arXiv:2611.32771v1 [math.AT] 24 Nov 2026

扭曲 L^2-扭转函数阻碍圆上的纤维化

¨SAM HUGHES 和 WOLFGANG LUCK

Abstract. 闭流形的万有覆盖的 L^2-Betti 数的消失是其在圆上进行纤维化的一个障碍。当L^2-Betti 数消失时，我们引入一种基于扭曲 L^2-扭转函数在 0 和 ∞处的渐近行为的次级障碍。我们给出了一些例子，表明该不变量确实是非平凡的。

1. Introduction

如果我们可以将紧流形视为一个纤维丛$F \to M \to S^1$ ，其中 F 是一个紧流形，那么称该紧流形在圆上<样式 id='2'>进行纤维化 。有两个重要结果涉及双曲流形。首先，Agol 对 Thurston 关于 [32,第 380]页“每个闭双曲 3-流形是否都能虚纤维化到圆上”的问题给出了肯定的解决方案 [1]。其次，Italiano–Martelli–Migliorini 将一个带尖点双曲 5-流形纤维化到圆上 [14]。

将闭流形纤维化到圆上的障碍很少。其中主要障碍之一是 L¨uck 关于 [21] 非零 L^2-Betti 数的定理，详见第 2.B 节。Kielak [17] 证明，对于有限生成的 RFRS 群，第一个 L^2-Betti 数的消失是该群实际上存在一个到 $\mathbb{Z}$ 的、具有有限生成核的同态的唯一障碍，见定理 2.3。Fisher [8] 将 Kielak 的结果推广到了更高维情形。也就是说，一个属于 FP$_n(\mathbb{Q})$ 型的 RFRS 群实际上存在一个到 $\mathbb{Z}$ 的、其核属于 FP$_n(\mathbb{Q})$ 型的同态，当且仅当所有维度为 $\leq n$ 的 L^2-Betti 数都消失，见定理 2.4。在 [12] 中，构造了具有 RFRS 基本群且 L^2-Betti 数消失、但不能实际上在圆上纤维化的闭流形例子。

我们将在定理 4.4 中提出一个关于纤维化的新次级障碍。它涉及 L^2约化-扭结函数

$$\rho^{(2)}(\widetilde{X};\phi) \in \mathcal{E}$$

一个 L^2-无圈连通有限 CW-复形 X 的，定义见第 2 节。称其为次级障碍，是因为只有在满足第一个条件，即所有 L^2-贝蒂数均为零时，它才有定义。

定理 1.1（定理 4.4）。设 X 是一个连通有限 CW-复形，满足以下等价条件之一：

(i) 存在一个连通有限的 CW-复形 F，使得 X 与某个自同伦等价 f：$F \xrightarrow{\simeq} F$的映射环面 T_f 同伦等价；

Date：2026年11月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 55R10（主要）；57Q10、58J52、46L99（次要）。*Key words and phrases.*
圆上的纤维化、 L^2-扭结函数及其渐近行为。

(ii) 存在一个纤维化 $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^1$，使得 E 与 X 同伦等价，并且 F 是一个连通有限的 CW-复形。

则：

(i) 对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$L^2$-*Betti* 数 $b_n^{(2)}(\widetilde{X})$ 均为零；*(ii)* 设 $\phi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}$ 是与 T_f 相关联或由投影 $p\colon E \to S^1$的 $\pi_1(p)$ 导出的满射群同态。假设 $\pi_1(X)$ 是剩余有限的，并且满足 *Farrell–Jones* 猜想。

则存在元素 T_0、$T_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$ 以及 $\rho(X;\phi)$ 的一个代表元 $\rho\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^{\sim}$，满足

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < T_0; \\ \chi(F) \cdot \ln(t) & \text{for } T_\infty < t. \end{cases}$$

$^{\sim}$特别地，$^{-}\rho(X;\phi)$ 是特殊的。

如果存在一个代表元满足定理的结论，则称这里的 ϕ-扭曲 L^2-扭结是特殊的，也就是说，存在元素 T_0、$T_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$、一个整数 k，$^{\sim}$以及 $\rho(X;\phi)$ 的一个代表元 $\rho\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$，满足 $^{-}$

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < T_0; \\ k \cdot \ln(t) & \text{for } T_\infty < t. \end{cases}$$

我们通过计算右角阿廷群的整数特征对应的 ϕ-扭曲 L^2-挠量函数，证明该障碍非平凡。取 L 为实射影平面的最小旗三角剖分，可得一些并非特殊的特征例子，参见例 6.3。

定理 1.2 (定理 6.2)。设 L 是一个 $\mathbb{Q}$-无圈旗复形，A_L 是以 L 为顶点集的右角阿廷群，且 $\phi\colon A_L \to \mathbb{Z}$ 是一个群同态。定义两个常数

$$\begin{aligned} C_L &= \sum_{i \geq 2} (-1)^i \cdot \ln(|\mathrm{tor} H_{i-1}(L)|); \\ C_\phi &= \sum_{v \in L^{(0)}} |\phi(v)| \cdot \overline{\chi}(\mathrm{Lk}_L(v)). \end{aligned}$$

那么，$\rho^{(2)}(A_L;\phi)(t)$ 的一个代表元 ρ 可表示为

$$t \mapsto \begin{cases} C_L - C_\phi \cdot \ln(t) & t \geq 1; \\ C_L & t \leq 1. \end{cases}$$

我们还考察了其他一些例子。在第 5 节中，我们详细讨论 $G = \mathbb{Z}$ 和 $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ 的特殊情形，并将 ϕ-扭曲挠量函数与 Alexander 多项式联系起来。在第 6.A 小节中，我们重新考察 [12] 中的一个例子，并证明其 ϕ- 扭曲 L^2- 挠量函数是特殊的。在第 6.C 小节中，我们计算半直积 $\Gamma = G \rtimes_\Theta \mathbb{Z}$ 的 ϕ-扭曲 L^2-挠量函数，其中 Γ 无挠且剩余有限，G 相对于一族几乎多循环群双曲，而 Θ 多项式增长。读者可将这一结果与 [13, 定理 7.19] 进行比较。最后，在第 6.D 小节中，我们计算与矩阵 $3g + 2e$ 关联的算子的 ϕ-扭曲L^2-挠量函数，并证明它并非特殊。这与 [12] 中构造的反例尤为相关。

论文结构。本文的组织如下：

Contents

1. 引言 论文结构 致谢 人工
智能声明 2
1 3 2. 预备知识 3 2.A. 链复形映射环面的基础知识 3 2.B. L^2-Betti 数是圆周3
纤维化的障碍 2.C. 链复形的 ϕ-扭曲 L^2-挠量函数回顾 5 2.D. ϕ-扭曲 L^2-挠量函数的基本设置 5 2.E. ϕ-扭曲 L^2-挠量函数的基本性质 8 2.F. CW-复形的 ϕ-扭曲 L^2- 挠量函数回顾 9 2.G. 万有覆盖的约化 L^2- 挠量函数的基本性质 9 2.H. 纤维化公式 11 3. 谱半径与连续性 11 3.A. L^1-范数与谱半径 11 3.B. Fuglede–Kadison 行列式的连续性 13 4. ϕ-扭曲L^2-挠量函数所导致的纤维化障碍与虚纤维化 13 4.A. T_0-值与 T_∞-值以及特殊性质 13 4.B. 映射环面的特殊性 14 4.C. 特殊性质是圆周纤维化的障碍 S^1 164.D. 对群的应用 17 5. 无限循环群的特殊情形 18 5.A. $\mathbb{Z}$ 18上的 Fuglede–Kadison 行列式 5.B. Alexander 多项式 19 5.C. 首项系数与映射环面 21 5.D. 首项系数与矩阵 3g+2e 23 6. 例子 23 6.A. 非球面反例与特殊性质 23 6.B. 右角阿廷群的扭曲挠率 24 6.C. 双曲群的多项式增长自同构 25 6.D. 再探矩阵 3g+2e 26 参考文献 26

致谢。 SH 获得了波恩大学的洪堡研究奖学金以及波恩马克斯·普朗克数学研究所的支持。本文由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）根据德国卓越战略资助——GZ 2047/1，项目编号390685813，波恩豪斯多夫数学中心。

人工智能声明。 作者在准备本文时未使用人工智能。

2. Preliminaries

2.A. **链复形映射环面的基础知识**。 对于一个连通有限CW复形 X 以及一个群满同态 $\phi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}$，以下断言已知彼此等价：

(i) 存在一个纤维化 $F \to X \xrightarrow{p} S^1$，使得 F 是一个连通有限 CW-复形，并且 $\pi_1(p) = \phi$;

(ii) 存在一个连通有限 CW-复形 F、一个自同伦等价$f\colon F \xrightarrow{\simeq} F$，以及一个同伦等价 $u\colon T_f \to X$，其源空间是 f 的映射环面，并且对于典范投影 pr: $T_f \to S^1$，有 $\phi \circ \pi_1(u)\colon \pi_1(T_f) \to \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$是 π_1(pr)；(iii) 与ϕ 相关联的无限循环覆盖 $q\colon X \to X$ 的总空间 X 同伦等价于一个连通有限 CW-复形。

接下来我们解释这一事实的链复形版本。

设 $\Psi\colon S \xrightarrow{\cong} S$是一个环自同构。记 $S_\Psi[t,t^{-1}] = S_\Psi[\mathbb{Z}]$为系数取自 S的 $\mathbb{Z}$的 Ψ-扭曲群环。设 D_* 为一个 S-链复形。设$f_*\colon D_* \to \Psi^* D_*$ 为一个 S-链映射，其中 $\Psi^* D_*$ 是通过关于 Ψ的限制从 D_* 得到的 S-链复形。我们得到一个 $S_\Psi[t,t^{-1}]$-链映射

$$\widehat{f}_*\colon S_\Psi[t,t^{-1}] \otimes_S D_* \to S_\Psi[t,t^{-1}] \otimes_S D_*$$

其将 $r \otimes x$（对于 $r \in S_\Psi[t,t^{-1}]$）和 $x \in D_n$ 发送到 $r \otimes x - rt^{-1} \otimes f_n(x)$。

在下文中，如果一个链复形是有限生成且有限维的，我们称其为有限。

定义 2.1（链映射的映射环面）。将 $T(f_*)$of f_* 定义为由 $\widehat{f}_*$的映射锥 cone($\widehat{f}_*$) 给出的 $S_\Psi[t,t^{-1}]$-链复形。

引理 2.2。对于有限自由 $S_\Psi[t,t^{-1}]$-链复形 C_*，以下断言等价：

(i) S-链复形 i^*C_* *is* S-链同伦等价于一个有限自由S-链复形，其中 i^*C_* 由 C_* 通过包含映射 $i\colon S \to S_\Psi[t,t^{-1}]$限制得到；*(ii)* 存在一个有限自由 S-链复形 D_* 以及一个 S-链同伦等价 $f_*\colon D_* \to \Psi^* D_*$，使得 C_* 与 $T(f_*)_* S_\Psi[t,t^{-1}]$-链同伦等价。

如果将上述的“有限自由”替换为“有限投射”“有限生成自由”或“有限生成投射”，上述等价关系仍然成立。

证明：这由 [12,引理 3.3]推出。 □

2.B。 **L^2-Betti 数是关于 S^1 上的纤维化的障碍**。 L^2-Betti 数是关于 S^1 上的纤维化的障碍，下面将对此进行说明。设 $F \to E \to S^1$ 是一个纤维化，使得 F 具有有限型 CW-复形的同伦类型。那么E 具有有限型 CW-复形的同伦类型，并且实际上同伦等价于映射环面 T_f，其中 f 是某个 CW-复形 Y上的自映射，而该复形是有限型的，并且与 F同伦等价。这确实意味着L^2-Betti 数 $b_n^{(2)}(\widetilde{E})$对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$均为零，参见第 270]页的 [22, 定理6.63。

$\mathbb{F}_p$ 版本的 L^2-Betti 数也有类似的结论$b_n(E;\mathcal{D}_{\mathbb{F}_p[\pi_1(E)]})$，参见 [3, 定理 3.25]。这些数是基于 Jaikin-Zapirain 的工作定义的，并由 Avramidi–L¨uck 系统研究 [3], ，前提是 $\pi_1(E)$ 是 RALI 群，即剩余为（可解且局部可指示的）。

请注意，有限生成 RALI 群的类别大于有限生成 RFRS 群的类别，因为有限生成的 RFRS 群剩余为（局部可指示且几乎阿贝尔的），参见 [28, 第 6] 节。

下文中，$\mathcal{N}(G)$ 表示群冯·诺依曼代数，它可以视为代数 $\mathcal{B}(L^2(G)\ L^2(G))^G$，由有界的 G-等变算子$L^2(G) \to L^2(G)$构成。

如果一个群 G 存在同态 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$，且其核是有限生成的，则称其为代数纤维化群。接下来我们记录 Kielak [17,定理 5.3]这一著名结果。

定理 2.3。 设 G 是一个虚有限指标的RFRS群的无限有限生成群。

则，当且仅当其第一 L^2-*Betti* 数$b_1^{(2)}(G) = b_1^{(2)}(EG; \mathcal{N}(G)$为零时， G 实际上代数纤维化。

Fisher 通过 [8, 定理 A] 将这一结果推广到了更高维情形。

定理 2.4。 设 G 为一个虚拟地属于 RFRS群的群。考虑$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。假设 G 属于 $\mathrm{FP}_n(\mathbb{Q})$ 型。则以下陈述等价：

(*i*) 对于 $p \leq n$，有 $b_p^{(2)}(G) = 0$； (*ii*) 存在一个有限指数子群 $H \subseteq G$ 和一个满同态 $\phi\colon H \to \mathbb{Z}$，使得$\ker(\phi)$属于 $\mathrm{FP}_n(\mathbb{Q})$ 型； (*iii*) 存在一个有限指数子群 $H' \subseteq G$ 和一个满同态 $\phi'\colon H' \to \mathbb{Z}$，使得对于 $p \leq n$，$b_p(H'; \mathbb{Q}) < \infty$ 成立。

对于任意域 F，还有以下由 Fisher [8,定理 B]给出的版本。

定理 2.5。 设 G 是一个几乎为 RFRS-群的群。考虑$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。设 F 为一个域。假设 G 属于 $\mathrm{FP}_n(F)$型。那么以下陈述等价：

(i) 对于 $p \leq n$，有 $b_p(G; \mathcal{D}_{F[G]}) = 0$； *(ii)* 存在一个有限指数子群 $H \subseteq G$ 和一个满同态 $\phi\colon H \to \mathbb{Z}$，使得 $\ker(\phi)$ 属于 $\mathrm{FP}_n(F)$型； *(iii)* 存在一个有限指数子群 $H' \subseteq G$ 和一个满同态 $\phi'\colon H' \to \mathbb{Z}$，使得 $b_p(H'; F) < \infty$对 $p \leq n$成立。

注意，在定理 2.3、2.4 和 2.5 中，不能将 RFRS-群这一条件替换为较弱的条件，即该群是剩余（无挠且幂零）的，参见 [12,注 5.8]。

2.C。**链复形的 ϕ-扭曲 L^2-挠函数**。存在 L^2-挠的概念，它将经典的 Reidemeister 挠推广到了 L^2-情形。该概念由 L¨uck–Rothenberg [25]从拓扑学角度引入，由 Lott [19]和 Mathai [27]从解析学角度引入。解析的和拓扑的 L^2-挠之间的对应由 Burghelea–Friedlander–Kappeler– McDonald [5]完成。关于 L^2-Betti 数和 L^2-挠的基本信息，例如可参见 [16, 22]。

内置了通过一个（不一定是满射的）同态$\phi\colon G \to \mathbb{Z}$ 或更一般地通过一个有限维表示进行扭曲的版本，是由 Dubois、Friedl、Liu 和 L¨uck 在 [7, 10, 18, 23]中引入并研究的。

我们在此回顾 ϕ-扭曲 L^2-挠在特殊情形下的概念，其中 G满足下面的条件 2.7 (i)。这对于我们的目的来说已经足够，而且易于表述和处理。也就是说，我们不必处理简单同伦等价与同伦等价之间的差异，也不必考虑所研究的链复形或空间是否为 ϕ-扭曲的 det-L^2-无挠。

2.D. **ϕ-扭曲 L^2-挠函数的基本设置**。

定义 2.6（Farrell–Jones 群）。 如果一个群满足完整 Farrell–Jones 猜想，则称其为 *Farrell–Jones* 群。

完整 Farrell–Jones 猜想的表述相当复杂，涉及 L-理论以及 K-理论，参见第 387] 页的 [24, 猜想 13.30。其精确表述与本文无关。关于其现状和应用列表，请参阅第 481 页的 [24, 定理 16.1 以及定理 13.65

第 405]页。注意，双曲群、有限维 CAT(0) 群、道路连通局部紧第二可数豪斯多夫群中的格，以及（三维流形不一定紧致或可定向，且可有边界或无边界的）三维流形的基本群，都满足完整 Farrell–Jones 猜想；而且完整 Farrell–Jones 猜想具有很好的继承性质，例如，它适用于子群、有限指数超群、直积与自由积，以及有向余极限（结构映射可以是任意的）。

我们将考虑以下情形：

基本设定 2.7。

(i) 一个有限生成剩余有限群 G，它是 Farrell–Jones 群。(ii) 一个有限自由 $\mathbb{Z}[G]$链复形 C_*，它是 L^2-无挠的，即，L^2-Betti 数 $b_n^{(2)}(C_*; \mathcal{N}(G)) := b_n^{(2)}(L^2(G)\otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*; \mathcal{N}(G))$ 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 均为零；(iii) 一个（不一定是满射的）群同态 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$。

注意，条件 2.7 (i) 在有限生成子群、有限指数超群以及直积和自由积下仍成立。

我们称两个（不一定连续的）函数 $\rho_0, \rho_1\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ 等价，相差符号 $\rho_0 \sim \rho_1$，如果存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $\rho_0(t) - \rho_1(t) = m \cdot \ln(t)$ 对$t \in \mathbb{R}_{>0}$成立。令

$$\mathcal{E} := \{\overline{\rho} \mid \rho\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\} \tag{2.8}$$

为函数 $\rho\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ 的等价类集合 ρ。注意到该集合通过以下方式成为一个阿贝尔群：

$$\begin{aligned} \overline{\rho_0} + \overline{\rho_1} &:= \overline{\rho_0 + \rho_1}; \\ -\overline{\rho} &:= \overline{-\rho}; \\ 0 &= \overline{0}, \end{aligned}$$

其中，$\rho_0 + \rho_1$ 将 t 映射到 $\rho_0(t) + \rho_1(t)$，而 $-\rho$ 将 t 映射到 $-\rho(t)$。如果某个（从而每个）代表元 ρ 是连续的，我们将 $[\rho]$称为连续。

给定上述数据，可以定义一个称为约化 ϕ-扭结 L^2-挠函数的元素

$$\overline{\rho}^{(2)}(C_*; \phi) \in \mathcal{E}. \tag{2.9}$$

$\rho^{(2)}(C_*; \phi)$ 的构造及其良定义性的证明可见于 [23, 定理 7.7 (3) 和注记 8.7]。要理解本文并不需要精确定义，可以将其视为一个黑箱。对于有兴趣的读者，我们将在下一个定义之后作简要说明。

定义 2.10（$\mathcal{E}$ 中元素的等价类的次数）。设 ρ 是函数 $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ 的一个等价类。设 ρ 是一个代表元。假设 $\liminf_{t\to 0+} \rho(t)\ln(t) \in \mathbb{R}$ 且 $\limsup_{t\to\infty} \rho(t)\ln(t) \in \mathbb{R}$。

然后将 ρ 的零点阶和无穷远阶定义为实数

$$\begin{aligned} \deg_0(\rho) &:= \liminf_{t\to 0+} \frac{\rho(t)}{\ln(t)}; \\ \deg_\infty(\rho) &:= \limsup_{t\to\infty} \frac{\rho(t)}{\ln(t)}. \end{aligned}$$

将 ρ 的次数定义为实数集中的一个实数，该实数与代表元的选择无关，

$$\deg(\overline{\rho}) := \deg_\infty(\rho) - \deg_0(\rho).$$

本节的其余内容并非理解本文其余部分所必需。不过，读者可能会发现，了解 ϕ-扭曲L^2-挠函数的构造会有所帮助，因此我们在下文中给出该构造。

以下内容摘自[23, §1] 若 R-模 M 是自由模，且我们为 M选定了 R-基的一个等价类 $[B_M]$，则称其为带基的。若存在双射 $\sigma\colon B \to B'$ 和 $\sigma(b) = \pm b'$，则称 B与 B'等价。对于 $\mathbb{C}$ 上的有限维左 G-表示 V，若 V是带基的有限维G-表示，则称其为带基有限维表示。定义以下范畴：

(i) R-**FBMod**，带基的有限生成自由 R-模及其 R-线性映射；(ii) R-**FBCC**，R-**FBMod**上的链复形；(iii) $\mathcal{N}(G)$-**FGHil**，有限生成希尔伯特 $\mathcal{N}(G)$ 模的加性 $\mathbb{C}$-范畴 -模；(iv) $\mathcal{N}(G)$-**FGHCC**，$\mathcal{N}(G)$-**FGHil**上的链复形。

存在函子

$$\begin{aligned} \eta^G_{V,[B_V]}\colon \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{FBMod} &\to \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{FBMod} \\ (M,[B_M]) &\mapsto (M\otimes_{\mathbb{C}} V, \{b\otimes v \mid b\in B_M, v\in V\}) \\ f &\mapsto f\otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{id}_V \end{aligned} \tag{2.11}$$

延拓为

$$\eta^G_{V,[B_V]}\colon \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{FBCC} \to \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{FBCC} \tag{2.12}$$

以显然的方式。还有一个函子

$$\begin{aligned} \Lambda^G\colon \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{FBMod} &\to \mathcal{N}(G)\text{-}\mathbf{FGHil} \\ (M,[B_M]) &\mapsto L^2(G)\otimes_{\mathbb{C}[G]} M \\ f &\mapsto \mathrm{id}_{L^2(G)}\otimes_{\mathbb{C}} f \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中我们选取一个 B_M，使得映射 $\bigoplus_{b\in B_M} L^2(G) \to L^2(G)\otimes_{\mathbb{C}[G]} M$ 由 $(x_b) \mapsto \sum x_b\otimes b$ 给出且为等距同构。这延拓为一个函子

$$\Lambda^G\colon \mathbb{C}[G]\text{-}\mathbf{FBCC} \to \mathcal{N}(G)\text{-}\mathbf{FBCC} \tag{2.14}$$

以显然的方式。

注释 2.15。在上述各个函子中，当上下文清楚时，我们通常会省略相关记号，例如 $\eta^G_{V,\,[B_V]}$ 可记作 η。

例 2.16。设 G 为一个群，$\phi\colon G\to\mathbb{R}$ 为一个同态。设 $\mathbb{C}_t$ 为基于一点的一维 $\mathbb{R}$-表示，其中 $r\in\mathbb{R}$通过 t^r 作用，且 $\mathbb{C}_t$ 具有基 $\{t\}$。记 $\phi^*\mathbb{C}_t$ 为由 $\mathbb{C}_t$得到的基于一点的一维 G-表示。函子 (2.11) 的行为如下：设 $A\in M_{r,\,s}(\mathbb{Z}[G])$，则有 $r_A\colon \mathbb{Z}[G]^r\to\mathbb{Z}[G]^s$（通过右乘）在 $\eta_{\phi^*\mathbb{C}_t}$ 下被映射为 $r_{\hat{\phi}_*(A)}\colon \mathbb{C}[G]^r\to\mathbb{C}[G]^s$，其中 $\hat{}$ $(r,\ s)$-矩阵 $\phi_*(A)\in M_{r,\,s}(\mathbb{C}[G])$ 逐元素由下式得到

$$\begin{aligned} \hat{\phi}\colon \mathbb{C}[G] &\to \mathbb{C}[G] \\ \sum_{g\in G}\lambda_g g &\mapsto \sum_{g\in G} t^{\phi(g)}\lambda_g g. \end{aligned}$$

设 G是一个群，且 $\phi\colon G\to\mathbb{R}$是一个群同态。设 $(C_*,[B_{C_*}])$ 是一个基于 L^2 的无挠链复形，其模为自由 $\mathbb{Z}[G]$-模。若有限的 $\mathcal{N}(G)$-链复形 $\Lambda\circ\eta_{\phi^*\mathbb{C}_t}$属于行列式类或为 L^2-无挠，我们就称 C_* 是 ϕ-扭曲行列式类 或 ϕ-扭曲 L^2-无挠 的。

注意，如果 G 是剩余有限的，那么 L^2-无挠性自动意味着 C_* 既是 ϕ-扭曲的 L^2-无挠的，也是 ϕ-扭曲的行列式类。

假设 C_* 是 ϕ-扭曲的行列式类。我们将 ϕ-扭曲的 L^2-挠函数定义为

$$\rho^{(2)}(C_*, [B_{C_*}]; \phi)\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \rho^{(2)}(\Lambda \circ \eta_{\phi^*\mathbb{C}_t}(C_*, [B_{C_*}])),$$

也就是说，我们将 $t \in \mathbb{R}_{>0}$ 发送到与 $\phi^*\mathbb{C}_t$扭曲的 C_* 的 L^2-扭结。

约化的 ϕ-扭曲 L^2-扭结不依赖于基细化 $[B_{C_*}]$，因此我们通常会在记号中省略这一点。

2.E. **ϕ-扭曲 L^2-扭结函数的基本性质**。

定理 2.17。设 G 为满足条件 *2.7 (i)* 的群，即 G是有限生成且剩余有限的，并满足完整 *Farrell–Jones* 猜想。设$\phi\colon\ G \to \mathbb{Z}$ 为一个群同态。

(i) 设 C_* 和 D_* 为有限自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形，且它们 $\mathbb{Z}[G]$-链同伦等价。假设 C_* 或 D_* 是 L^2-无挠的。则 C_* 和 D_* 均为 L^2-无挠的，并且我们得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(C_*; \phi) = \overline{\rho}^{(2)}(D_*; \phi);$$

(ii) 设 $0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$ 是有限自由 $\mathbb{Z}[G]$ 链复形的正合列。假设 $\mathbb{Z}[G]$ 链复形 C_*、D_* 和 E_* 中有两个是 L^2-无挠的。

那么这三个链复形都是 L^2-无挠的，并且我们得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(D_*; \phi) = \overline{\rho}^{(2)}(C_*; \phi) + \overline{\rho}^{(2)}(E_*; \phi);$$

(iii) 设 C_* 是一个有限自由且 L^2-无挠的 $\mathbb{Z}[G]$ 链复形。设 H 是满足条件 *2.7 (i)* 的群，D_* 是有限自由 $\mathbb{Z}[H]$ 链复形。设 $\mathrm{pr}_G\colon\ G \times H \to G$ 为投影，$\chi_{\mathbb{Z}[H]}(D_*) \in \mathbb{Z}$ 为 D_*的欧拉示性数。

那么 $G\times H$ 满足条件 *2.7 (i)*，$C_*\otimes_{\mathbb{Z}} D_*$ 是有限自由且 L^2-无挠的 $\mathbb{Z}[G\times H]$ 链复形，并且我们得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(C_* \otimes_{\mathbb{Z}} D_*; \phi \circ \mathrm{pr}_G) = \chi_{\mathbb{Z}[H]}(D_*) \cdot \overline{\rho}^{(2)}(C_*; \phi);$$

(iv) 令 $i\colon\ H \to G$ 为 G中有限生成子群 H 的包含映射。令 C_* 为一个有限自由 $\mathbb{Z}[H]$-链复形，且其 L^2-无挠同调为零。

则 H满足条件 *2.7 (i)*，$i_*C_* = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} C_*$ 是一个有限自由$\mathbb{Z}[G]$-链复形，且其 L^2-无挠同调为零，并且我们得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(C_*; \phi \circ i) = \overline{\rho}^{(2)}(i_*C_*; \phi);$$

(v) 令 $i\colon\ H \to G$ 为 G 中有限指数子群 H 的包含映射$[G\colon\ H]$。令 C_* 为一个有限自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形，且其 L^2-无挠同调为零。

则 H 满足条件 *2.7 (i)*，由 C_* 经相对于 i的限制得到的 $\mathbb{Z}[H]$-链复形 i^*C_* 是一个有限自由 $\mathbb{Z}[H]$-链复形，且其 L^2-无挠同调为零，并且我们得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(i^*C_*; \phi \circ i) = [G : H] \cdot \overline{\rho}^{(2)}(C_*; \phi);$$

(vi) 令 C_* 为一个有限自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形，且其 L^2-无挠同调为零。考虑$\phi\colon\ G \to \mathbb{Z}$。对于 $m \in \mathbb{Z}$，令 $\phi_m\colon\ G \to \mathbb{Z}$为 ϕ与 $m \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$的复合。令 ρ 为 $\rho^{(2)}(C_*;\ \phi)$的一个代表元。定义 $\rho_m(t)\colon = \rho(t^m)$。

那么 $\rho_m(t)$ 是 $\rho^{(2)}(C_*;\ \phi_m)$ 的代表元；

(*vii*) 如果 ρ 是 ρ 的代表元 $^{-(2)}(C_*;\ \phi)$，则 $\rho(1)$ 与 L^2-扭结 $\rho^{(2)}(C_*;\ \mathcal{N}(G)) \colon = \rho^{(2)}(L^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*;\ \mathcal{N}(G))$；

(*viii*) 如果 $\phi\colon\ G \to \mathbb{Z}$ 是平凡的，则取值为 L^2-扭结的常值函数 $\rho^{(2)}(C_*;\ \mathcal{N}(G)$ 是 $\rho^{(2)}(C_*;\ \phi)^{-}$的代表元；

(ix) $\overline{\rho}^{(2)}(C_*;\phi)$ *is continuous;*
(x) The degree of $\overline{\rho}^{(2)}(C_*;\phi)$ *is defined.*

证明。定理 2.17 就是 [23, 定理 8.6 和定理 10.2] 的链复形版本，同时考虑到 [23,定理 8.3（1）和（2）] 。□

2.F. **关于 ϕ-扭结 L^2-挠函数的综述，适用于 CW-复形**。设 G 是满足条件 2.7 (i) 的群，即 G 是有限生成且剩余有限的，并满足完整 Farrell–Jones 猜想。设 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$ 是一个（不一定满射的）同态。设 Y 是有限自由的 G-CW-复形，并且是 L^2-无挠的，其含义是其所有 L^2-Betti 数 $b_n^{(2)}(Y;\mathcal{N}(G)) = b_n^{(2)}(C_*(Y);\mathcal{N}(G))$ 均为零。于是可以定义其约化 ϕ- 扭结 L^2- 挠函数

$$\overline{\rho}^{(2)}(Y;\phi) \in \mathcal{E} \tag{2.18}$$

为 $\rho^{(2)}(Y;\phi) := \rho^{(2)}(C_*(Y);\phi)$，即其胞腔链 $\mathbb{Z}[G]$-复形 $C_*(Y)$ 的约化 ϕ-扭结 L^2-挠函数 $\rho^{(2)}(C_*(Y);\phi)$，见（2.9）。

若 X 是一个连通的有限 CW-复形，其基本群为 $G = \pi_1(X)$，则我们可以取 Y 为万有覆盖 $\widetilde{X}$，并记作

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi) \in \mathcal{E}. \tag{2.19}$$

考虑一个（不一定连通的）有限 CW-复形 X 以及一个元素 $\phi \in H^1(X;\mathbb{Z})$。我们将滥用记号：如果对于每个路径分支 $C \in \pi_0(X)$，$\pi_1(C)$ 都满足条件 2.7 (i)，则称 $\pi_1(X)$ 满足条件 2.7 (i)；如果对于每个 $C \in \pi_0(X)$，$\widetilde{C}$ 都是 L^2-无挠的，则称 $\widetilde{X}$ 是 L^2-无挠的 。如果 $\pi_1(X)$ 满足条件 2.7 (i)，且 X 是 L^2-无挠的，那么我们可以定义

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi) = \sum_{C\in\pi_0(X)} \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{C};\phi|_C) \in \mathcal{E}, \tag{2.20}$$

其中，$\phi|_C \in H^1(C;\mathbb{Z})$ 是通过将 ϕ 限制到分支 C 上得到的，而我们将 $\phi|_C$ 视为一个群同态 $\phi|_C\colon \pi_1(C) \to \mathbb{Z}$。注意，如果 X 连通，则 (2.20) 化为 (2.19)。

2.G.**万有覆盖的约化 L^2-挠函数的基本性质**。

定理 2.21（万有覆盖的约化 L^2-扭结函数的基本性质）。

(i) 同伦不变性令 $f\colon X \to Y$ 为有限 CW-复形之间的同伦等价。考虑 $\phi_X \in H^1(X;\mathbb{Z})$ 和 $\phi_Y \in H^1(Y;\mathbb{Z})$。假设 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*，$\widetilde{X}$ 是 L^2-无环的，并且 $\phi_X = H^1(f;\mathbb{Z})(\phi_Y)$ 成立。那么 $\pi_1(Y)$ 满足条件 *2.7 (i)*，且 Y 是 L^2-无环的，于是我们在 $\mathcal{E}$ 中得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi_X) = \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{Y};\phi_Y);$$

(ii) 求和公式
考虑有限 CW-复形的一个胞腔推出

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ {\scriptstyle i_2}\downarrow & \overset{j_0}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\ X_2 & \xrightarrow[j_2]{} & X \end{array}$$

其中 i_1 是胞腔映射， i_2 是 CW-复形之间的包含映射，而 X 具有由 X_0、 X_1 和 X_2 上的结构自然诱导的 CW-结构。假设对于 $i = 0$=*1, 2*，映射 j_i 是 π_1-单射，即对于任意基点选择 $x_i \in X_i$，诱导映射 π_1*(*j_i*,* x_i*):* π_1*(*X_i*,* x_i*)* $\to \pi_1$*(*X*,* j_i*(*x_i*))* 是单射。假设给定元素 $\phi_i \in H^1$*(*X_i*;* $\mathbb{Z}$*)* 和 $\phi \in H^1$*(*X*;* $\mathbb{Z}$*)* $\widetilde{\ }$，使得对于 $i = 0$=*1, 2*， $j_i^*(\phi) = \phi_i$ 成立。假设对于 $i = 0$=*1, 2*， X_i 是 L^2-无挠的，并且 π_1*(*X*)* 满足条件 *2.7 (i)*。

那么 $\widetilde{X}$ 是 L^2-无挠的，并且 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*，从而得到 0、1、2 的条件 *2.7 (i)*，并且 $\widetilde{\ }$

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi) = \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X_1};\phi_1) + \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X_2};\phi_2) - \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X_0};\phi_0);$$

(*iii*) 乘积公式

设 X 和 Y 是有限 CW-复形。假设 Y 是连通的，且 π_1*(*X*)* 和 π_1*(*Y*)* 满足条件 *2.7 (i)*。考虑元素 $\phi \in H^1$*(*$X \times Y$*;* $\mathbb{Z}$*)*。定义 ϕ_X 为 ϕ 在映射 H^1*(*$X \times Y$*;* $\mathbb{Z}$*)* $\to H^1$*(*X*;* $\mathbb{Z}$*)* 下的像，该映射由包含映射 $X \to X \times Y$，$x \mapsto$ *(*x*,* y*)* 诱导，其中基点 $y \in Y$ 任选取。假设 $\widetilde{X}$ 是 L^2-无挠的。

Then $\widetilde{X \times Y}$ 是 L^2-无挠的， π_1（$X \times Y$）满足条件 *2.7 (i)*，从而得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X \times Y};\phi) = \chi(Y) \cdot \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi_X);$$

(iv) 庞加莱对偶

设 X 是一个有限 n维庞加莱复形，例如，一个维数为 n 的闭流形。考虑 $\phi \in H^1(X;\mathbb{Z})$。假设 X 是 L^2- 无环的，并且 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*。

Then

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi)(t) = (-1)^{n+1} \cdot \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi)(t^{-1});$$

(v) 有限覆盖

设 $p\colon X \to Y$ 是有限 CW-复形之间的一个 d 重覆盖，其中 d 是某个自然数。设 $\phi_Y \in H^1(Y;\mathbb{Z})$ 和 $\phi_X \in H^1(X;\mathbb{Z})$ 是满足 $H^1(p;\mathbb{Z})(\phi_Y) = \phi_X$ 的元素。

Then $\widetilde{X}$ 是 L^2-无环的且 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*，当且仅当 $\widetilde{Y}$ 是 L^2-无环的且 $\pi_1(Y)$ 满足条件 *2.7 (i)*；在这种情况下，我们得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi_X) = d \cdot \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{Y};\phi_Y);$$

(vi) 缩放 ϕ

令 $m \in \mathbb{Z}$，并令 X 为有限 CW-复形 X，使得 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*，且 $\widetilde{X}$ 是 L^2-无挠的，并且 $\phi \in H^1(X;\mathbb{Z})$。令 ρ 为 $\rho^{(2)}(\widetilde{X};\phi)$ 的代表元。置 $\rho_m(t) = \rho(t^m)$。

则 ρ_m 是 $\rho^{(2)}(\widetilde{X};m \cdot \phi)$ 的代表元；

(vii) 令 X 为有限 CW-复形 X，使得 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*，且 $\widetilde{X}$ 是 L^2-无挠的，并且 $\phi \in H^1(X;\mathbb{Z})$。令 ρ 为 $\rho^{(2)}(\widetilde{X};\phi)$ 的代表元。

则 $\rho(1)$ 与 L^2-挠 $\rho^{(2)}(\widetilde{X};\mathcal{N}(\pi_1(X)))$一致；

(viii) 设 X 是一个有限 CW-复形 X，使得 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*，且 $\widetilde{X}$ 是 L^2-无环的。假设 $\phi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}$ 是平凡的。

那么 $\rho^{(2)}(\widetilde{X};\mathcal{N}(\pi_1(X)))$ 是 $\rho^{(2)}(\widetilde{X};\phi)$ 的常值函数的一个代表元；

(ix) 设 X 是有限的 CW-复形 X，使得 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*，且 $\widetilde{X}$ 是 L^2-无环的，并且 $\phi \in H^1(X;\mathbb{Z})$。

那么 $\rho^{(2)}(\widetilde{X};\phi)$ 是连续的；*(x)* 设 X 是有限的 CW-复形 X，使得 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*，且 $\widetilde{X}$ 是 L^2-无环的，并且 $\phi \in H^1(X;\mathbb{Z})$。那么 $\rho^{(2)}(\widetilde{X};\phi)$ 的次数有定义。 _

证明。 定理 2.21 由 [23, 定理 8.15 和定理 10.2]得到，同时考虑到 [23,定理 8.3 (1) 和 (2)] 。□

2.H。**纤维化公式**。 我们还有以下结果，它推广了定理 2.21 (iii) 中出现的乘积公式。

定理 2.22 (纤维化)。 设 $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 是一个纤维化，使得 F 和 B 是连通的有限 CW-复形，并且 $\pi_1(i)\colon \ \pi_1(F) \to \pi_1(E)$ 是单射。考虑 $\phi \in H^1(E;\ \mathbb{Z})$。令 $i^*\phi \in H^1(F;\ \mathbb{Z})$ 为其关于 i 的拉回。假设 $\widetilde{F}$ 是 L^2-无挠的，并且 $\pi_1(E)$ 满足条件 *2.7 (i)*。

于是 $\pi_1(F)$ 满足条件 *2.7 (i)*， E 在同伦意义下是有限的 CW-复形， $\widetilde{E}$ 是 L^2-无挠的，从而得到

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{E};\phi) = \chi(B) \cdot \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{F}; i^*\phi).$$

证明。 参见 [23,定理 8.16]。 □

下一个结果由定理 2.21 (vi)、定理 2.22 以及 [22, 第 136] 页的 (3.23) 推出。

推论 *2.23*。设 $S^1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 是连通有限 CW-复形之间的一个纤维化，使得 $\pi_1(i)\colon \pi_1(S^1) \to \pi_1(E)$ 是单射，并且 $\pi_1(E)$ 满足条件 *2.7 (i)*。考虑 $\phi \in H^1(E;\mathbb{Z})$。令 $i^*\phi \in H^1(S^1;\mathbb{Z})$ 为其与 i的拉回。令 $m \in \mathbb{Z}$为满足下述条件的整数：对于无限循环群 $H^1(S^1;\mathbb{Z})$ 的标准生成元 $[S^1]$， $i^*\phi = m \cdot [S^1]$ 成立。

那么， E 在同伦意义下是一个有限的 CW-复形， $\widetilde{E}$ 是 L^2-无环的，并且函数

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1; \\ \chi(B) \cdot |m| \cdot \ln(t) & t \geq 1, \end{cases}$$

是 $\rho^{(2)}(\widetilde{E};\phi)$的一个代表元。

3. Spectral radii and continuity

本节研究链映射的映射环面上的 ϕ-扭曲 L^2-挠函数。

3.A. **L^1-范数与谱半径**。对于复群环 $\mathbb{C}G$ 中群 G 的一个元素 $x = \sum_{g\in g} r_g \cdot g$，定义其 L^1-范数为

$$||x||_1 := \sum_{g\in G} |r_g| \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{3.1}$$

设 $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C}[G])$ 是一个取值于实数集 $\mathbb{C}[G]$ 的 (m,n) 矩阵。因此 A 的形式为

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-2} & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n-2} & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

我们定义矩阵 $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C}[G])$ 的 L^1-范数

$$||A||_1 := \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} ||a_{i,j}||_1 \;\middle|\; i \in \{1,2,\ldots,m\} \right\} \tag{3.2}$$

及其算子范数

$$||A||_\infty := ||r_A^{(2)}||_\infty \tag{3.3}$$

其中，$||r_A^{(2)}||_\infty$ 是有界算子 $r_A^{(2)} : L^2(G)^m \to L^2(G)^n$ 的算子范数，该算子由 A右乘给出。

下一个引理的初等证明留给读者。

引理 3.4。考虑 $A, B \in \mathbb{M}_{m,\,n}(\mathbb{C}[G])$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$。

(i) 有 $||A||_1 = 0 \iff ||A||_\infty = 0 \iff A = 0$；*(ii)* 对单位 (n,n)-矩阵 I_n，有 $||I_n||_1 = ||I_n||_\infty = 1$；*(iii)* 有 $||\lambda \cdot A||_1 = |\lambda| \cdot ||A||_1$ 和 $||\lambda \cdot A||_\infty = |\lambda| \cdot ||A||_\infty$；*(iv)* 有 $||A+B||_1 \le ||A||_1 + ||B||_1$ 和 $||A+B||_\infty \le ||A||_\infty + ||B||_\infty$；*(v)* 对$A \in \mathbb{M}_{m,\,n}(\mathbb{C}[G])$ 和 $C \in \mathbb{M}_{n,\,o}(\mathbb{C}[G])$，有 $||A \cdot C||_1 \le ||A||_1 \cdot ||C||_1$ 和 $||A \cdot C||_\infty \le ||A||_\infty \cdot ||C||_\infty$；*(vi)* 有 $||A||_\infty \le ||A||_1$。

定义 3.5（谱半径）。我们将相对于算子范数的谱半径 定义为 $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}[G])$，即

$$h(A) := \lim_{k\to\infty} ||A^k||_\infty^{1/k} \in \mathbb{R}_{\ge 0}.$$

注意，由 Fekete 次可加性引理和引理 3.4 (v) 可知该极限存在，它们共同推出

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(||A^k||_\infty)}{k} = \inf\left\{ \frac{\ln(||A^k||_\infty)}{k} \mid k \in \mathbb{Z}_{\ge 1} \right\}.$$

引理 3.6。

(i) We have $h(A) \le ||A||_\infty \le ||A||_1$ for $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{C}[G])$;
(ii) Consider $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{C}[G])$ and $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[G])$. Then we get

$$h(UAU^{-1}) = h(A);$$

(iii) 若 $h(A) < 1$，则算子 $r^{(2)}_{I_n - A}\colon L^2(G)^n \to L^2(G)^n$ 可逆，其逆映射为 $\sum_{i=0}^{\infty} r^{(2)}_{A^i}$，其中该级数按算子范数理解。

证明。(i) 由引理 3.4 (v) 可得 $||A^k||_\infty \le ||A||_\infty^k$。这意味着 $||A^k||_\infty^{1/k} \le ||A||_\infty$，因此 $h(A) \le ||A||_\infty$。由引理 3.4 (vi) 可得 $||A||_\infty \le ||A||_1$。
(ii) 由引理 3.4 (v) 可得

$$||(UAU^{-1})^k||_\infty^{1/k} = ||UA^kU^{-1}||_\infty^{1/k} \le (||U||_\infty \cdot ||U^{-1}||_\infty)^{1/k} \cdot ||A^k||_\infty^{1/k}.$$

由于根据引理 3.4 (i)，$(||U||_\infty \cdot ||U^{-1}||_\infty) > 0$成立，我们得到

$$\lim_{k\to\infty} (||U||_\infty \cdot ||U^{-1}||_\infty)^{1/k} = 1.$$

由此可得 $h(UAU^{-1}) \le h(A)$。由于 $U^{-1}(UAU^{-1})(U^{-1})^{-1} = A$成立，我们还得到 $h(A) \le h(UAU^{-1})$。因此我们得到 $h(A) = h(UAU^{-1})$。
（iii）例如，参见第 204] 页的定理 3.3.3 [15, 。 □

注意，由于引理 3.6（ii），对于有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$-模上的自同态 $f\colon M \to M$，$h(f)$ 的定义同样有意义。具体而言，选取一个 $\mathbb{Z}[G]$-同构 $\mu\colon M \to \mathbb{Z}[G]^a$，其中 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，以及一个矩阵 $A \in \mathrm{M}_{a,\,a}(\mathbb{Z}[G])$，使得 $f = \mu^{-1} \circ r_A \circ \mu$ 成立，并定义

$$h(f) = h(A). \tag{3.7}$$

3.B. **Fuglede–Kadison 行列式的连续性**。关于有界 G-等变算子 $T\colon L^2(G)^m \to L^2(G)^n$ 的 *Fuglede–Kadison* 行列式 $\det^{(2)}_{\mathcal{N}(G)}(T)$，例如可参阅第 3.2 节。读者可以将这一概念视为一个黑箱，它为 T 指定一个非负实数，而无需了解其精确定义和性质。如果 G 是平凡的且 T 是单射，则它等于 T^*T 的经典行列式的平方根。

引理 3.8。映射

$$\mathrm{GL}_n(\mathcal{N}(G)) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det_{\mathcal{N}(G)}\bigl(r_A\colon L^2(G)^n \to L^2(G)^n\bigr)$$

在开子集上连续

$$\mathrm{GL}_n(\mathcal{N}(G)) \subseteq \mathrm{M}_{n,n}(\mathcal{N}(G)) = \mathcal{B}(L^2(G)^n, L^2(G)^n)^G,$$

其中我们在 $\mathcal{B}(L^2(G)^n, L^2(G)^n)^G$ 上赋予算子范数。

证明。参见 [6,定理 1.10 (d)] 或 [11, 定理 1 (3)]。 □

我们还要提及以下结果： [6, 定理 1.10 (e)]。

定理 3.9。设 $t > 0$ 为一个实数，并设 $A\colon [0,t] \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{N}(G))$ 为一个连续的分段光滑映射。则

$$\det^{(2)}_{\mathcal{N}(G)}(A(t)) = \det^{(2)}_{\mathcal{N}(G)}(A(0)) \cdot \exp\left(\int_0^t \Re\left(\mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}\left(A(s)^{-1} \cdot \left.\frac{dA}{ds}\right|_s\right)\right) ds\right).$$

4. Obstructions to fibring and virtually fibring coming from ϕ-twisted L^2-torsion functions

4.A。该 T_0值和 T_∞值以及特殊性质。给定函数 $\rho\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ 和 T_0，$T_\infty \in \mathbb{R}_{\geq 0} \amalg \{\infty\}$，我们称 ρ 在 T_0 处为特殊 0，如果存在某个 $d_0 \in \mathbb{Z}$

$$\rho(t) = d_0 \cdot \ln(t) \text{ for } t < T_0$$

成立，并且 ρ 在 T_∞ 处为特殊 ∞，如果存在某个 $d_\infty \in \mathbb{Z}$

$$\rho(t) = d_\infty \cdot \ln(t) \text{ for } T_\infty < t$$

成立。注意，每个 ρ 在 0 处都是 0-特殊的，并且在 ∞ 处是 ∞-特殊的。

我们称 ρ 为特殊，如果它对于某个 $T_0 > 0$ 在 0 处是 T_0-特殊的，并且对于某个 $T_\infty < \infty$ 在无穷远处是 T_∞-特殊的。

定义 4.1（T 值）。考虑 $\rho \in \mathcal{E}$、$T_0, \overline{T}_\infty \in \mathbb{R}_{\geq 0} \amalg \{\infty\}$。如果 ρ 的某个（因而每个）代表元 ρ 是 T_0-特殊的，我们就称 ρ 在 0 处是 T_0-特殊的；如果 $\overline{\rho}$ 的某个（因而每个）代表元 ρ 在 ∞ 处是 T_∞-特殊的，我们就称 ρ 在 ∞ 处是 T_∞-特殊的。如果 ρ 的某个（因而每个）代表元 ρ 是特殊的，我们就称 ρ 是特殊的。

我们将 ρ 在 0 处的 T 值以及在 ∞ 处的 T 值定义为 $\mathbb{R}_{\geq 0} \amalg \{\infty\}$ 中的元素

$$\begin{aligned} T_0(\overline{\rho}) &= \sup\{T_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \amalg \{\infty\} \mid \overline{\rho} \text{ is } T_0\text{-special at } 0\}; \\ T_\infty(\overline{\rho}) &= \inf\{T_\infty \in \mathbb{R}_{\geq 0} \amalg \{\infty\} \mid \overline{\rho} \text{ is } T_\infty\text{-special at } \infty\}. \end{aligned}$$

注意，$\rho \in \mathcal{E}$ 是特殊的，当且仅当 $T_0(\rho) > 0$ 和 $\overline{T}_\infty(\rho) < \infty$ 均成立。

4.B. **映射环面的特殊性**。考虑以下情形。设 G 是一个满足条件 2.7 (i) 的群，即 G 有限生成、剩余有限，并且满足完整 Farrell–Jones 猜想。设 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$ 是一个核为 K 的满射群同态。记 $i\colon K \to G$ 为包含映射。考虑一个元素 $y \in G$，它在 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$ 下映射为 1。记 $\gamma\colon K \to K$为 K 的自同构，它将 k 映至 yky^{-1}。设 D_* 是一个有限自由 $\mathbb{Z}[K]$-链复形。记 γ^*D_* 为由 D_*经由 γ限制得到的有限自由 $\mathbb{Z}[K]$-链复形。设 $f_*\colon D_* \to \gamma^*D_*$ 是一个 $\mathbb{Z}[K]$-链映射。（在定理 4.2 中，我们不要求 f_* 是一个 $\mathbb{Z}[K]$- 链同伦等价。）我们得到一个 $\mathbb{Z}[G]$- 链映射

$$\widehat{f}_*\colon \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[K]} D_* \to \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[K]} D_*$$

将 $u \otimes v$ 发送为 $u \in \mathbb{Z}[G]$，将 $v \in D_n$ 发送为 $u \otimes v - uy^{-1} \otimes f_n(v)$。回忆定义 2.1 中的内容，$T(f_*)_*$ 的映射环面 f_* 定义为 cone(f_*)。显然，这是一个有限自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形。

定理 4.2。在上述情形下，我们得到：

(i) 映射环面 $T(f_*)_*$ 是 L^2-无挠的，因此其 ϕ-扭曲约化L^2-挠函数 $\rho^{(2)}(T(f_*)_*;\ \phi)$ 有定义；*(ii)* 令 $T = \text{最大}\{h(f_n) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。那么，存在一个 ρ的代表元$\rho^{(2)}(T(f_*)_*;\ \phi)$ 满足

$$\rho(t) = 0 \quad \text{for } T < t.$$

证明。（i）这是 [23, 定理 8.6 和定理 10.2] 的链复形版本。（ii）我们对 D_* 的维数进行归纳。归纳起始情形 $\dim(D_*) = 0$ 如下。在此情形下，D_* 集中于零维，并由一个有限生成自由 $\mathbb{Z}[K]$-模 D_0 给出。取一个 $\mathbb{Z}[K]$-同构 $\mu\colon D_0 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[K]^d$。通过复合映射$\mathbb{Z}[K]^d \xrightarrow{\mu^{-1}} D_0 \xrightarrow{f_0} \gamma^*D_0 \xrightarrow{\gamma^*\mu} \gamma^*\mathbb{Z}[K]^d$，我们得到一个 $\mathbb{Z}[K]$-同态 $f\colon \mathbb{Z}[K]^d \to \gamma^*\mathbb{Z}[K]^d$。定义矩阵 $A \in \mathbb{M}_{d,d}(\mathbb{Z}[K])$，要求 i 阶元素 $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ 在 $\mathbb{Z}[K]^d$ 的标准$\mathbb{Z}[K]$基下经 f 映射为 $(a_{i,1}, \dots, a_{i,d})$。考虑一维有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形 E_*，其第一微分是 $\mathbb{Z}[G]$-同态 $r_{I_d - y^{-1}A}\colon \mathbb{Z}[G]^d \to \mathbb{Z}[G]^d$，由右乘 $I_d - y^{-1}A \in \mathbb{M}_{d,d}(\mathbb{Z}[G])$ 给出。我们得到一个 $\mathbb{Z}[G]$-链同构 $\widetilde{\mu}_*\colon T(f_*)_* \xrightarrow{\cong} E_*$，其中$\widetilde{\mu}_i\colon T(f_*)_i = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[K]} D_0 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[G]^d$ 将 $u \otimes v$ 映射为 $u \cdot \mu(v)$。

考虑 $s \in \mathbb{R}$ 以及 $0 < s < h(\widehat{f}_0)^{-1} = h(r_{y^{-1}A})^{-1}$。于是我们得到 $0 \leq h(r_{s \cdot y^{-1}A}) = h(s \cdot y^{-1}A) < 1$。由冯·诺伊曼级数给出的算子

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(r^{(2)}_{s \cdot y^{-1}A}\right)^i\colon L^2(G)^d \to L^2(G)^d$$

是一个定义良好的 G-等变同构，并且是下式的逆映射

$$r^{(2)}_{I_d - s \cdot y^{-1}A}\colon L^2(G)^d \to L^2(G)^d$$

根据引理 3.6 (iii)。固定满足 $h(f_0) < t$ 的 $t \in \mathbb{R}$。我们得到一个从$[0, t^{-1}]$到可逆 G-等变算子 $L^2(G)^d \to L^2(G)^d$ 所构成空间 $\mathrm{GL}_d(\mathcal{N}(G))$ 的光滑映射，该空间配备算子范数；此映射将 $s \in [0, t^{-1}]$ 映至 $r^{(2)}_{I_d - s \cdot y^{-1}A}$。

因此，利用 $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}$ 连续这一事实，我们由定理 3.9 得出：

$$\begin{aligned}
&\det^{(2)}_{\mathcal{N}(G)}(r_{I_d - t^{-1}\cdot y^{-1}A}) \\
&= \det^{(2)}_{\mathcal{N}(G)}(r_{I_d - 0\cdot y^{-1}A}) \\
&\qquad \cdot \exp\left(\int_0^{t^{-1}} \Re\left(\mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}\left((r_{I_d - s\cdot y^{-1}A})^{-1} \circ \frac{d}{ds} r_{I_d - sy^{-1}A}\right)\right) ds\right) \\
&= \det^{(2)}_{\mathcal{N}(G)}(r_{I_d}) \cdot \exp\left(\int_0^{t^{-1}} \Re\left(\mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}\left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(r^{(2)}_{s\cdot y^{-1}A}\right)^i\right) \circ \left(-r^{(2)}_{y^{-1}A}\right)\right)\right) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_0^{t^{-1}} \Re\left(\mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}\left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{(2)}_{s^i\cdot (y^{-1}A)^{i+1}}\right)\right) ds\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^{t^{-1}} \Re\left(\sum_{i=0}^{\infty} (-s^i)\cdot \mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}\left(r^{(2)}_{(y^{-1}A)^{i+1}}\right)\right) ds\right).
\end{aligned}$$

矩阵 $(y^{-1}A)^{i+1}$ 的每个元素都具有如下形式：对某些 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$\lambda_j \in \mathbb{Z}$ 和 $g_j \in G$，$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot g_j$ 且满足 $\phi(g_j) = -i-1$。由于 $\phi(g_j) \neq 0$ 蕴含 $g_j \neq e_G$，我们得到 $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}\left(r^{(2)}_{(y^{-1}A)^{i+1}}\right) = 0$，其中 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。因此，对于满足 $h(\widehat{f_0}) < t$ 的 t，我们有

$$\det^{(2)}_{\mathcal{N}(G)}(r^{(2)}_{I_d - t^{-1}\cdot y^{-1}A}) = 1.$$

因此

$$\rho(t) = \ln\bigl(\det^{(2)}_{\mathcal{N}(G)}(r^{(2)}_{I_d - t^{-1}\cdot y^{-1}A})\bigr)$$

$\widehat{\ }$是 $\rho(E_*;\phi) = \rho(T(f_*)_*;\phi)$ 的一个代表元，使得对于 $h(f_0) < t$，我们有

$$\rho(t) = 0.$$

接下来处理归纳步骤。假设 D_* 是 d 维的。令 $d[D_d]_*$ 为集中在维数 d 的有限自由 $\mathbb{Z}[K]$-链复形，其 d 阶链模为 D_d。令 $D_*|_{d-1}$ 为将 D_* 限制到维数 $(d-1)$ 后得到的有限自由 $(d-1)$ 维 $\mathbb{Z}[K]$-链复形。令 $d[f_d]_*\colon d[D_d]_* \to \gamma^* d[D_d]_*$ 和 $f_*|_{d-1}\colon D_*|_{d-1} \to \gamma^* D_*|_{d-1}$ 为由 f_* 诱导的显然的 $\mathbb{Z}[K]$-链映射。于是得到一个有限自由 $\mathbb{Z}[K]$-链复形的交换图，其各行正合

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D_*|_{d-1} & \xrightarrow{i_*} & D_* & \xrightarrow{p_*} & d[D_d]_* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_*|_{d-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle d[f_d]_*} & & \\
0 & \longrightarrow & \gamma^* D_*|_{d-1} & \xrightarrow{\gamma^* i_*} & \gamma^* D_* & \xrightarrow{\gamma^* p_*} & \gamma^* d[D_d]_* & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

它诱导出有限自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形的短正合列

$$0 \to T(f_*|_{d-1})_* \to T(f_*)_* \to T(d[f_d]_*)_* \to 0.$$

由归纳假设，我们可以找到 $\rho(T(f_*|_{d-1})_*;\phi)$ 的代表元 $\rho|_{d-1}$，以及 $\overline{\rho}(T(d[f_d]_*)_*;\phi) = (-1)^d \cdot \overline{\rho}(T(0[f_d]_*)_*;\phi)$ 的代表元 $\overline{\rho_d}$，使其满足

$$\begin{aligned}
\rho|_{d-1}(t) &= 0 \quad \text{for } \max\{h(\widehat{f_n}) \mid n \in \{0,1,\ldots,(d-1)\}\} < t; \\
\rho_d(t) &= 0 \quad \text{for } h(\widehat{f_d}) < t.
\end{aligned}$$

由定理 2.17 (ii) 可知，$\rho|_{d-1}(t) + \rho_d(t)$ 是 $\rho^{(2)}(T(f_*)_*;\phi)$ 的代表元，并且满足

$$\rho|_{d-1}(t) + \rho_d(t) = 0 \quad \text{for} \max\{h(\widehat{f_n}) \mid n \in \{0,1,\ldots,d\}\} < t.$$

□

定理 4.3。 设 C_* 是有限自由的 $\mathbb{Z}[G]$-链复形。将通过 i限制 C_* 得到的$\mathbb{Z}[K]$-链复形记作 i^*C_* 。假设存在有限自由的 $\mathbb{Z}[K]$-链复形 D_* ， 它与i^*C_*是 $\mathbb{Z}[K]$-链同伦等价的。设 $\chi_{\mathbb{Z}[K]}(D_*) \in \mathbb{Z}$ 为 D_*的欧拉示性数。那么：

(i) 有限自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形 C_* 是 L^2-无挠的；*(ii)* 存在实数 T_0 和 T_∞ ，满足 $0 \leq T_0 \leq T_\infty$ ， 以及 $\rho^{(2)}$的一个代表元ρ （C_*； ϕ）满足

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < T_0; \\ \chi_{\mathbb{Z}[K]}(D_*) \cdot \ln(t) & \text{for } T_\infty < t. \end{cases}$$

证明。 由引理 2.2，我们得出自己处于定理 4.2 所述的情形，即存在一个 $\mathbb{Z}[K]$-链同伦等价 $f_*\colon\ D_* \to \gamma^* D_*$ ，使得 C_* 和 $T(f_*)_*$ 是 $\mathbb{Z}[G]$-链同伦等价的。因此，根据定理 4.2，存在 $T_\infty > 0$ 以及 $\rho^{(2)}(T(f_*)_*;\ \phi)$ 的一个代表元 ρ，满足

$$\rho(t) = 0 \quad \text{for } T_\infty < t.$$

现在将 ϕ 替换为 $-\phi$，同样的论证仍然适用，因为 ϕ 和 $-\phi$ 具有相同的核。因此，我们得到 $T_0 > 0$ 以及 $\rho^{(2)}(T(f_*)_*;\ -\phi)$ 的一个代表元 $\overline{\rho}'$，满足

$$\rho'(t) = 0 \quad \text{for } T_0^{-1} < t.$$

根据定理 2.17 (vi)，我们得出存在一个整数 l ，使得对于所有 $t \in \mathbb{R}_{>0}$ ，都有 $\rho'(t) + l \cdot \ln(t) = \rho(t^{-1})$。因此我们得到

$$\rho(t) = \begin{cases} -l \cdot \ln(t) & \text{for } t < T_0; \\ 0 & \text{for } T_\infty < t. \end{cases}$$

如果我们用 $\rho(t)+l\cdot\ln(t)$ 替换 $\rho(t)$，就得到 $\rho^{(2)}(C_*;\ \phi)$ 的一个代表元 ρ，满足

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < T_0; \\ l \cdot \ln(t) & \text{for } T_\infty < t. \end{cases}$$

剩下需要证明 $l = \chi_{\mathbb{Z}[K]}(D_*)$ 成立。根据 [23, 定理 8.10] ， 极限 $\lim_{t\to\infty}\big(\rho(t) - \chi^{(2)}(L^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[K]} D_*) \cdot \ln(t)\big) = \lim_{t\to\infty}\big((l - \chi^{(2)}(L^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[K]} D_*)) \cdot \ln(t)\big)$ 存在。因此我们得到 $l = \chi^{(2)}(L^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[K]} D_*) = \chi_{\mathbb{Z}[K]}(D_*)$。

□

注意，在定理 4.2 中，一般不存在 $T_0 > 0$ 和 $C,\ D \in \mathbb{R}$使得 $\rho(t) = C + D \cdot \ln(t)$ 对 $t < T_0$成立，除非 f_* 是链同伦等价。此外，如果我们进一步假设 f_* 是链同伦等价，定理 4.2 证明中的归纳步骤也无法进行。

4.c. 特殊性质是对在 S^1上进行纤维化的一个障碍。

定理 4.4。 设 X 是一个连通有限 CW-复形，满足以下等价条件之一：

(i) 存在一个连通有限 CW-复形 F ，使得 X 与某个自同伦等价 f：$F \xrightarrow{\simeq} F$的映射环面 T_f 同伦等价；*(ii)* 存在一个纤维化 $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^1$ ，使得 E 与 X 同伦等价，且 F 是一个连通有限 CW-复形。

那么：

(i) The L^2-Betti number $b_n^{(2)}(\widetilde{X})$ vanishes for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;

(ii) 设 $\phi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}$ 为一个满射群同态，它或者与 T_f 相关联，或者来自投影 $p\colon E \to S^1$对应的 $\pi_1(p)$ 。假设 $\pi_1(X)$ 满足条件 *2.7 (i)*。

于是存在元素 T_0、$T_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$ 以及 ρ的一个代表元 $\rho\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ $(X;\phi)$ ，满足

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & for\, t < T_0; \\ \chi(F)\cdot \ln(t) & for\, T_\infty < t. \end{cases}$$

特别地，$\rho(X;\phi)$ 是特殊的。

证明。 这直接由定理 4.3 得出。 □

注 4.5。 如果 M是闭流形，那么 $T_0(\rho(\widetilde{M};\phi)) = T_\infty(\rho(\widetilde{M};-\phi))^{-1}$ 由定理 2.21 (iv) 得出。

注 4.6。 我们根据由 f 或从引理 3.6 (i) 和定理 4.2 得到的、到万有覆盖 X 的同伦逆映射 f^{-1} 所诱导的 $\mathbb{Z}[\pi_1(f)]$-等变链映射的相关矩阵的 L^1-范数，为定理 4.4 中出现的 $\rho(T_f;\phi)$ 的 T-值给出显式界。

设 f 是亏格为 ≥ 2的闭连通可定向曲面的自同伦等价。设 $\phi\colon \pi_1(T_f) \to \mathbb{Z}$为典范群满同态。记为 $e(\pi_1(f))$，即 $\pi_1(f)$的熵。于是由 [7, 定理 8.5]，可得 $T_0(\rho(T_f;\phi)) \leq e(\pi_1(f))^{-1}$ 以及$e(\pi_1(f)) \leq T_\infty(\rho(T_f;\phi))$ 。

注 4.7. ϕ-扭曲 L^2-挠应当有一个解析对应物。我们希望能够对双曲流形计算它，因为双曲流形的万有覆盖上的热核已有深入研究，而且或许可以将其推广到扭曲情形，从而判断是否满足特殊性质。

这种策略的优点是能够真正利用双曲性，而这在迄今为止较为代数化的方法中相当困难。

注记 4.8。 [12, 附录 A]中解释了：对于闭三维流形，唯一一类我们通常无法判定其是否能在S^1 上虚纤维化的流形，是基本群不是 RFRS 的图流形 M 。

对于图流形 M，本文定义的不变量并未给出关于在 S^1 上虚纤维化的新障碍。具体而言，由 [7, 定理 12]可知，对每个有限覆盖 N以及每个 $\phi \in H^1(N;\mathbb{Z})$，$\rho(\widetilde{N};\phi)$ 都是特殊的，因为图流形的每个有限覆盖仍然是图流形。

4.D. **群的应用**。 注意，定理 4.4 显然有一个关于群的版本。具体而言，设 G 是一个满足条件 2.7 (i)且属于 FP 型的群，也就是说，存在一个有限射影 $\mathbb{Z}[G]$-分解 P_* ，其对象是 $\mathbb{Z}[G]$-模 $\mathbb{Z}$ ，该模由阿贝尔群 $\mathbb{Z}$ 构成，且带有平凡的 G-作用。注意，这意味着 G 无挠。设 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$ 是一个群同态。

由于 G 满足完整 Farrell–Jones 猜想，我们可以选择 P_* 为有限自由的 $\mathbb{Z}[G]$-链复形，并定义

$$\overline{\rho}^{(2)}(G;\phi) := \overline{\rho}^{(2)}(P_*;\phi) \in \mathcal{E}. \tag{4.9}$$

根据定理 2.17 (i)，这与 P_* 的选择无关。

引理 4.10。 假设非平凡 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$ 的核 K 属于 FP_∞型，即存在一个（不一定是有限维的）有限生成投射 $\mathbb{Z}[K]$-分解，解析 $\mathbb{Z}[K]$-模 $\mathbb{Z}$。

那么 $\overline{\rho}^{(2)}(G;\phi)$ 是特殊的。

证明。 由于存在一个有限维射影的 $\mathbb{Z}[K]$-分解以及一个有限生成投射的 $\mathbb{Z}[K]$-分解，用于 $\mathbb{Z}[K]$-模 $\mathbb{Z}$，因此存在一个有限投射的 $\mathbb{Z}[K]$-分解 P_*，用于 $\mathbb{Z}[K]$-模 $\mathbb{Z}$; 例如参见第 271] 页的 [20,命题 11.19。由于 G满足完整的 Farrell–Jones 猜想，因而 K 也满足该猜想，我们可以令 P_* 为有限自由的。定理 4.3 蕴含$\rho^{(2)}(G;\phi)$是特殊的。□

5. The special case of an infinite cyclic group

在本节中，我们以特殊情形 $G = \mathbb{Z}$ and $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ 为例进行考察。

5.a. 关于实数集上的 Fuglede–Kadison 行列式 $\mathbb{Z}$。 考虑一个元素 $p(z) \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[z, z^{-1}]$，满足 $p \neq 0$。它可以唯一地写成如下形式

$$p(z) = \sum_{n=n_-}^{n_+} s_n \cdot z^n$$

对于 n_-, n_+, $s_n \in \mathbb{Z}$，其中 $n_- \leq n_+$、 $s_{n_-} \neq 0$ 和 $s_{n_+} \neq 0$。下次数 $\deg_-(p) \in \mathbb{Z}$ 定义为 n_-，而上次数 $\deg_+(p) \in \mathbb{Z}$ 定义为 n_+。定义 p 的宽度 $\mathrm{width}(p) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为 $\deg_+(p) - \deg_-(p)$。下首项系数 $\mathrm{lead}_-(p) \in \mathbb{Z}$ 定义为s_{n_-}，而上首项系数 $\mathrm{lead}_+(p) \in \mathbb{Z}$ 定义为 s_{n_+}。我们将一个元素赋给 p

$$\overline{\rho}(p) \in \mathcal{E} \tag{5.1}$$

如下。考虑一个一维的 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形 C_*，其第一个微分是由乘以 p 给出的 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-映射 $r_p\colon \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$。根据第 35] 页的 [22, 引理 1.34,_ C_* 是L^2-无挠的，因此我们将 $\rho(p)$ 定义为 $_C_*$ 的 $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$-扭曲L^2-挠函数 $\rho(C_*; \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$，见式 (2.9)。

我们可以将 p 在 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}] = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ 中唯一地写成满足 $p \neq 0$ 的形式:

$$p(z) = C \cdot z^k \cdot \prod_{i=1}^{l} (z - a_i)$$

对于 $k \in \mathbb{Z}$、 $C \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$、 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $a_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。由此得出

$$\ln\left(\det_{\mathcal{N}(\mathbb{Z})}(r_p^{(2)}\colon L^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{Z}))\right) = \ln(|C|) + \sum_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,l\} \\ |a_i| \geq 1}} \ln(|a_i|)$$

根据第 136] 页的 [22, (3.23)。注意，上述等式右边恰好是 p 的 Mahler 测度的对数。

对于 $t \in \mathbb{R}_{>0}$，定义 $p_t \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ 为 $p_t(z) = p(tz)$。我们可以写作

$$p_t(z) = C \cdot t^{k+l} \cdot z^k \cdot \prod_{i=1}^{l} \left(z - \frac{a_i}{t}\right).$$

那么，下列函数 ρ: $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ 是 $\rho(p) \in \mathcal{E}$的代表元 −

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \ln\bigl(\det_{\mathcal{N}(\mathbb{Z})}(r_{p_t}^{(2)}\colon L^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{Z}))\bigr) \\
&= \ln(|C|) + (k+l) \cdot \ln(t) + \sum_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,l\} \\ |a_i/t| \geq 1}} \ln(|a_i/t|) \\
&= \ln(|C|) + \sum_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,l\} \\ |a_i| \geq t}} \ln(|a_i|) + (k + |\{i \in \{1,2,\ldots,l\} \mid |a_i| < t\}|) \cdot \ln(t).
\end{aligned}$$

这意味着

$$\rho(t) = \begin{cases} \ln(|C|) + \sum_{i=1}^{l} \ln(|a_i|) + k \cdot \ln(t) & t < \min\{|a_i| \mid i = 1, 2, \ldots, l\}; \\ \ln(|C|) + (k+l) \cdot \ln(t) & t > \max\{|a_i| \mid i = 1, 2, \ldots, l\}. \end{cases} \tag{5.2}$$

记 $\mathrm{zero}(p) = k$ 为 0 作为 p的零点的 重数。若我们置

$$q(z) = \prod_{i=1}^{l} (z - a_i),$$

则 $q \in \mathbb{Q}[z]$，并且由下式唯一确定

$$p(z) = \mathrm{lead}_+(p) \cdot z^{\mathrm{zero}(p)} \cdot q(z).$$

我们有

$$\mathrm{lead}_-(p) = \mathrm{lead}_+(p) \cdot q(0) = \mathrm{lead}_+(p) \cdot \prod_{i=1}^{l} (-a_i).$$

于是方程（5.2）变为

$$\rho(t) = \begin{cases} \ln(|\mathrm{lead}_-(p)|) + \mathrm{zero}(p) \cdot \ln(t) & t < \min\{|a_i| \mid i = 1, \ldots, l\}; \\ \ln(|\mathrm{lead}_+(p)|) + (\mathrm{zero}(p) + \mathrm{width}(p)) \cdot \ln(t) & t > \max\{|a_i| \mid i = 1, \ldots, l\}. \end{cases} \tag{5.3}$$

对于由 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} s_n \cdot z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_n \cdot z^{-n}$ 定义的对合 $\bar{\cdot}\colon \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$，我们得到

$$\begin{aligned} \deg_-(\overline{p}) &= -\deg_+(p); \\ \deg_+(\overline{p}) &= -\deg_-(p); \\ \mathrm{width}(\overline{p}) &= \mathrm{width}(p); \\ \mathrm{lead}_+(\overline{p}) &= \mathrm{lead}_-(p); \\ \mathrm{lead}_-(\overline{p}) &= \mathrm{lead}_+(p); \\ \mathrm{zero}(\overline{p}) &= -\mathrm{zero}(p) - \mathrm{width}(p). \end{aligned}$$

由于有 $p_t = \overline{p_{t^{-1}}}$ 且 $\det_{\mathcal{N}(\mathbb{Z})}(r_{\overline{p}_{t^{-1}}}) = \det_{\mathcal{N}(\mathbb{Z})}(r_{p_{t^{-1}}})$，函数 $t \mapsto \rho(t^{-1})$ 是 $\rho(p)$ 的一个代表元。

注 5.4。自由有限 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形在 0 和 ∞ 处的 $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$-扭转 L^2-挠函数具有 $C + D\cdot\ln(t)$ 的形式。Christopher Smyth 在私人通信中向我们指出，对于 $\mathbb{Z}^2$，这一结论就已经不成立：满同态 $\phi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ 将 z_1 和 z_2 映射为 1，以及与 $q = 1 + z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^2]$ 对应的算子 r_q，其中 $z_1 = (1,0)$ 且 $z_2 = (0,1)$。Smyth 的论证使用了 Maillot 和 Cassaigne 关于 Mahler 测度的计算，见 [26, 命题 7.3。1]我们在此不复述该论证。

5.B. Alexander 多项式。设 S 是唯一分解整环（UFD），即交换诺特唯一分解整环。主理想整环（如 $\mathbb{Z}$）或任意域都是例子。注意，若 S 是唯一分解整环，且 A 是有限生成自由阿贝尔群，则群环 $S[A]$ 是唯一分解整环。设 M 是有限生成的 S-模。那么我们可以找到一个（a，b）矩阵 $C \in \mathrm{M}_{a,\,b}(S)$，对应于 a，$b > 0$，使得由 C 右乘定义的 $S^a \to S^b$ 上的 r_C同态的余核与 M作为 S同构。令 $E(M)$ 为 C的初等理想，即由 C的（b，b）子式在 S中生成的理想，若 $b \le a$；若 $b > a$，则令其为 $\{0\}$。事实证明，$E(M)$ 仅取决于 M，而与 C的选择无关。由于 S 是唯一分解整环，存在唯一最小的 S 主理想 I 包含 $E(M)$。I 的一个生成元称为 M的阶 $\mathrm{ord}(M) \in S$。这个阶仅在相差 S中的单位元乘法时才确定。$\mathrm{ord}(M)$ 的一个代表元由下列各项的最大公因子给出：

（b，b）子式（取自 C），若 $b \leq a$。注意，利用克拉默法则可以证明，每个（b，b）子式以及 ord（M）都会消去 M。

令 $S^{(0)}$ 为交换整环 S的分式域。下一个结果的初等证明留给读者。

引理 5.5。对于有限生成的 S-模 M，以下命题等价：

(i) M 是一个 S-挠模；*(ii)* $S^{(0)} \otimes_S M = \{0\}$；*(iii)* 维数$_{S^{(0)}}($ $S^{(0)} \otimes_S M) = 0$；*(iv)* 阶$(M) \neq 0$。

我们将关注情形 $S = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[s, s^{-1}]$。注意，$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ 中的单位元乘法群为 $U := \{\pm s^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$。于是，对于任意有限生成的$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-模 M，其阶为

$$\operatorname{ord}(M) \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]/U.$$

引理 5.6。设 M 为一个 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-模，且 M 作为阿贝尔群有限生成。

于是 $M/\operatorname{tors}(M)$ 作为阿贝尔群是有限生成自由的。特别地，我们可以考虑自同构 $l_g\colon M/\operatorname{tors}(M) \to M/\operatorname{tors}(M)$ 的特征多项式 $\det(s - l_g)$ $\in \mathbb{Z}[s] \subseteq \mathbb{Z}[s, s^{-1}] = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$，该自同构由 g 的标准生成元 $\mathbb{Z}$的乘法给出。

于是我们在 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]/U$中得到

$$\operatorname{ord}(M) = \operatorname{ord}(M/\operatorname{tors}(M)) = \det(s - l_g).$$

证明。由 [31,第 2]页，我们得到 ord(M) =ord$(M/$tors$(M))$。

我们有 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-模的正合列

$$0 \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{l_{g-1}} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

其中，$\mathbb{Z}$ 赋予平凡的 $\mathbb{Z}$-作用，l_{g-1} 是与 $g - 1$的乘法，而 ϵ是将 g 映射到 1 的增广同态。给定一个 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-模N，其底层阿贝尔群是有限生成自由的，我们得到 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-模的正合列

$$0 \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{l_{g-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_N} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\epsilon \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_N} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N = N \to 0,$$

其中，$\mathbb{Z}$ 在张量积上按对角方式作用，且 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{Z}} N$作为 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-模是有限生成自由的。现在根据定义可得 ord(N) =det$(s - l_g)$。□

令 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]^{(0)} = \mathbb{Z}[z, z^{-1}]^{(0)}$ 为交换整环 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[z, z^{-1}]$的分式域。令 C_* 为有限自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形。那么，$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-同调群 $H_i(C_*)$ 有限生成，且仅在有限多个 i 值处非零。

引理 5.7。对于有限自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形 C_*，下列命题等价。

(i) C_* 是 L^2-无挠的，即所有 L^2-*Betti* 数 $b_n^{(2)}(C_*; \mathcal{N}(\mathbb{Z}))$ 均为零；

(ii) 对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有 $\dim^{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]^{(0)}}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]^{(0)} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]} H_n(C_*)) = 0$；*(iii)* 对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有 $\operatorname{ord}(H_n(C_*)) \neq 0$。

证明。(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) 参见第 35] 页的 [22, 引理 1.34。

(ii)$\Longleftrightarrow$ (iii) 这由引理 5.5 得出。□

因此，对于有限自由的 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形 C_*，我们可以定义 L^2-无循环元素

$$\Delta_i(C_*) = \operatorname{ord}(H_i(C_*)) \quad \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]/U; \tag{5.8}$$

$$\rho_\Delta(C_*) = \prod_{i\geq 0} \Delta_i(C_*)^{(-1)^i} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]^{(0)}/U, \tag{5.9}$$

其中我们称 $\Delta_i(C_*)$为 第 i 个 ***Alexander*** 多项式，其属于 C_*。

对于有限自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形C_*，若其是 L^2-无挠的，也可以定义其通用 L^2-挠，参见 [9, 第 2 节和例 3。3]

$$\rho_u^{(2)}(C_*) \in \mathrm{Wh}^w(\mathbb{Z}) \tag{5.10}$$

引理 5.11。 设 C_* 是一个有限自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形，且其是 L^2-无挠的。则存在一个同构

$$\omega\colon \mathrm{Wh}^w(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[s,s^{-1}]^{(0)}/U$$

该同构将 $\rho^u(C_*)$映射为 $\rho_\Delta(C_*)$。

证明。 这由 [9, (3.4)] 、 [33, 第 11 页的定理 2.6 以及第 20] 页的定理 4.7 得出。□

引理 5.11 与 [9, 第 3 节4] 共同推出

定理 5.12. 设 C_* 是一个有限自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形，且是 L^2-无挠的。那么对于 $\mathbb{Z}$-扭曲的 L^2-挠函数 $\rho(C_*;\mathrm{id}_\mathbb{Z})$，我们有

$$\overline{\rho}(C_*;\mathrm{id}_\mathbb{Z}) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \cdot \overline{\rho}(\operatorname{ord}(H_i(C_*));\mathrm{id}_\mathbb{Z}),$$

其中，对于$x \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]/U$，我们将 $\rho(x;\mathrm{id}_\mathbb{Z})$ 定义为该 $\mathrm{id}_\mathbb{Z}$-扭曲的 L^2-挠函数$\rho(\mathrm{el}[1,x]_*;\mathrm{id}_\mathbb{Z})$，它对应于一维自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形 $\mathrm{el}[1,x]_*$，其第一微分由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}],\ a \mapsto ax$ 给出。

回想一下，我们已在第 5.A 小节中显式计算了 $\rho(\operatorname{ord}(H_i(C_*)))$。特别地，存在 $T \in \mathbb{R}_{>0}$，使得我们可以用下式给出 $\rho(C_*;\mathrm{id}_\mathbb{Z})$ 的一个代表元

$$\rho(t) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \cdot \ln(|\operatorname{lead}_-(p_i)|) + \left(\sum_{i\geq 0}(-1)^i \cdot \operatorname{zero}(p_i)\right) \cdot \ln(t) \tag{5.13}$$

对于 $t < T$ 和

$$\rho(t) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \cdot \ln(|\operatorname{lead}_+(p_i)|) + \left(\sum_{i\geq 0}(-1)^i \cdot \big(\operatorname{zero}(p_i) + \operatorname{width}(p_i)\big)\right) \cdot \ln(t) \tag{5.14}$$

对于 $t > T^{-1}$，其中 p_i 是 $\Delta_i(C_*)$ 的一个代表元，$\in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]/U$ 而 $q_i \in \mathbb{Q}[z]$ 由性质 $q_i(0) \neq 0$ 以及 $p_i(z) = \operatorname{lead}_+(p_i) \cdot z^{\operatorname{zero}(p_i)} \cdot q_i(z)$ 所确定。

5.C. **首项系数和映射环面**。

引理 5.15. 对于有限自由的 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形 C_*，以下断言等价。

(i) $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形 C_* ***is*** $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$与映射环面 $T(f_*)_*$ 链同伦等价，其中映射环面由有限自由 $\mathbb{Z}$-链复形 D_*上的 $\mathbb{Z}$-链映射 $f_*\colon D_* \to D_*$ 构成；***(ii)*** $\mathbb{Z}$-链复形 i^*C_*由 C_* 经包含映射 $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$限制得到，并且与有限自由$\mathbb{Z}$-链复形 D_* 链同伦等价；***(iii)*** 同调群 $H_n(i^*C_*)$ 作为阿贝尔群是有限生成的，且对于 $n \geq 0$ 仅在有限多个 $n \geq 0$ 上非平凡；

(iv) 对每个 $n \geq 0$，元素 $\Delta_n(C_*) \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]/U$ 均非零，且两个首项系数 $\mathrm{lead}_-(\Delta_n(C_*))$ 和 $\mathrm{lead}_+(\Delta_n(C_*))$ 均属于 $\{\pm 1\}$；*(v)* 对所有 $n \geq 0$，同调群 $H_n(\mathbb{Z}((t)) \otimes_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]} C_*)$ 和 $H_n(\mathbb{Z}((t^{-1})) \otimes_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]} C_*)$均为零。

证明。 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) 这由引理 2.2 得出。
(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) 由于 $\mathbb{Z}$ 是诺特的，我们得到 (ii) $\Longrightarrow$ (iii)。反向蕴含 (iii)$\Longrightarrow$ (ii) 的证明如下。设 N 为 C_*的维数。由于 $\mathbb{Z}$ 是主理想整环，对于任意 $n \geq 0$，我们可以选取一个有限自由的一维链复形$E[n]_*$，使得 $H_1(E[n]_*)$ 消失，并且 $H_n(i^*C_*) \cong_{\mathbb{Z}} H_0(E[n]_*)$ 成立。然后很容易构造出一个 $\mathbb{Z}$-链映射 h_*: $\bigoplus_{n=0}^{N} \Sigma^n E[n]_* \to i^*C_*$，它在所有同调群上诱导同构。由于其源和靶都是射影的，h_* 是一个 $\mathbb{Z}$-链同伦等价。显然，其源是一个有限自由的 $\mathbb{Z}$-链复形。

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) 这由引理 5.6 得出。 (iv) $\Longrightarrow$ (iii) 这由 [31, 推论 2.5] 得出。 (ii) $\Longleftrightarrow$(v) 这由 [30, 定理 2] 得出。 □

引理 5.16。 设 C_* 是一个有限自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$链复形。假设 C_* 与有限自由 $\mathbb{Z}$链复形 D_*的一个 $\mathbb{Z}$链映射f_*: $D_* \to D_*$ 的映射环面 $T(f_*)_*$ $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$链同伦等价。

那么，对每个 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathrm{ord}(H_i(C_*)) \neq 0$ 成立，并且我们得到

$$\prod_{i \geq 0} |\operatorname{lead}_+(\Delta_i(C_*))|^{(-1)^i} = 1.$$

证明。 由定理 4.2、引理 5.11 和(5.14)，我们得到对每个 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathrm{ord}(H_i(C_*)) \neq 0$ 成立，并且存在满足以下条件的 $T_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $m \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \cdot \ln\bigl(|\operatorname{lead}_+(\Delta_i(C_*))|\bigr) = m \cdot \ln(t)$$

对于 $t > T_\infty$。这意味着 $\sum_{i \geq 0} (-1)^i \cdot \ln\bigl(|\mathrm{lead}_+(\Delta_i(C_*))|\bigr) = 0$。 □

引理 5.16 中出现的条件是纤维化的必要条件，但并非充分条件，接下来的例子将说明这一点。

例 5.17。 设 C_* 为由下式给出的二维有限自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形，其维数依次为 2,1, 0:

$$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$$

那么， $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-模 $H_i(C_*)$ 与 $2 \cdot \mathrm{id}$: $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ 的余核 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-同构，因此对于 $i = 0,1$，$\mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}]$，其他情况下则为零。因此， $\Delta_i(C_*)$ 的一个代表元是常数多项式 2。由此可知，对每个 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathrm{ord}(H_i(C_*)) \neq 0$ 成立，并且有 $\prod_{i \geq 0} |\mathrm{lead}_+(\Delta_i(C_*))|^{(-1)^i} = 1$。

另一方面， C_* 作为 $\mathbb{Z}$链复形，并不链同伦等价于有限自由的 $\mathbb{Z}$链复形；根据引理 5.15，这是因为 $H_i(C_*)$作为 $\mathbb{Z}$-模并非有限生成。

定理 5.12 和引理 5.16 表明， ϕ-扭曲的 L^2-扭转确实构成了纤维化的障碍，并将由无限循环覆盖的 Alexander 多项式首项系数的交错乘积给出的障碍推广到了任意覆盖。

5.D. **首项系数与矩阵 3g+2e.** 作为说明，我们回到 [12, 第 3] 节中的例子。

考虑一个群 G 及其元素 $g \in G$，设存在一个有限指数子群 G'，使得 $g \in G'$，且其在典范投影 $G' \to H_1(G')_f$ 下的像非平凡。令 C_* 为一维有限自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形，其第一微分 $c_1\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ 由右乘 $3g+2e$ 给出。则 C_* 是 L^2-无圈的。我们希望证明：对于任意群满同态 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$，其核为 K，$\mathbb{Z}[K]$-链复形 i^*C_* 不与有限射影 $\mathbb{Z}[K]$-链复形通过 $i\colon K \to G$（包含映射）链同伦等价。

反设结论不成立。令 $j\colon \{1\} \to \mathbb{Z}$ 为包含映射。令 $\mathrm{pr}\colon K \to \{1\}$ 为投影。于是存在一个 $\mathbb{Z}$-链复形同构

$$\mathrm{pr}_* i^*C_* = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[K]} i^*C_* \xrightarrow{\cong} j^*\phi_*C_* = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*$$

将 $1 \otimes x$ 映射到 $z^0 \otimes x$，其中 z 是 $\mathbb{Z}$的标准生成元。若 $u \in G$ 是 z 在 ϕ下的任一原像，则逆映射将 $z^m \otimes x$ 映射到 $1 \otimes u^m x$。令 D_*为一维自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-链复形，其第一微分是乘以 $3z^{\phi(g)} + 2$，其中 $z \in \mathbb{Z}$ 为标准生成元。由于 $D_* = \phi_*C_*$，我们得出 j^*D_* 与有限投射 $\mathbb{Z}$-链复形 E_*链同伦等价。由于 $\mathbb{Z}$ 是主理想整环，E_* 是有限自由 $\mathbb{Z}$-链复形。因此，存在一个自同态 $f_*\colon E_* \to E_*$，使得 D_* 与映射环面 $T(f_*)$链同伦等价，见引理 3.3]。引理 2.2 和引理 5.16 推出 $\mathsf{lead}_+(\Delta_1(D_*))^{-1} \cdot \mathsf{lead}_+(\Delta_0(D_*)) = 1$。由于 $H_1(D_*)$是平凡的，我们得到 $\mathsf{lead}_+(\Delta_1(D_*)) = 1$。若 $\phi(g) \geq 1$，则有 $\mathsf{lead}_+(\Delta_0(D_*)) = 3$；若 $\phi(g) \leq -1$，则有 $\mathsf{lead}_+(\Delta_0(D_*)) = 2$；若 $\phi(g) = 0$，则有 5。这与前提矛盾。

另一个基于扭曲 L^2-挠函数的证明，见第 6.D 小节。

6. Examples

6.A. **非球面反例与特殊性质。** Hughes–Leary–Lück [12, 定理 5.5] 构造了各个维数 $d \geq 3$ 中的非球面闭流形 M，使得 M 不具有有限指数子群能纤维化为 $\mathbb{F}_2$，所有 L^2-贝蒂数（对任意域）均为零，并且其基本群 $\pi_1(M)$ 是剩余有限的（无挠且幂零）群，同时也是残余有限的 Farrell–Jones 群。由于 M 不具有有限指数子群能纤维化为 $\mathbb{F}_2$，因此不存在有限覆盖 $p\colon N \to M$，使得存在一个连通有限 CW- 复形 F，令 N 与某个自同伦等价 $f\colon F \xrightarrow{\simeq} F$ 的映射环面 T_f 同伦等价。

我们可以问，定理 4.4 中的判据能否检测到这一点。答案是否定的：对于任意有限覆盖 $p\colon N \to M$，若其全空间 N 连通，则对每个 $\phi \in H^1(N;\, \mathbb{Z})$，都存在 $\rho(\widetilde{N};\, \phi)$ 的一个代表元 ρ 以及一个整数 $m \in \mathbb{Z}$，满足

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1; \\ m \cdot \ln(t) & t \geq 1. \end{cases}$$

此外，如果 d 为偶数，还可以进一步安排 $m = 0$。

具体如下。这些流形 M 是局部平凡的 T^k-丛$M \to B$，其中当 $\dim(M)$ 为奇数时，B 是非球面闭流形，而当 $\dim(M)$ 为偶数时，$k = 2$ 是非球面闭流形。令 $p\colon N \to M$ 为任意有限覆盖，并令 ϕ 为 $H^1(N;\, \mathbb{Z})$ 中的任意元素。于是可以构造有限覆盖 $q\colon \widehat{B} \to B$，使其总空间 $\widehat{B}$ 连通，并具有纤维化 $T^k \to N \to \widehat{B}$，参见 [12, 定理 4.11 (iii)] 的证明。由于 B 是闭的非球面流形，由定理 2.22 可得

$$\overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{N};\, \phi) = \chi(\widehat{B}) \cdot \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{T^k};\, i^*\phi).$$

现在,$\rho^{(2)}(\widetilde{T^1};\, i^*\phi)$ 有一个形如以下的代表元 ρ'

$$\rho'(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1; \\ m' \cdot \ln(t) & t \geq 1, \end{cases}$$

对于某个 $m' \in \mathbb{Z}$，参见第 [22, 页的 (3.23)，而 $\rho^{(2)}(\widetilde{T^2};\, i^*\phi)$ 根据定理 2.21 (iii) 消失。

6.B。**右角阿廷群的扭曲挠率**。给定一个有限旗复形 L，可得到相应的右角阿廷群 A_L。注意，每个右角阿廷群都是残余有限的法雷尔–琼斯群，因而满足条件 2.7 (i)。存在一个有限 CW-复形模型，该模型来自萨尔维蒂复形，可用于表示 BA_L。如果 L 是 $\mathbb{Q}$-无环的，则 $\widetilde{BA_L}$ 是 L^2-无环的。回顾一下，通用 L^2-挠量

$$\rho_u^{(2)}(A_L) := \rho_u^{(2)}(\widetilde{BA_L}) \in \mathrm{Wh}^w(A_L)$$

定义如下，参见 [9, 第 2 节和第 3] 节。令 $\overline{\chi}(\mathrm{Lk}_L(v))$表示顶点 $v \in L^{(0)}$ 的链接的约化欧拉特征。令 $\mathrm{tor}H_{i-1}(L)$ 表示由挠元素给出的$H_{i-1}(L)$的有限子群。每个顶点 $v \in L^{(0)}$ 定义一个生成元$v \in A_L$，记号相同，而元素 $v-1 \in \mathbb{Z}[A_L]$ 确定了 弱怀特海德群$\mathrm{Wh}^w(A_L)$ 中的一个类$[v-1]$。对于一个整数 $m \geq 1$，我们将 $\mathrm{Wh}^w(A_L)$ 记作元素 $m \cdot 1_{\mathbb{Z}[A_L]} \in \mathbb{Z}[A_L]$ 的类。

我们将需要 Okun–Schreve 的以下结果 [29, 推论 6.4]。（注意，与 Okun–Schreve 在 [29,推论 6.4]中的写法不同，我们将怀特海德群记为加法群。）

定理 6.1。设 L 是一个 $\mathbb{Q}$-无环旗复形。那么我们在 $\mathrm{Wh}^w(A_L)$ 中得到

$$\rho_u^{(2)}(A_L) = \sum_{i \geq 2} (-1)^i \cdot [|\mathrm{tor}H_{i-1}(L)|] + \sum_{v \in L^{(0)}} \big(-\overline{\chi}(\mathrm{Lk}_L(v)) \cdot [v-1]\big).$$

定理 6.2。设 L 是一个 $\mathbb{Q}$-无环旗复形，设 A_L 是定义在 L上的右角阿廷群，并设 $\phi\colon A_L \to \mathbb{Z}$ 是一个群同态。定义两个常数

$$\begin{aligned} C_L &= \sum_{i \geq 2} (-1)^i \cdot \ln(|\mathrm{tor}H_{i-1}(L)|); \\ C_\phi &= \sum_{v \in L^{(0)}} |\phi(v)| \cdot \overline{\chi}(\mathrm{Lk}_L(v)). \end{aligned}$$

那么 $\rho^{(2)}(A_L;\ \phi)$ (t) 的一个代表元 ρ 为

$$t \mapsto \begin{cases} C_L - C_\phi \cdot \ln(t) & t \geq 1; \\ C_L & t \leq 1. \end{cases}$$

证明。给定一个有限生成群 G，它是一个残余有限的法雷尔–琼斯群，以及一个群同态 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$，存在一个定义良好的阿贝尔群同态

$$\zeta_{G;\phi}\colon \mathrm{Wh}^w(G) \to \mathcal{E}.$$

该同态定义如下：首先用矩阵 $A \in \mathbf{M}_{n,\, n}(\mathbb{Z}[G])$表示类 $[A] \in \mathrm{Wh}^w(G)$，其中 $r_A^{(2)}\colon L^2(G)^n \to L^2(G)^n$ 是一个弱同构；然后将 $[A]$ 映射到一维有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形 $C_*[A]$ 的扭曲 L^2-挠函数 $\rho^{(2)}(C_*[A];\phi)$，其第一微分为 r_A:
$\mathbb{Z}[G]^n \to \mathbb{Z}[G]^n$。该函数由以下性质唯一确定：对于任意 L^2-无挠的有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形 D_*，等式

$$\zeta_{G;\phi}(\rho_u^{(2)}(D_*)) = \overline{\rho}^{(2)}(D_*;\phi)$$

成立。此外，对于一个 L^2-无挠的连通有限 CW-复形 X，若 $\pi_1(X) = G$，则有

$$\zeta_{G;\phi}(\rho_u^{(2)}(\widetilde{X})) = \overline{\rho}^{(2)}(\widetilde{X};\phi),$$

见 [9, 第 3.4]节。

对于 $G = \mathbb{Z}$，标准生成元 $z \in \mathbb{Z}$对应的 (1，1)-矩阵 $A = (z-1)$，以及$m \in \mathbb{Z}$，函数

$$\rho(t) = \begin{cases} |m| \cdot \ln(t) & t \geq 1 \\ 0 & t \leq 1. \end{cases}$$

是 $\rho^{(2)}(C_*[z-1]; m \cdot \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{Z}}})$ 的一个代表元。这是将定理 2.17 (vi) 和 (5.2) 结合起来，并注意到对于 $m < 0$，当且仅当 $t \leq 1$ 时有 $t^m \geq 1$，且我们总可以向代表元添加 $|m| \cdot \ln(t)$，从而得到的。因此，对于 $g \in A_L$，由定理 2.17 (iv) 得到 $g \neq e$，函数

$$\rho(t) = \begin{cases} |\phi(g)| \cdot \ln(t) & t \geq 1 \\ 0 & t \leq 1. \end{cases}$$

是 $\rho^{(2)}(C_*[g-1]; \phi) = \zeta_{G;\phi}([g-1])$ 的一个代表元，其中矩阵 $(g-1)$ 是定义在 $\mathbb{Z}[G]$ 上的 (1，1)- 矩阵。类似地，容易验证，对于一个整数 $m \geq 1$，$\zeta_{G;\phi}([m])$ 的一个代表元由取值为 $\ln(m)$ 的常值函数给出，因为该函数是 $\rho^{(2)}(C_*[m \cdot 1_{\mathbb{Z}[A_L]}]; \phi)$ 的一个代表元。现在定理 6.2 由定理 6.1 得出。□

例 6.3。设 L是一个定义在 11 个顶点上的实射影平面的旗标三角剖分（示例见 [4] ）。注意，由于 L是一个流形的三角剖分，每个顶点的链接都同伦等价于 S^1。因此，对于所有 $v \in L^{(0)}$，我们都有$\chi(\mathrm{Lk}_L(v)) = -1$。令 $\phi : A_L \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ 为“Bestvina–Brady 特征”，即将每个 v 映射到 $1 \in \mathbb{Z}$的映射。我们有，$\rho^{(2)}(A_L; \phi)$的一个代表元由 $t \mapsto \ln(2) + 11\ln(t)$（当 $t \geq 1$时）以及 $t \mapsto \ln(2)$（当 $t \leq 1$时）给出。特别地，对于任意 T_0，$T_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$，$\rho^{(2)}(A_L; \phi)$在零点不是 T_0-特殊的，在无穷远也不是 T_∞-特殊的。

例 6.4. 对于阿贝尔群 A，令 $M(A, n)$ 表示类型为 (A, n) 的 Moore 空间。令 L为 $M(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2) \vee M(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 3)$ 的旗标三角剖分。现在，对于任意$\phi : A_L \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ 存在一个整数常数C_ϕ，L 使得$t \mapsto C_\phi \cdot \ln(t)$ 对于$t \geq 1$ 成立，并且 $t \mapsto 0$ 对于 $t \leq 1$ 是 $\rho^{(2)}(A_L; \phi)$ 的一个代表元。事实上，L 是 $\mathbb{Q}$-无环的，而 L 的唯一非平凡约化同调群为 $H_2(L) \cong \mathbb{Z}/2$和 $H_3(L) \cong \mathbb{Z}/2$。因此，$C_L = (-1)^3 \cdot \ln(2) + (-1)^4 \cdot \ln(2) = 0$，并且定理 6.2 表明，$t \mapsto -C_\phi \cdot \ln(t)$ 对于 $t \geq 1$ 成立且 $t \mapsto 0$ 对于 $t \leq 1$ 是$\rho^{(2)}(A_L; \phi)$ 的一个代表元，其中 $C_{\phi,L} := -C_\phi$是一个整数。特别地，对于每个 ϕ，$\rho^{(2)}(A_L; \phi)$ 都是特殊的，这与例 6.3 相反。

6.C. **双曲群的多项式增长自同构**。以下定理是对 [13, 定理 3.7] 的改述，并考虑了上述文献中的注 1.1。

定理 6.5。设 G 是满足条件 *2.7 (i)* 的群，并假设 G余紧地作用在可缩 *CW* 复形 X 上，使得 *G* 的有限子群的不动点集均可缩。假设 *G* 的作用的每个胞腔稳定子 H_σ 都是 L^2-无环的，并且对 BH_σ有一个有限模型。若 ϕ: $G \to \mathbb{Z}$ 是一个同态，则我们在 $\mathcal{E}$ 中得到

$$\rho^{(2)}(G; \phi) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\sigma \in I_n} (-1)^n \rho^{(2)}(H_\sigma; \phi|_{H_\sigma}).$$

其中，I_n 是 n 胞腔的 G 轨道的一组代表元，而 H_σ 是 σ的稳定子群。

定理 6.6。 设 $\Gamma = G \rtimes_\Theta \mathbb{Z}$ 是一个群，具有 Γ 无挠、剩余有限且 G 双曲的性质（或相对于有限个几乎多循环群双曲）。设 $\phi \in H^1(\Gamma;\mathbb{Z})$。若 Θ 是多项式增长的，则 $\rho^{(2)}(\Gamma;\phi)$ 的一个代表元为

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 1; \\ k_\phi \ln(t) & \text{if } t \geq 1, \end{cases}$$

其中 k_ϕ 是取决于 ϕ的常数。

证明。 根据 [2], , 群 Γ满足 Farrell–Jones 猜想。特别地， Γ满足条件 2.7 (i)。该结果的证明与 [13, 命题 7.16] 完全相同，使用了上面的定理 6.5。□

6.D。 **重新审视矩阵 3g+2e**。 下一个例子受第 5.D小节的启发。

设 G 为满足条件 2.7 (i) 的群。考虑一个同态 $\phi\colon\ G \to \mathbb{Z}$。考虑 $g \in G$，其中有 $|g| = \infty$。设 C_* 为 1 维有限自由 $\mathbb{Z}[G]$-链复形，其第一微分是由 $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ 给出的映射，即乘以$3g + 2e$。设 $i\colon\ \mathbb{Z} \to G$ 为将生成元 $s \in \mathbb{Z}$映射到 g的单射同态。设 m 为由 $\phi \circ i(s) = m$唯一确定的整数。

由（5.2）以及定理 2.17 的 (iv) 和 (vi) 可知，$\rho^{(2)}(C_*;\phi)$ 的一个代表元由 $m > 0$ 给出

$$\rho(t) = \begin{cases} \ln(2) & t \leq (2/3)^{1/m}; \\ \ln(3) + m \cdot \ln(t) & t \geq (2/3)^{1/m}, \end{cases}$$

对于 $m < 0$，由

$$\rho(t) = \begin{cases} \ln(3) & t \leq (3/2)^{1/|m|}; \\ \ln(2) + |m| \cdot \ln(t) & t \geq (3/2)^{1/|m|}, \end{cases}$$

对于 $m = 0$，由 $\rho(t) = \ln(3)$ 给出。

这意味着，对于任意 T_0， $T_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$， $\rho^{(2)}(C_*;\phi)$ 在零点既不是 T_0-特殊的，在无穷远处也不是 T_∞-特殊的。

References

[1] I. Agol. 虚 Haken 猜想. *Doc. Math.*, 18:1045–1087, 2013. 附有 Agol、Groves 与 Manning 撰写的附录. 引用于第 1 页. [2] N. Andrew、Y. Guerch 与 S. Hughes. 相对双曲群的自同构与 Farrell-Jones 猜想. *Math. Ann.*, 395(4):论文第 89 号, 39, 2026. 引用于第 26 页. [3] G. Avramidi 与 W. L¨uck. 素特征下的 L^2-Betti 数与 Wise 的一个猜想. 预印本, arXiv:2602.04655 [math.AT], 2026. 引用于第 4 页. [4] C. Bibby、A. Odesky、M. Wang、S. Wang、Z. Zhang 与 H. Zheng. 低维流形的最小旗三角剖分. *Involve*, 13(4):683–703, 2020. 引用于第 25 页. [5] D. Burghelea、L. Friedlander、T. Kappeler 与 P. McDonald. 有限型 Hilbert 模中表示的解析挠与 Reidemeister 挠. *Geom. Funct. Anal.*, 6 859, 1996 5 751 5 ( ): – . 引用于第页 .[6] A. L. Carey 、 M. Farber 与 V. Mathai. 行列式线、von Neumann 代数与 L^2 挠. *J. Reine Angew. Math.*, 484:153–181, 1997. 引用于第 13 页.[7] J. Dubois、S. Friedl 与 W. L¨uck. 3-流形的 L^2-Alexander 挠. *J. Topol.*, 9 3 889 5 17 ( ): –926, 2016. 引用于第页与第页. [8] S. P. Fisher. 改进的代数纤维化. *Compos. Math.*, 160(9):2203–2227, 2024. 引用于第 1 页与第 5 页. [9] S. Friedl 与 W. L¨uck. 万有 -挠、多胞体及其在 -流形上的应用. , ( ): – . 引用于第页与第页. [10] S. Friedl 与 W. L¨uck. L^2-挠函数与 3-流形的 Thurston 范数. *Comment. Math. Helv.*, 94(1):21–52, 2019. 引用于第 5 页. [11] B. Fuglede 与 R. V. Kadison. 有限因子中的行列式理论. *Ann. of Math. (2)*, 55 520 13 : –530, 1952. 引用于第页.

[12] S. Hughes、I. Leary 与 W. L¨uck. 一些不以圆为底纤维化的闭流形. arXiv:2606.31254 [math.AT], 2026. 引用于第 1、2、4、5、17 与 23 页. [13] S. Hughes 与 W. L¨uck. 自同构的 L^2-挠. 预印本, arXiv:2510.20959 [math.GR], 即将发表于伦敦数学学会期刊, 2025. 引用于第 2、25 与 26 页.[14] G. Italiano、B. Martelli 与 M. Migliorini. 在其上纤维化的双曲

5 S^1 *Invent.* -流形. , ( ): – *Math.* 231 1 1 1
38, 2023. 引用于第页. [15] R. V. Kadison 与 J. R. Ringrose.
*Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I, Graduate Studies in Mathematics*第 15 卷. 美国数学会, Providence, RI, 1997. 初等理论, 1983 年原版重印. 引用于第 12 页. [16] H. Kammeyer.
*Introduction to ℓ^2-invariants, Lecture Notes in Mathematics*第 2247 卷. 施普林格, Cham, 2019. 引用于第 5 页.[17] D. Kielak. 剩余有限有理可解群与虚纤维化.

J. Amer. Math. , ( ): – . 引用于
Soc. 33 2 451 486, 2020 1 4
第页与第页. [18] Y. Liu. 3-流形的 L^2-Alexander 挠的次数. *Invent. Math.*, 207(3):981–1030, 2017. 引用于第 5 页. [19] J. Lott. 覆盖空间上的热核与拓扑不变量. *J. Differential Geom.*, 35 2 471 5 ( ): –510, 1992. 引用于第页. [20] W. L ¨ *Transformation groups and algebraic K-theory* 1408 *Lecture Notes in* uck. , 第卷 .
Mathematics 1989 18
施普林格出版社 , Berlin, . 引用于第页 .[21] W. L
¨ *J.* uck. 带边流形
Differential Geom. 37 2 263 322, 1993 1
与对称性的解析挠与拓扑挠量. , ( ): – . 引用于第页. [22] W. L¨uck.
L^2-Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory,
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys 第 44 卷. 施普林 *in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern*
Surveys in Mathematics] 2002 4, 5, 11, 13, 18, 20,
格出版社, Berlin, . 引用于第页与第 24 页.[23] W. L¨uck. 用有限维表示扭转 l^2-不变量. *J. Topol. Anal.*, 10 4 723 5, 6, 7, 9, 11, 14, 816, 2018 16 ( ): – . 引用于第页与第页. [24] W. L
¨ *Isomorphism Conjectures in K- and L-theory* 78 *Ergebnisse der Math-* uck. , 第卷 . 施 *ematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge* 2025
普林格, . Christopher Winges 参与撰写. 引用于第 5 页与第 6 页.[25] W. L¨uck 与 M. Rothenberg. Reidemeister 挠与 von Neumann 代数的 K-理论. *K-Theory*, 5(3):213–264, 1991. 引用于第 5 页. [26] V. Maillot. G ´ ´ ´ ´ *Mém.*
Soc. Math. Fr. (N.S.) 80 +129 2000 19
eometrie d'Arakelov: 环面簇与可积直线丛. , :vi , . 引用于第页. [27] V. Mathai. L^2-解析挠. *J. Funct. Anal.*, 107(2):369–386, 1992. 引用于第 5 页. [28] B. Okun 与 K. Schreve. 序与纤维化. 预印本, arXiv:2403.16102 [math.GR], 2024. 引用于第 4 页.[29] B. Okun 与 K. Schreve. 群复形的挠不变量. *Duke Math. J.*, 173 2 391 418, 2024 24 ( ): – . 引用于第页. [30] A. Ranicki. 有限支配与诺维科夫环. *Topology*, 34(3):619–632, 1995. 引用于第 22 页. [31] D. S. Silver 与 S. G. Williams. 关于劳朗多项式环上的模.

J. Knot Theory , ( ): . 引用于第
Ramifications 21 1 1250007, 6, 2012 20 22
页与第页. [32] W. P. Thurston. 三维流形、克莱因群与双曲几何. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3):357–381, 1982. 引用于第 1 页. [33] V. Turaev. *Introduction to combinatorial torsions*. 数学讲义. Birkh¨auser, 2001. 引用于第 21 页.

Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
Email address: sam.hughes.maths@gmail.com*Email address*:
hughess@mpim-bonn.mpg.de*URL*: https://samhughesmaths.github.io

Mathematisches Institut der Universität Bonn, Endenicher Allee 60,
53115 Bonn,Germany*Email address*: wolfgang.lueck@him.uni-bonn.de*Email address*:
lueck@math.uni-bonn.de*URL*: http://www.him.uni-bonn.de/lueck