采用 Pauli相关性编码的大规模流式投资组合优化

Vicente P. Soloviev*
Fujitsu Research of Europe Ltd.
Pozuelo de Alarcón，28224 马德里，西班牙
vicente.perezsoloviev@fujitsu.com

Josh Kirsopp
Fujitsu Research of Europe Ltd.
英国斯劳 SL1 2BE

*通讯作者。

arXiv:2611.32769v1 [quant-ph] 24 Nov 2026

摘要

在庞大的资产全集中进行经典投资组合构建是一项组合选择问题，现有启发式方法难以在大规模情况下有效求解。Pauli相关性编码（PCE）通过用远少于每项资产一个量子比特的数量来表示底层聚类问题，从而应对这一挑战；此前的一项研究表明，在单个历史截面上，其表现可与经典方法相媲美。本文不再局限于这一静态测试，而是进一步研究流式部署：在这种部署中，相关性结构和投资组合都以滚动方式重新估算，正如实时再平衡系统实际运行时那样。我们提出两种流式变体——PCE本身和联合多切分变体dPCE，并在不同窗口长度、最高达数千项资产的投资组合规模、风险厌恶与交易成本设置以及测量采样次数预算下，将二者与买入并持有基准方法进行比较。流式PCE和dPCE始终优于被动基准方法，包括在市场低迷期；在此期间，二者虽均出现亏损，但PCE的亏损明显更少，这表明该方法的价值并非仅限于市场上涨时。就大规模应用而言，PCE也被证明更为实用，因为dPCE的资源需求及其对再平衡频率的敏感度都会随投资组合规模增长得更快。我们还报告了在实际部署中哪些运营决策——再平衡频率、测量次数预算和交易成本意识——影响最大，以及哪些因素的影响没有通常认为的那么大。

1 引言

从庞大的候选资产范围中选取投资组合，本质上是一个组合优化问题：要在指数级数量的可能方案中挑选一个子集进行持有，以便在多元化与集中投资于最具潜力的机会之间取得平衡。Markowitz [1] 将任何此类选择都必须遵守的预期收益与风险之间的权衡形式化，但对于离散且规模庞大的候选集合，精确的均值—方差优化难以处理：一般而言，基数约束投资组合选择是NP难问题 [2]，而金融业实际采用的启发式方法，为了绕开这一难题，以解的质量换取计算可行性，而无法兼顾两者。基于资产相关矩阵进行层次聚类 [3]，风险平价配置和谱图划分，都是同一思路的不同变体——用计算成本低廉的聚类步骤替代离散选择问题；当候选范围扩大到数千个名称时，这些方法的表现都会下降。原因恰恰在于，使近似方法保持高效的做法，也会削弱该方法原本试图还原的多元化结构。这正是促使我们研究用于这一问题的量子启发式组合编码的具体缺口：问题不在于经典方法无法扩展到大规模，而在于那些足以在大规模下高效运行的方法，无法保住所返回答案的质量。

组合优化的量子方法过去一直面临着相反的问题。量子近似优化算法 [4]以及投资组合选择的量子退火方案 [5,6]通常为每个决策变量分配一个量子比特，这使它们在小型实例上具有竞争力，但对于现实投资组合资产集合中相关的问题规模——数百至数千项资产——则远远超出近期硬件的能力范围；这一差距已在多份量子金融综述中得到记录 [2, 7]。Pauli相关性编码（PCE）由Sciorilli等人提出， [8], 它从编码层面而非硬件层面弥合了这一差距：一个 n变量的图切割实例仅使用 $O(\log n)$ 个量子比特表示，通过将每个决策变量编码为高阶泡利关联器的函数，而不是为其分配专用量子比特。随后在经典计算机上优化参数化电路，使其测得的泡利相关器期望值编码出高质量的图割；由于量子比特数量仅随问题规模呈对数增长，Sciorilli等人在多达数百个变量的图切割实例上验证了该方法，其中包括在囚禁离子硬件上的运行——对于同类设备上的每变量一个量子比特编码而言，这些规模仍然无法实现。

然而，这种验证针对的是通用的图割实例，而非专门针对投资组合；并且它是静态的：一个问题实例，只求解一次。Soloviev 和 Krompiec [9] 弥补了第二个空白，将 PCE 直接应用于投资组合构建——资产成为相关性图中的节点，基于 PCE 的图割将其分组为

多元化簇，每个簇选出一个代表性资产，组成投资组合——并表明所得投资组合在真实市场数据上表现出与经典基准相当的竞争力。该研究有意采用静态设计：一份历史相关性快照、一次图割、一个投资组合，并在留出数据上评估一次。

自提出以来，PCE 已迅速扩展，并在越来越多超出最初图割演示的场景中接受基准测试。Padín-Martínez 等人 [10]通过渐进二值化延拓方案，将其扩展至受约束的组合优化；Soloviev 和 Adhikari [11] 将编码本身从离散域推广到连续域数据，以进行经典相关性学习；Alonso 等人 [12] 以及 Reeves 等人 [13] 对 PCE 在图割之外的多种组合问题类别中的性能和拟设选择进行了基准测试，其中包括最大独立集问题；与此同时，Sharma 和 Lau [14]在一项更广泛的 NP难基准问题比较研究中，将其与其他量子比特压缩和量子优化技术一并考察；Yoshioka 等人 [15] 则将其应用于另一个大规模现实世界投资组合问题——电力需求分配，与本文研究的金融应用无关；此外，do Carmo 等人 [16] 表明，在 PCE 中以经典方法推导的偏置进行热启动，可提升旅行商问题的解的质量；这为我们在 §4.7 中评估的流式场景热启动机制提供了先例。这一新兴研究领域表明，PCE 是一种受到持续研究的编码方法，而非仅见于单篇论文的成果；但据我们所知，现有研究均未涉及本文关注的流式、反复再平衡部署场景。

Soloviev 和 Krompiec的静态研究仍是专门针对投资组合检验 PCE 的恰当第一步，但它没有回答部署系统必然面临的问题：实时投资组合经理不会只计算一个投资组合，然后永远持有它。资产之间的相关性结构会持续漂移，任何实际部署都必须定期重新估计该结构，并以滚动方式重新聚类——本文将这种运行方式称为流式或实时运行。这并不是说每次单独计算都必须在毫秒内完成，而是说整个流程——数据摄取、图构建、量子（或量子模拟）优化以及投资组合选择——都必须按照固定的再平衡频率反复运行，并无限期持续下去。

从静态演示转向这种流式场景，会改变需要验证的内容，而这一转变正是本文的研究主题。静态研究只需一次性确定的每项设计选择——用于估计相关性的回溯窗口、每次优化所投入的测量次数、资产选择是否计入交易成本，以及投资组合再平衡的激进程度——都会在流式部署的每次再平衡中反复出现，其成本与收益也会在系统的整个生命周期内累积，而不是只支付一次。流式部署还提出了一个静态研究完全无法提出的问题：当实时资产全集不断扩大时，解的质量和计算成本是否仍然具有优势，因为每次再平衡都会发起一次新的优化调用，而不仅仅是一次。本文其余部分将在真实市场数据上，严格依据实际部署必须选择、而非预先固定的参数，研究 PCE 的两种流式变体——迭代递归二分割方案和联合多切分方案 dPCE。

本文其余部分的组织结构如下。第 2 节形式化两种算法所依据的图切割问题，推导所需的 $O(\log n)$ 量子比特数量，并将 PCE 和 dPCE 定义为两种具体的流式方案。第 3 节将这一通用表述具体应用于投资组合问题：如何根据相关性数据构建市场图、如何将簇转化为可交易投资组合，以及交易成本、可调节的风险厌恶曲线、滚动窗口机制、经典优化器和拟设的选择如何纳入整个流程；每一项均以经典投资组合理论中的相应内容为依据。第 4 节报告实证结果——流式 PCE 和 dPCE 在不同窗口长度、风险厌恶程度及交易成本设置下的表现；两种算法的直接比较；再平衡频率、热启动和测量次数预算的影响；以及扩展至 $N = 5{,}000$ 个候选资产的可扩展性。第 5节总结研究发现，并讨论基于PCE的优化在实践中的部署意义。附录A 介绍全文使用的数据集。

2 方法论

本节介绍 PCE 和 dPCE 作为任意加权图上的算法，以及它们各自优化的损失函数。我们有意采用图论术语来描述二者——称为图切割，而非更具体的“最大割”——因为 §3中的投资组合应用始终采用通用的加权割公式，而为编码交易成本和可调风险特征（同见 §3）所需的损失函数调整，是叠加在这一通用算法之上的金融专属选择，并非算法本身的一部分。

2.1 图切割问题

给定一个加权图 $G = (V,\ E,\ w)$，其中包含 $|V| = n$，切割是对 V 的二分割（或者对于 $k > 2$ 个簇，是 k-分割），为每个节点分配一个离散标签。其值是跨越标签不同节点之间的边权重之和，

$$C(b) = \sum_{(u,v)\in E} w_{uv}\mathbb{1}[b_u \neq b_v], \tag{1}$$

而图切割问题则是寻找使 $C(b)$ 最大化的标记b 。一般而言，这是 NP难问题；PCE 和 dPCE 都通过将其松弛为连续变量，再利用参数化量子电路进行优化，最后舍入回离散标记来近似求解。

2.2 量子比特需求

PCE 使用 m 个量子比特表示一个包含 n 个节点的问题，其中 m 是满足以下条件的最小整数：

$$3\sum_{k=1}^{\text{order}}\binom{m}{k} \;\geq\; n, \tag{2}$$

也就是说，在每个 $\binom{m}{k}$ 个可能的 k 量子比特子集上，必须存在足够多的 $k \leq$ 阶泡利关联器（X、Y、 Z .....阶），其中 $k = 1$，.....，阶），从而为 n 个决策变量中的每一个分配其专属的关联器，而不是专属的量子比特。阶数在量子比特数量与关联器度之间进行权衡：提高阶数会使 m 以组合方式缩小，但会增加拟设必须表达的高阶关联器项的数量和权重。对于资产池规模 N，我们将阶数固定为在模拟器可行预算内保持量子比特数量的最小值，遵循本文始终采用的递进方式（在 $N \in \{50, 100\}$ 时为 $= 2$ 阶，在 $N \in \{200, 300, 1{,}601\}$ 时为 $= 3$ 阶，在 $N = 5{,}000$ 时为 $= 4$ 阶），而不是在每个规模上都优化量子比特效率，因为由此产生的量子比特数量在每个测试的 N （§4.9）下都已足够适宜：在 $N = 50$ 时为 6 个量子比特，在 $N \in \{100, 200\}$ 时为 8 个，在 $N = 300$ 时为 9 个，而在 $N = 1{,}601$ 和 $N = 5{,}000$ 时均为 15 个。

图1总结了整个流程：图构建、量子比特编码、经典-量子优化循环，以及将结果最终离散化为图割。PCE 和 dPCE 使用相同的流程；两者的区别在于每次量子调用所编码的簇标签数量不同，因此损失函数也不同（§2.3–2.5）。

2.3 PCE 损失函数

给定正则化后的（经 tanh 松弛的）关联器值$\tilde{x}_i = \tanh(\alpha \cdot \text{result}_i)$， $\alpha = m^{\,\text{order}/2}$默认情况下，优化器最小化

$$L_{\text{PCE}} \;=\; \underbrace{\sum_{(u,v)\in E} w_{uv}\,\tilde{x}_u\tilde{x}_v}_{\text{cut term}} \;+\; \underbrace{\beta\, v\left(\frac{1}{n}\sum_i \tilde{x}_i^{2}\right)^{2}}_{\text{balance regularizer}}, \tag{3}$$

其中 $v = |E|/2 + (n-1)/4$ 和 $\beta = 0.5$。最小化割项会促使 $\tilde{x}_u\tilde{x}_v \to -1$ （位于相反两侧）的节点对应于高权重边——这是式（1）对于 $k = 2$ 的标准连续松弛——而正则项会惩罚不平衡的划分（所有 $\tilde{x}_i$ 均被固定为同一符号）。本文通篇报告的实际（离散）目标，是在阈值化标签 $b_i = \mathbb{1}[\tilde{x}_i > 0]$上评估式（1）得到的割值 $C(b)$，而不是连续松弛（3）本身。

算法1 PCE：迭代递归二分

要求： 图 $G = (V, E, w)$，目标簇数量 k
$\mathcal{P} \leftarrow \{V\}$ ▷ 从一个包含所有节点
当 $|\mathcal{P}| < k$ **时执行**
  $\mathcal{P}$中的最大簇
  如果 $|S| \leq 2$，**则**
    中断 ▷ 没有有用的内容可供拆分
  结束条件判断
  $G_S \leftarrow G$在 S上的诱导子图
  $m \leftarrow$ 通过方程（2）应用的量子比特 $|S|$
  $b \leftarrow$ 在 3）上优化方程（ G_S，使用 m 量子比特
  $S_0,\ S_1 \leftarrow \{i \in S:\ b_i = 0\},\ \{i \in S:\ b_i = 1\}$
  $\mathcal{P} \leftarrow (\mathcal{P} \setminus \{S\}) \cup \{S_0, S_1\}$
结束循环
返回 $\mathcal{P}$

2.4 PCE：迭代递归二分割

为了从一个 k 簇中生成 n节点图，PCE 将式（3）作为二元（$b_i \in \{0, 1\}$）划分应用，然后递归地重新划分当前最大的结果簇，直到形成 k 个簇——算法 1。这 $k-1$ 次划分都是在（不断缩小的）子簇自身诱导子图上独立进行的量子优化调用，并将式（2）–（3）重新应用于该子图自身的节点数量。由于后续划分作用于规模更小的子图，其量子比特需求不高于第一次划分，因此第一次（完整图）划分的量子比特数量为树中每次调用的上界。

2.5 dPCE：联合多切分

dPCE 不同于前者，它将所有 k 簇直接编码在一次调用中。每个节点 i 被赋予 $\kappa = \lceil \log_2 k \rceil$ 二进制变量b_i^1，.....，b_i^κ（即其以二进制表示的簇标签），方法是将原始的 n节点图复制为 κ 结构完全相同的“层”——构成一个包含 κn 节点的单一联合图，并直接对其应用式（2）。记 $\tilde{x}_i^l$ 节点 i 在第 l层上的正则化值，优化器将最小化

$$L_{\text{dPCE}} = \sum_{(u,v)\in E}(2w_{uv}-1)\prod_{l=1}^{\kappa}\frac{1+\tilde{x}_u^l\tilde{x}_v^l}{2} + \beta v\cdot\frac{1}{\kappa}\sum_{l=1}^{\kappa}\left(\frac{1}{n}\sum_i(\tilde{x}_i^l)^2\right)^2, \tag{4}$$

其中，乘积项是“u、v属于同一簇”的平滑指示函数（≈1当每个比特都匹配时， ≈0若存在任意不匹配的比特），系数 $2w_{uv}-1$ 是相较于在每一层独立应用公式（3）的关键改动：由于$w_{uv} = 1 - |\rho_{uv}|$ （§3）， $2w_{uv} - 1 = 1 - 2|\rho_{uv}|$，因此强相关配对（$|\rho| \to 1$）会获得系数 $\to -1$，从而促使优化器将它们置于同一簇中；而弱相关配对（$|\rho| \to 0$）会获得系数 $\to +1$，从而促使它们分离。若没有这一偏移，

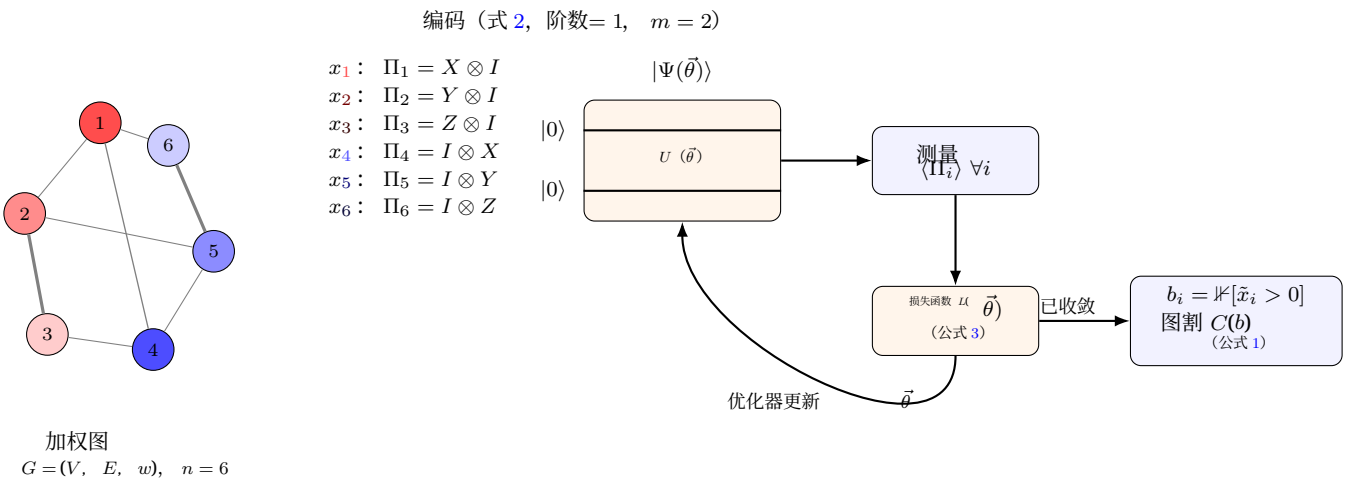


图 1：PCE/dPCE流程，通过一个具体示例演示：一个包含 6 个节点的加权图被编码到 $m = 2$个量子比特上，为每个节点分配一个泡利关联器 Π_i（节点颜色与其关联器的标签相匹配；该顺序= 1、$m = 2$ 公式（2）的实例是一个简化示意——§2.2中的实验使用阶数 $\in \{2, 3\}$）。对一个参数化电路$U(\vec{\theta})$ 进行测量，以获得每个 $\langle \Pi_i \rangle$；经典优化器（橙色，循环运行）更新 $\vec{\theta}$，以最小化基于图割的损失函数，直到收敛；此时，将已收敛的关联器值进行阈值化，得到离散标记 b，并评估实际得到的图割 $C(b)$。PCE 和 dPCE 共用这一流程，区别仅在于每次调用所编码的标签数量以及所使用的损失函数不同（§2.4–2.5）。

强相关配对会对未偏移的损失函数贡献 ≈ 0，并随机分散到各个簇中，而不是被拉到一起。节点的最终标签是由其 κ 阈值化比特解码得到的整数，标签 $_i = \sum_l b_i^l \, 2^{\kappa-1-l}$；而实际目标函数则是离散加权多路割，这是将公式（1）直接推广到两个以上标签的结果。

量子比特—迭代权衡。 公式（2）中的量子比特需求，对于 PCE 的第一次拆分应用于 n 个节点，而对于 dPCE 的唯一一次调用则应用于 κn 个节点—— $dPCE$ 所需的量子比特数量始终至少与 PCE 单次最大调用所需的一样多，并且只要 $\kappa > 1$（即只要请求 $k > 2$ 个簇）就会严格更多。图 2 针对本文小规模实验所使用的簇数量，具体展示了这一点。与此相对，PCE 付出的不是量子比特，而是迭代次数：生成 k 个簇只需 dPCE 进行 1 次量子调用，但 PCE 需要 $k - 1$ — 在 $k = 15$（$N = 300$）中，即14每次再平衡进行单独的优化调用，而 dPCE 只需 1 次。仅从量子比特数量来看，无法判断这种权衡在实际运行时间方面究竟有利于 PCE 还是 dPCE：dPCE 的单次调用运行在更大的电路上（量子比特更多，拟设更深），而 PCE 的多次调用分别运行在更小的电路上，且第一次调用之后的每次调用都作用于不断缩小的子簇（§2.4）。§4.9 直接测量了这一点，结果发现，PCE 更小电路带来的单次调用成本优势超过了需要更多调用所产生的成本，接近于数量级，位于 $N = 300$ ——也就是说，图 2 中的量子比特数量差距是判断哪种算法运行成本更低的可靠先行指标，尽管它本身并不是运行时间测量。

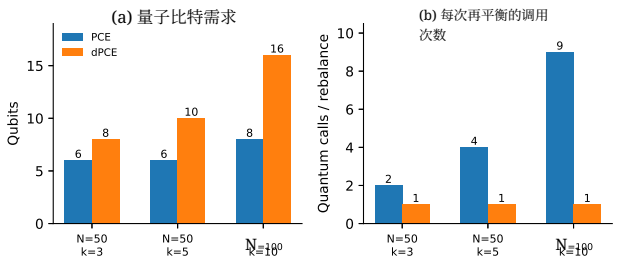


图2：数量级= 2下 PCE 与 dPCE 的比较：(a) 量子比特需求；(b) 每次再平衡的量子调用次数，适用于本文较小规模实验中使用的簇数量。dPCE 的量子比特数量对应于在 κn 节点分层图上的一次联合调用；PCE 的量子比特数量则对应于在完整的 n 节点图上的最大（首次）调用。dPCE 始终需要更多量子比特，但恰好只需调用 1 次；PCE 的量子比特需求较低，但需要调用 $k - 1$ 次。

3 基于 PCE 和 dPCE 的投资组合优化

3.1 市场图构建：资产作为节点，相关性作为边

可投资资产集合中的每个 n 候选资产都是 §2所使用的图中的一个节点。给定一个长度为 T 的历史日收益率窗口（按下文公式（8）加权），资产 u与v 之间的边权重为

$$w_{uv} = 1 - |\hat{\rho}_{uv}|, \tag{5}$$

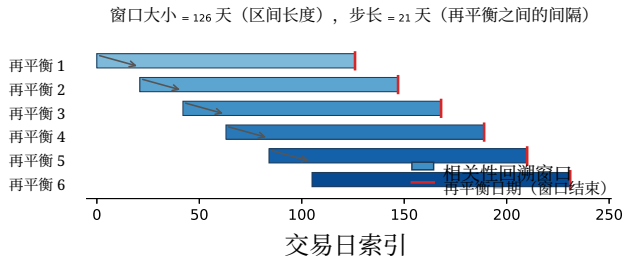


图 3：滚动再平衡示意图：每个条形代表一个长度为窗口_size 天的相关性回溯窗口，红色刻度表示其再平衡日期；相邻窗口之间相隔 step_size 天。

在每个窗口内线性重新缩放为 $[0, 1]$ ，使图割景观的对比度保持一致，不受窗口绝对相关性水平的影响。正是这个符号，使 §2 中的图切割问题转变为多元化目标：高权重边连接的是低相关（或负相关）的资产对，因此最大化割——将高权重边分隔在不同簇中——会把共同变动的资产归为一簇，并将不同步变动的资产分开。低于最小 $|\hat{}\rho|$阈值的边会被直接删除，而不是赋予接近 1 的权重，因此该图反映的是真实的共同变动，而非被当作簇边界的噪声级相关性。

3.2 流式再平衡：窗口与步长

本文中的每项结果都是通过滚动流程得出的，而非一次性计算：在每个再平衡日期，均使用长度为 window_size 的日收益率滚动窗口构建上述相关性图，按上述方法进行聚类并将其转换为投资组合；该组合在样本外持有 step_size 个交易日，随后窗口向前推进 step_size，并重复整个流程。图 3 以直观方式展示了这一机制：相邻窗口重叠 window_size−step_size 天，因此相邻再平衡时的相关性估计并非彼此独立；每个窗口的右边缘（红色刻度）表示计算新投资组合并替换前一个组合的日期。除非将其作为独立变量进行扫描（§4），否则我们采用 window_size$= 126$ 个交易日（$\approx$6 个月）和 step_size$= 21$ （$\approx$1 个月），与常见的机构再平衡频率相匹配。正是这一循环使本文的所有结果有别于 Soloviev 和 Krompiec [9] 的静态研究：每次再平衡都会重新执行完整的聚类流程，因此解的质量、计算成本以及下文各参数的影响会在整个回测期间不断累积，而非只付出一次。在一个窗口内，并非所有日观测值都得到同等对待——§3.7 将说明，在估计公式（5）的相关矩阵之前，如何根据近期性和交易量为 T =window_size 个观测值赋予权重。

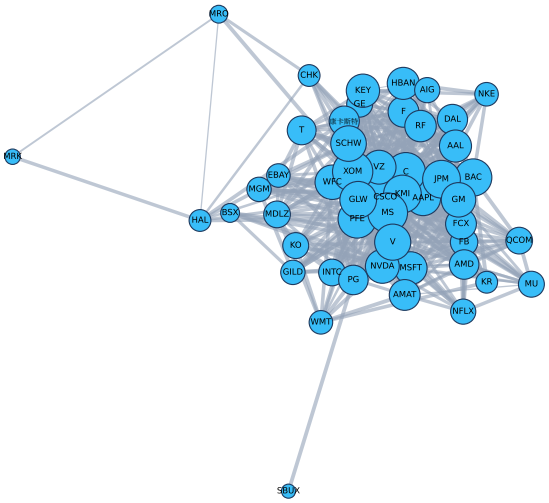


图4：市场图示例， $N = 50$ 交易量最高的标普500指数股票代码，126天窗口。节点大小$\propto$ 度；边宽 $\propto$ 边权重 w_{uv}。

3.3 市场图的实证特性

图 4 展示了这一构造应用于 $N = 50$ 个交易量最高的股票代码，所用数据来自标普500指数数据集，并取回测期内最近的 126 天窗口（节点大小按度缩放；边宽按权重缩放）。表 1报告了该图的标准 NetworkX 描述性统计。关于图切割问题在这一规模下实际求解的 PCE/dPCE，有两个特征值得注意：该图较为稠密（密度 0.39，即39% 的所有可能边都通过了相关性阈值），且聚类程度很高（平均聚类系数为0.70），并且只有一个连通分量——在此窗口中，几乎每个大盘股名称都与其他几乎所有股票存在足够强的相关性，因而不可忽略；少数离群点（例如图 4外围的能源和医疗保健类股票）则各自仅通过一两条边与稠密核心相连，而非完全孤立。这与稀疏、连接松散的随机图属于截然不同的情形：具有单一主导分量的稠密、高聚类图，恰恰是少量切割即可分离出规模较大且内部紧密的社群的结构；这也使图切割形式成为这一规模下合理的多元化启发式方法，而不只是检验泡利编码的紧凑性。

3.4 基于簇的投资组合构建

这些 k 由 PCE(§2.4) 或 dPCE(§2.5) 按照上述构造生成的簇，具有 k 内部相关性，

表1： NetworkX 图 4 的描述性统计。

节点	50
边	483
密度	0.394
平均度	19.32
平均聚类系数	0.699
连通分量	1（全部 50 个节点）
孤立节点	0
平均边权重 w_{uv}	0.772

是彼此实现多元化的资产组。该窗口的投资组合从每个簇中选取一个代表性资产，并采用等权配置；选择依据是下文 §3.5 所述的交易成本感知评分：从每个多元化分组中挑选表现最佳的资产，同时满足 §3.6所述风险厌恶曲线设定的流动性下限。这就是投资组合构建步骤；它是对量子（或量子模拟）聚类输出进行的经典后处理，本身不需要量子调用。

3.5 交易成本

图割决定簇，但它并未考虑从上一窗口的投资组合调整到当前窗口所需的成本。忽略这项成本——每次再平衡时都从头重新优化资产选择——是 §2 的损失函数所隐含的假设，但这并不是对真实交易的良好建模：交易成本（买卖价差、市场冲击、佣金）是任何现实执行框架中的首要考量 [17], ，在选择目标中忽略这些成本，会系统性地高估可实现的经换手率调整后的回报。我们会对已经持有的资产，在其选择评分中增加一个黏性奖励：

$$\text{score}(a) = \text{Sharpe}_{\text{window}}(a) + \tau \cdot \mathbb{1}[a \in \text{held}_{t-1}], \quad (6)$$

因此，只有当候选资产在窗口期内的夏普比率高出τ以上时，先前持有的资产才会被替换。这是一个刻意设计得十分简单的单参数成本模型——以夏普比率计量的固定门槛，而非显式的价格冲击函数——因为它可以直接与现有的簇选择评分结合使用，无需再额外叠加独立的执行成本模型；§4.3将直接评估其对实际换手率的影响。

本文评分及其余部分中始终使用的两个指标需要明确说明。夏普比率$_{\text{window}}$（a）以及第4节报告的每个投资组合层面的夏普比率，均采用相同的计算约定：用相关日收益率序列的年化波动率除年化平均收益（$\sqrt{252}$ 缩放），并隐含假设无风险利率为零。与真正的超额收益夏普比率相比，这会使报告的夏普比率略有上升，尤其是在$N = 5,000$ 回测的 2021–2024 窗口期间，因为当时无风险利率并非微不足道；但所有策略和基准方法均统一采用这一约定，因此它们之间的相对比较不受影响。第4 节及附录A中始终报告的换手率，是指在某次再平衡时，相对于上一次再平衡，被替换的 n_{clusters} 所持仓位占比。

3.6 风险厌恶曲线

经典投资组合理论用一个标量风险厌恶系数 λ 来表示投资者的风险偏好，该系数用于均值—方差效用 $U = \mathbb{E}[r] - \frac{\lambda}{2}$ 方差$[r]$ [1]: 较大的λ 意味着以预期收益换取较低的方差。我们的实现也提供一个标量 $\rho \in [0, 1]$ ，秉持相同思路——作为用户可调的旋钮，在激进型与保守型投资组合之间进行切换——但 ρ 只是操作层面的代理指标，并非 Markowitz 的 λ 本身：它并不直接纳入均值—方差目标函数，而是同时驱动图构建与选择流程中的三种机制：相关性估计的近期性／交易量加权（§3.7）、按交易量排除排名后 $25\rho\%$ 候选项的流动性下限，以及交易成本加成本身（ $\tau = \tau_{\max} \cdot \rho$ 默认值$\tau_{\max} = 0.05$，可独立于 ρ进行覆盖）。将三种机制耦合到一个旋钮上，是一种刻意追求简洁的用户控制设计；它牺牲了单一教科书式风险厌恶系数的可解释性，换来更易于接入实际系统的操作控制；§4将检验这一控制实际表现为平滑调节还是粗略调节，并将其与各机制解耦的方案进行比较。

3.7 相关性窗口加权

不同于在回溯窗口内计算未加权的皮尔逊相关系数，窗口中的每个 T 观测值都会根据近期性和相对交易量进行加权——这是一种指数加权移动估计器，秉承 RiskMetrics方法 [18], 的传统。该方法因在风险管理中推广了用于波动率和协方差估计的指数衰减加权而广为人知，原因正是它能平滑地降低陈旧观测值的权重，而不是通过硬性截断窗口来实现：

$$\lambda = 2^{-1/\tau(\rho)}, \qquad \tau(\rho) = 21 + 231\,\rho \ \text{(days)}, \quad (7)$$

$$w_t \propto \lambda^{T-1-t} \cdot \left(\frac{\text{vol}_t}{\overline{\text{vol}}_t}\right)^{\alpha(\rho)}, \qquad \alpha(\rho) = 2.0 - 2.5\,\rho, \quad (8)$$

归一化为 $\sum_t w_t = 1$。 $\tau(\rho)$ 是近期性半衰期：$\rho = 0$ 对应 21 天的半衰期（近期观测占主导，体现了快速适应的指数加权移动平均估计器的思路），$\rho = 1$ 对应 252 天（接近对整个窗口等权处理，即保守极限）。图5展示了单个 $T = 126$天窗口内三种有代表性的近期性权重分布ρ取值：当 $\rho = 0$ 时，最近几天会显著主导相关性估计；而当 $\rho = 0.5$ 和$\rho = 1$ 时，权重分布几乎平坦，接近未加权

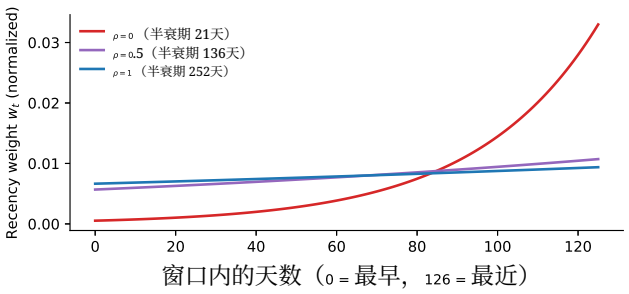


图 5：窗口内观测权重的近期性分量 w_t （公式（8）），经归一化后，在一个$T = 126$天窗口内的三个风险厌恶水平 ρ。

平均值，这相当于普通皮尔逊相关系数中隐含的处理方式。$\alpha(\rho)$ 的范围从 $+2.0$（大幅提高高成交量日的权重）到 -0.5 （降低这些日期的权重）——在ρ 较高时取负值，是对标准指数加权移动平均成交量加权方式的刻意背离：成交量激增往往发生在恐慌／危机时期，此时实现相关性会虚假地趋近于 ± 1（市场压力期间相关性崩溃这一现象已有充分记载），因此，保守的权重分布应降低这些日期的权重，而非强调它们。加权相关矩阵为 $\hat{}\rho_{uv} = \sum_t w_t\,(r_u(t) - \bar{r}_u)(r_v(t) - \bar{r}_v)/(\hat{}\sigma_u\hat{}\sigma_v)$，其中 $\bar{r}$ 和 $\hat{}\sigma$ 是在相同权重下计算的。

3.8 经典优化器和拟设

我们使用COBYQA 作为整个流程中的经典外层优化器（无需梯度，适用于 §4.8 中基于采样的含噪目标函数；在流式部署中，优化循环必须在每次再平衡时无人值守地运行，且无需针对每个实例进行调优）；默认采用硬件高效的 LayeredHEA拟设作为参数化电路（除非另有说明，使用 3 个重复层），并提供固定深度的 BrickworkPCE作为备选方案，但不作为默认方案；默认启用热启动（将上一次再平衡后收敛的参数复用于下一个窗口的初始化），其对解的质量和收敛速度的影响将在 §4.7 中直接测量，而非预先假定。

表2 直接量化了拟设的选择，测量值由电路实现本身计算得出，而非估算得出：在每个测试的量子比特数量（6、8 和 15 个量子比特，与本文其他部分使用的 (N，阶）配置相对应）下，LayeredHEA 使用的参数和门总数都显著少于BrickworkPCE。BrickworkPCE的深度始终固定为 18，不受量子比特数量影响——它没有重复层参数；其结构由三个固定的单量子比特旋转层与砖墙模式纠缠子层交替组成——而LayeredHEA的深度随 n 增长，因为其环形线性纠缠器在每个重复层中由 n 个依次执行的双量子比特门组成。我们还计算了两项标准电路质量诊断指标（每种配置采集 200–300 个随机参数状态向量样本，遵循 Sim 等人 [19] 的方法）：Meyer–Wallach 纠缠能力 $Q \in [0, 1]$ （数值越高，随机参数下的平均多量子比特纠缠越强），以及与 Haar随机系综的可表达性 KL散度（数值越低，电路的输出态分布越接近 Haar 随机，即可表达性越强）。在每种量子比特数量下，LayeredHEA 的纠缠能力都显著高于 BrickworkPCE（$Q \approx 0.91$–0.95 对比 0.58–0.61），尽管其门数量更少——这是因为环形纠缠拓扑每层都会将每个量子比特与其邻居耦合，而砖墙模式采用的是局部交替配对结构。可表达性则没有呈现同样单边的结果：在 $n = 6$个量子比特时，BrickworkPCE 与 Haar 略为接近（KL 散度为 0.107，对比 0.245）；到 $n = 8$ 时，排序反转（LayeredHEA 为 0.045，对比 0.103）；而在 $n = 15$ 时，按此处使用的样本量，两者在统计上都无法与 Haar 区分（两者的 KL 散度均为 ≈ 0 ）——有限样本KL估计会趋于饱和，因为当希尔伯特空间的维度达到 2^n时，随机抽取的保真度对几乎总是接近于零。这是该诊断指标在量子比特数量较大时的已知局限，并不意味着这两种拟设在任何严格意义上都具有相同的可表达性。综合来看，纠缠能力差距是两项发现中更具决定性且更一致的一项，这也与本文始终将 LayeredHEA 作为默认选择相符。

表 2：按量子比特数量 n 列出的拟设资源计数和电路质量诊断指标（LayeredHEA 使用 3 个重复层；纠缠能力和可表达性分别基于 200–300 个随机参数状态向量样本计算）。

拟设	n	参数	量子门（单量子比特/双量子比特）	深度	纠缠容量 Q	表达能力 KL
LayeredHEA	6	18	18/18	21	0.906	0.245
BrickworkPCE	6	26	58/16	18	0.579	0.107
LayeredHEA	8	24	24/24	27	0.933	0.045
BrickworkPCE	8	35	79/22	18	0.599	0.103
LayeredHEA	15	45	45/45	48	0.945	∼0
BrickworkPCE	15	66	150/42	18	0.614	∼0

3.9 基准策略

在全文中，比较基准均为在相同候选范围内等权买入并持有，并在整个回测期间保持不变——这是完全不采用任何聚类流程（无论静态还是流式）的现实替代方案。

3.10 数据来源

实验使用来自三个来源的真实日频OHLCV股票数据，相关数据集将在使用它们的结果旁一并介绍（§4）：用于 $N \leq 300$、上文市场图示例以及方法参数研究的标普500指数5年数据集（2013-02-08– 2018-02-07）；一个包含2,070个股票代码、涵盖1980–2022年的数据集，用于 $N = 1,\ 601$ 大规模

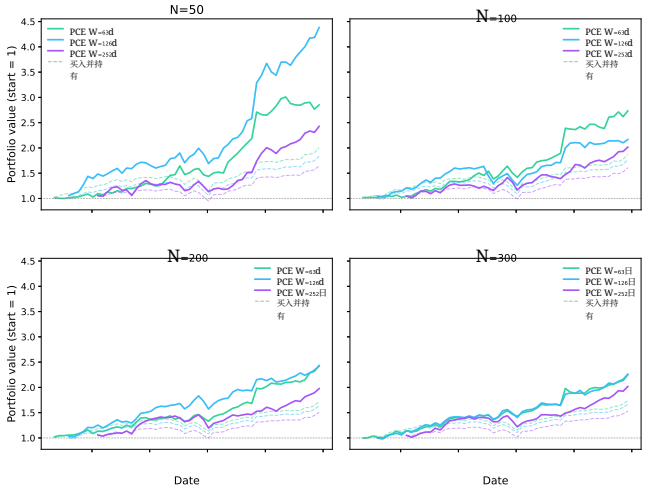


图 6：按资产池规模 N 和相关性窗口长度划分的流式 PCE 累计回报与买入并持有策略的对比。

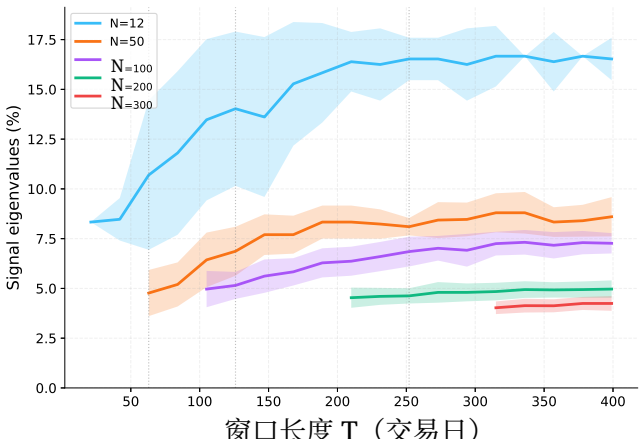


图 7：样本相关矩阵特征值高于马尔可夫–帕斯图尔噪声阈值 λ^+ 的比例与窗口长度 T 的关系，按资产池规模 N 划分（60 次按日自助重抽样的均值 $\pm$ 1 标准差）。曲线从 T 首次超过 N 的位置开始。

结果；以及一个规模更大的数据集，包含9,315个股票代码，涵盖1962–2024年，用于 $N = 5,000$ 结果（§4.9），其中选取了2021–2024年的回测窗口。所有情况下，仅保留在特定回测窗口内价格历史完整（无缺口）的股票代码，并额外筛除单日涨跌幅不合理的任何股票代码（$> 50\%$，即使价格已根据拆股／股息进行调整），以此作为数据质量检查。附录 A报告了全部三个数据集的描述性统计，包括成对收益率相关性分布。

4 结果

除非另有说明，结果均基于标普500指数五年数据集（2013-02-08–2018-02-07，§3.10），窗口_长度=126天，步长_长度= 21天，且 n_{clusters} 缩放比例为 N 作为$\{3, 5, 10, 15\}$用于 $N \in \{50, 100, 200, 300\}$。

4.1 窗口长度敏感性 of 流式 PCE

图6显示了流式 PCE 在不同资产池规模下与买入并持有策略的表现对比 $N \in \{50, 100, 200, 300\}$ 以及相关性窗口 $\in \{63, 126, 252\}$天。PCE 在测试的每一种(N，窗口) 组合下均优于买入并持有策略。对于全部四种资产池规模，126天窗口始终表现最佳；最短窗口（63天）在较小的 N 下表现尚可，但随着 N 增大，表现逐渐落后；最长窗口（252天）则始终表现最差。

一个自然的初步假设是，较长的窗口只是能得到统计上更可靠的相关性估计：每项资产的观测值更多，应会使样本相关矩阵中更多特征值高于 Marchenko–Pastur 噪声阈值 $\lambda^+ = (1 + \sqrt{q})^2$，$q = N/T$从而将真实的共同变动结构与抽样噪声区分开来。图 7对此进行了直接检验：被归类为信号的特征值比例

确实会随着窗口长度单调增加 T 在每个 N 受测的 $T \approx 150$–250 天窗口下均如此，但到 252天左右便趋于平稳，此后基本不再变化——因此无法预测最长窗口（252天）表现最差，而图 6 恰恰显示了这一点。该诊断指标也只有在$N \leq 300$时才有明确意义：要计算满秩样本相关矩阵，必须满足 T 严格大于 N，因此 §4.9 ($N = 1$、601 和$N = 5$、000) 中使用的两个最大资产池规模根本不适用这一诊断指标。综合来看，窗口长度的实证结果更适合用时效性与噪声的权衡来解释，而非单纯的噪声减少效应：按照这一测量方式，较长的窗口确实能降低相关性估计中的噪声，但也会平滑掉更多近期的市场状态变化；§3.7(图 5) 中的近期加权机制，正是为了在不缩短窗口本身的情况下，恢复部分响应能力。我们无法将 126天这一最优结果清晰地分解为这两种相互竞争效应的影响，并将其列为一个有待研究的问题。

4.2 风险厌恶敏感性

遍历风险厌恶曲线ρ $\in\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$（§3.6）在 $N \in \{50, 100\}$时，两种算法的每一种配置都击败了买入并持有策略，无论 ρ（图8）—— ρ并不是一种会破坏收益的安全控制，而是在已有的有利结果中选择曲线。表3 报告了相应的夏普比率：对于任一算法，它们都不会随 ρ 单调变化（例如 PCE，$N = 50$: $6.30 \to 6.93 \to 5.42 \to 7.42 \to 7.77$），唯一部分例外是，所示四行中有三行的 $\rho = 1$ 端点对应着唯一最佳或接近最佳的夏普比率。我们将在 §4.6中进一步讨论这一控制手段究竟有多粗略，以及更好的控制方式是什么。

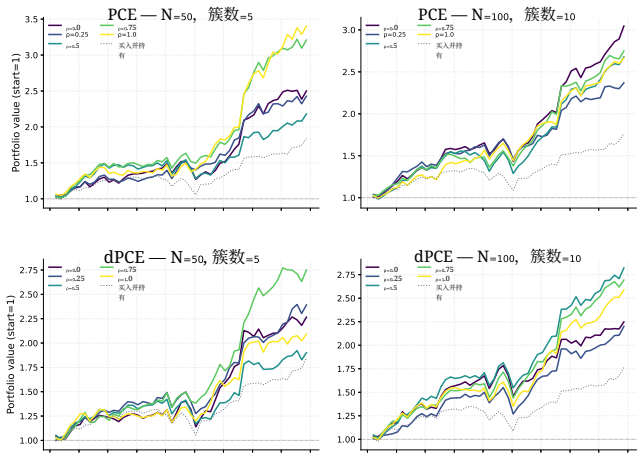


图 8：按风险厌恶水平划分的累计回报 ρ、PCE 和 dPCE。无论 ρ如何，每条曲线均跑赢买入并持有（点线）。

表 3：按风险厌恶水平划分的夏普比率 ρ。买入并持有与 ρ 无关（为供参考，每行报告一次）。

Algo	N	ρ=0	ρ=.25	ρ=.5	ρ=.75	ρ=1	B&H
PCE	50	6.30	6.93	5.42	7.42	7.77	5.09
dPCE	50	5.24	7.13	4.36	7.40	5.04	5.09
PCE	100	8.41	7.26	7.30	7.78	7.89	5.17
dPCE	100	6.17	6.32	8.22	7.60	7.16	5.17

4.3 交易成本敏感性

交易并非没有成本：持仓的每次变动都会产生买卖价差、市场冲击和佣金，而这一现实成本会随着每次再平衡时替换的投资组合规模直接增加 [17] ——这正是最初提出公式（6）中的黏性奖励的原因。抑制换手率是否也会改善已实现的回测收益，事先并不明显：本文全文报告的回测均不考虑摩擦（模拟收益中实际上没有扣除交易成本），因此，加入该奖励只能通过改变每次再平衡时所选的边际资产来改变结果，而不可能通过规避一项从未实际收取的成本来产生影响。与此一致的是，加入该奖励后，总收益的变化没有一致的方向（-53 至 $+56$ 个百分点，涵盖以下 10 种配置）——这一实验并未显示、也无意显示出明确的收益改善。

在所有经过测试的配置中，它始终稳健地显示出换手率本身的减少（表4；均值$11.3\% \pm 2.8\%$，涵盖两种算 $N \in \{50, 100\}$法、 n_{clusters}以及多种配置）：黏性奖励可靠地使策略减少交易。由于实际交易成本正是根据这一数量收取的——买入和卖出的资产，而不是模拟的毛收益——因此，对于实际部署而言，无论这一结果是否

表 4：采用与不采用交易成本感知选择时的均值换手率。

Algo	N	n_{cl}	换手率（不含）	换手率（含）	减少
PCE	50	5	0.525	0.468	10.8%
PCE	50	10	0.496	0.419	15.6%
PCE	100	10	0.570	0.513	9.9%
PCE	100	15	0.521	0.469	9.9%
PCE	100	20	0.482	0.441	8.6%
dPCE	50	5	0.543	0.475	12.5%
dPCE	50	10	0.500	0.440	12.1%
dPCE	100	10	0.558	0.472	15.5%
dPCE	100	15	0.553	0.492	11.1%
dPCE	100	20	0.516	0.481	6.8%
所有配置	–	–	**0.526**	**0.467**	**11.3%±2.8%**

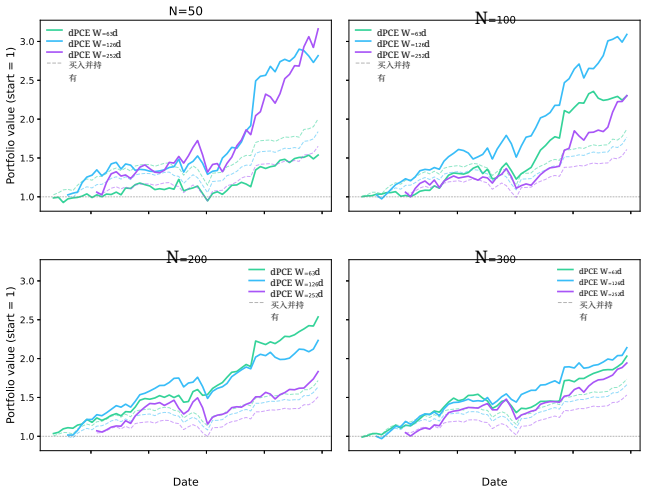


图9：按资产池规模和相关性窗口长度划分的流式 dPCE 累计回报与买入并持有策略的比较。

在上文的无摩擦回测收益中可见。

4.4 流式 dPCE 的窗口长度敏感性

重复 §4.1使用 dPCE（图9）得到相同的定性结论：在所有测试过的 (N、窗口)下，dPCE 都优于买入并持有，而且 126d 再次成为每个 N下的最佳窗口。dPCE 在较小的 N（例如 $N = 50$， W=126d：dPCE $\sim$3.2×对比 PCE $\sim$4.4× ——两者表现相近，且在不同窗口间交替领先），但正如 §4.9 所示，其计算成本随 N增长得要快得多。

4.5 PCE 与 dPCE：直接比较

图 10 在共同最优窗口（126天）将两种算法绘制在同一坐标轴上。两者在每个 N都紧密跟随彼此，领先优势交替易手，而非一方始终占优——在 $N = 50$时，dPCE 在回测的大部分时间里领先；到 $N = 300$时，两者几乎难分高下。在整个 N 区间内，两者的表现都远高于买入并持有。第 4.9节更适合用来区分这两种算

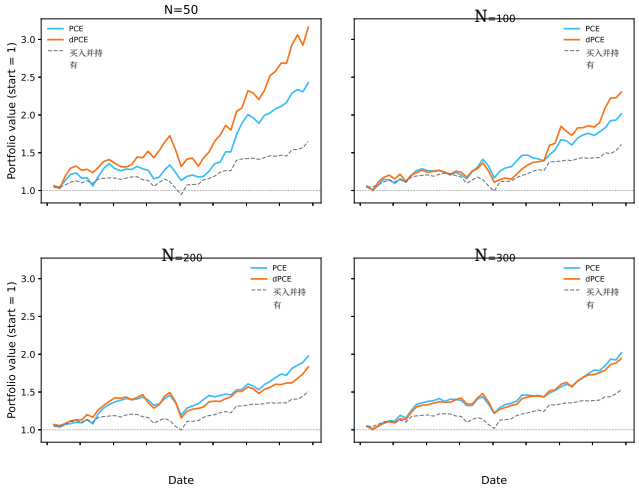


图10：PCE、dPCE 与买入并持有策略， $W = 126$d，按资产池规模 N 划分。

法：该节表明，收益率近乎持平的同时，运行时间扩展性却相差一个数量级；并且，相比 PCE，dPCE 能从频繁再平衡中获得更高的夏普比率。

4.6 再平衡频率与风险厌恶作为控制变量

§4.2 表明 ρ 能够对夏普比率进行非单调控制。相较之下，测试再平衡频率（步_长）作为替代控制变量：换手率随步长单调增加（在一个具有代表性的配置中，跨越一组配置进行考察时，秩相关为 1。00 ），并且在测试的每一种配置中，总收益都与步长呈负秩相关——低频再平衡是一种劣势策略（收益更差且换手率更高），在任何测试配置下都从未是表现最佳的选择。因此，在这两个控制变量中，步_长 是更简洁、可预测性更高的控制变量：会同时改变三个相互耦合的机制，并以非单调方式影响夏普比率，而 步_长只改变其中一个机制，并且会使换手率和收益都呈单调变化。

图 11a 表明，这是一种方向性效应，而非严格的单调效应：对于两种算法，单位换手率收益在最短步长（21天）时最高，在最长步长（126天）时最低，但在63天处出现局部反弹，并非始终平滑下降。图 11b 表明，两种算法对这种敏感性的反应并不相同：在所有测试配置中，PCE 的步长与收益之间的秩相关始终处于一个狭窄的范围 -0.2 至 -0.4区间内，而 dPCE 的范围为 -0.4 至 -0.8，并且随着 N和 n_{clusters} 增加而变得更加负（均值 ≈ -0.6，而 PCE 为 ≈ -0.3，敏感性大致高出一倍）——这种不对称性在图 10中也有定性体现。实际上，这使第 §4.5节所述两种算法之间近乎持平的表现，成为以高频再平衡为前提的结论：dPCE 需要较短的

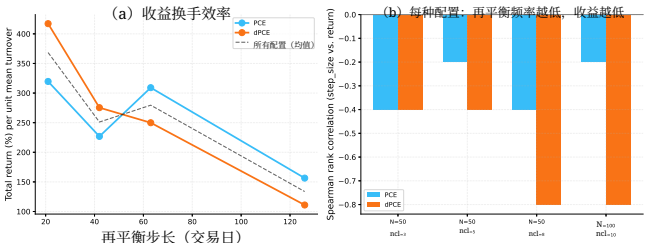


图 11：（a）单位平均换手率的总收益与再平衡步长的关系，比较 PCE 和 dPCE（虚线：所有配置的均值）。（b）按配置统计的步长与总收益之间的 Spearman 秩相关——所有柱形均为负值，且 dPCE 的相关性始终比 PCE 更负。

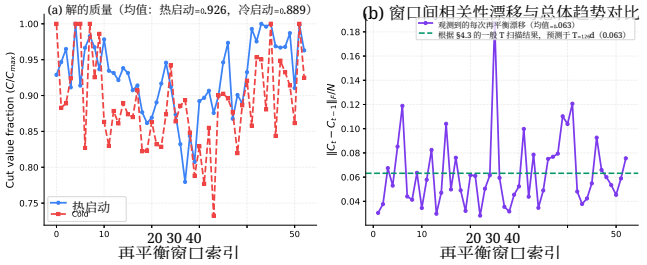


图 12：（a）按再平衡窗口比较热启动与冷启动的割值质量。（b）连续窗口之间观测到的相关性漂移，与总体上漂移随窗口长度变化的趋势进行比较。

步长_才能实现其性能，而 PCE 在较粗的频率下性能下降得更为平缓；因此，只要运营或计算限制迫使再平衡频率降低，PCE 就是更稳妥的默认选择。

4.7 热启动初始化

将前一个窗口中已收敛的拟设参数复用于下一个窗口的初始化（“热启动”），会提高均值割值质量（0.926对比0.889冷启动），但不会减少优化器达到收敛所需的迭代次数——每个窗口的收敛迭代数或达到迭代上限的迭代数都完全相同（图12a）。这是一个真实且坦诚的综合结果：热启动值得保留，因为它能提升质量，但它并不像人们通常认为的那样能加快收敛。图12b 说明了热启动为何说得通：连续窗口相关矩阵之间的弗罗贝尼乌斯距离 $\|C_t - C_{t-1}\|_F/N$较小且稳定（均值为0.063）——连续窗口之间差异不大，这正是将前一窗口的解作为下一窗口良好初始化条件；不过在这里，仅满足这一条件还不足以加快收敛。

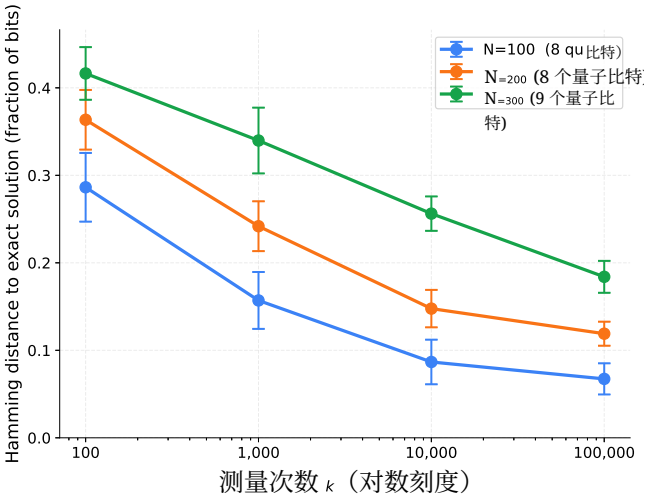


图13：汉明距离与精确解的差异相对于采样次数的变化，均值 ± 标准差，按 N 划分。

4.8 采样次数敏感性

按照 Sciorilli等人 [8]自己的方法——使用精确无噪声模拟进行训练，仅在最终读出时应用测量次数——我们使用无噪声模拟器将 PCE 训练至收敛，参数为 $N \in \{100, 200, 300\}$；随后冻结优化后的参数，再对相同电路进行测量，测量次数为 $k \in \{100, 1{,}000, 10{,}000, 100{,}000\}$，每个$(N,\ k)$进行 30 次试验。对于每个 10^5，采样恢复的比特串与精确解之间的汉明距离都会随测量次数增加而单调缩小（图 13）——测量次数越多，越能可靠地还原精确比特串；即使在测试的最高采样次数下，也没有出现饱和迹象。

上述比特串恢复指标并不能回答使用较少测量次数是否能够保证获得良好解：与投资组合相关的割值质量呈现出不同的情况（图14）。仅经过1,000 次测量，恢复的割值均值就达到精确值的 94– N，并在每个 10^5处一直保持平稳。其机制（图14b）在于，随着测量次数增加仍在翻转的比特，大多属于边权较低的节点（与多元化无关），这些节点的期望值原本就接近零——翻转它们几乎不会改变最终哪些资产被分到哪个簇。汉明距离平等地对待每个比特；投资组合目标则并非如此。

是否能转化为实现的投资组合收益率，可以直接检验：在 $N = 1,\ 601$ 次测量下，运行完整的流式回测，测量次数为 $1,\ 000$ 次和 $10,\ 000$ 次（图 15），总收益基本不变（87.3% 对比 86.2%），而夏普比率从 4.62 升至 5.47 ——这与上述割质量发现一致：增加测量次数主要会缩小相近均值周围的结果离散度，而非改变均值本身。增加 10×测量次数预算并不会带来实质不同的回测结果，只会让结果更平滑。

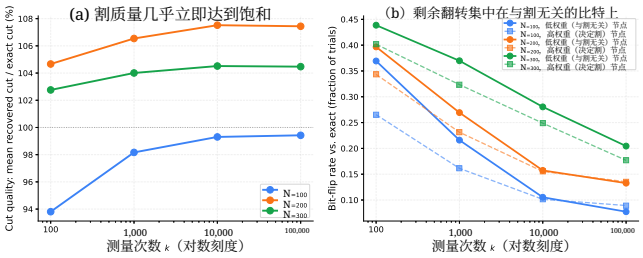


图14：（a）割值质量（即精确值的比例）在 ∼1,000 次测量时达到饱和。（b）随着测量次数增加仍然存在的比特翻转集中在与割无关的节点上。

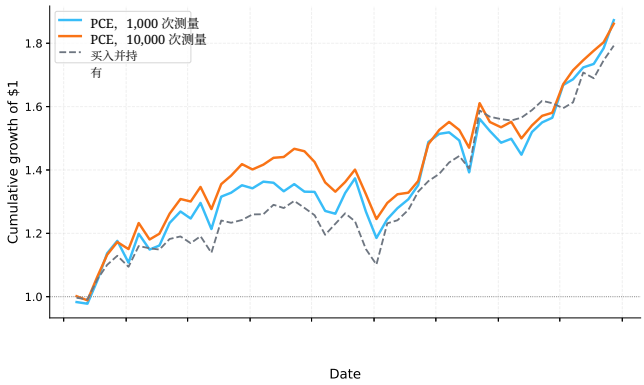


图15：$N = 1,\ 601$：累计回报，$1,\ 000$ 次与 $10,\ 000$ 次测量。

4.9 对大型资产全集的可扩展性

将 §4.1–4.5的范围大幅扩展，远超 $N = 300$：PCE 的运行时间从 ∼13× 增加到 $N = 50$，达到 $N = 300$ (0.5s→6.5s 每次再平衡），而 dPCE 在相同范围内的运行时间则增长 ∼ 111×，达到 (0.65s→73s)——慢了一个数量级，因为 dPCE 的量子比特需求随 κn (§2.5) 增长，而 PCE 的递归划分则作用于不断缩小的子图。因此，以下所有超出 $N = 300$ 范围的结果均仅使用 PCE。

在 $N = 1,\ 601$——比 §4.1–4.5 中测试的最大资产范围扩大了 5.3× ——PCE 的总收益仍优于买入并持有（+87.3% 对 +79.2%，表5、图17），这证实流式部署在远超静态研究所能验证的一个数量级的规模下，仍能创造价值。其优势幅度小于在 $N = 50$ 时的水平（8 个百分点对 254 个百分点），而在这一 N 下，夏普比率略微有利于买入并持有（5.03 对 4.62）。这提醒我们，随着 N 增长，回报与风险调整收益率未必同步变化；因此，值得将 $N = 50$–300 的结果作为趋势持续跟踪，而非视为不受规模影响的结果。

另有一点 $N = 5,\ 000$ （订单= 4，15 个量子比特，$n_{\text{clusters}} = 30,\ 1,\ 000$ 次测量）单独报告，而不作为这一趋势的延续，因为只有在不同且更短的 2021–2024 年时间窗口内，才能达到 5,000个干净股票代码(§3.10)，而非所有上述结果共同采用的 2013–2018 年时间窗口。在这段时期内——

表5：可扩展性进展。 $N = 50$–1，601使用相同的2013–2018年时间窗口； $N = 5$，000使用不同且更近的时间窗口（见正文），因此无法直接比较。

N	PCE收益	买入并持有收益	PCE夏普比率	买入并持有夏普比率
50	338.2%	83.9%	7.94	5.09
300	125.1%	66.4%	6.68	5.37
1,601	87.3%	79.2%	4.62	5.03
5,000†	−11.0%	−17.9%	−0.47	−1.76

†不同的回测窗口（2021–2024）；不能与上方各行直接比较。

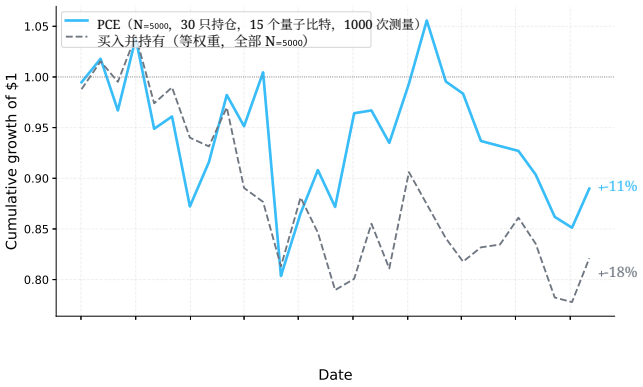


图16：PCE 与买入并持有， $N = 5$，000，2021–2024 时间窗口（与本节其他所有结果的时间段不同）。

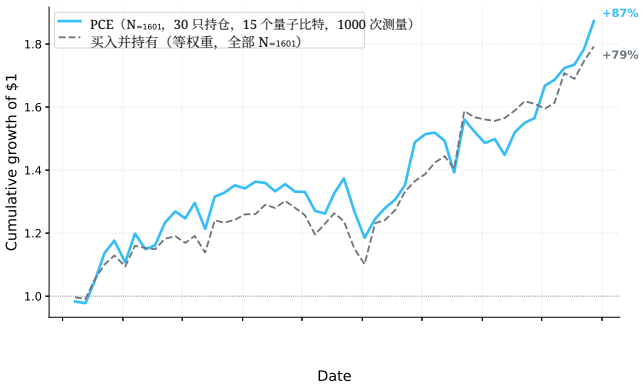


图17：PCE 与买入并持有， $N = 1$，601，与上方所有较小结果相同的 2013–2018 时间窗口。

涵盖了 2022 年成长股和科技股回撤——PCE 和买入并持有的总收益均为负，且 PCE 的亏损较少（-11.0% 对比 -17.9%；夏普比率 -0.47 对比-1.76，表 5，图 16）。这一结果本身就很有参考价值——在 $N = 5$，000的规模下，流式部署在 $N \leq 1$，601 结果完全未涵盖的市场状态下，仍优于被动基准——但在这一个数据点中，时间窗口与规模相互混杂，因此不应将其视为直接证据，不能据此判断在原始时间窗口下， $N = 1$，601 的优势幅度在 $N = 5$，000 规模下会继续缩小还是扩大。

本文使用的两个窗口，实质上分别是疫情前和疫情后的测试：上方每个 N ≤1,601的结果均采用2013–2018年这一持续的疫情前牛市数据，在此期间，PCE和买入并持有在每个 N （表5）中都取得了大幅正收益；而 $N = 5$，000的窗口（2021–2024）始于2020–2021年疫情后复苏行情结束后不久，并贯穿2022年加息驱动的成长股和科技股回撤——在这一时期，股票市场整体下跌，而不只是波动性更大。这才是判断PCE是否仅在基础市场上涨时创造价值，抑或其构建的多元化配置在市场不涨时也能限制损失的恰当市场环境。图16背后的再平衡层级明细对此给出了直接答案：整个回测期间，PCE的最差时点是2022-06-02，投资的每一美元跌至0.804（−19.6%）；相比之下，买入并持有的最差谷底为0.778（−22.2%），出现在2023-10-04——PCE在最差时点的损失更小，而不仅仅是平均损失更小。更值得注意的是，在该窗口的29个再平衡日期中，PCE有4次恢复至累计回报为正（高于最初的1美元），并于2023-02-02达到+5.6%的峰值；而买入并持有仅在29个日期中的2个日期高于水面，且在2021-10-01之后再未超过水面——此时距回测开始还不到三个月。因此，尽管两种策略的总体收益标题值 $N = 5$,000均为负数，PCE经过多元化和重新聚类的投资组合整体上并非只是“负得较少”——在若干时点

在回撤进行到相当程度时，它实际上已经领先于自身的初始资本，而被动基准在同一时期内此后再也未能达到这一水平。

5 结论与讨论

本文探讨了PCE的静态全历史承诺 [9]在转向实时滚动部署后是否依然成立，答案是肯定的，其适用规模达到了静态研究或每项资产使用一个量子比特编码所无法企及的高出一个数量级的水平。在所测试的资产池规模（$N = 50$–300）、相关性窗口、风险厌恶水平和再平衡频率的每一种组合下，本文引入的两种流式变体——PCE的迭代递归二分割和dPCE的联合多划分——均无一例外地击败了等权买入并持有基线。这一优势一直延续到 $N = 1$，601，比小规模实验的 $N = 300$ 上限提高了 $5.3\times$ ，从而证实PCE的 $O(\log n)$量子比特压缩并非静态快照的产物：一旦相关性图、聚类和投资组合选择都按照滚动时钟重新运行，它仍能持续创造价值，同时也带来了相应的复合成本与收益。

然而，本文最重要的结果并非上述牛市数据，而是在 2021–2024 这一时间窗口中，投资额为 $N = 5$,000 时的表现；该窗口涵盖了后疫情增长与科技

回撤，而非每个较小规模的N结果所采用的持续牛市。若一种量子启发式投资组合方法只有在市场上涨时才能创造价值，那它就只是个新奇事物，而非可实际部署的方案。事实并非如此：PCE 的总收益损失小于买入并持有（-11.0%，而 -17.9%），单次最差表现也较好（-19.6%，而-22.2%）；在若干次再平衡后，PCE 的投资组合价值重新回到初始资本之上，而买入并持有在该窗口最初几个月后便再未恢复。表现逊于基准方法下跌幅度较小，本身就是一项成果，并非牛市数据之外的安慰奖——这直接证明，图割目标函数所构建的多元化确实发挥了作用，尤其是在资本保全最为重要的市场状态下；而疫情前的窗口完全无法展现这一点。我们将此结果视为一个数据点，其规模与市场状态相互混杂（§4.9），而非与$N = 50$–$1,601$ –并列的第二个清晰趋势；但它最直接地回答了这种方法在上涨市场之外是否有用，答案是肯定的。

尽管在原始收益率上密切跟踪彼此，但在实践中，PCE 和 dPCE 并不可互换。当请求的簇数量超过两个时，dPCE 的单次联合调用所需的量子比特严格多于 PCE 最大规模的分拆调用，并且其运行时间随 N （§4.9）的增长大致恶化一个数量级；其对再平衡频率的敏感度也接近 PCE 的两倍，而且这种敏感度会随着 N 和 n_{clusters} （§4.6）的增加而增强。只有在实现其性能所需的两个条件——小到中等规模的资产范围和较短的再平衡步长——都能够同时满足时，dPCE 才是更好的选择；只要任一约束成立，PCE 就是更稳妥的默认方案，这也是本文唯一将其延续到$N > 300$ 的算法。

在流式部署必须实际选择而非一次性固定的运行参数中，再平衡频率是更清晰的控制项：步长_大小会使换手率和总收益沿同一方向单调变化（§4.6），而风险厌恶调节参数 ρ会同时改变三个相互耦合的机制，并以非单调方式影响夏普比率（§4.2）——它适合在已有的有利结果中进行配置文件选择，而不是像教科书意义上那样作为降低风险的控制项。经过测试的每一种资产池规模中，126天相关性窗口始终表现最佳，但我们无法完全分解其原因：Marchenko–Pastur 信号占比诊断（§4.1）证实，较长窗口能够给出统计上更清晰的相关性估计，然而仅凭这一点应当预测最长窗口表现最好而非最差——更可能的解释是陈旧性与噪声之间的权衡，而§3.7 中的近期加权机制只能部分解决这一问题，因此我们将清晰的分解留待未来工作。热启动能够提高解的质量，但不会加快收敛（§4.7），1,000 次测量已经使实现的投资组合收益率在$N = 1{,}601$ 处趋于饱和，继续增加测量次数只会使围绕同一均值的离散程度进一步收紧（§4.8），并且交易成本感知型选择可感知交易成本的方案平均可将换手率降低11。3%，且不会对（无摩擦）回测收益造成可检测的损失（§4.3）——如果按照任何现实的佣金率计入成本，这种换手率减少就是真正的效率提升，而不是以收益为代价的权衡。

本研究的范围界定带来了四项局限；其中前两项与应如何解读上述核心数值最为直接相关。第一，所有比较都是针对整个完整候选范围上的等权买入并持有，而不是针对持仓数量相匹配的基准方法：从同一资产范围中均匀随机选取 k 个标的构成的投资组合，在许多市场状态下也可能跑赢全范围等权基准，其原因与聚类质量无关（仅集中度和特异波动率效应就足以造成这种结果）。本研究没有设置随机选取k 个标的的对照，因此上述结果表明，PCE/dPCE 选出的投资组合优于现实中的被动替代方案，但并不能单独证明图切割选择具体优于同等集中度却任意构成的方案——这种分解是目前最有信息价值的缺失实验，也是自然的下一步。第二，本文的每个数值都是每种配置对应的单条历史路径上的点估计：我们没有针对任何差异报告自助法置信区间或显著性检验，包括 $N = 1$、601 收益差距，以及仅根据少至四种配置计算出的秩相关性数值（§4.6）；所报告的每项效应方向在所测试的配置中都保持一致，但其在重采样下的统计可靠性尚未得到确立。第三， $N = 5$、000 的结果只是一个数据点，其中规模和市场状态变化同时发生；要将二者分离，需要在类似 2013–2018 的时间窗口上进行受控的 $N = 5$、000次运行，或在较小资产池规模下使用更长且更干净的后疫情数据集，而这两者在本研究中都无法获得。第四，dPCE 对再平衡频率日益增强的敏感度，随着 N 的增加，仅在达到 $N = 100$之前进行了刻画；在 PCE 单独评估所覆盖的资产池规模（N 最高达到 5、000）下，这种敏感度是否会继续恶化、趋于平稳或反转，仍是未知数。上述四项都是对本文已构建流程的可行扩展，而非对流程本身的改变。本文所确立的结论更为狭窄，但我们认为也更具支撑作用：PCE 的量子比特高效编码不仅是静态基准测试中的结果，也是一项能够经受实时、反复再平衡部署中现实摩擦的特性；这甚至适用于唯一一个市场状态——持续下跌——在该状态下，多元化方法尤其需要证明自己并非只是顺势搭乘上涨潮流。

参考文献

[1] Harry Markowitz. 投资组合选择。《金融学杂志》，7(1):77–91, 1952年。[2] Daniel J. Egger, Claudio Gambella, Jakub Marecek, Scott McFaddin, Martin Mevissen, Rudy Raymond,

Andrea Simonetto、Stefan Woerner 和 Elena Yn- durain。金融领域的量子计算：现状与未来前景。*IEEE*量子工程汇刊，1:1–24, 2020年。[3] Marcos López de Prado。构建能够在样本外表现更优的多元化投资组合。《投资组合管理杂志》，42(4):59–69, 2016年。[4]Edward Farhi、Jeffrey Goldstone 和 Sam Gut- mann。一种量子近似优化算法。2014年。网址 https://arxiv.org/abs/1411.4028。arXiv:1411.4028。[5]Gili Rosenberg、Poya Haghnegahdar、Phil God- dard、Peter Carr、Kesheng Wu 和 Marcos López de Prado。使用量子退火机求解最优交易轨迹问题。*IEEE*信号处理精选主题期刊，10(6):1053–1060, 2016年。[6] Román Orús、Samuel Mugel 和 Enrique Lizaso。金融领域的量子计算：概述与前景。《物理评论》，4:100028, 2019年。[7] Dylan Herman、Cody Googin、Xiaoyuan Liu、Yue Sun、Alexey Galda、Ilya Safro、Marco Pistoia 和 Yuri Alexeev。金融领域的量子计算。《自然评论：物理》，5(8):450–465, 2023年。[8]Marco Sciorilli、Lucas Borges、Taylor L. Patti、Diego García-Martín、Giancarlo Camilo、Anima Anandkumar 和 Leandro Aolita。迈向使用少量量子比特的大规模量子优化求解器。《自然·通讯》，2025年。网址 https://arxiv.org/abs/2401.09421。arXiv:2401.09421。[9] Vicente P. Soloviev 和 Michal Krompiec。使用 Pauli相关性编码进行大规模投资组合优化。《科学报告》，16(1):25158, 2026年。doi: 10.1038/s41598-026-54244-2。网址 https://doi.org/10.1038/s41598-026-54244-2。预印本：arXiv:2511.21305。

[10] Jacobo Padín-Martínez、Vicente P. Soloviev、Alejandro Borrallo-Rentero、Antón Rodríguez-Otero、Raquel Alfonso-Rodríguez 和 Michal Krompiec。渐进式二值化——Pauli 相关性编- 码：用于约束优化的延拓法。2026年。URLhttps://arxiv.org/abs/2602.17479。arXiv:2602.17479。

[11] Vicente P. Soloviev 和 Bibhas Adhikari。《使用连续域泡利关联编码对经典相关性进行量子学习》。2026年。链接https://arxiv.org/abs/2604.05637。arXiv:2604.05637。

[12] Fernando Alonso、Colomán Samprón、Jacobo Veiga、Mariamo Mussa Juane 和 Andrés Gómez。《不同优化问题的泡利关联编码基准测试》。2026年。链接 https://arxiv.org/abs/2606.18914。arXiv:2606.18914。

[13]Cian C. Reeves、Aaron C. Kemp、Richard Pad- bury、Eva Lia Tarquini、Christoph Kloeffel、Vedangi Pathak、Hamed Mohammadbagherpoor 和 Vin- cent Beltrani。最大独立集问题中 Pauli 相关性编- 码拟设的基准测试。2026年。URLhttps://arxiv.org/abs/2610.03949。arXiv:2610.03949。

[14]Monit Sharma 和 Hoong Chuin Lau。利用量子优化技术求解组合优化基准问题的比较研究。2025年。网址https://arxiv.org/abs/2503.12121。arXiv:2503.12121。

[15]Takuya Yoshioka、Keita Sasada、Riku Usuki、Yuichiro Nakano 和 Keisuke Fujii。通过 Pauli 相关性编码实现量子比特高效的变分量子优化：应用于大规模电力需求组合优化。《物理评论应用》，26:044004，2026年。doi：10.1103/ 568y-4264。网址 https://doi.org/10.1103/568y-4264。预印本：arXiv:2607.24722。

[16]Rafael S. do Carmo、Renato Gomes dos Reis、Samuel Fernando F. Silva、Luiz Gustavo E. Arruda 和 Felipe F. Fanchini。旅行商问题的 PCE 热启动。《巴西物理学杂志》，56(1):49，2026年。doi: 10.1007/s13538-025-01966-9。网址 https://doi.org/10.1007/s13538-025-01966-9。预印本：arXiv:2509.14414。

[17] Robert Almgren 和 Neil Chriss。投资组合交易的最优执行。《风险杂志》，3:5–40，2000年。[18] J.P. Morgan/Reuters。Riskmetrics——技术文档。技术报告，J.P. Morgan，1996年。[19] Sukin Sim、Peter D. Johnson 和 Alán Aspuru-Guzik。量子-经典混合算法中参数化量子电路的可表达性与纠缠能力。《先进量子技术》，2(12):1900070，2019年。

A 数据集

本附录介绍了 §4 中使用的三个日频 OHLCV 股票数据集，并报告各数据集的描述性统计。这些统计直接根据相应实验实际使用的筛选后价格序列计算得出（§3.10），而非基于原始源文件。

A.1 数据源与筛选标准

表6 总结了这三个数据源。所有情况下，均先固定回测窗口，然后仅保留在该窗口内每日收盘价完整（无缺口）的股票代码；任何单日涨跌幅超过50% 的股票代码，即使价格经过拆股／股息调整，也会作为数据质量检查而被剔除（§3.10）；表中列出了筛选前后的股票代码数量。

$N = 50$–300结果以及 §3.3 中的市场图示例使用标普500指数数据集； $N = 1,601$ 结果（§4.9）使用限定在相同2013–2018 年时间窗口内的`prices.csv` 数据集； $N = 5,000$ 结果使用`all_stock_data.csv` 数据集，时间窗口为2021–2024。三个数据集中，只有该数据集拥有足够多同时无缺口的股票代码，能够达到$N = 5,000$。

表 6：§4。

数据集	原始股票代码	时间窗口	完整	清洁（N）
标普500指数，5年	505	2013-02-08–2018-02-07	470	470（使用300）
prices.csv	2,070	2013-02-08–2018-02-07	1,671	1,601
all_stock_data.csv	9,315	2021-01-01–2024-01-01	6,869	5,049（使用5,000个）

A.2 配对收益相关性

表7报告了每个干净股票 universe 中所有股票代码对的日收益两两相关性 $\hat{\rho}_{uv}$（公式（5）的输入）的汇总统计量，图18展示了完整分布。三者均呈单峰分布，且中心明显高于零，这与股票收益预期的共同因子结构一致；但其中心位置和离散程度会因资产范围构成和时期而异：$N = 300$标普500指数子集在相同的五年窗口内均为大盘股，且都属于同一指数，其两两相关性的均值最高（0.278），负尾部最薄（低于零的配对仅占0.3%）；在相同窗口内，范围更广的 $N = 1,601$ 个资产范围的相关性分布则不那么一致（均值为0.230，负相关占1.3%），这与其涵盖的行业板块和市值比标普500指数本身更为多样相符；而在时期不同、市场波动更剧烈的2021–2024窗口内， $N = 5,000$ 个资产范围的相关性均值最低（0.166），负尾部也最重（配对占7.0%）。这一点本身也为§4.9所报告的该时期负收益提供了有用的交叉检验——这个样本确实来自一个更不利、横截面分散程度更高的状态，而不仅仅是规模更大。在所有三种情况下，§3的图切割构造仍有可利用的对比：即便是均值相关性最低的资产范围，相关性高于 $\hat{\rho} = 0.5$ 的配对也占1.5%，并且存在不可忽视的负相关尾部，两者其中，公式（5）的边权重变换旨在将其分离到不同的簇中。

表7：每个数据集的成对相关性统计（干净股票 universe）。

资产范围	均值	中位数	标准差	% < 0	% > 0.5	配对
标普500指数，$N=300$	0.278	0.267	0.118	0.3	3.8	44,850
prices.csv，$N=1,601$	0.230	0.222	0.111	1.3	1.7	1,280,800
all_stock_data.csv，$N=5,000$	0.166	0.147	0.134	7.0	1.5	12,497,500

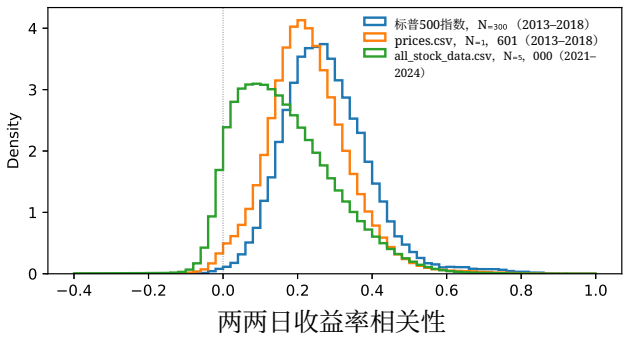


图18：在三个结果各自使用的干净股票 universe 中，成对每日收益率相关性的分布 $\hat{\rho}_{uv}$，该相关性是在实验所使用的确切时间窗口和股票代码集合上计算得到的。