 c_k，且其格点固定不变。对于位于 $[x, y]$之外的粒子，交换的两个粒子都仍处于它的同一侧，因此其计数和格点均保持不变。

对于不同物种，每个环事件都会产生一次跳跃或交换：目标位置 $y > x$ 之所以存在，是因为粒子数量有限，且其标签不同于 i。因此，物种 i 的压缩坐标在其自身时钟每次发生环事件时增加一，并且不会在其他时刻增加。于是，(4) 对 $N_i(t)$ 成立，其中的数值是物种 i 的时钟截至时间 t的环事件次数。时钟彼此独立且速率均为一，因此 N_1、……、N_n 是相互独立的速率为一的泊松过程。 □

给定初始构型时，压缩坐标过程彼此独立。对于随机初始构型，它们的起始值可能相互依赖，并且这种依赖关系可能持续存在于其无条件联合分布中。

引理 3.2 (平移协变性)。 令 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^n$。对于 $c \in \mathbb{Z}$和 $r \in \boldsymbol{X}_n$， $T(r + c\mathbf{1}) = T(r) + c\mathbf{1}$ 以及 $W(r + c\mathbf{1}) = W(r)$。因此，对于 $z \in \mathbb{Z}^n$，有 $\Psi(z + c\mathbf{1}) = \Psi(z) + c\mathbf{1}$。

证明。T 计数 $c_i(r)$ 和字 $W(r)$ 仅取决于位置的相对次序 . □

Corollary 3.3 (完整转移核)。 对于 $r,\ r' \in \mathcal{X}_n$，记 $\Delta_i = T_i(r') - T_i(r)$。那么

$$\mathbb{P}(r(t) = r' \mid r(0) = r) = \begin{cases} e^{-nt} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{t^{\Delta_i}}{\Delta_i!}, & \Delta_i \geq 0 \text{ for every } i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

证明。 应用双射 T 和独立泊松增量定律。该双射还给出了对所有最终构型求和后的归一化。 □

备注 3.4（与 Bethe 拟设核的关系）。 推论 3.3 也可由 [1, 定理 3.14，式（65）]的矩阵值围道积分推出。对于不同物种，[1, 式（57）] 的散射矩阵会交换每一对标签 $a < b$；当 a 移至 b 右侧时，权重为 ξ_a^{-1}；移至左侧时，权重为 ξ_a，其中 ξ_i 是物种 i 所携带的谱变量。因此，单个置换会以振幅 $\prod_i \xi_i^{c_i\,(r)\,-c_i\,(r')}$ 对词 r 和 r'对应的项作出贡献。与位置因子 $\prod_i \xi_i^{r'_i - r_i - 1}$ 相结合后，积分变为以下乘积

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\xi|=R} \xi^{\Delta_i - 1} e^{t(\xi^{-1}-1)}\, d\xi, \qquad R > 1,$$

且每个因子在 $\Delta_i \geq 0$ 时等于 $e^{-t}t^{\Delta_i}/\Delta_i!$，否则为零。

对具有给定字的最终构型求和（6），即可得到排序通道。固定初始位置 Y 和字 ν，令 $r^{Y,\nu}$ 为物种 ν_k 位于 y_k的构型。设

$$m^{\nu} = T(r^{Y,\nu}), \qquad \mathcal{C}_\pi = \{z \in \mathbb{Z}^n : W(\Psi(z)) = \pi\}, \qquad \pi \in S_n. \tag{7}$$

集合$\mathcal{C}_\pi$ 划分 $\mathbb{Z}^n$，且每个集合在 $z \mapsto z + c\mathbf{1}$ 作用下对 $c \in \mathbb{Z}$ 均保持不变，这由引理3.2可知。将 $N(t) = (N_1(t) \ldots, N_n(t))$写出后，由（4）可得

$$K_t(\nu, \pi) = \mathbb{P}\big(m^{\nu} + N(t) \in \mathcal{C}_\pi\big) = e^{-nt} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ m^{\nu} + k \in \mathcal{C}_\pi}} \prod_{i=1}^{n} \frac{t^{k_i}}{k_i!}. \tag{8}$$

对于有限支撑的 λ，第4 节中的（15）和（16）给出 $K_t(u, \pi) = 1/n! + O_{n,\lambda}(t^{-1/2})$。对于任意 λ 以及满足 $\mathbb{P}(U = u) > 0$的任意 u，在给定 $U = u$ 的情况下对固定构型极限按 $r(0)$取平均，得到 $K_t(u, \pi) \to 1/n!$ 这由有界收敛定理得出。

备注 3.5（物种依赖的时钟速率）。最近邻多物种 TASEP 的依物种而定的跳跃率已在 [7] 中得到研究。若物种 i 的时钟速率为 $b_i > 0$，则恒等式 (4) 仍然成立，其中 N_i 是速率为 b_i 的泊松过程。对于两两不同的速率，$r_i(t)/t \to b_i$ 几乎必然成立，因此 W_t 最终将是按速率递增顺序列出各物种的字 w_b。对于有限支撑初始分布，Chernoff 界给出：对某个 $c > 0$，$\mathbb{P}(W_t \neq w_b) = O(e^{-ct})$，于是 $I(W_0; W_t) \leq H(W_t)$ 关于 t 呈指数级减小。以下各节使用单位速率时钟。

4 渐近信息系数

设 $G_1, \ldots, G_n$ 为相互独立的标准正态变量，并令 $G_{(1)} < \cdots < G_{(n)}$ 表示它们的次序统计量。令

$$a_k = \mathbb{E}G_{(k)}, \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \qquad P = \mathrm{Id} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}. \tag{9}$$

特别地，$\sum_k a_k = 0$。矩阵 P 是到坐标和为零的向量子空间上的正交投影。全文中，ϕ 和 Φ 分别表示标准正态密度和分布函数。

定理 4.1（固定 n 的信息衰减）。固定 $n \geq 2$ 个不同物种。设 r（0）具有λ 在 X_n 中的有限支撑分布，且与时钟独立，并令 $U = f$（r（0））为初始构型的任意函数。令 $M = T$（r（0））， $m_u = \mathbb{E}[M \mid U = u]$ 以及 $\bar{m} = \mathbb{E}M$。当 $t \to \infty$ 时，

$$I(U; W_t) = \frac{C_U}{t} + O_{n,\lambda}(t^{-3/2}), \qquad C_U = \frac{A_n}{2(n-1)} \, \mathbb{E}\big\|P(m_U - \bar{m})\big\|^2. \tag{10}$$

当且仅当 Pm_U 几乎必然为常数时，我们才有 $C_U = 0$。对于此类输入，I（U；W_t）$=O_{n,\lambda}(t^{-2})$。若 $C_U > 0$，则 I（U；W_t）$\sim C_U/t$。

如果 $U_{'}$是 U 的函数，则由条件詹森不等式可得 $C_{U'} \leq C_U$，这与数据处理不等式一致。现在我们专门考虑固定的初始位置和 $U = W_0$。

推论 4.2（固定位置）。固定初始占据位点 $Y =$（y_1，……，y_n），其中 $y_1 < \cdots < y_n$，并令初始字 W_0 的分布为 $\rho =$（ρ_ν）$_{\nu \in S_n}$，且与时钟独立。令 m^ν 如（7）中所述，设 $\bar{m} = \sum_{\nu \in S_n} \rho_\nu m^\nu$。当 $t \to \infty$ 时，

$$I(W_0; W_t) = \frac{C(Y,\rho)}{t} + O_{n,Y,\rho}(t^{-3/2}), \qquad C(Y,\rho) = \frac{A_n}{2(n-1)} \sum_{\nu \in S_n} \rho_\nu \big\|P(m^\nu - \bar{m})\big\|^2. \tag{11}$$

系数 $C(Y,\rho)$ 为正，当且仅当 ρ 以正概率赋予至少两个词。如果 ρ 是点质量，那么对于每个 $t \geq 0$，$I(W_0;W_t) = 0$。更一般地，如果定理 *4.1* 中的 $U = r(0)$，那么 $C_U = 0$ 当且仅当 λ 的支撑包含于某个 $r_\star \in X_n$ 的 $\{r_\star + c\mathbf{1} : c \in \mathbb{Z}\}$ 中。

4.1 似然展开

引理 4.3。设 $t > 0$，并设 $N = (N_1, \ldots, N_n)$ 具有相互独立的 $\mathrm{Pois}(t)$ 坐标。记其分布为 Q_t，并设 $V_i = (N_i - t)/\sqrt{t}$ 和 $V = (V_1, \ldots, V_n)$。对于固定的 $m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，$m + N$ 的分布相对于 Q_t 具有密度 L_m，其表达式为

$$L_m(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(z_i)_{m_i}}{t^{m_i}}, \qquad z \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, \tag{12}$$

其中，对于整数 $a \geq 1$ 和 $(z)_0 = 1$，$(z)_a = z(z-1)\cdots(z-a+1)$。展开式中的余项

$$L_m(N) = 1 + t^{-1/2}\, m \cdot V + \mathrm{rem}_{m,t} \tag{13}$$

对每个 $1 \leq p < \infty$ 都满足，

$$\| \mathrm{rem}_{m,t} \|_{L^p(Q_t)} = O_{m,p}(t^{-1}) \qquad as\ t \to \infty.$$

证明。对于 $z_i \geq m_i$，泊松概率质量函数给出

$$\frac{\mathbb{P}(m_i + N_i = z_i)}{\mathbb{P}(N_i = z_i)} = \frac{z_i!}{t^{m_i}(z_i - m_i)!} = \frac{(z_i)_{m_i}}{t^{m_i}}.$$

对于 $0 \le z_i < m_i$，平移质量和下降阶乘均为零。由独立性可得（12）。代入 N，我们得到

$$L_m(N) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{m_i-1} \left(1 + \frac{V_i}{\sqrt{t}} - \frac{j}{t}\right).$$

从一个因子中选取 $V_i/\sqrt{t}$ 、从其余所有因子中选取 $\mathbf{1}$ 所得到的各项之和为$t^{-1/2} m \cdot V$。减去 $1 + t^{-1/2} m \cdot V$后，剩余各项是 V 坐标的单项式，其系数为 $O_m(t^{-1})$。

对于每个整数 $k \ge 1$，中心矩 $\mathbb{E}[(N_i - t)^{2k}]$ 是 t 的一个次数至多为 k 的多项式，这是将 $\mathbb{E}[e^{s(N_i - t)}] = \exp\{t(e^s - 1 - s)\}$ 在 $s = 0$处展开即可得到的。因此， V_i 的每个固定绝对矩关于 $t \ge 1$均一致有界。Hölder不等式将每个单项式的 $L^p(Q_t)$ 范数关于 $t \ge 1$一致地控制住。对有限项求和即可得到所述的余项界。 □

引理 4.4 (置换二阶矩)。 设 $n \ge 2$。对于 $\pi \in S_n$，令 $\mathrm{rank}_\pi(i)$ 表示物种 i 在 π中的位置，并通过 $a_i^\pi = a_{\mathrm{rank}_\pi(i)}$定义 $a^\pi \in \mathbb{R}^n$ 。于是

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (v \cdot a^\pi)^2 = \frac{A_n}{n-1} \|Pv\|^2, \qquad v \in \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

证明。 令 π 在 S_n上服从均匀分布。每个秩秩$_\pi(i)$在$\{1, \dots, n\}$上服从均匀分布，因此 $\mathbb{E}[a_i^\pi] = 0$和 $\mathbb{E}[(a_i^\pi)^2] = A_n/n$。 对于 $i \ne j$，两个秩在由 $n(n-1)$个不同秩组成的有序对上均匀分布。因此

$$\mathbb{E}[a_i^\pi a_j^\pi] = \frac{\sum_{k \ne \ell} a_k a_\ell}{n(n-1)} = -\frac{A_n}{n(n-1)},$$

其中最后一个等式使用了 $\sum_{k=1}^n a_k = 0$。由此可得 $\mathbb{E}[a^\pi (a^\pi)^{\mathsf{T}}] = A_n P/(n-1)$。对 v 取二次型，并使用 $v^{\mathsf{T}} P v = \|Pv\|^2$ ，得到（14）。 □

由于 $\mathbb{E}[v \cdot a^\pi] = 0$ 对于均匀分布的 π， （14）是具有得分 a_k 和回归常数 v_i [20]的线性秩统计量的经典方差公式。

4.2 定理4.1及其推论的证明

定理*4.1*的证明。 在进行共同原点变换 $r' = r + c\mathbf{1}$时，通过设定 $f_c(r') = f(r' - c\mathbf{1})$，保留相同的输入。引理3.2 保持该字不变，而条件均值和无条件均值坐标均平移 $c\mathbf{1}$。因此信道和 $m_u - \bar{m}$ 均不变。由于支撑是有限的，我们可以假设 $T(r_\star)$ 对于支撑中的每个 $r_\star$ 都具有非负坐标。（对于固定位置，只需进行平移，使得 $y_1 = 0$：如果物种 i最初占据 y_k，则 $y_k \ge k - 1$ 且 $c_i \le k - 1$。）

令 Q_t、 N、 V 与引理 4.3 中相同。定义

$$b_\pi(t) = Q_t(\mathcal{C}_\pi), \qquad \beta_\pi(t) = \mathbb{E}_{Q_t}\big[V \mathbf{1}\{N \in \mathcal{C}_\pi\}\big].$$

对于固定构型 $r_\star$，其中 $m = T(r_\star)$，定理 3.1 以及似然展开，再应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\mathbb{P}(W_t = \pi \mid r(0) = r_\star) = \mathbb{E}_{Q_t}\big[L_m(N) \mathbf{1}\{N \in \mathcal{C}_\pi\}\big] = b_\pi(t) + t^{-1/2}\, m \cdot \beta_\pi(t) + O(t^{-1}).$$

对给定 $U = u$ 时 $r(0)$ 的条件分布取平均，然后再对 U 取平均，

$$\begin{aligned} K_t(u,\pi) &= b_\pi(t) + t^{-1/2}\, m_u \cdot \beta_\pi(t) + O(t^{-1}), \\ \mu_t(\pi) &= b_\pi(t) + t^{-1/2}\, \bar{m} \cdot \beta_\pi(t) + O(t^{-1}). \end{aligned} \tag{15}$$

所有常数都可以选取得在有限多个构型上保持一致。

接下来我们计算 b_π 和 β_π。用独立的连续均匀分布随机变量打破 N_1、……、N_n 之间的并列，并将所得置换记为 Π。由计数及其破同分变量组成的各对是可交换的。因此，$n!$ 种排名中的每一种出现的概率都是 $1/n!$；即使在给定排序后的计数条件下，这一点仍然成立。如果 i在 π中的排名为 k，则

$$\mathbb{E}[V_i \mathbf{1}\{\Pi = \pi\}] = \mathbb{E}V_{(k)}/n!.$$

字 $W(\Psi(N))$ 与 Π不同，当且仅当对某一对 $j \neq l$有 $|N_j - N_l| \leq n$，因为 $0 \leq \Psi_i(N) - N_i \leq n - i$。对于任意这样的数对以及固定的 i，选择 j、l 中一个不同于 i的数，并对除所选计数之外的所有计数取条件。至多有 $2n+1$ 个整数符合条件，而根据斯特林公式，在众数处的最大泊松质量为 $O(t^{-1/2})$。变量 $|V_i|$ 在此条件下可测，且 $\mathbb{E}|V_i| \leq 1$。因此，并集界将失配概率及其以 $|V_i|$加权的期望都界为 $O_n(t^{-1/2})$。

对于 $t \geq 2$，将一个 Pois(t) 随机变量写成 $k_t = \lfloor t \rfloor$ 个独立的 Pois(t/k_t) 随机变量之和。对于每个除以$\sqrt{t}$ 的中心化加项，其三阶绝对矩为 $O(t^{-3/2})$，并且由于 $1 \leq t/k_t \leq 2$ 而是均匀的。它们的方差之和为 1。由 [22, 式（10）]给出的独立加项的 Wasserstein正态近似得到一维1-Wasserstein距离 $O(t^{-1/2})$。利用一维分位数耦合，将 n 个坐标分别与标准正态变量独立耦合。排序满足 $|v_{(k)} - g_{(k)}| \leq \max_i |v_i - g_i| \leq \sum_i |v_i - g_i|$，因此有 $|\mathbb{E}V_{(k)} - a_k| = O_n(t^{-1/2})$。结合这两次比较可得

$$b_\pi(t) = 1/n! + O_n(t^{-1/2}), \qquad \beta_{\pi,i}(t) = a_i^\pi/n! + O_n(t^{-1/2}). \tag{16}$$

减去（15）中的两个展开式。这会消去整个公共项 b_π（t），包括其中包含的任何晶格修正。利用（16），得到

$$\delta_{u,\pi}(t) := K_t(u,\pi) - \mu_t(\pi) = \frac{(m_u - \bar{m}) \cdot a^\pi}{n!\sqrt{t}} + O_{n,\lambda}(t^{-1}). \tag{17}$$

根据（15）和（16），$\mu_t(\pi) = 1/n! + O(t^{-1/2})$，因此所有分母都与零保持有界距离。令 $x = \delta_{u,\,\pi}/\mu_t(\pi)$，并展开 $(1+x)\log(1+x) = x + x^2/2 + O(|x|^3)$。求和后，线性项因 $\sum_\pi \delta_{u,\,\pi} = 0$ 而抵消。输出的数量有限，且每个 $\delta_{u,\,\pi} = O(t^{-1/2})$。因此

$$D(K_t(u,\cdot)\|\mu_t) = \tfrac{1}{2}\sum_\pi \delta_{u,\pi}^2/\mu_t(\pi) + O(t^{-3/2}).$$

对17进行平方会引入一个 $O(t^{-3/2})$ 误差，并且 $1/\mu_t(\pi) = n! + O(t^{-1/2})$。根据输入概率 ω_u 取平均后得到

$$I(U; W_t) = \frac{1}{2t}\sum_u \omega_u \frac{1}{n!}\sum_\pi [(m_u - \bar{m}) \cdot a^\pi]^2 + O_{n,\lambda}(t^{-3/2}).$$

引理 4.4 证明了（10）。其系数恰在 $P(m_u - \bar{m}) = 0$ 对每个具有正概率的 u 成立时为零。于是（17）给出$\delta_{u,\,\pi} = O(t^{-1})$，对每个输入和输出均成立。同一个泰勒展开将信息界定为 $O(t^{-2})$。

□

推论 4.2 的证明。公式（11）是令 $U = W_0$和 $m_u = m^{\nu}$代入（10）所得。假设对于两个词 ν、ν'， $P(m^{\nu} - m^{\nu'}) = 0$。那么对于某个整数 c，有 $m^{\nu'} = m^{\nu} + c\mathbf{1}$；由引理 3.2 以及 T 的单射性可知， ν' 的初始构型是将 ν的初始构型平移 c 得到的。二者的有限占据集均为 Y，因此 $c = 0$ 且 $\nu = \nu'$。于是， $C(Y, \rho) = 0$ 迫使 ρ为点质量。同样的论证也证明了关于 $U = r(0)$ 的结论；反过来，若 λ 由某个构型的平移构成，则根据引理 3.2， W_t 与 $r(0)$ 独立。 □

同一展开式直接控制两个输入的可区分性。

推论 4.5 （行之间的全变差）。 在定理 *4.1* 的设定下，设 u、 u' 是具有正概率的标签。则

$$\left\| K_t(u,\cdot) - K_t(u',\cdot) \right\|_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2\,n!\,\sqrt{t}} \sum_{\pi \in S_n} \left| (m_u - m_{u'}) \cdot a^{\pi} \right| + O_{n,\lambda}(t^{-1}), \tag{18}$$

当且仅当 $P(m_u - m_{u'}) \neq 0$ 时，首项系数为正。等价地，已知 $U \in \{u, u'\}$ 具有相等的先验概率的观察者，能够以最优成功概率 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|K_t(u,\cdot) - K_t(u',\cdot)\|_{\mathrm{TV}}$ 从 W_t 中识别出 U。

证明。 对 u 的（15）式和 u' 的（15）式作差，并使用（16）式以及 $||x| - |y|| \le |x - y|$。由引理4.4可知其为正。最后一句是两个假设的贝叶斯风险的标准表达式。

□

注 4.6（收敛速率）。 式（10）中的余项给出了绝对误差的界，其符号可能取决于时间。对于 $Y = (0,3,9)$ 以及满足 $\rho_{123} = 0.2$ 和 $\rho_{132} = 0.8$的先验分布，例如， $tI(W_0;\ W_t)$ 在 $C(Y,\rho)$ 处低于 ≈ 3.4759，而在 $t = 1.6 \cdot 10^{4}$处高于它。可能的 $t^{-3/2}$ 修正项系数仍未确定。

4.3 连续初始位置和均匀先验

推论 4.7。 设 $Y = (0, 1, \dots, n-1)$，且 ρ 在 S_n上服从均匀分布。则 $C(Y,\rho) = C_n$，其中 C_n 由 （1）给出。特别地，

$$C_2 = \frac{1}{8\pi}, \qquad C_3 = \frac{11}{16\pi}. \tag{19}$$

证明。 如果物种 i 位于初始词的位置 k，那么

$$m_i = (k-1) - \#\{\text{larger labels before } i\} = \#\{\text{smaller labels before } i\}.$$

通过将标签 i 均匀地插入由标签 1、……、 $i-1$组成的字中的 i个位置之一，可以构造出一个均匀排列。这些插入选择彼此独立，且后续插入不会改变 i之前较小标签的数量。因此， m_1、……、 m_n 彼此独立，并且

$$m_i \sim \mathrm{Unif}\{0, \dots, i-1\}, \qquad \mathrm{Var}(m_i) = \frac{i^2 - 1}{12}.$$

由此可得

$$\mathbb{E}\|P(m - \mathbb{E}m)\|^2 = \mathrm{tr}(P\,\mathrm{Cov}(m)) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2-1}{12} = \frac{(n-1)^2(2n+5)}{72}.$$

将其代入（11）即可证明（1）。对于 $n = 2$，高斯次序统计量的均值为 $(-1/\sqrt{\pi},\ 1/\sqrt{\pi})$。对于 $n = 3$，它们为 $(-3/(2\sqrt{\pi}),\ 0,\ 3/(2\sqrt{\pi}))$。这些值给出（19）。 □

引理 4.8（大 n）。对于 $n \geq 2$、$A_n < n-1$ 和 A_n/n，其关于 n 单调不减，且极限为 *1*。因此 $C_n \sim n^3/72$。

极限 $A_n/n \to 1$ 是 Hoeffding 定理的高斯二阶矩情形 [23]。下面的鞅论证也给出了 n的单调性；有限n 界则由一个单独的方差恒等式得到。

证明。取一个由独立标准正态变量组成的无限序列 G_1，G_2。。。对于 $j \geq 2$ 令$B_j = \mathbf{1}\{G_j < G_1\}$，设 $\mathcal{F}_n = \sigma(B_2, \ldots, B_n)$，并记作 $J_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} B_j$。给定 B_j 中带有 $J_n = k$的指定模式后，G_1 的密度正比于

$$\phi(x)\Phi(x)^{k-1}(1-\Phi(x))^{n-k}.$$

这是 n 个标准正态变量的第 k个次序统计量的密度。因此，为了显示样本量，将 $a_k^{(n)}$ 写为，

$$\mathcal{M}_n := \mathbb{E}[G_1 \mid \mathcal{F}_n] = a_{J_n}^{(n)}, \qquad \mathbb{E}\mathcal{M}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^{(n)})^2 = \frac{A_n}{n},$$

因为 J_n 在$\{1, \ldots, n\}$上服从均匀分布。条件期望$\mathcal{M}_n$ 构成一个有界鞅，其二阶矩因此单调不减。给定 G_1后，变量 B_j 是相互独立的伯努利变量，其均值为 $\Phi(G_1)$。条件强大数定律从无限序列 $(B_j)_{j\geq 2}$中恢复 $\Phi(G_1)$，进而恢复 G_1。因此，根据鞅收敛定理，$\mathcal{M}_n \to G_1$ 在 L^2 中收敛，从而证明了 $A_n/n \to 1$。对于有限-n 界，令 $\bar{G} = n^{-1}\sum_i G_i$。排序保持了¯与 G之差的平方和，因此

$$n - 1 = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}(G_i - \bar{G})^2 = A_n + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(G_{(k)} - \bar{G}).$$

对于 $n \geq 2$ 最大值减去样本均值不是常数，因为联合高斯密度在每个开球上都为正。因此 $A_n < n-1$，而 C_n 的渐近式由（1）得到。 □

表1 列出了前几个值。图3（a）将 tI（W_0；W_t）与 $n = 3$的预测系数进行了比较，4。

表 1： （C_n）的系数和推论1的排序效率 A_n/n，由对 $\mathbb{E}G_{(k)}$进行数值积分得到。

n	A_n	C_n	$C_n/(n^3/72)$	A_n/n
2	0.636620	0.039789	0.358	0.3183
3	1.432394	0.218838	0.584	0.4775
4	2.295659	0.621741	0.699	0.5739
5	3.195060	1.331275	0.767	0.6390
6	4.116565	2.429917	0.810	0.6861
8	5.999494	6.124483	0.861	0.7499
10	7.914272	12.366050	0.890	0.7914
12	9.848116	21.816312	0.909	0.8207

备注 4.9（极限次序）。每个 C_n 的定义都是先取 $t \to \infty$ 在固定的 n下的极限。定理 4.1 中的余项在 n上一致分布的界尚未确定。

4.4 高斯排序与费希尔信息

定理 4.1中的系数可以通过高斯排序实验确定。对于$g \in \mathbb{R}^n$ 具有不同坐标的情形，令 $W(g)$ 表示将 g 的各坐标索引按递增顺序排列所得的字。

命题 4.10 （高斯排序信道）。 设 M 是一个在 $\mathbb{R}^n$ 中取有限多个值的随机向量，与 $G = (G_1, \dots, G_n)$ 独立，并且只能观测坐标排序$\Pi_\varepsilon = W(G + \varepsilon M)$。在 $\vartheta = 0$ 处计算的 $G + \vartheta$ 排序的费舍尔信息矩阵为

$$J_{\mathrm{rank}} = \frac{A_n}{n-1} P. \tag{20}$$

此外，

$$I(M; \Pi_\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{tr}\big(J_{\mathrm{rank}} \operatorname{Cov}(M)\big) + o(\varepsilon^2). \tag{21}$$

证明。 设 $p_\pi(\vartheta) = \mathbb{P}(W(G+\vartheta) = \pi)$。对高斯密度在排序锥上的积分下求导可得

$$p_\pi(0) = \frac{1}{n!}, \qquad \nabla p_\pi(0) = \mathbb{E}\big[G \mathbf{1}\{W(G) = \pi\}\big] = \frac{a^\pi}{n!}.$$

最后一个等式成立，是因为 G 的排序与其次序统计量相互独立，并且在 $\{W(G) = \pi\}$ 上，坐标 G_i 是秩为 $\mathrm{rank}_\pi(i)$ 的次序统计量。因此，得分向量为 a^π，对其外积取平均后，由引理 4.4 得到 (20)。对于 (21)，将 $p_\pi(\varepsilon m)$ 在零点处展开，并减去其在 M 上的平均值。两者之差为 $\varepsilon (m - \mathbb{E}M) \cdot a^\pi / n! + O(\varepsilon^2)$。上文使用的有限字母相对熵展开证明了 (21)。 $\square$

得分 a^π 是秩检验理论中的正态得分：根据 Hoeffding 公式，针对固定方向 m 、满足 $Pm \neq 0$ 的位置备择 [18], ，秩概率表明，针对单侧高斯平移备择 $\varepsilon m, \varepsilon \downarrow 0$ 的局部最强秩检验，会在 $m \cdot a^\pi = \sum_i m_i \, \mathbb{E} G_{(\mathrm{rank}_\pi(i))}$ [19, 20] 这一线性统计量取值较大时拒绝原假设。由 (17) 可知， $K_t(u, \pi) - \mu_t(\pi)$ 中 $t^{-1/2}$ 的系数仅通过 $(m_u - \bar m) \cdot a^\pi$ 依赖于 u；该系数是此统计量在均匀排列 π上的方差的一半，并对 u 取平均。因此，定理 4.1 表明，高斯实验中以 m_U 为输入、 $\varepsilon = t^{-1/2}$ 为输入的系数，在离散泊松动力学和物理排序映射作用下仍然保留。有效输入是条件均值 m_U，而不是压缩后的向量 M 本身。由 (20) 和引理 4.8 可知，按 Loewner 序有 $J_{\mathrm{rank}} \le P$，且每个非零对比方向上都存在严格损失；投影 P 的出现，是因为所有坐标共同位移不会改变排序。

4.5 字与完整构型

仅保留字会丢失多少幸存信息？压缩坐标同样可以回答这一问题。

命题 4.11 （完整构型中的信息）。在定理 *4.1* 的设定下，

$$I(U; r(t)) = \frac{1}{2t} \, \mathbb{E} \big\| m_U - \bar m \big\|^2 + O_{n,\lambda}(t^{-3/2}). \tag{22}$$

证明。由于 T 是一个双射，$I(U;\, r(t)) = I(U;\, M+N)$，其中 N 如引理 4.3 中所述，且独立于 $r(0)$。与定理 4.1 的证明中一样，改变原点并将 f 随之平移，使得 M 的坐标非负。在给定 $U = u$ 的条件下，$M+N$ 的分布相对于 Q_t 的密度为 $\bar{L}_u = \mathbb{E}[L_M \mid U = u]$，而无条件密度为 $\bar{L} = \mathbb{E}L_M$。记 $\chi(w) = w\log w - w + 1 \ge 0$。由于 $\mathbb{E}_{Q_t} L_u = \mathbb{E}_{Q_t} L = 1$，

$$I(U; M+N) = \sum_u \omega_u \, \mathbb{E}_{Q_t}\big[\bar{L}\,\chi(L_u/\bar{L})\big].$$

当 $L = 0$ 时，被积函数定义为零，因为此时所有先验分布概率为正的 L_u 也都为零。由引理 4.3，$\Lambda_u := L_u - \bar{L} = t^{-1/2}(m_u - \bar{m})\cdot V + \mathrm{rem}_{u,t}$ 其中 $\|\mathrm{rem}_{u,t}\|_{L^p(Q_t)} = O(t^{-1})$ 对每个 $p \in [1,\infty)$ 都成立。因此 $\mathbb{E}_{Q_t}\Lambda_u^2 = t^{-1}\|m_u - \bar{m}\|^2 + O(t^{-3/2})$ 且 $\mathbb{E}_{Q_t}|\Lambda_u|^3 = O(t^{-3/2})$。令 $\mathsf{G}_t = \{\max_i |V_i| \le t^{1/6}\}$。在 G_t 上，(12) 中的每个因子都是 $1 + O(t^{-1/3})$，因此 $\bar{L} = 1 + O(t^{-1/3})$ 一致成立；另一方面，对 V_i 的高阶矩应用马尔可夫不等式可得 $Q_t(\mathsf{G}_t^c) = O(t^{-5})$。存在一个绝对常数 c_0，使得对所有 $w \ge 0$，均有 $|\chi(w) - \tfrac{1}{2}(w-1)^2| \le c_0|w-1|^3$。因此，在 G_t 上且当 t 足够大时，

$$\bar{L}\,\chi(L_u/\bar{L}) = \frac{\Lambda_u^2}{2\bar{L}} + O\big(|\Lambda_u|^3\big) = \tfrac{1}{2}\Lambda_u^2\big(1 + O(t^{-1/3})\big) + O\big(|\Lambda_u|^3\big).$$

在 G_t 上，对于较大的 t，我们还有 $\bar{L} \ge 1/2$。将 $\Lambda_u^2/(2\bar{L})$ 替换为 $\Lambda_u^2/2$ 所产生的期望误差至多为 $\|\bar{L}-1\|_{L^2(Q_t)}\|\Lambda_u\|^2_{L^4(Q_t)} = O(t^{-3/2})$，由引理 4.3 可得。在 G_t 外，我们使用 $0 \le \bar{L}\,\chi(L_u/\bar{L}) \le \bar{L}_u\log(1/\omega_u) + L$，这由 $L_u \le L/\omega_u$ 推出；根据柯西–施瓦茨不等式，G_t^c 对期望以及 $\mathbb{E}_{Q_t}\Lambda_u^2$ 的贡献为 $O(t^{-5/2})$。合并各项得到 $\mathbb{E}_{Q_t}[\bar{L}\chi(L_u/\bar{L})] = \frac{1}{2t}\|m_u - \bar{m}\|^2 + O_{n,\lambda}(t^{-3/2})$，再对 u 求和即可证明 (22)。 □

推论 4.12（排序效率）。若 $\mathbb{E}\|m_U - \bar{m}\|^2 > 0$，则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I(U; W_t)}{I(U; r(t))} = \frac{A_n}{n-1} \cdot \frac{\mathbb{E}\|P(m_U - \bar{m})\|^2}{\mathbb{E}\|m_U - \bar{m}\|^2} \;\le\; \frac{A_n}{n-1} < 1.$$

对于固定的连续初始位置、均匀初始词以及 $U = W_0$，极限比例为A_n/n。

证明。将（10）除以（22）。不等式由 $\|Pv\| \le \|v\|$ 和引理 4.8得出。对于此选择 $U = W_0$，有 $m_U = M$。在连续均匀情形下，$\mathrm{Cov}(M)$ 根据推论 4.7的证明为对角矩阵，因此 $\mathrm{tr}(P\mathrm{Cov}(M)) = (1 - \frac{1}{n})\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Cov}(M)$。 □

退化系数。当 $C_U = 0$ 时，可能出现这样的情况：对于每个 t，$I(U;\, W_t) = 0$，而$I(U;\, r(t))$ 按 t^{-1} 衰减。例如，令 $n = 2$，令 U在 $\{0,1\}$ 上均匀分布，并取 $r(0) = (0,1) + U(1,1)$。平移协变性给出，对于每个 t，$I(U;\, W_t) = 0$，而（22）给出$I(U;\, r(t)) \sim 1/(4t)$。

对于连续位置和均匀先验，$I(W_0;\, r(t)) \sim n(n-1)(2n+5)/(144\,t)$，而仅凭该字就能保留其中的比例 A_n/n：当 $n = 2$ 时为 $1/\pi \approx 0.318$，当 $n = 3$ 时为 $3/(2\pi) \approx 0.477$，当 $n = 10$ 时为 0.79（表 1）。根据引理 4.8，当 $n \to \infty$ 时，该比例趋于 1；其中，极限$t \to \infty$ 先在每个固定的 n 下取。

5 精确双粒子通道及与 TASEP 的比较

设两种不同物种的初始距离为 $d \geq 1$； d 表示占据位点之间的距离，而非空位的数量。令 Γ_t 表示它们之间的距离，并固定初始次序。定义

$$h_k(t) = e^{-2t} \mathrm{I}_{|k|}(2t), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

其中 I_j 是第一类修正贝塞尔函数。等价地， $h_k(t)$ 是两个独立的 Pois(t) 变量之差等于 k 的概率。

命题 5.1（长程双粒子核）。 对于 $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\Gamma_t = k,\, W_t = W_0) = h_{k-d}(t), \tag{23}$$

$$\mathbb{P}(\Gamma_t = k,\, W_t \neq W_0) = h_{k+d-1}(t). \tag{24}$$

特别地，逆序的概率为

$$p_d(t) = \sum_{k=d}^{\infty} h_k(t) = \frac{1 - h_0(t) - 2\sum_{k=1}^{d-1} h_k(t)}{2}. \tag{25}$$

证明。 当排序与初始排序一致时，将状态标识为整数 $\Gamma_t - 1$ ；当排序反转时，标识为整数 $-\Gamma_t$ 。当粒子不相邻时，一个时钟使间距增加，另一个使间距减少，二者的速率均为单位速率。当距离为一时，左侧粒子的时钟发生环事件会反转排序，并使距离保持为一。右侧粒子的时钟发生环事件会使距离增加到二。因此，所标识的过程是在 $\mathbb{Z}$ 上的最近邻随机游走，两个方向的速率均为单位速率，初始状态为 $d-1$。其转移核为 h。这证明了（23）–（24）；求和并利用对称性即可得到（25）。 □

以较弱的标签记为 a ，较强的标签记为 b，则基底（ab， ba）中的排序通道为

$$K_t^{\mathrm{LR}} = \begin{pmatrix} 1 - p_d(t) & p_d(t) \\ p_d(t) & 1 - p_d(t) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

概率 p_d（t）记录时刻 t的排序；它并不是至少发生一次交换的概率。

作为比较，在带有单位速率时钟的普通多物种 TASEP 中，粒子向右移动一个格点，进入空位，并且允许最近邻优先交换 $ba \to ab$。排序 ab 永远不可能变为 ba。从 ba 开始，第一次交换之前的间距是在零点被杀死的正整数上的对称随机游走。反射给出其杀死核 h_{k-d}（t） $- h_{k+d}$（t），终点距离为 k。因此，其存活概率为

$$s_d(t) = h_0(t) + 2\sum_{k=1}^{d-1} h_k(t) + h_d(t), \qquad K_t^{\mathrm{ord}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - s_d(t) & s_d(t) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

定理 5.2（不同的信息指数）。 对于固定占据位置上的均匀初始排序，

$$I_{\mathrm{LR}}(W_0; W_t) = \log 2 - h_{\mathrm{b}}(p_d(t)) \sim \frac{(2d-1)^2}{8\pi t}, \tag{28}$$

$$I_{\mathrm{ord}}(W_0; W_t) = h_{\mathrm{b}}(s_d(t)/2) - \tfrac{1}{2} h_{\mathrm{b}}(s_d(t)) \sim \frac{d \log 2}{2\sqrt{\pi}}\, t^{-1/2}, \tag{29}$$

其中 $h_{\mathrm{b}}(u) = -u$对数 $u - (1-u)$ 对数$(1-u)$。

证明。 精确的信息表达式可由这两个矩阵得出。对于固定整数 k，贝塞尔渐近式给出

$$h_k(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}(1 + O_k(t^{-1})).$$

因此

$$1 - 2p_d(t) \sim \frac{2d-1}{2\sqrt{\pi t}}, \qquad s_d(t) \sim \frac{d}{\sqrt{\pi t}}.$$

写成 $\gamma = 1 - 2p_d(t)$，展开式 $\log 2 - h_{\mathrm{b}}((1-\gamma)/2) = \gamma^2/2 + O(\gamma^4)$ 证明了（28）。此外，

$$h_{\mathrm{b}}(s/2) - \tfrac{1}{2}h_{\mathrm{b}}(s) = \frac{\log 2}{2}s + O(s^2), \qquad s \downarrow 0,$$

这证明了（29）。 □

图 2 展示了相邻初始位置下的精确表达式，$d = 1$以及相应的主导渐近式。

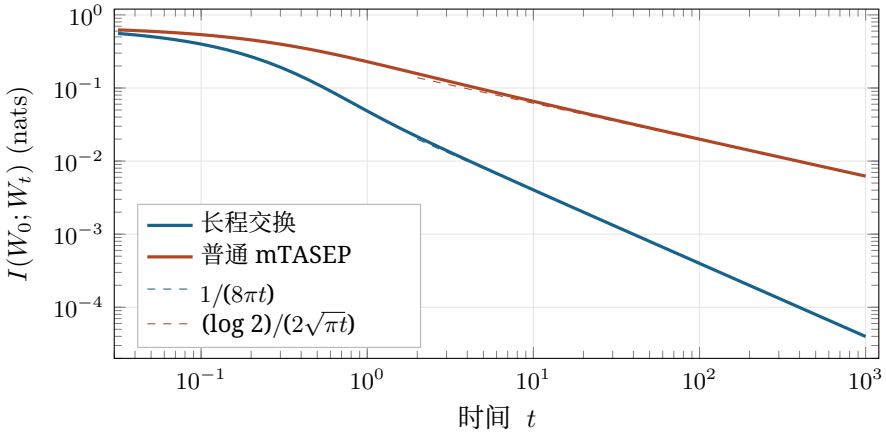


图2： 相邻初始位置和均匀初始排序下的精确双粒子信息。实线为定理 5.2中的公式；虚线为已证明的主导渐近式。

随时间变化的间隔。 对于均匀初始词，(28)以如下定量形式成立

$$I_{\mathrm{LR}}(W_0; W_t) = \frac{(2d-1)^2}{8\pi t}\{1 + O(d^2/t)\} \tag{30}$$

只要 $t \to \infty$ 且整数间隔满足 $d = o(\sqrt{t})$。事实上，傅里叶表示$h_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2t(1-\cos u)}\cos(ku)\,du$ 以及在 $[-\pi, \pi]$ 上的界 $1 - \cos u \geq 2u^2/\pi^2$ 给出 $0 \leq h_0(t) - h_k(t) \leq Ck^2 t^{-3/2}$。对 (25) 中的 $1 \leq k < d$ 求和，并利用 $h_0(t) = (4\pi t)^{-1/2}(1 + O(t^{-1}))$，得到 $1 - 2p_d = (2d-1)(4\pi t)^{-1/2}(1 + O(d^2/t))$，而二元熵展开证明了(30)。当 $d/\sqrt{t} \to c > 0$ 时，展开失效： $1 - 2p_d = \mathbb{P}(|N_1 - N_2| \leq d - 1)$随后趋于 $2\Phi(c/\sqrt{2}) - 1$，其中 N_1、N_2为独立的Pois(t)变量。

一个第一系数趋于零的非零信号。设两个粒子以物种顺序12从 $(0, d)$ 开始。等概率二元输入在输入为零时以相等的条件概率选择间隙 $d = 1$ 和 $d = 5$，在输入为一时选择间隙 $d = 3$。两个条件均值

压缩向量均等于 (0，3)，因此 $C_U = 0$。修正贝塞尔函数的大自变量展开给出

$$h_k(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(1 - \frac{4k^2-1}{16t} + O_k(t^{-2})\right),$$

因此由 (25) 可知，$t^{-3/2}$ 在 p_d 中的系数为 $[-1 + 2\sum_{k=1}^{d-1}(4k^2-1)]/(64\sqrt{\pi})$，当 $d = 1$ 取 3、5 时，分子分别为 -1、35、231。常数项和 $t^{-1/2}$ 项在 $\Delta = (p_1(t) + p_5(t))/2 - p_3(t)$ 中相互抵消，剩下 $\Delta = 5t^{-3/2}/(4\sqrt{\pi}) + O(t^{-5/2})$。两行都收敛于 $(1/2, 1/2)$，并且相对于它们的均值，两个反转概率相差 $\pm\Delta/2$。因此

$$I(U; W_t) \sim \frac{\Delta^2}{2} \sim \frac{25}{32\pi t^3}.$$

由于 $W_0 = 12$ 对于两个输入均有，$I(U;\ W_0) = 0$ 此处。较晚的正信息与定理4.1相容。

现在固定初始间距 d，并将初始词 W_0 作为输入。在长程模型中，两行之间的全变差距离为 $1 - 2p_d(t) \sim (2d-1)/(2\sqrt{\pi t})$，而在普通模型中为 $s_d(t) \sim d/\sqrt{\pi t}$，因此两个模型以相同的代数指数失去可区分性。对于两个初始词上的任意先验分布，$I(W_0; W_t)$ 在两种模型中都随 t 非递增。

命题 5.3（双粒子单调性）。考虑两个相距 d 的粒子。函数 p_d 随 $p_d < \frac{1}{2}$ 增大，而 s_d 单调不增。对于 $0 \le t \le t'$，时刻 t' 的信道在两个模型中，都是时刻 t 的信道后接一个额外信道。因此，对于任意先验分布，$I(W_0;\ W_t)$ 关于 t 单调不增。

证明。根据命题 5.1 的证明，$p_d(t)$ 是从 $d-1$ 出发的对称随机游走在时刻 t 位于 -1 或其下方的概率。它的导数是穿过 0 与 -1 之间的键的净概率流，即 $h_{d-1}(t) - h_d(t)$；对于 $t > 0$，该值为正，因为 $I_k(x)$ 对于 $x > 0$ 关于 $k \ge 0$ 单调递减。此外，根据（25），$p_d < \frac{1}{2}$，而 s_d 是存活概率。对于 $p \le p' < \frac{1}{2}$，交叉概率为 p' 的二元对称信道，等于先经过交叉概率为 p 的信道，再经过交叉概率为 $(p' - p)/(1 - 2p)$ 的信道。对于 $0 < s \le 1$ 和 $0 \le s' \le s$，参数为 s' 的矩阵 K^{ord} 是参数分别为 s 和 s'/s 的矩阵之积。由数据处理不等式即可得出最后一个结论。

□

不同指数具有简单的信道解释。长程输出收敛于内部概率分布（$1/2$、$1/2$），因此领先阶相对熵关于行差异呈二次关系。对于这两个不同物种，普通输出收敛于边界点（1, 0）；关于初始字的信息保留在罕见的未排序输出中，从而产生关于其概率呈线性的项。对于 $\mathbb{P}(W_0 = ba) = \theta \in (0, 1)$，式（27）中的普通信道通过在 $s_d = 0$ 处展开 $h_{\mathrm{b}}(\theta s_d) - \theta h_{\mathrm{b}}(s_d)$，得到 $I_{\mathrm{ord}}(W_0;\ W_t) \sim -\theta \log(\theta)\ d/\sqrt{\pi t}$。

6 物种组成、多样性和信息损失

重复物种区分了这两条规则。在本节中，物种计数始终固定，且所有时钟的速率均为一。

6.1 组成熵与初始排序信息

固定正重数 $\boldsymbol{n}=(n_1、\ldots\ldots、n_q)$，按从弱到强的顺序列出，其中有 $\sum_i n_i = n$，并令 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{n}}$ 为具有这些重数的词的集合。为 $\boldsymbol{n}$ 定义两种熵：

$$H_{\mathrm{comp}}(\boldsymbol{n}) = -\sum_i \frac{n_i}{n}\log\frac{n_i}{n}, \qquad S_{\mathrm{ord}}(\boldsymbol{n}) = \log\frac{n!}{\prod_i n_i!}. \tag{31}$$

第一种是均匀选取的一个粒子所属物种的熵；它衡量组成多样性，并且在动力学过程中守恒。第二种是词数的对数，因此在均匀字先验下为 $H(W_0) = S_{\mathrm{ord}}$。对于单一物种，两者均为零；对于不同物种，它们分别达到最大值 $\log n$ 和 $\log\, n!$ 当粒子从连续位置开始排列，采用均匀字先验，且每个物种遵循相同规则时，我们记为 $I^{\alpha}_{\boldsymbol{n}}(t) = I(W_0;\, W_t)$，其中对于 TASEP 型规则为 $\alpha = 0$，对于落推型规则为 $\alpha = 1$。

6.2 化简为独立的单物种过程

令物种 i 遵循规则 $\alpha_i \in \{0,1\}$，并将其位置写为 $x_{i,\,1} < \cdots < x_{i,\,n_i}$。如（3）中所示，删除更强物种所占的格点：

$$z_{i,k} = x_{i,k} - \#\{(j,\ell) : j > i,\; x_{j,\ell} < x_{i,k}\}, \qquad 1 \le k \le n_i. \tag{32}$$

这些坐标关于 k 严格递增。在 $\mathcal{Z}_m = \{z \in \mathbb{Z}^m :\; z_1 < \cdots < z_m\}$ 上，我们考虑两个单位速率的单物种过程。在 TASEP 中，被激活粒子若右侧格点为空，就向右移动一个格点。在下落–推动过程中，它会移动到右侧第一个空格点；等价地说，从其所在位置开始的一串连续占据位点整体向右移动一步。当这些过程作用于物种 i 的压缩坐标时，若某个格点上没有物种 i 的粒子，该格点就是空的；它可以被较弱的粒子占据。

命题 6.1 (按物种坐标约化)。 映射 (32) 是从具有重数 $\boldsymbol{n}$ 的构型到 $\prod_i \mathcal{Z}^{n_i}$ 的一个双射。激活一个物种为 i 的粒子，会使该粒子在 $(z_{i,k})_k$ 中执行单物种移动：当 $\alpha_i = 0$ 时为 *TASEP* 类型，当 $\alpha_i = 1$ 时为下落–推动类型；所有其他物种的坐标保持不变。因此，给定初始构型后，压缩后的各物种会作为独立的单物种过程演化。

证明。 要反转该映射，按递减顺序插入各物种。若 S 是强于 i 的物种所占据的格点集合，则 $x \mapsto x - \#\{h \in S :\; h < x\}$ 是一个从 $\mathbb{Z}\setminus S$ 到 $\mathbb{Z}$ 的递增双射，而物种 i 的粒子会映射到其 $z_{i,\,k}$ 的原像。

设一个物种为 i 的粒子在 x 处发生环事件，其目标位置为 y。在 TASEP 型规则下，严格位于 x 与 y 之间的标签大于 i；在落推型规则下，这些标签则至少为 i。因此，删去较强的标签后，若下一个格点为空，该粒子便移动到该格点；若该格点上有相同粒子且 $\alpha_i = 0$，它便停留原处；若 $\alpha_i = 1$，它便跳到第一个空格点。若目标位置上有较弱粒子，该粒子便从 y 移至 x，并失去其左侧 $[x, y$中的 $y - x$ 个较强粒子，因此其坐标不变。其他所有粒子都保留原格点及其左侧较强粒子的数量：位于 (x, y) 内的粒子至少与两个移动标签一样强，而位于 $[x, y]$ 之外的粒子看到它们仍在同一侧。所有速率均为 1，因此生成元是单物种生成元之和。速率有界，因此该过程是独立的单物种链的乘积。

□

对于不同物种，各因子是定理 3.1中的泊松行者。只有定理 6.4使用这一约化；短时间结果仅依赖扫描规则。

6.3 每种组成的初始信息损失

定理 6.2（依赖于组成的初始损失）。 从连续位置 0、……、 $n-1$开始，其中 W_0 在 W_n 上服从均匀分布，并令物种 i 遵循规则 $\alpha_i \in \{0,1\}$。固定一个初始词 w。对于每个占据位点 x，考虑在 x 处粒子的时钟首先响起时得到的物种词。对于 $v \neq w$，令 $k(w, v)$ 表示使该字为 v 的位置 x 的数量，并令$\kappa(w) = \sum_{v \neq w} k(w, v)$。由于 $t \downarrow 0$，

$$I(W_0; W_t) = S_{\mathrm{ord}}(\boldsymbol{n}) - r\, t \log(1/t) - c\, t + O_{\boldsymbol{n}}(t^2 \log(1/t)), \tag{33}$$

其中，当 $0 \log 0 = 0$ 时，

$$r = \mathbb{E}\, \kappa(W_0), \qquad c = r - \mathbb{E} \sum_{v \neq W_0} k(W_0, v) \log k(W_0, v). \tag{34}$$

对于 $n_{\leq i} = n_1 + \cdots + n_i$，

$$r = n - \sum_{i:\alpha_i = 0} \left(\frac{n_i}{n} + \frac{n_i(n_i - 1)}{n_{\leq i}} \right) - \sum_{i:\alpha_i = 1} \frac{n_i}{n - n_i + 1}. \tag{35}$$

特别是，如果每种物种都遵循 *TASEP* 型规则，或者每种物种都遵循落推型规则，那么 r 分别等于

$$r_0(\boldsymbol{n}) = n - 1 - \sum_i \frac{n_i(n_i - 1)}{n_{\leq i}}, \qquad r_1(\boldsymbol{n}) = n - \sum_i \frac{n_i}{n - n_i + 1}. \tag{36}$$

证明。记 $K_t(w, v) = \mathbb{P}(W_t = v \mid W_0 = w)$ 为 $w, v \in \mathsf{W}_{\boldsymbol{n}}$，并记 μ_t 为 W_t的分布。以总速率 n进行均匀化后，对于 $v \neq w$，有 $K_t(w, v) = k(w, v)t + O(t^2)$，且 $K_t(w, w) = 1 - \kappa(w)t + O(t^2)$。在行熵中，若 $kt + O(t^2)$ 满足 $k \geq 1$，则其贡献为 $kt \log(1/t) - kt \log k + O(t^2 \log(1/t))$；$O(t^2)$ 的贡献为 $O(t^2 \log(1/t))$；对角项的贡献为$\kappa(w)t + O(t^2)$。因此

$$H(K_t(w, \cdot)) = \kappa(w)\, t \log(1/t) + \Big[\kappa(w) - \sum_{v \neq w} k(w, v) \log k(w, v) \Big] t + O(t^2 \log(1/t)).$$

输出分布 μ_t 与均匀分布 U 在 $\mathcal{W}_{\boldsymbol{n}}$ 相差 $O(t)$，相对熵关于这种扰动是二次的，因此 $S_{\mathrm{ord}} - H(W_t) = D(\mu_t \| \mathsf{U}) = O(t^2)$。从 $H(W_t)$ 中减去平均行熵，即可证明（33）和（34）。

接下来需要计算使紧密词保持不变的激活次数。在 TASEP 型规则下，物种为 i 的粒子恰好在以下情形中使字保持不变：它是最右侧粒子，或其右侧最近的、标签不大于 i 的粒子也是 i。最右侧粒子的物种为 i 的概率是 n_i/n。对于第二种情形，删除标签大于 i 的标签：剩余的字在重数 $(n_1, \ldots, n_i)$ 下服从均匀分布，其 $n_{\leq i} - 1$ 个键（若有）中，每个都是一对 ii 的概率为 $n_i(n_i - 1)/(n_{\leq i}(n_{\leq i} - 1))$。因此，物种为 i 的时钟中，使字保持不变的时钟数的期望为 $n_i/n + n_i(n_i - 1)/n_{\leq i}$。在落推型规则下，物种为 i 的粒子恰好在其右侧所有粒子也都是 i 时使字保持不变。n_i 个副本以可交换计数的方式落入其他粒子周围的 $n - n_i + 1$ 个间隙中，因此最后一个间隙中的粒子数的期望为 $n_i/(n - n_i + 1)$。每次激活都遵循其自身物种的规则，由此证明了 (35)。 □

6.4 多样性、优先级与规则的选择

推论 6.3 (细化与优先级放置)。 设每个物种都遵循同一规则，其中 r_0, r_1 如 (36)。

(i) $r_1 \geq r_0$，若至少有两种物种且其中一种重复出现，则为严格不等式。在这种情况下，对所有充分小的 $t > 0$， $I_n^1(t) < I_n^0(t)$。*(ii)* 将大小为 $a+b$ 的物种拆分为大小为 a 的较弱物种和大小为b 的较强物种，并令二者处于相邻的优先级，则 H_{comp}、 S_{ord}、 r_0 和 r_1都会增加。*(iii)* 系数 r_1 仅取决于重数的多重集。在这些重数的各种排列中，当重数从弱到强非递减时，r_0 最大；当重数非递增时，r_0 最小。

证明。 (i) 改变字的 TASEP 型激活在停止前不会遇到相同标签，因此在落推型规则下的作用方式相同。于是 $r_1 \geq r_0$。在所述条件下，某个紧密词中包含两个相邻的副本 ii，其后跟着一个不同的标签；第一个副本只会在落推型规则下改变该词。不等式$I_n^1(t) < I_n^0(t)$ 由式 (33) 得出。

（ii）熵增量为 $\Delta H_{\mathrm{comp}} = [\,(a+b)\log(a+b) - a\log a - b\log b]/n > 0$ 以及$\Delta S_{\mathrm{ord}} = \log\binom{a+b}{a} > 0$。如果 s 粒子弱于两个新物种，（36）给出

$$\Delta r_0 = \frac{ab(2s+a+1)}{(s+a)(s+a+b)} > 0.$$

对于 $f(x) = x/(n+1-x)$，我们有 $\Delta r_1 = f(a+b) - f(a) - f(b) > 0$，因为 $f(x)/x$是递增的。

（iii） r_1 的公式关于 n_i是对称的。如果相邻的重数 a， b 前面有 s较弱粒子，那么

$$r_0(\ldots,a,b,\ldots) - r_0(\ldots,b,a,\ldots) = \frac{ab(b-a)(s+1)}{(s+a)(s+b)(s+a+b)},$$

通过相邻交换进行排序即可得到两个极值。 □

因此，仅凭组成熵无法确定信息损失。组成（2，1）和（1，2）具有相同的两个熵，但分别具有 $r_0 = 1$和 $4/3$。在落推型规则下，二者都有 $r_1 = 5/3$，并且在下一阶出现差异：（34）给出 $c = (5-2\log 2)/3$和 $c = 5/3$，因为对字112进行两次激活会产生121。对于四个粒子，组成（2，1，1）、（1，2，1）和（1，1，2）具有 $r_0 = 2$、 $7/3$和 $5/2$，以及相同的 $r_1 = 17/6$。

按初始信息进行归一化可能会逆转比较结果。将 (2,1) 或 (1, 2) 细化为 (1, 1, 1)，得到 $r_0 = 2$ 和 $S_{\mathrm{ord}} = \log 6$。由于 $1/\log 3 < 2/\log 6 < 4/(3\log 3)$，分数损失 r_0/S_{ord} 在第一种情况下增加，在第二种情况下减少，尽管两种情况下绝对损失都增加了。在分裂前包含 $n \leq 8$ 且至少有两个物种的 741 种拆分中，精确枚举（补充材料 S1）表明， r_0/S_{ord} 在 358 种情况下增加、在 383 种情况下减少，而 r_1/S_{ord} 在每种情况下都减少。

6.5 重复对的长时间信息

设在位置 0,1,2 上有三个粒子，初始词均匀分布，其中一个物种出现两次。令 L_t 表示时刻 t 单例左侧的粒子数。其取值 0, 1,2 为三个词的标签，因此 $I(W_0;W_t) = I(\mathrm{L}_0;\mathrm{L}_t)$。对于重复对，我们将 TASEP 型规则称为阻塞，将落推型规则称为推动。

定理 6.4 (一种重复物种)。设 $\boldsymbol{n} = (2,1)$ 或 $(1,2)$，计数按从弱到强的顺序列出。对于每个初始词，在 *TASEP* 型规则下，单例位于左侧、中间和右侧位置的概率收敛于

$$(p_{\mathrm{L}}, p_{\mathrm{M}}, 1/2) = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}, \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}, \frac{1}{2}\right),$$

而在落推型规则下，则收敛于顺序相反的同一向量，两种情况下的误差均为$O(t^{-1/2})$。令$J = (9/p_{\mathrm{L}} + 1/p_{\mathrm{M}} + 32)/(64\pi)/(64\pi)$，两种规则都满足

$$tI^{\alpha}_{(2,1)}(t) = \frac{\mathcal{J}}{3} + O(t^{-1/2}), \qquad tI^{\alpha}_{(1,2)}(t) = \frac{\mathcal{J}}{9} + O(t^{-1/2}) \qquad (t \to \infty). \tag{37}$$

这两种组成具有相同的 H_{comp} 和相同的 $H(W_0) = \log 3$，但重复较弱的物种会使系数增至三倍。证明揭示了这一因子的来源。在首阶近似下，三个初始词分别对应于单例相对于一个固定对的三个起始位置。对于序列 $\mathrm{L}_0 = 0, 1, 2$，(2, 1) 对应的位置为 0、1、2。对于 (1, 2)，在阻塞规则下对应的位置为 0、0、1，在推动规则下为 0、1、1，因此三个词中有两个给出相同的行，差异至多为 $O(t^{-1})$。方差分别为 $2/3$ 和 $2/9$。数值上，$\mathcal{J}/3 \approx 0.134817$ 和 $\mathcal{J}/9 \approx 0.044939$。在 $t = 16384$处，tI的计算值对于 (2, 1) 分别为 0.13512 和 0.13471，对于 (1, 2) 分别为 0.04490 和 0.04476，分别对应阻塞和推动（图 3(b)）。

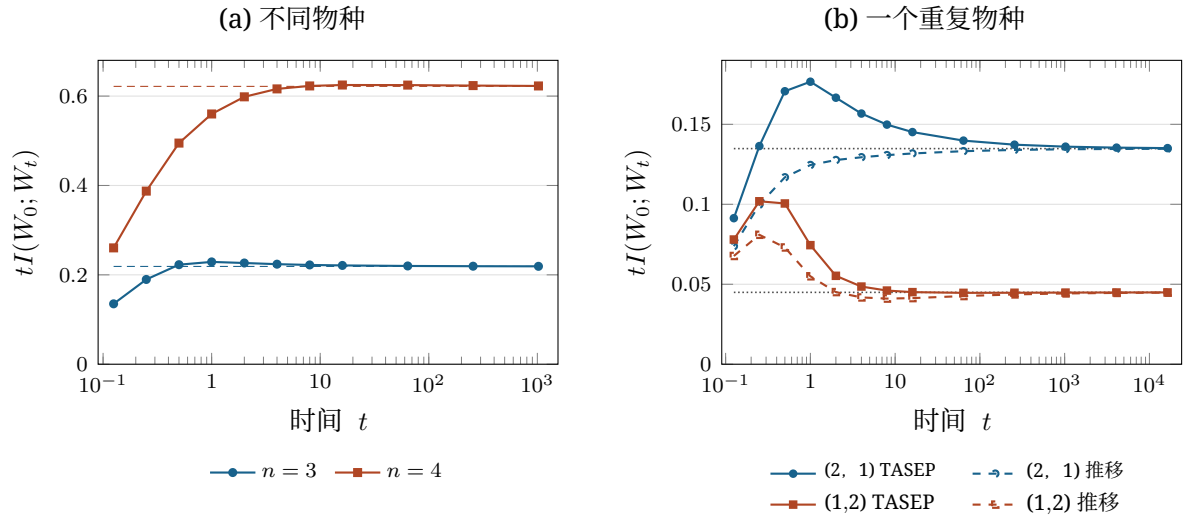


图3： 连续位置与均匀初始词的缩放排序信息。在 (a) 中，水平虚线为已证极限 C_3 与 C_4。在 (b) 中，点线为（37）中的两个极限，计数按从弱到强列出，实线与虚线分别表示 TASEP 型规则和推落型规则。标记为精确有限时间公式的数值计算结果（补充材料 S1）。

证明使用了一对相同粒子的边缘分布。记 $f_c(x) = \mathbb{P}(c + N = x)$ 和$F_c(x) = \mathbb{P}(c + N \le x)$ 分别表示 $N \sim \mathrm{Pois}(t)$ 以及整数 c、x。

引理 6.5 （一对粒子的边缘分布）。 设某一物种的两个粒子从 $a < b$ 出发，并令$X_- < X_+$ 表示它们在时间 t 于 Z_2 上的单物种过程中所处的位置。在阻塞情况下， X_+的分布函数为 F_b; 在推动情况下， X_- 的分布函数为 F_a。另外两个边缘分布为

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_- \le x) = 1 - [1 - F_a(x)][1 - F_b(x)] + f_b(x+1)\,\mathbb{E}[(a + N - x)_+] \quad \text{(blocking)},\\ &\mathbb{P}(X_+ \le x) = F_a(x)F_b(x) - f_a(x)\,\mathbb{E}[(x + 1 - b - N)_+] \qquad\qquad\qquad\quad \text{(pushing)}. \end{aligned} \tag{38}$$

证明。 在阻塞条件下，前端位置每当占据该位置的粒子的时钟发生一次环事件时就增加一；在推动条件下，后端位置也以同样方式增加一。这给出了两个自由边缘分布。从 $(a,\ b)$ 到 $x < y$ ，成对核分别是 TASEP [21]和下落–推动过程的单物种分布律在双粒子情形下的特例 [4],

$$\begin{aligned} Q_0(x,y) &= f_a(x)f_b(y) - [f_b(x) - f_b(x+1)][1 - F_a(y-1)],\\ Q_1(x,y) &= f_a(x)f_b(y) - F_b(x)[f_a(y) - f_a(y-1)]. \end{aligned}$$

事实上，每个因子 u 都满足 $\partial_t u(k) = u(k-1) - u(k)$，因此两个表达式都满足自由前向方程。恒等映射 $F_c(k) - F_c(k-1) = f_c(k)$给出阻塞条件 $Q_0(x,\ x) = Q_0(x,\ x+1)$ 以及推动条件 $Q_1(x,\ x) = Q_1(x-1,\ x)$。在 $t = 0$处，两个修正项在 $x < y$上均消失，只留下 $(a,\ b)$ 处的点质量。两个核及其时间导数关于 t局部均匀可求和，因此，有界速率链的前向方程的唯一性将它们确定下来。对自由粒子求和可得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_- = x) &= f_a(x)[1 - F_b(x)] - [f_b(x) - f_b(x+1)]\,\mathbb{E}[(a + N - x)_+],\\ \mathbb{P}(X_+ = y) &= f_b(y)F_a(y-1) - [f_a(y) - f_a(y-1)]\,\mathbb{E}[(y - b - N)_+]. \end{aligned}$$

这是式（38中函数的一阶差分，它们在 $-\infty$处为零。 □

定理 6.4 的证明。行。固定 $j = \mathrm{L}_0$ ，并令 $K_t(j,k) = \mathbb{P}(\mathrm{L}_t = k \mid \mathrm{L}_0 = j)$，其中 $k \in \{0,1,2\}$。由命题 6.1，始于 $a < b$ 的压缩粒子对 $X_- < X_+$ 与压缩单粒子 $s+N$ 相互独立。对于 $(2,1)$，该粒子对较弱，$(a,b) = (0,1)$，且 $s = j$。对于 $(1,2)$，该粒子对较强， $s = 0$ 和 a, b 是除 j 之外的两个位置。设单例位于压缩格点 x。在第一种情况下，位于压缩格点 u 的粒子对成员，其物理位置为 $u + \mathbf{1}\{u \ge x\}$；在第二种情况下，单例的物理位置为 $x + \mathbf{1}\{X_- \le x\} + \mathbf{1}\{X_+ \le x+1\}$。因此，$\mathrm{L}_t = \mathbf{1}\{X_- \le x_1\} + \mathbf{1}\{X_+ \le x_2\}$，其中对于 $(2,1)$，$(x_1,x_2) = (x-1, x-1)$；对于 $(1,2)$，$(x_1,x_2) = (x, x+1)$。令 $F_\pm$ 为引理 6.5 中 $X_\pm$ 的分布函数，

$$K_t(j,\cdot) = \mathbb{E}\, g_t(s+N), \qquad g_t(x) = \big(1 - F_-(x_1),\ F_-(x_1) - F_+(x_2),\ F_+(x_2)\big).$$

通过 $F_\pm$ ，向量 g_t 也取决于起始对（$a,\ b$），这里不予展示。

正态近似。 设 G服从密度为 ϕ、分布函数为 Φ 、上尾为 $\bar\Phi = 1 - \Phi$的标准正态分布。令 $\widehat{N} = (N - t)/\sqrt{t}$ 和 $z = (x - t)/\sqrt{t}$。对于固定的 c，且对$x \in \mathbb{Z}$一致地，

$$\begin{aligned} F_c(x) = \Phi(z) + O(t^{-1/2}), \qquad \sqrt{t}\, f_c(x) = \phi(z) + O(t^{-1/2}),\\ t^{-1/2}\,\mathbb{E}[(c + N - x)_+] = \mathbb{E}[(G - z)_+] + O(t^{-1/2}), \end{aligned} \tag{39}$$

最后一个界对 $(x - c - N)_+$ 和 $(z - G)_+$也成立。第一个是定理 4.1 的证明中所使用的独立泊松变量之和的 Berry–Esseen 界。第三个由定理 4.1 证明中的 Wasserstein 界推出，因为正部是1-利普希茨的。对于第二个，傅里叶反演比较 $t(e^{iu/\sqrt{t}} - 1 - iu/\sqrt{t})$ 与

$-u^2/2$ 在 $|u| \le \pi\sqrt{t}$ 上；它们相差至多 $|u|^3/(6\sqrt{t})$，且实部都至多为 $-2u^2/\pi^2$。这就是情形 $c = 0$；对于固定的 c，在 $x - c$ 处应用这三个界，并使用 Φ 和 ϕ 的有界导数。由于 $\mathbb{E}[(G - z)_+] = \phi(z) - z\Phi(z)$ 和 $\mathbb{E}[(z - G)_+] = \phi(z) + z\Phi(z)$ 是 $O(1 + |z|)$，将 (39) 代入 (38) 得到

$$g_t(x) = g(z) + O((1 + |z|)/\sqrt{t}). \tag{40}$$

对于阻塞，$g = (1 - \Phi_{\mathrm{bl}},\ \Phi_{\mathrm{bl}} - \Phi,\ \Phi)$，其中

$$\Phi_{\mathrm{bl}}(z) = 1 - \bar{\Phi}(z)^2 + \phi(z)[\phi(z) - z\bar{\Phi}(z)], \qquad \Phi'_{\mathrm{bl}}(z) = \phi(z)[(1 + z^2)\bar{\Phi}(z) - z\phi(z)].$$

对于推动，$g(z)$ 是按反向顺序排列的 $-z$ 阻塞向量。在这两种情况下，g 和 $z \mapsto zg(z)$ 都是利普希茨的。

极限与单位平移。由（40）和 Wasserstein 界，$K_t(j, \cdot) = \mu_\infty + O(t^{-1/2})$，其中 $\mu_\infty = \mathbb{E}g(G)$。对于固定的起始配对，泊松恒等式 $f_0(k-1) = kf_0(k)/t$ 给出

$$\mathbb{E}g_t(s + 1 + N) - \mathbb{E}g_t(s + N) = \frac{\mathbb{E}[\widehat{N}\, g_t(s + N)]}{\sqrt{t}} = \frac{v}{\sqrt{t}} + O(t^{-1}), \qquad v = \mathbb{E}[G\, g(G)], \tag{41}$$

其中最后一步使用了（40），$\mathbb{E}\widehat{N}^2 = 1$ 以及再次使用 Wasserstein 界。对于阻塞，
$\mathbb{E}\Phi(G) = \frac{1}{2}$，$\mathbb{E}\bar{\Phi}(G)^2 = \frac{1}{3}$，$\int_{\mathbb{R}} z\phi^2\bar{\Phi} = 1/2\sqrt{3}$，$\int_{\mathbb{R}} z\phi^2\bar{\Phi} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\phi^3$，$\mathbb{E}[1 - \Phi_{\mathrm{bl}}(G)] = (\ )$，$(\ )$，$(\ )$ 并给出 $\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}}\phi^3 = p_{\mathrm{L}}$，$\mu_\infty = p_{\mathrm{L}}\, p_{\mathrm{M}}\, \frac{1}{2}$，$(\ )$，因此 $(,\ ,\ )$。高斯分部积分给出

$$\mathbb{E}[G\Phi(G)] = \int_{\mathbb{R}} \phi^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \qquad \mathbb{E}[G\Phi_{\mathrm{bl}}(G)] = \int_{\mathbb{R}} \phi\, \Phi'_{\mathrm{bl}} = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (1 + z^2)\phi(z)^2\, dz = \frac{3}{8\sqrt{\pi}},$$

利用 $\bar{\Phi}(z) + \bar{\Phi}(-z) = 1$ 以及 $z\phi^3$ 的奇性。因此 $v = (-3, -1, 4)/(8\sqrt{\pi})$。对于推动，对称性 $z \mapsto -z$ 反转 μ_∞，并给出 $v = (-4, 1, 3)/(8\sqrt{\pi})$。

对初始词的依赖。对于 (2, 1)，无论 j 和 $s = j$ 为何，该对都从 (0, 1) 开始，因此 (41) 给出 $K_t(j, \cdot) = K_t(0, \cdot) + \ell_j v/\sqrt{t} + O(t^{-1})$，其中 $\ell = (0, 1, 2)$。对于 (1, 2)，当 $j = 0$ 为 1、2 时，该对分别从 (1, 2)、(0, 2)、(0, 1) 开始。在阻塞下，$F_+ = F_b$ 不涉及 a；在推动下，$F_- = F_a$ 不涉及 b。根据 (38)，在阻塞下将 a 移至 $a + 1$，或在推动下将 b 移至 $b + 1$，会使 x 处的另一个边缘分布改变

$$-f_a(x)[1 - F_b(x)] + f_b(x + 1)[1 - F_a(x - 1)] \qquad \text{or} \qquad -F_a(x)f_b(x) + f_a(x)F_b(x),$$

分别为。二者都是 $O(t^{-1})$，因为根据（39），这两个乘积具有相同的首项：第一个表达式中为 $\phi(z)\bar{\Phi}(z)/\sqrt{t}$，第二个表达式中为 $\phi(z)\Phi(z)/\sqrt{t}$。因此，在 $O(t^{-1})$ 范围内，该行对起始对的依赖，在阻塞下仅通过 b，在推移下仅通过 a。最后，对 (0, 1) 是将对 (1, 2) 向左移动一个格点得到的，这对字的作用与将单例向右移动一个格点相同。因此，三行再次为 $K_t(0, \cdot) + \ell_j v/\sqrt{t} + O(t^{-1})$，其中阻塞下为 $\ell = (0, 0, 1)$，推移下为 $\ell = (0, 1, 1)$。

信息。令 $\bar{\ell}$ 为 ℓ_0、ℓ_1、ℓ_2 的均值。输出分布为 $\mu_t = \mu_\infty + O(t^{-1/2})$，其极限项均为正，并且 $K_t(j, \cdot) - \mu_t = (\ell_j - \bar{\ell})\, v/\sqrt{t} + O(t^{-1})$。定理 4.1 所用的相对熵二阶展开给出

$$tI^{\alpha}_{\boldsymbol{n}}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Var}(\ell_{\mathrm{L}_0}) \sum_{k=0}^{2} \frac{v_k^2}{\mu_\infty(k)} + O(t^{-1/2}).$$

The 在任一规则下，和都等于 $\mathcal{J}$，且对于 (2，1)，方差为 $2/3$；对于 (1，2)，方差为 $2/9$. □

7 总结与开放问题

对于不同物种，在给定初始构型的条件下，压缩坐标演化为相互独立的单位速率泊松随机游走。若初始构型的分布 λ 具有有限支撑，则对于该构型的任意函数 U，都有 $I(U;\ W_t) = C_U/t + O_n$、$\lambda(t^{-3/2})$（定理 4.1）。对于位于固定位置的两个不同物种粒子，在均匀初始词下，排序信息在长程交换下以 t^{-1} 衰减，而在普通多物种 TASEP 下以 $t^{-1/2}$ 衰减（定理 5.2）。对于连续初始位置和均匀初始词，短时间 $t\log(1/t)$ 损失的系数在 drop–push 型规则下关于物种重数具有对称性，而在 TASEP 型规则下则可能随物种从弱到强的排列顺序而变化（定理 6.2 和推论 6.3）。对于三个粒子，在任一规则下，(2, 1) 的长时间系数都是 (1, 2) 的三倍（定理 6.4）。

单调性。对于 $n \geq 3$ 不同物种，$I(W_0; W_t)$ 是否对每一种固定初始位置的选择以及 W_0 上的每个先验分布，都随 t 非递增？命题 5.3 通过证明较晚的信道可由较早的信道处理得到，证实了 $n = 2$ 的这一性质。对于一般的 n，数据处理保证完整构型具有单调性，但单独的字隐藏了会影响后续次序变化的间隙。针对三种不同物种，我们在 10^{-3} 至 $10^{2.5}$ 之间的 180 个时刻，对初始位置和先验分布的 5,616 种组合进行了测试；相邻时刻间计算出的最大增幅低于 10^{-15} 纳特（采用 binary64 算术；见补充材料 S1）。对于其他输入，信息可能增加：在命题 5.3 前的双粒子示例中，初始字固定，且 U 是初始间距的函数；对所有充分大的 t，$I(U;\ W_0) = 0$，而 $I(U;\ W_t) > 0$。

重复物种。设初始位置连续、初始字服从均匀分布，并且$\boldsymbol{n}$ 至少包含两种物种，其中至少一种重复出现。当 $t \to \infty$ 时，对于每个 $\alpha \in \{0,1\}$，$tI_{\boldsymbol{n}}^{\alpha}(t)$是否收敛到一个正的有限极限？该极限如何依赖于重数、它们的优先级顺序以及规则？对于较小的 t，推论6.3 给出的不等式 $I_{\boldsymbol{n}}^{1}(t) < I_{\boldsymbol{n}}^{0}t$是否对每个 $t > 0$都成立？对于(2,1)和(1, 2)，在图3(b)所绘出的全部十三个时刻，该不等式都成立。然而，根据定理6.4，这两条规则具有相同的 t^{-1} 系数，因此大时间下差值的符号由首项之外的项决定。非均匀先验分布可能反转这一不等式：对于 $\boldsymbol{n} = (1,2)$和 $\rho_j = \mathbb{P}(L_0 = j)$，定理6.4证明中的行展开给出，在阻塞下，$\lim_{t\to\infty} tI(W_0;\ W_t) = \frac{1}{2}\mathcal{J}\,\rho_2(1-\rho_2)$；在推动下，$\lim_{t\to\infty} tI(W_0;\ W_t) = \frac{1}{2}1\ 2\mathcal{J}\,\rho_0(1-\rho_0)$；当 $\rho_1 > 0$ 和 $\rho_0 > \rho_2$时，后一个极限更大。

补充材料

补充材料 S1 (`ordering_information_supplement.zip`)包含可复现本文数值、表格和图表数据的 Python 程序，以及运行这些程序的说明。

作者贡献

E.L. 是唯一作者，负责构思、数学论证、数值分析和撰写工作。

资助

本研究由纳扎尔巴耶夫大学资助，资助项目为2024—2026年学院发展竞争性研究资助计划，资助编号 201223FD8822，E. Lee。

数据可用性声明

未使用任何外部数据。补充材料 S1 中的程序可重新生成本文报告的全部数值、表格和图表数据。

致谢

在准备本手稿期间，作者使用 ChatGPT Astra（OpenAI）和 Claude Fable 5.2（Anthropic）来核验证明、检索文献、开发和验证 Python 代码、制作图表和表格，以及审阅和编辑文本。作者已审阅并编辑所有输出，并对数学论证、计算、参考文献和最终文本承担全部责任。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Eunghyun Lee. 带长程交换的多组分完全非对称简单排斥过程。*SciPost Physics Core*, 9(1):008, 2026. doi: 10.21468/SciPostPhysCore.9.1.008.[2] Eunghyun Lee. 具有依赖物种插值的多组分长程交换模型的可积性。统计力学杂志：理论与实验, 2026(7):073102, 2026. doi: 10.1088/1742-5468/ae80b5.[3] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. 信息论基础. Wiley, 第 2 版, 2006. ISBN 978-0-471-24195-9. doi: 10.1002/047174882X.[4] M. Alimohammadi, V. Karimipour, and M. Khorrami. 一类单参数非对称排斥过程的精确解。*Physical Review E*, 57:6370–6376, 1998. doi: 10.1103/PhysRevE. 57.6370.

[5] Thomas M. Liggett. 相互作用粒子系统。Springer, New York, 1985. doi: 10.1007/978-1-4613-8542-4.[6] Craig A. Tracy and Harold Widom. 多物种非对称简单排斥过程。Journal of Statistical Physics, 150(3):457–470, 2013. doi: 10.1007/s10955-012-0531-9.[7] Eunghyun Lee. 具有依赖物种速率的多物种 TASEP 的可积性。Symmetry, 13(9):1578, 2021. doi: 10.3390/sym13091578.[8] Omer Angel, Alexander Holroyd, and Dan Romik. 定向交换过程。The Annals of Probability, 37(5):1970–1998, 2009. doi: 10.1214/09-AOP456.[9] Gideon Amir, Omer Angel, and Benedek Valkó. TASEP 速度过程。The Annals of Probability, 39(4):1205–1242, 2011. doi: 10.1214/10-AOP561.[10] Alexey Bufetov, Vadim Gorin, and Dan Romik. 定向交换过程中的吸收时间渐近性。The Annals of Applied Probability, 32(2):753–763, 2022. doi: 10.1214/21-AAP1695.[11] Arvind Ayyer, James Martin, and Lauren Williams. 非齐次 t-推移 TASEP 与 $q = 1$ 处的 Macdonald 多项式。Annales de l'Institut Henri Poincaré D, Combinatorics, Physics and their Interactions, 2025. doi: 10.4171/AIHPD/210. 先于纸本在线发表。[12] Anthony J. Wood, Richard A. Blythe, and Martin R. Evans. 完全非对称排斥过程的 Rényi 熵。Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 50(47):475005, 2017. doi: 10.1088/1751-8121/aa90fe.[13] Minoh Jeong, Alex Dytso, and Martina Cardone. 从含噪观测中恢复数据排列：渐近性。IEEE Transactions on Information Theory, 70(4):2999–3017, 2024. doi: 10.1109/TIT.2023.3348032.[14] Lloyd N. Trefethen and Lloyd M. Trefethen. 一副牌要洗多少次才能随机化？Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 456(2002):2561–2568, 2000. doi: 10.1098/rspa.2000.0625.[15] Dudley Stark, A. Ganesh, and Neil O'Connell. 交错洗牌中的信息损失。Combinatorics, Probability and Computing, 11(1):79–95, 2002. doi: 10.1017/S0963548301004990.[16] Vyacheslav V. Prelov and Edward C. van der Meulen. 弱输入信号下多维信道的信息与容量的渐近表达式。IEEE Transactions on Information Theory, 39(5):1728–1735, 1993. doi: 10.1109/18.259667.[17] Igal Sason. 关于 f-散度：积分表示、局部行为与不等式。Entropy, 20(5):383, 2018. doi: 10.3390/e20050383.[18] Wassily Hoeffding. "最优"非参数检验。载于 Jerzy Neyman 编，《第二届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》，第 83–92 页，Berkeley，1951。University of California Press. URL https://digicoll.lib.berkeley.edu/record/112748.[19] Milton E. Terry. 若干针对特定参数备择假设具有最大效力的秩次检验。The Annals of Mathematical Statistics, 23(3):346–366, 1952. doi: 10.1214/aoms/1177729381.[20] Jaroslav Hájek and Zbyněk Šidák. 秩检验理论。Academic Press, New York, 1967.[21] G. M. Schütz. 非对称排斥过程主方程的精确解。Journal of Statistical Physics, 88:427–445, 1997. doi: 10.1007/BF02508478.[22] Louis H. Y. Chen. 正态近似的 Stein 方法：一些回忆与反思。The Annals of Statistics, 49(4):1850–1863, 2021. doi: 10.1214/21-AOS2083.[23] Wassily Hoeffding. 关于次序统计量期望值的分布。The Annals of Mathematical Statistics, 24(1):93–100, 1953. doi: 10.1214/aoms/1177729086.