arXiv:2611.32791v1 [q-fin.MF] 24 Nov 2026

带二次漂移的粗糙对数正态随机波动率：正相关下的二阶矩稳定性与鞅性质

Artur Sepp*† 和 Parviz Rakhmonov‡

†LGT Bank (Schweiz) AG，苏黎世¨，瑞士
‡Marex，伦敦，英国

(*Manuscript word count 10,149*)

我们将带二次漂移的对数正态随机波动率模型扩展到分数阶 Volterra 方程。该波动率在每个有限时域上都有唯一的全局非负解，且具有有限阶矩。在线性漂移下，我们推导出条件一阶和二阶矩、预期积分方差以及条件平方 VIX。我们给出二阶矩一致有界的精确阈值，以及超过该阈值后的指数增长率。在正二次阻尼下，对于任意可 admissible 的赫斯特指数和波动率的波动率，二阶矩都一致有界。长期预期积分方差的单位时间上界仅取决于漂移参数。在股票测度下，波动率贝塔会抵消二次阻尼。当阻尼覆盖贝塔时，价格是真鞅。对于正的有限指数混合，该条件也是必要条件。对于奇异分数阶核，其逆命题仍是开放问题。我们在观测到的比特币和以太币期权微笑上展示正相关下的校准，并将模拟结果与精确矩进行基准比较。带标记订单流构造将乘性波动率噪声与带符号交易冲击联系起来，后者以与方差成比例的速率到达。一个小的状态依赖偏差会产生二次漂移。我们建立了常数核的停时扩散极限。

Keywords：粗糙波动率；随机Volterra方程；对数正态随机波动率；二次漂移；鞅性质；二阶矩稳定性

JEL Classification：C63；G13

1. 引言

股票指数的对数波动率表现得像赫斯特指数约为 0.1 的分数布朗运动（Gatheral等 2018年）。Bayer 等（2016）在粗糙 Bergomi 模型中运用了这一观察，其中瞬时方差是高斯 Volterra 过程的指数。该模型仅用少量参数便能生成平值偏斜的幂律衰减。El Euch和Rosenbaum（2019年）提出了粗糙 Heston模型，并从一个分数阶Riccati方程推导出其特征函数；Abi Jaber等 （2019年）则将其归入仿射 Volterra
过程这一类。二次粗糙 Heston 模型（Gatheral等 2020年）和五次 Ornstein–Uhlenbeck 模型（Abi Jaber等2022年）扩展了这一类模型，使其能够联合校准 SPX 和 VIX 波动率微笑。

Sepp and Rakhmonov（2023）的带二次漂移的对数正态随机波动率模型弥补了另一项空白。其波动率遵循一个具有线性波动率的波动率和

*通讯作者。电子邮箱：artursepp@gmail.com

漂移 $(\kappa_1+\kappa_2\sigma)(\theta-\sigma)$ 的扩散过程。当收益率与波动率正相关时，只要满足 $\kappa_2 \geq \beta$，二次项就能使价格过程成为真鞅，其中 β 是波动率贝塔。比特币期权中经常出现正的现货-波动率相关性（Sepp 和 Rakhmonov（2023））。标准粗糙 Bergomi 模型无法在通常的定价测度下同时实现正的现货-波动率相关性和真鞅价格过程（Gassiat 2019）。本文将发展带二次漂移的对数正态模型的粗糙扩展。

该模型可以从交易活动及其影响的持续性角度加以解释。假设交易会产生大小相当的带符号波动率创新，并且以与当前方差成比例的到达率发生。对这些创新进行聚合后，得到的噪声幅度便与波动率水平成正比：市场越活跃，波动率的绝对波动就越大。分数阶核表示广泛的反应期限，通过为过去的创新赋予幂律权重，而不是设定单一的指数衰减尺度。我们将漂移 $(\kappa_1+\kappa_2\sigma)(\theta-\sigma)$ 解释为一种稳定响应，其强度随波动率增加。在参考水平 θ之上，主导项 $-\kappa_2\sigma^2$ 提供逐步增强的阻尼作用。在所提出的订单流构造中，该项源于波动率创新中一个小幅的向下偏差，并结合与 σ^2 成比例的到达率。从经济角度看，这种偏差可能代表波动率飙升后进行的库存调整和流动性回补。当相关性描述联合创新，而漂移描述这些创新随后所受到的修正时，这一稳定渠道可以与正的价格-波动率协同运动并存。这些假设为系数提供了经济学解释。

1.1. 相关工作

表 1 比较了三个模型的波动率状态、漂移和相关性，以及它们的鞅性质和二阶矩性质。

粗糙 Bergomi 模型规定了高斯对数方差（Bayer 等2016年），粗糙 Heston 使用仿射方差（El Euch和Rosenbaum 2019年），而二次粗糙 Heston 模型则将方差设为 Volterra状态的二次函数（Gatheral 等2020年）。这里的状态本身就是波动率。在 $H = 1/2$处，其扩散过程采用 Sepp and Rakhmonov (2023) 的形式。Sepp and Rakhmonov (2026) 将测度变换下的闭合性以及贴现资产的真鞅性质作为稳健波动率模型的判据。第 4 节考察 Volterra扩展是否满足这两个判据。在采用线性漂移时，我们的矩方程是多项式Volterra矩理论（Abi Jaber 等2024年）的一个特例。我们对稳定性阈值和增长率进行了显式评估。对于价格，Gassiat（2019年）研究了粗糙 Bergomi 模型的鞅问题。Guyon 等（2026年）给出了停止份额测度约化，并涵盖了我们的线性漂移有限核情形。二次漂移需要对倾斜方程进行控制。

订单流解释区分了交易所移动的变量与交易速率。Hager 等人（2026年）利用作用于对数波动率的独立同分布的中心化冲击和恒定订单速率，推导出粗糙 Bergomi 模型。Jaisson 和 Rosenbaum（2016）以及 El Euch 等人（2018）从具有单边方差冲击的近不稳定 Hawkes 市场中推导出粗糙 Heston。我们提出的构造采用带符号波动率冲击，以及与波动率平方成正比的速率，并加入一个较小的状态依赖的标记偏差。该构造与 Blanc 等人（2017）和 Dandapani等人（2021）的二次 Hawkes 机制有关，但正状态识别和零下限识别需要谨慎处理。

Dandapani 等人（2021）推导出具有正方差下限和带符号趋势的二次 Hawkes 极限，而 Chudasama 和 Iyer（2025）将其框架扩展至非对称买卖冲击。附录 C.3 陈述了精确的标准化方程以及无下限类比的局限性。附录 C 将精确生成元计算与尚未解决的全局收敛问题区分开来。

数值方法采用马尔可夫提升（Abi Jaber 和 El Euch 2019年，Alfonsi 和 Kebaier 2024年）以及 Shinozaki（2026年）意义下的漂移分裂。我们保留带有因子衰减的线性漂移，并使用步初波动率推进价格。我们将条件蒙特卡罗（Willard 1997，Romano 和 Touzi 1997，McCrickerd 和 Pakkanen 2018）与多层抽样（Giles 2008）结合起来。附录 B 给出了用于期权定价的三种流和高斯半倾斜。

1.2. 贡献

我们证明，在定价中使用的两种测度变换下，二次漂移保持闭合性，并将 Sepp and Rakhmonov (2023) 的扩散分析拓展至 Volterra 波动率。这两种测度变换均保留记忆核、扩散系数，以及¯波动率漂移中的常数项和线性项。每个布朗驱动项 $j = 0,1$对应的风险市场价格 $\lambda_j\sigma_t$ 会将二次阻尼从物理测度下的 κ_2 变为定价测度下的 $\kappa_2^{\mathrm{Q}} = \kappa_2 + \beta\bar{\lambda}_0 + \varepsilon\bar{\lambda}_1$。命题 4.1 给出了平移后的多项式满足原有均值回复参数化的条件。当 $\kappa_2^{\mathrm{Q}} \geq 0$时，测度变换密度在每个有限时域上都是真鞅（推论 4.2）。

在停止方程中以资产作为计价单位，会使波动率漂移增加 $\beta\sigma^2$。剩余的阻尼为 $\kappa_2^{\mathrm{Q}} - \beta$。当其非负时，倾斜波动率不会爆炸，因此即使现货-波动率相关性为正，价格仍是真鞅（定理 4.3）。对于正有限指数混合，这一条件也是必要的（命题 4.4）。对于奇异分数阶核，必要性仍有待证明。综合而言，这些结果将 Sepp and Rakhmonov (2026) 的闭合性和鞅性判据扩展到了粗糙模型。

对于分数阶核及其有限指数近似，波动率方程均存在唯一的全局非负强解。在采用线性漂移时，我们得到了精确的条件一阶和二阶矩、一致有界二阶矩的阈值，以及超过该阈值后的增长率。在具有正二次阻尼的情况下，对于任意 $0 < H \leq 1/2$，分数阶模型都具有一致有界二阶矩。其长期方差互换执行价存在一个上限，该上限仅取决于漂移参数。

我们在固定粗糙度下拟合模型以匹配比特币和以太币的期权微笑时，施加鞅条件。附录 C 将乘性波动率噪声和二次漂移与带符号交易冲击联系起来，并证明了常数核对应的停时扩散极限。

2. 模型

2.1. 动力学

我们在零利率的定价测度 Q 下工作，因此 S_t 表示远期价格。对数正态 Volterra 随机波动率模型为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} &= \sigma_t \,\mathrm{d}W_t^{(0)}, \\ \sigma_t &= \sigma_0 + \int_0^t K(t-s)\Big[(\kappa_1 + \kappa_2\sigma_s)(\theta - \sigma_s)\,\mathrm{d}s + \beta\sigma_s\,\mathrm{d}W_s^{(0)} + \varepsilon\sigma_s\,\mathrm{d}W_s^{(1)}\Big], \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $W_{(0)}$和 $W^{(1)}$是相互独立的布朗运动。参数满足 $\sigma_0 > 0$、 $\theta > 0$、$\kappa_1 \geq 0$、 $\kappa_2 \geq 0$、 $\beta \in$ R 和 $\varepsilon > 0$。我们将波动率的总波动率和现货-波动率相关性分别记为

$$\vartheta^2 = \beta^2 + \varepsilon^2, \qquad \rho = \beta/\vartheta, \tag{2}$$

并记作 $\vartheta\,\mathrm{d}W_t^{\sigma} = \beta\mathrm{d}W_{(0)\,t} \ \ +\varepsilon\,\mathrm{d}W_t^{(1)}$，表示驱动波动率的布朗运动。该核是 Riemann–Liouville 分数阶核

$$K(t) = \frac{t^{H-1/2}}{\Gamma(H+1/2)}, \qquad H \in (0, 1/2], \qquad \alpha := H + \tfrac{1}{2}. \tag{3}$$

对于 $H = 1/2$ 该核为常数， $K \equiv 1$，而式（1）是 Sepp and Rakhmonov (2023) 的模型。漂移具有多项式形式（$\kappa_1 + \kappa_2\sigma$）（$\theta - \sigma$）$= \kappa_1\theta -$（$\kappa_1 - \kappa_2\theta$）$\sigma - \kappa_2\sigma^2$，我们在第 4 节的测度变换中使用该形式。

对数价格 $X_t = \ln S_t$ 和积分方差 I_t 为

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2}I_t + \int_0^t \sigma_s \, \mathrm{d}W_s^{(0)}, \qquad I_t = \int_0^t \sigma_s^2 \, \mathrm{d}s. \tag{4}$$

2.2. 远期波动率曲线

波动率（1）既不是马尔可夫过程，也不是半鞅，当 $H < 1/2$ 时。沿用 Viens 和 Zhang（2019）的做法，我们使用远期波动率曲线作为状态变量

$$\Theta_s^t = \sigma_0 + \int_0^t K(s-r)\Big[(\kappa_1 + \kappa_2\sigma_r)(\theta - \sigma_r)\,\mathrm{d}r + \vartheta\sigma_r \, \mathrm{d}W_r^\sigma\Big], \qquad s \geq t. \tag{5}$$

曲线 $s \mapsto \Theta_s^t$ 是 $\mathcal{F}_t$-可测的，满足 $\Theta_t^t = \sigma_t$，并具有流性质

$$\sigma_s = \Theta_s^t + \int_t^s K(s-r)\Big[(\kappa_1 + \kappa_2\sigma_r)(\theta - \sigma_r)\,\mathrm{d}r + \vartheta\sigma_r \, \mathrm{d}W_r^\sigma\Big], \qquad s \geq t. \tag{6}$$

远期曲线是未来 Volterra 方程的适应输入，一般并非条件均值 $\mathrm{E}[\sigma_s \mid \mathcal{F}_t]$。当 t 推进时，曲线沿着方向 $s \mapsto K(s-t)$ 在 $[t, \infty)$ 上移动。该方向会进入 Viens 和 Zhang（2019）的路径依赖的 Feynman–Kac 公式的每一个泛函导数中。当 $K \equiv 1$ 曲线为平坦的， $\Theta_s^t = \sigma_t$，路径依赖方程便化为经典偏微分方程。

2.3. 马尔可夫近似

该实现将 K 替换为指数函数和

$$K^N(t) = \sum_{i=1}^N w_i \, e^{-x_i t}, \qquad w_i > 0, \; x_i \geq 0, \qquad \bar{w} := \sum_{i=1}^N w_i, \tag{7}$$

其节点为 x_i ，权重为 w_i。此类马尔可夫近似可追溯至 Abi Jaber 和 El Euch（2019），而 Alfonsi 和 Kebaier（2024）分析了它们对完全单调核的收敛性。在 $H = 0.30$ 处的校准采用了具有 $N = 97$ 个节点的核（附录 B.4）；对于$H = 1/2$，该核为 $K \equiv 1$，其中 $N = 1$、$x_1 = 0$ 和 $w_1 = 1$。表 3 和图 3 使用了 $N = 3$，其节点和权重取自 Bayer 和 Breneis（2023）针对到期日为 T的欧式期权进行优化的求积公式。对于 $H = 0.1$ 和 $T = 1$ ，该公式给出 $x =$ （0.0333，2.242，46.83）以及$w =$（0.555，1.111，6.086）。

求积公式低估了 K^2的质量，而二阶矩取决于该质量（第 3.3 节）。

Lemma 2.1（因子表示）令 σ^N 用 K^N 代替 K来求解（1）。定义 $\sigma_{0,\,i} = \sigma_0/\bar{w}$，并令 $\sigma^{(i)}$、$i = 1$、.....、 N求解

$$\mathrm{d}\sigma_t^{(i)} = -x_i\big(\sigma_t^{(i)} - \sigma_{0,i}\big)\mathrm{d}t + (\kappa_1 + \kappa_2\sigma_t^N)(\theta - \sigma_t^N)\,\mathrm{d}t + \vartheta\sigma_t^N \, \mathrm{d}W_t^\sigma, \qquad \sigma_0^{(i)} = \sigma_{0,i}, \tag{8}$$

其中 $\sigma_t^N = \sum_{i=1}^N w_i\sigma_t^{(i)}$。然后， σ^N 满足核为 K^N 的 *Volterra* 方程，其远期

曲线为

$$\Theta_s^t = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{N} w_i\, e^{-x_i(s-t)}\big(\sigma_t^{(i)} - \sigma_{0,i}\big), \qquad s \ge t. \tag{9}$$

引理 2.1 将近似模型化简为一个 N 维扩散过程，而 (9) 将远期曲线表示为因子状态的线性函数。证明见附录 A。任意选择$\sigma_{0,\,i}$且满足 $\sum_i w_i\sigma_{0,\,i} = \sigma_0$ 都会得到相同的 σ^N，代码中采用了均分方式 $\sigma_{0,\,i} = \sigma_0/\bar{w}$。

2.4. 适定性

对于 $\kappa_2 = 0$，(1) 的漂移系数和扩散系数均为全局 Lipschitz。Abi Jaber 等人 (2019年) 的定理 3.3 和例 2.3(ii) 对分数阶核给出了唯一的连续强解，其引理 3.1 给出了有限时域矩。由于该核完全单调、边界漂移为 $\kappa_1\theta \ge 0$，且扩散系数在零点处为零，他们的定理 3.6 和例 3.7 给出了一个非负解。对于 $\kappa_2 > 0$，漂移呈二次增长，且不满足全局 Lipschitz 条件，因此这些结果不能直接应用。下一个定理将涵盖二次漂移、第 4 节中的倾斜漂移以及马尔可夫核 (7)。

THEOREM 2.2（具有二次漂移的全局适定性）令 K 为分数阶核（3），其中$H \in$ （0，$1/2$] 或为马尔可夫核（7）。令 $\sigma_0 \ge 0$、$c_0 \ge 0$、$c_1 \in \mathrm{R}$、$d \ge 0$ 和 $\vartheta \ge 0$，并令 B 为布朗运动。该方程

$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t K(t-s)\big[c_0 + c_1\sigma_s - d\sigma_s^2\big]\,\mathrm{d}s + \int_0^t K(t-s)\vartheta\sigma_s\,\mathrm{d}B_s \tag{10}$$

在 $[0,\infty)$ 上具有路径唯一的连续强解。该解是非负的，并且$\mathrm{E}\big[\sup_{t\le T}\sigma_t^p\big] < \infty$ 对每个 $p \ge 1$ 和 $T > 0$均成立。

式（1）中的波动率方程是令 $c_0 = \kappa_1\theta$、$c_1 = \kappa_2\theta - \kappa_1$ 和 $d = \kappa_2$时的式（10）。证明见附录 A。困难在于，随机 Volterra 方程没有针对状态函数的伊藤公式，因此，用于控制扩散过程二次漂移的李雅普诺夫论证无法使用。我们以单侧界替代它。根据上述引用的结果，截断方程具有非负解。在非负半轴上，项 $-d\sigma^2$ 只会降低漂移，而非负核通过卷积传递这一符号。因此，截断解的矩由线性上界函数的矩控制，并且该控制关于截断水平一致；随后我们去掉截断。

Pannier 和 Jacquier（2019年）以相同方式移除了截断，针对局部利普希茨漂移，在排除二次项的线性增长条件下进行处理。

定理 2.2 的矩界在有限时间范围内成立，并继承线性上界函数的增长性。第 3 节量化了长期行为。在 $H = 1/2$ 处，该方程是 Sepp and Rakhmonov (2023年) 所述的经典正的非爆炸扩散过程。对于 $H < 1/2$，定理给出$\sigma_t \ge 0$，但严格正性仍未解决。

CONJECTURE 2.3（严格正性）对于每个 $H \in$ （0，$1/2$）以及 （1）中的参数，波动率在每个有限时间区间内几乎处处严格为正。

本文没有任何结果用到猜想 2.3。数值格式的到零路径和附录 C.1 中的微观符号偏差都无法解决这一问题。

3. 矩与稳定性参数

有了 $\kappa_2 = 0$ ，漂移便是线性的，而波动率满足一个带乘性噪声的线性随机 Volterra 方程。因此，前两个条件矩都可以写成闭式形式，唯独核的预解除外。其经济含义很简单：均值回复通过核作用于波动率，其累积效应由预解刻画。噪声则通过经预解滤波的同一个核发挥作用，而其二阶矩会因核在零点处的奇异性而不断累积。

3.1. 预解

令 R 表示 $\kappa_1 K$ 的预解（Gripenberg 等，1990年，第2章），定义为

$$R = \kappa_1 K - \kappa_1 K * R, \qquad (K * R)(t) = \int_0^t K(t-u) R(u)\,\mathrm{d}u, \tag{11}$$

并定义 $G = R/\kappa_1$ （ $\kappa_1 > 0$ ）以及 $G = K$ （ $\kappa_1 = 0$）。对于分数阶核（3），预解具有显式形式（El Euch和Rosenbaum，2019年）：

$$R(t) = \kappa_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\kappa_1 t^\alpha), \qquad \int_0^t R(u)\,\mathrm{d}u = 1 - E_\alpha(-\kappa_1 t^\alpha), \qquad G(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\kappa_1 t^\alpha), \tag{12}$$

其中，$E_{a,\,b}$（z）$= \sum_{k\geq 0} z^k/\Gamma$（$ak+b$）是Mittag-Leffler 函数，且$E_a = E_{a,\,1}$。对于马尔可夫核（7），预解可由 N 个常微分方程组成的线性系统得到。

3.2. 条件均值与二阶矩

Proposition 3.1（条件均值）令 $\kappa_2 = 0$ 和 $t \leq s$。条件均值 m_t（s）$= \mathrm{E}[\sigma_s \,|\mathcal{F}_t]$ 为

$$m_t(s) = \theta + \psi_t(s) - \int_t^s R(s-r)\,\psi_t(r)\,\mathrm{d}r, \qquad \psi_t(s) = \Theta_s^t - \theta. \tag{13}$$

特别地，m（t）：$= \mathrm{E}[\sigma_t] = \theta +$ （$\sigma_0 - \theta$）$\big(1 - \int_0^t R$（u）$\,\mathrm{d}u\big)$；对于分数阶核 m（t）$=\theta +$（$\sigma_0 - \theta$）E_α（$-\kappa_1 t^\alpha$）。

Proposition 3.2（条件二阶矩）令 $\kappa_2 = 0$ 和 $t \leq s$。条件二阶矩 v_t（s）$=\mathrm{E}[\sigma_s^2 \mid \mathcal{F}_t]$ 满足线性 *Volterra* 方程

$$v_t(s) = m_t(s)^2 + \vartheta^2 \int_t^s G(s-r)^2\, v_t(r)\,\mathrm{d}r. \tag{14}$$

等价地，在 $[t,\infty)$ 上，$v_t = m_t^2 + \widetilde{R} * m_t^2$，其中 $\widetilde{R}$ 是带正号的 $\vartheta^2 G^2$ 的预解，$\widetilde{R} = \vartheta^2 G^2 + \vartheta^2 G^2 * \widetilde{R}$。

证明见附录 A。关键步骤是将中心化波动率 $\sigma_s - m_t(s)$ 写成随机卷积 $\int_t^s G(s-r)\vartheta\sigma_r\,\mathrm{d}W_r^\sigma$。确定性均值回复被吸收到预解中，随后 Itˆo 等距关系闭合了二阶矩。波动率的跨时协方差从未出现在（14）中，这正是该方程为线性一维方程的原因。

在 $\kappa_2 = 0$ 下，漂移是仿射的，扩散系数的平方是状态的二次函数。因此，波动率是 Abi Jaber 等人（2024）意义下的多项式Volterra过程，其

矩满足确定性积分方程。命题3.1和3.2以预解形式给出了其中前两个方程。

Corollary 3.3（Mittag-Leffler 增长）令 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$，并令 K 为分数阶核，则 (3).

$$\mathrm{E}[\sigma_t^2] = \sigma_0^2\, E_{2H}\big(a\, t^{2H}\big), \qquad a = \frac{\vartheta^2\,\Gamma(2H)}{\Gamma(H+1/2)^2}, \tag{15}$$

且 $\mathrm{E}[I_T] = \sigma_0^2\, T\, E_{2H,\ 2}\big(a\, T^{2H}\big)$。当 $t \to \infty$ 时，$\mathrm{E}[\sigma_t^2] \sim (2H)^{-1}\sigma_0^2 \exp\big(a^{1/(2H)}t\big)$。

在 $H = 1/2$ 时，二阶矩为 $\sigma_0^2 e^{\vartheta^2 t}$。对于 $H < 1/2$，其指数增长率为 $a^{1/(2H)}$。跨 H 进行比较时，需要指定时间范围，因为 ϑ 的单位为年$^{-H}$。

3.3. 长期二阶矩稳定性

方程（14）是一个以 $h = \vartheta^2 G^2$ 为非负核的线性 Volterra 方程。其正预解为 $\widetilde{R} = \sum_{j\ge 1} h^{*j}$，由 Tonelli 定理可得 $\int_0^\infty \widetilde{R} = \sum_{j\ge 1}\gamma^j$，其中 $\gamma = \int_0^\infty h$。该级数有限当且仅当 $\gamma < 1$。由于在下一命题的假设下，均值的平方有界且远离零，因此同一阈值刻画了一致二阶矩有界性。

Proposition 3.4（长期二阶矩稳定性）令 $\kappa_2 = 0,\ \ \kappa_1 > 0,\ \ \theta > 0$ 以及 $\sigma_0 > 0$，并定义

$$\begin{aligned} \gamma &:= \vartheta^2 \int_0^\infty G(u)^2\,\mathrm{d}u, \\ \int_0^\infty G(u)^2\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^{2\alpha} + 2\kappa_1\cos(\pi\alpha/2)\,\omega^\alpha + \kappa_1^2} = C(\alpha)\,\kappa_1^{-2H/(H+1/2)}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$C(\alpha) = -\frac{\cot(\pi\alpha/2)}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}, \qquad \tfrac{1}{2} < \alpha < 1, \qquad C(1) = \tfrac{1}{2}.$$

则上确界$_{t\ge 0}\,\mathrm{E}[\sigma_t^2] < \infty$ 当且仅当 $\gamma < 1$。若 $\gamma < 1$，则当 $t \to \infty$时，$\mathrm{E}[\sigma_t^2] \to \theta^2/(1-\gamma)$，若$\gamma \ge 1$，则$\mathrm{E}[\sigma_t^2] \to \infty$。

证明见附录 A。在 $H = 1/2$处，该条件表示为 $\vartheta^2 < 2\kappa_1$，而极限 $2\kappa_1\theta^2/(2\kappa_1 - \vartheta^2)$ 是 Sepp and Rakhmonov (2023) 的逆伽马平稳分布的二阶矩。对于 $\kappa_1 = 0$，(16) 中的积分发散，这与推论 3.3 一致。我们将 γ 称为线性漂移稳定性参数。该参数同时也是附录 C 中带符号二次 Hawkes 比较中的反馈核平方范数。该判据针对指定测度下的系数，并不能原样扩展到二次漂移。

该判据同样适用于具有正节点的马尔可夫核 (7)。变换$\widehat{K}^N(z) = \sum_{i=1}^N w_i/(z + x_i)$给出有理函数 $\widehat{G}_N = \widehat{K}^N/(1 + \kappa_1\widehat{K}^N)$，该函数具有简单的负极点和正留数。因此，预解 G_N 是有限个指数衰减项的和，其系数为正；均值则从 σ_0 单调移动至$m_\infty = (\sigma_0 + \kappa_1 k_\infty\theta)/(1 + \kappa_1 k_\infty)$，其中 $k_\infty = \sum_{i=1}^N w_i/x_i$。命题 3.4 的证明同样适用，只需以 $\gamma_N := \vartheta^2\int_0^\infty G_N(u)^2\,\mathrm{d}u$ 替代 γ，并以 m_∞ 替代 θ。二阶矩有界当且仅当 $\gamma_N < 1$，此时其极限为 $m_\infty^2/(1-\gamma_N)$。阈值取决于核，第 5 节比较了三因子核与分数阶核。

高于阈值时，二阶矩呈指数增长，其增长率满足一个标量方程。定义核 $h = \vartheta^2 G^2$的拉普拉斯变换，

$$\widehat{h}(\lambda) = \vartheta^2 \int_0^\infty e^{-\lambda u} G(u)^2 \,\mathrm{d}u = \frac{\vartheta^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\left|(\lambda/2 + \mathrm{i}\omega)^\alpha + \kappa_1\right|^2}, \qquad \lambda > 0. \tag{17}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$函数 h 连续且严格递减，并且当 $\lambda \to \infty$ 时，$h(0+) = \gamma$，$h(\lambda) \to 0$。

Proposition 3.5（阈值以上的增长率）令 $\kappa_2 = 0$、$\kappa_1 \geq 0$、$\theta > 0$ 和 $\sigma_0 > 0$，并在 $\kappa_1 = 0$ 时令 $\widehat{\ }$设为 $\gamma = \infty$。如果 $\gamma > 1$，方程 $h(\lambda^*) = 1$ 有唯一根 $\lambda^* > 0$，并且

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}\,\mathrm{E}[\sigma_t^2] = \frac{1}{|\widehat{h}'(\lambda^*)|} \int_0^\infty e^{-\lambda^* s} m(s)^2 \,\mathrm{d}s. \tag{18}$$

对于 $\sigma_0 = \theta$，该极限等于 $\theta^2/(\lambda^*|\widehat{h}'(\lambda^*)|)$。如果 $\gamma = 1$，则当 $t \to \infty$ 时，$\mathrm{E}[\sigma_t^2]/t \to \theta^2/\mu_h$，其中 $\mu_h = \vartheta^2 \int_0^\infty u\,G(u)^2 \,\mathrm{d}u < \infty$。

$\widehat{\ }$附录 A 中的证明将式（14）视为一个更新方程。对于 $\kappa_1 = 0$，变换为 $h(\lambda) = a\lambda^{-2H}$，因此 $\lambda^* = a^{1/(2H)}$，而极限为 $\sigma_0^2/(2H)$，与推论 3.3 一致。在 $H = 1/2$处，根为 $\lambda^* = \vartheta^2 - 2\kappa_1$。当核较粗糙时，均值回复仅会适度降低该速率。在 $H = 0.1$ 和 $\vartheta = 1.85$ 处，对于 $\kappa_1 = 0$，速率为每年 17,851；对于 $\kappa_1 = 3$，速率为每年 17,235。

表2列出了临界波动率的波动率 $\vartheta_c = (\int_0^\infty G^2)^{-1/2}$。在该阈值及以上，二阶矩无界。随着 $\vartheta_c \propto \kappa_1^{H/\alpha}$，均值回复会提高该值，其指数在 $H = 0.1$ 处为 $1/6$，在 $H = 1/2$处为 $1/2$。因此，κ_1 增加十倍会分别使 ϑ_c 提高 47% 和 216%。参数的单位取决于赫斯特指数，因此跨行比较需要指定时间范围和报价约定。在短时间范围内固定波动率系数 Δ，可得到领先阶创新项代理

$$\nu_\Delta = \vartheta\Big(\int_0^\Delta K(u)^2 \,\mathrm{d}u\Big)^{1/2} = \frac{\vartheta \Delta^H}{\sqrt{2H}\,\Gamma(\alpha)}.$$

该代理在 $\vartheta\sqrt{\Delta}$ $H = 1/2$时化简。表2的右侧区块使用$\nu_{1/252,\ c}$表示边界。该代理在较短的时间范围内冻结波动率系数，因此不同于精确的条件日标准差。当该值超过 1 时，这种差异尤为重要。在线性漂移约束是否在某个市场中生效，取决于带有规定单位的校准三元组（H，κ_1，ϑ）。

该代理还将 ϑ 与粗糙 Bergomi 模型的波动率的波动率 η_B 联系起来；在该模型中，方差为 $\xi_0(t)\,\mathcal{E}\big(\eta_\mathrm{B}\sqrt{2H}\int_0^t (t-s)^{H-1/2}\,\mathrm{d}W_s\big)$ (Bayer 等 2016)。匹配两个模型中对数波动率的短时核，可得 $\vartheta = \eta_\mathrm{B}\sqrt{2H}\,\Gamma(\alpha)/2$，因此有 $\nu_\Delta = (\eta_\mathrm{B}/2)\Delta^H$。

3.4. 二次漂移下的二阶矩

当核为常数时，二次漂移消除了线性漂移下的二阶矩约束。在生成元作用于 σ^2 时，其贡献为 $-2\kappa_2\sigma^3$；对于任意 ϑ，在波动率较大时，该贡献都超过二次扩散的贡献 $\vartheta^2\sigma^2$。

Proposition 3.6（二次漂移在 $H = 1/2$）令 $K \equiv 1$、$\kappa_1 > 0$、$\theta > 0$ 和 $\kappa_2 > 0$。σ 的平稳密度正比于

$$\sigma^{-2-2(\kappa_1 - \kappa_2\theta)/\vartheta^2} \exp\Big(-\frac{2\kappa_1\theta}{\vartheta^2\sigma} - \frac{2\kappa_2\sigma}{\vartheta^2}\Big), \tag{19}$$

并且，在平稳分布下，对于任意 $\vartheta > 0$，所有正矩和负矩均为有限值。从任意确定性 $\sigma_0 > 0$出发，二阶矩在 $[0, \infty)$上一致有界。

证明见附录 A。

密度 (19) 属于广义逆高斯型，这是 Carr 和 Willems (2019年) 针对具有二次漂移的对数正态波动率得到的稳态分布。当 $\kappa_2 = 0$ 时，(19) 化为 Sepp and Rakhmonov (2023) 的逆伽马分布，其二阶矩有限当且仅当 $\vartheta^2 < 2\kappa_1$，或者在 $H = 1/2$ 时 $\gamma < 1$ 。当 $\kappa_2 > 0$时，指数尾部保证了所有平稳矩均存在，而证明中的 Lyapunov估计则给出了从确定性初始状态出发的统一二阶矩界。

对于分数阶核，生成元论证并不适用，但二次漂移仍能对时间平均意义下的二阶矩作出界定。波动率非负，这迫使驱动 Volterra 方程的半鞅具有一个下界。沿路径累积的预期二次阻尼不能超过该下界。该论证仅使用波动率的非负性以及核的第一类预解的非负性，因此也适用于 K^N。

Proposition 3.7（时间平均二阶矩在二次漂移下）令 K 为分数阶核 （3），其中 $H \in$（0，$1/2$] 或核 K^N。令 L 为其第一类预解，即定义在 $[0, \infty)$ 上的非负测度，并满足 （$K * L$） （t） $= \int_{[0,t]} K$（$t - s$） L（ds） $= 1$ 对所有 $t > 0$均成立，并令 $\kappa_2 > 0$。对于每个 $T > 0$，平均值 $A_T = \mathrm{E}[I_T]/T$ 满足

$$\kappa_2 A_T \le \kappa_1\theta + (\kappa_2\theta - \kappa_1)^+\sqrt{A_T} + \frac{\sigma_0\, L([0,T])}{T}. \tag{20}$$

对于分数阶核 L（$[0, T]$） $/T = T^{-\alpha}/\Gamma$（$2 - \alpha$），并且对于每个 $\vartheta > 0$,

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}[I_T]}{T} \le \theta \max\left(\theta, \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right). \tag{21}$$

对于 K^N，比值 L（$[0, T]$） $/T$收敛于 $\ell_N = \left(\int_0^\infty K^N\ (s)\ \mathrm{d}s\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^N w_i/x_i\right)^{-1}$；如果某个节点消失，则有 $\ell_N = 0$。令 $c_1 = \kappa_2\theta - \kappa_1$，则对于每个 $\vartheta > 0$,

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}[I_T]}{T} \le \left(\frac{c_1^+ + \sqrt{(c_1^+)^2 + 4\kappa_2(\kappa_1\theta + \sigma_0\ell_N)}}{2\kappa_2}\right)^2. \tag{22}$$

证明见附录 A。界 (21) 既不依赖于 ϑ，也不依赖于 H。界 (22) 也不依赖于 ϑ 。其附加项 $\sigma_0\ell_N$ 源于可积核会将波动率拉回初始水平 σ_0。在线性漂移且 $\gamma \ge 1$ 的情况下，根据命题 3.4，同一时间平均值会发散。在 $H = 1/2$ 时，命题 3.6 的平稳分布满足 $\mathrm{E}[\sigma^2] = \theta\mathrm{E}[\sigma] + (\kappa_1/\kappa_2)(\theta - \mathrm{E}[\sigma])$，其中 $0 \le \mathrm{E}[\sigma] \le \theta$，这与 (21) 一致。

长期方差互换执行价仅由漂移参数决定，且有界。图 3 将三因子核的有限时域界与模拟时间平均值进行了比较。对于分数阶核，与仿射过程的比较也给出了每个时刻二阶矩的界。

Corollary 3.8（二次漂移下的均匀二阶矩）对于分数阶核(3)，$0 < H \le 1/2$ 以及 $d = \kappa_2 > 0$，式 (1) 中的波动率满足$\sup^{t\ge 0} \mathrm{E}[\sigma_t^2] < \infty$ 对每个 ϑ均成立。更准确地说，记 $\alpha = H + 1/2$、 $C_\lambda = c_0 + (c_1 + \lambda)^2/(4d)$ 以及 $\gamma_\lambda = \vartheta^2 C(\alpha)\lambda^{-2H/\alpha}$，其中 $C(\alpha)$ 由(16)给出。对于满足 $\gamma_\lambda < 1$的每个 $\lambda > 0$，

$$\sup_{t\ge 0} \mathrm{E}[\sigma_t^2] \le \frac{\max\{\sigma_0, C_\lambda/\lambda\}^2}{1 - \gamma_\lambda}. \tag{23}$$

界（23）通过 γ_λ取决于波动率的波动率。时间平均界（21）与 ϑ和 H均无关。

3.5. 预期积分方差与 *VIX*

预期积分方差可通过对命题 3.2 进行积分得到，

$$\mathrm{E}[I_T] = \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t, \qquad v(t) = \mathrm{E}[\sigma_t^2]. \tag{24}$$

对于连续采样的年化方差互换，公平执行价为 $T^{-1}\mathrm{E}[I_T]$，而式 (24) 本身就是预期总方差。我们将 VIX 表示为小数形式的波动率单位，即未来 $\Delta = 30/365$ 年的预期平均方差的平方根。以波动率点表示的报价指数为 100VIX。VIX 期货需要对该平方根取预期（Sepp 2008）。

Proposition 3.9 (VIX) 令 $\kappa_2 = 0$。则

$$\begin{aligned} \mathrm{VIX}_T^2 &= \frac{1}{\Delta}\mathrm{E}\big[I_{T+\Delta} - I_T \mid \mathcal{F}_T\big] = \frac{1}{\Delta}\int_T^{T+\Delta} \varpi_T(r)\, m_T(r)^2\,\mathrm{d}r, \\ \varpi_T(r) &= 1 + \int_r^{T+\Delta} \widetilde{R}(s-r)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{25}$$

其中，$\widetilde{R}$ 是命题 *3.2* 中定义的 $\vartheta^2 G^2$ 的正预解，$\widetilde{R} = \vartheta^2 G^2 + \vartheta^2 G^2 * \widetilde{R}$，而$m_T$ 是条件均值曲线 (13)。在马尔可夫核 (7)下，m_T 关于因子状态 $u_i = \sigma_T^{(i)} - \sigma_{0,i}$ 是仿射的，并且

$$\mathrm{VIX}_T^2 = q_0 + q_1^\top u + u^\top Q_2\, u \tag{26}$$

其中确定性系数通过将仿射条件均值代入 (25) 获得。由于 ϖ_T 为非负，二次系数为半正定。

VIX 期货还需要进一步计算平方根的条件期望。对于有限核，二次型 (26) 允许在无需嵌套模拟的情况下计算该期望。

4. 正相关下的鞅性质

4.1. 与波动率成比例的风险市场价格

Sepp and Rakhmonov (2026) 的稳健性准则考察在测度变换下，波动率动态是否保持其形式。对于 Volterra 模型，定价测度和股票测度的变换仅会平移二次漂移系数。

设物理动态为 $\mathrm{d}S_t/S_t = \mu_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}W_{(0)\,t}$，其波动率为 (1)，物理参数为 $(\kappa_1, \kappa_2, \theta, \beta, \varepsilon)$。遵循 Sepp and Rakhmonov (2023)，取风险市场价格 $\lambda_t^{(j)} = \bar{\lambda}_j \sigma_t$、$j = 0,1$，并考虑密度

$$\left.\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}\Big(-\int_0^{\cdot} \bar{\lambda}_0 \sigma_u\,\mathrm{d}W_u^{(0)} - \int_0^{\cdot} \bar{\lambda}_1 \sigma_u\,\mathrm{d}W_u^{(1)}\Big)_t. \tag{27}$$

当该随机指数为真鞅时，吉尔萨诺夫定理给出 $\mathrm{d}S_t/S_t = (\mu_t - \bar{\lambda}_0\sigma_t^2)\mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}W^{\mathrm{Q}}_{\cdot\,,\,t}{}^{(0)}$。因此，零利率局部鞅价格动态要求 $\mu_t = \bar{\lambda}_0\sigma_t^2$，

而一般的实际漂移并不允许采用这一特定的常数风险溢价设定。下文将讨论价格的真鞅性质。

PROPOSITION 4.1（漂移多项式的保持）如果（27）是真鞅，则在Q 下，波动率具有相同的 *Volterra* 核和扩散系数，其漂移为

$$\kappa_1\theta - (\kappa_1 - \kappa_2\theta)\sigma - \kappa_2^{\mathrm{Q}}\sigma^2, \qquad \kappa_2^{\mathrm{Q}} = \kappa_2 + \beta\bar{\lambda}_0 + \varepsilon\bar{\lambda}_1. \tag{28}$$

因此，截距 $c_0 = \kappa_1\theta$ 和线性系数 $c_1 = \kappa_2\theta - \kappa_1$ 保持不变。保持多项式形式本身并不能保持限制条件 κ_1、$\kappa_2 \geq 0$、$\theta > 0$。

证明将 $\mathrm{d}W^{(j)} = \mathrm{d}W_{\mathrm{Q}}$、$^{(j)} - \bar{\lambda}_j\sigma\,\mathrm{d}t$ 代入核积分。特别地，按照（10）设置$d = \kappa_2^{\mathrm{Q}}$ 时，只要 $c_0 > 0$ 且 $d > 0$，波动率仍属于可容许均值回复族，其中

$$\theta^{\mathrm{Q}} = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4dc_0}}{2d}, \qquad \kappa_1^{\mathrm{Q}} = \frac{\sqrt{c_1^2 + 4dc_0} - c_1}{2}, \qquad \kappa_2^{\mathrm{Q}} = d.$$

这些参数满足（$\kappa_1^{\mathrm{Q}} + d\sigma$）（$\theta^{\mathrm{Q}} - \sigma$）$= c_0 + c_1\sigma - d\sigma^2$。对于 $c_0 > 0$ 和 $d = 0$，可容许性则要求 $c_1 < 0$，其中 $\kappa_1^{\mathrm{Q}} = -c_1$ 和 $\theta^{\mathrm{Q}} = c_0/$（$-c_1$）。如果 $c_0 = 0$，则可容许性要求 $d > 0$ 时需要 $c_1 > 0$，从而得到 $\kappa_1^{\mathrm{Q}} = 0$ 和 $\theta^{\mathrm{Q}} = c_1/d$。当 $d = 0$ 时，只有 $c_1 = 0$是可容许的，并且 $\theta^{\mathrm{Q}} > 0$ 可以任意选取。负的 d 不属于所述族。这些限定与密度满足真鞅要求彼此独立。

附录 C 中的订单流解释涉及物理漂移。

COROLLARY 4.2（测度变换的密度）如果 $\kappa_2^{\mathrm{Q}} \geq 0$，则随机指数（27）在 $[0,T]$ 上对每个 $T > 0$ 都是真正的 P-鞅。

附录 A 中的证明以密度代替价格，重复了定理 4.3 的局部化论证，而倾斜方程是漂移为（28）的波动率方程。不涵盖负的 κ_2^{Q}。

4.2. 价格的鞅性质

本小节中的参数是在 Q 下的（1）中的参数，因此 κ_2 表示命题 4.1 的 κ_2^{Q}。标准局部化论证将价格的鞅性质归结为倾斜波动率方程的非爆炸性。Guyon 等（2026年，引理 3.1）在其 Volterra 框架中给出了这一归结。在我们模型的直接表示中，$X = \sigma$、$F_1 = F_2 = \mathrm{id}$、$\Gamma_1(x) = \vartheta x$、$\Gamma_2(x) = c_0 + c_1 x - \kappa_2 x^2$ 以及 $K_1 = K_2 = K$。

对于 $\kappa_2 = 0$，其增长条件成立。其定理 1(A)随后涵盖了 $\beta = 0$，其推论 2.6(i)涵盖了 $\beta < 0$，因为波动率是非负的。对于 $\kappa_2 > 0$，其假设 1.2不成立：该假设将 Γ_2 和 F_2 的增长指数之积限制为不超过一，而对于二次漂移，该乘积为二。因此，在这一表示下，其定理 1(B)无法直接证明我们的结论。定理 2.2提供了非爆炸性这一步。

THEOREM 4.3（鞅性质）令 K 为分数阶核（3），其中 $H \in (0,\ 1/2]$ 或为马尔可夫核（7）。若 $\kappa_2 \geq \beta$，则式（1）中的价格 S在 $[0,T]$ 上对每个$T > 0$均为真正的Q-鞅。

在停止股票测度下，漂移获得了 $+\beta\sigma^2$。如果 $\kappa_2 \geq \beta$，定理 2.2 排除了倾斜方程的爆炸。对于常数核，逆命题已知成立（Sepp 和 Rakhmonov（2023），定理 3.7）；在线性漂移下，对于有限马尔可夫核也已知成立（Guyon 等 2026年，推论 2.6(ii)）。以下结果还涵盖二次漂移下的正有限混合。

Proposition 4.4（有限指数混合的逆命题）令 $K = K^N$ 属于（7），其具有正权重、非负节点和常数初始输入 $\sigma_0 > 0$。如果 $\beta > \kappa_2$，则对于每个 $T > 0$，$\mathrm{E_Q}[S_T] < S_0$ 。因此，当且仅当 $\kappa_2 \geq \beta$时，价格在每个有限时域上都是真鞅。

p roof in Appendix A uses $K(0) < \infty$. 对于奇异核，逆命题仍然适用 n.

Conjecture 4.5 对于带有 $0 < H < 1/2$ 的分数阶核 (3)，如果 $\beta > \kappa_2$，则对于每个 $T > 0$ 都有 $\mathrm{E_Q}[S_T] < S_0$。

表 3 中的原始条件远期在每个网格上的期望均为 1（引理 B.1）。对于$\kappa_2 = 0$ 和 0.3，连续三因子价格是严格局部鞅（命题 4.4）。在 5,760 步时，两个样本均值为 0.93971 和 0.98473，批次标准误为 0.00068 和 0.00155。对于 $\kappa_2 \geq \beta$，三个均值均在距 1.7 个批次标准误以内。

因此，二次阻尼具有两个作用。任何 $\kappa_2 > 0$ 都能界定分数阶二阶矩，而份额测度论证则将 κ_2 与 β 进行比较，以确定价格是否为鞅。

5. 数值示例

图 1 展示了在固定 $H = 0.30$ 和 $H = 1/2$ 下的比特币和以太币波动率微笑。每次拟合均在三个到期期限内使用一个参数向量，以及所选快照中的全部 45 个比特币或 39 个以太坊报价。图 2 和图 3 展示了二阶矩阈值以及二次阻尼的影响。

六个风险中性系数通过对权利金中点进行最小二乘法估计，其中每个误差均除以其完整的买卖价差，并为每个到期期限赋予相同权重。我们以正的数值裕度约束 $\kappa_2 \geq \beta$。表4汇总了四个参数向量、拟合误差和数值诊断结果。

对于 $H = 1/2$，我们针对每个傅里叶变量求解波动率的向后方程，并对特征函数进行反演（Sepp 和 Rakhmonov（2023））。求解器检查中价格的最大变动为 0.0012 个买卖价差。对于 $H = 0.30$，我们在 97 因子核上应用有界估计量（B8），并使用经典模型作为多层控制变量（附录 B.4）。鞅判据直接适用于该核。

四个拟合得到的现货—波动率相关性范围为 0.096 至 0.223。粗糙拟合和经典拟合分别将 45 个比特币价格中的 27 个和 28 个，以及 39 个以太币价格中的 33 个和 33 个置于买卖价差带内。对于比特币，粗糙拟合的加权均方根误差小 9.4%；对于以太币，误差则大 13.3%。其最大的逐点 95% 价格半宽度分别为比特币的 0.04932 个价差单位和以太币的 0.01977。两个比特币拟合都达到施加的边界 $\kappa_2 - \beta = 0.01$。在粗糙的以太币拟合中，κ_1 接近其下界。替代初始值未能满足正特征值限制，表中报告的是 900 秒时间限制下最佳的放宽边界迭代点。这两个快照展示了在固定 H 时的约束，并且几乎无法提供有关以太币长期水平的信息。当κ_2 设为零时，表4中的分数核取值将比特币置于稳定性阈值以下，而将以太币置于其上。相应的 97 因子取值在 $H = 0.30$ 处分别为 0.751 和 8.509。

在图 3(b) 中，$\vartheta = 1.2$ 超过了 1.17 的线性三因子阈值。精确的线性漂移平均值 $\mathrm{E}[I_T]/(T\theta^2)$ 从一年时的 32 上升至五年时的 2,540。五年时，命题 3.7 将该平均值界定为：$\kappa_2 = 0.3$时为 19.9，$\kappa_2 = 1.2$ 时为 5.0。24 个二次漂移单元格中的估计值范围为 1.7 至 2.8。对于线性漂移，360 个步长/年时，精确的五年网格期望比其连续时间值高 43%；720 个步长/年时则高 9%。在更精细的网格上，样本均值为 8.9，而精确值为 2,774。最大的 0.1% 路径贡献了线性漂移样本均值的 40% 至 62%，说明通过模拟估计这些矩的困难。

6. 结论与未决问题

二次阻尼允许正的现货—波动率相关性，同时保持价格鞅。对于模拟中使用的有限指数混合，边界恰好为 $\kappa_2 = \beta$。对于奇异分数阶核，我们证明了充分性，而必要性仍未解决。正的二次阻尼还使二阶矩在时间上保持一致有界。对于单位时间的预期积分方差，我们得到了仅漂移长期界（21）。线性模型具有不同的稳定性阈值，即 $\gamma = 1$，模拟必须针对其自身的核使用 γ 的值。

交易机制赋予这些系数以经济学解释。以与方差成正比的速率产生的带符号波动率冲击会生成乘性噪声，而微小的状态依赖偏差会产生二次阻尼。命题 C.1 证明了常数核下的停时扩散极限。奇异订单流极限、分数阶波动率的严格正性及其在二次漂移下的平稳分布仍有待研究。

资金支持

作者未获得本项工作的任何经费支持。

披露声明

作者声明不存在任何利益冲突。

生成式人工智能的使用

作者撰写了初稿并构建了数学论证。他们使用 OpenAI Codex (GPT-6) 和 Anthropic 的 Claude Fable 5.2 编辑文本、检查论证、协助编写复现代码并准备投稿文件。复现脚本生成了全部三幅图。作者作出了方法论决策，并核实了稿件的原创性和准确性，包括参考文献。他们审阅了两种工具的使用条款，确认其适合用于出版，并对整篇作品承担责任。

数据和代码可用性

期权数据面板使用了 Deribit 于2023年6月30日提供的比特币报价，以及于2021年10月26日提供的以太币报价，这些数据于2026年10月25日归档。图表脚本和模拟代码位于 StochVolModels 仓库（https://github.com/ArturSepp/StochVolModels）。如需获取所选报价，可联系通讯作者。

参考文献

Abi Jaber, E.、Cuchiero, C.、Pelizzari, L.、Pulido, S. 和 Svaluto-Ferro, S.，《多项式 Volterra 过程》。《电子概率杂志》，2024年，**29**，第176号论文，1–37。Abi Jaber, E. 和 El Euch, O.，《粗糙波动率模型的多因子近似》。《*SIAM* 金融数学杂志》，2019年，**10**，309–349。Abi Jaber, E.、Illand, C. 和 Li, S.，《可联合校准 SPX 与 VIX 波动率微笑的五次 Ornstein–Uhlenbeck 波动率模型》。arXiv:2212.10917。发表于$Risk$（2023年），题为《用于联合 SPX 和 VIX 校准的五次 Ornstein–Uhlenbeck 模型》，2022年。

Abi Jaber, E.、Larsson, M. 和 Pulido, S.，《仿射 Volterra 过程》。《应用概率年刊》，2019年，29，3155–3200。Alfonsi, A.，《保持非负性的卷积核：其在闭凸域中的随机Volterra方程及其近似中的应用》。Stochastic Process. Appl.，2025年，181，104535。Alfonsi, A. 和 Kebaier, A.，《完全单调型核的随机 Volterra 方程近似》。Math. Comp.，2024年，93，643–677。Bayer, C. 和 Breneis, S.，《粗糙 Heston 的弱马尔可夫近似》。arXiv:2309.07023，2023年。Bayer, C. 和 Breneis, S.，《利用弱模拟方案对粗糙 Heston 模型进行高效期权定价》。Quant. Finance，2024年，24，1247–1261。Bayer, C.、Friz, P. 和 Gatheral, J.，《粗糙波动率下的定价》。Quant. Finance，2016年，16，887–904。Blanc, P.、Donier, J. 和 Bouchaud, J.P.，《用于金融价格的二次 Hawkes 过程》。Quant. Finance，2017年，17，171–188。Bondi, A. 和 Pulido, S.，《随机 Volterra 方程爆炸的 Feller 检验》。《电子概率杂志》，2026年，31，1–41。预印本 arXiv:2406.13537。Carr, P. 和 Willems,S.，《具有二次漂移的对数正态型随机波动率模型》。arXiv:1908.07417，2019年。Chudasama, P. 和 Iyer, S.K.，《具有 Zumbach 效应的非对称超 Heston 粗糙波动率模型：作为二次 Hawkes 过程的缩放极限》。arXiv:2508.16566，2025年。Dandapani, A.、Jusselin, P. 和 Rosenbaum, M.，《从二次 Hawkes 过程到具有 Zumbach 效应的超 Heston 粗糙波动率模型》。Quant. Finance，2021年，21，1235–1247。El Euch, O.、Fukasawa, M. 和 Rosenbaum, M.，《杠杆效应与粗糙波动率的微观结构基础》。Finance Stoch.，2018年，22，241–280。El Euch, O. 和 Rosenbaum, M.，《粗糙 Heston 模型的特征函数》。Math. Finance，2019年，29，3–38。Ethier, S.N. 和 Kurtz, T.G.，《马尔可夫过程：刻画与收敛》，1986年（Wiley：纽约）。Feller, W.，《概率论及其应用导论》第二卷，第2版，1971年（Wiley：纽约）。Gassiat, P.，《粗糙 Bergomi 模型中的鞅性质》。Electron. Commun. Probab.，2019年，24，第33号，1–9。Gatheral, J.、Jaisson, T. 和 Rosenbaum, M.，《波动率是粗糙的》。Quant. Finance，2018年，18，933–949。Gatheral, J.、Jusselin, P. 和 Rosenbaum, M.，《二次粗糙 Heston 模型与标普 500/VIX 波动率微笑校准问题》。Risk，2020年5月。Giles, M.B.，《多层蒙特卡罗路径模拟》。Oper. Res.，2008年，56，607–617。Gorenflo, R.、Kilbas, A.A.、Mainardi, F. 和 Rogosin, S.V.，《Mittag-Leffler 函数、相关主题及应用》，2014年（Springer：柏林）。Gripenberg, G.、Londen, S.O. 和 Staffans, O.，《Volterra 积分方程与泛函方程》，1990年（剑桥大学出版社：剑桥）。Guyon, J.、Jeannin, T. 和 Jourdain, B.，《Volterra 波动率模型中的鞅性质》。arXiv:2610.32684，2026年。Hager, P.P.、Horst, U.、Wagenhofer, T. 和 Xu, W.，《粗糙对数正态波动率模型的微观结构基础》。arXiv:2603.13170，2026年。Horst, U.、Xu, W. 和 Zhang, R.，《路径依赖分数阶 Volterra 方程与由泊松随机测度驱动的粗糙波动率模型的微观结构》。arXiv:2412.16436，2024年。Jaisson, T. 和 Rosenbaum, M.，《作为近不稳定重尾 Hawkes 过程标度极限的粗糙分数阶扩散过程》。《应用概率年刊》，2016年，26，2860–2882。McCrickerd, R. 和 Pakkanen, M.S.，《为粗糙 Bergomi 模型的蒙特卡罗定价提速》。Quant. Finance，2018年，18，1877–1886。Ninomiya, S. 和 Victoir, N.，《随机微分方程的弱近似及其在衍生品定价中的应用》。Appl. Math. Finance，2008年，15，107–121。Pannier, A. 和 Jacquier, A.，《关于随机 Volterra 方程解的唯一性》。arXiv:1912.05917，2019年。Rheinl¨ander, T. 和 Schmutz, M.，《自对偶连续过程》。Stochastic Process. Appl.，2013年，123，1765–1779。Romano, M. 和 Touzi, N.，《随机波动率模型中的或有索赔与市场完备性》。Math. Finance，1997年，7，399–412。

Sepp, A., 跳扩散模型中的 VIX 期权定价。*Risk*，四月，2008年，第 84–89 页。Sepp, A. 和 Rakhmonov, P.，具有二次漂移的对数正态随机波动率模型。国际理论与应用金融期刊，2023年，**26**，2450003。Sepp, A. 和 Rakhmonov, P.，什么是稳健随机波动率模型？测度变换、鞅性质与跨资产应用。工作论文。较早版本见 https://ssrn。com/abstract=4647027，2026年。Shinozaki, Y.，通过马尔可夫近似实现粗糙波动率模型的高阶弱近似：漂移分裂时间离散化及其外推。*Quantitative Finance*，2026年，**26**，1585–1604。Viens, F. 和 Zhang, J.，分数布朗运动及相关路径依赖 PDE 的鞅方法。应用概率年刊，2019年，**29**，3489–3540。Willard, G.A.，多因子模型中路径无关衍生证券的价格和敏感度计算。衍生品杂志，1997年，**5**，45–61。

附录 A：证明

引理 *2.1* 的证明。令 $\mathrm{d}Z_s = (\kappa_1 + \kappa_2\sigma_s^N)(\theta - \sigma_s^N)\,\mathrm{d}s + \vartheta\sigma_s^N \mathrm{d}W_s^\sigma$ and $U_t^i = \int_0^t e^{-x_i(t-s)}\mathrm{d}Z_s$。则 $\sigma_t^N = \sigma_0 + \int_0^t K^N(t-s)\,\mathrm{d}Z_s = \sigma_0 + \sum_i w_i U_t^i$，由 Itô 公式可得 $\mathrm{d}U_t^i = -x_i U_t^i \mathrm{d}t + \mathrm{d}Z_t$。过程 $\sigma^{(i)} = \sigma_{0,i} + U^i$ 满足方程 (8)，且 $\sum_i w_i \sigma^{(i)} = \sigma_0 + \sum_i w_i U^i = \sigma^N$。对于 $s \ge t$, $\int_0^t e^{-x_i(s-r)}\mathrm{d}Z_r = e^{-x_i(s-t)}U_t^i$，由此得到 (9)。 □

证明　　定理 *2.2*。记 $b(x) = c_0 + c_1 x - dx^2$，并对 $n \ge 1$ 定义截断漂移

$$b_n(x) = b\big(\min\{\max\{x, -n\}, n\}\big).$$

这两个核都满足 Abi Jaber等人(2019年)的正则性条件 (2.5)。根据他们的例 2.3(ii)，分数阶核以指数 $2H$ 满足该条件； K^N 则以指数 1 满足该条件，因为它有界且利普希茨。这两个核都是完全单调的，因此根据他们的例 3.7，它们都满足条件 (3.4)。下文中的常数 C 取决于 p、 T、 K 及系数，但不依赖于 n。

步骤 *1*：截断与非负性。函数 b_n 有界且利普希茨，而 $x \mapsto \vartheta x$是利普希茨的。Abi Jaber 等人(2019年)的定理3.3给出了方程 (10) 的唯一连续强解σ^n ，其中漂移项 b被 b_n 替代。系数连续且具有线性增长，$b_n(0) = c_0 \ge 0$，并且扩散系数在零处为零。因此，他们的定理3.6给出了一个非负连续弱解；路径唯一性表明，其分布与σ^n的分布相同。因此，几乎处处对所有 t，都有 $\sigma_t^n \ge 0$ 。

步骤 *2*：单侧界。对于 $x \ge 0$，我们有 $b_n(x) \le c_0 + c_1^+ x$，其中 $c_1^+ = \max(c_1, 0)$。由于$K \ge 0$ 且 $\sigma^n \ge 0$,

$$0 \le \sigma_t^n \le \sigma_0 + c_0 \int_0^t K(u)\,\mathrm{d}u + c_1^+ \int_0^t K(t-s)\sigma_s^n\,\mathrm{d}s + N_t^n, \qquad N_t^n = \vartheta \int_0^t K(t-s)\sigma_s^n\,\mathrm{d}B_s. \tag{A1}$$

二次项已从上界中消去。

步骤 *3*：关于 n 上的矩一致有界性。固定 $p \ge 2$ 和 $T > 0$，并令 $f_n(t) = \mathrm{E}[(\sigma_t^n)^p]$，根据 Abi Jaber 等人 （2019年）的引理 3.1，该量在 $[0,T]$ 上有界。Jensen不等式给出 $\big(\int_0^t K(t-s)\sigma_s^n \mathrm{d}s\big)^p \le \big(\int_0^T K(u)\,\mathrm{d}u\big)^{p-1} \int_0^t K(t-s)(\sigma_s^n)^p\,\mathrm{d}s$。对于固定的 t， N_t^n是在 $[0,t]$上的鞅 $u \mapsto \vartheta \int_0^u K(t-s)\sigma_s^n \mathrm{d}B_s$的终值。Burkholder–Davis–Gundy不等式和Jensen不等式给出 $\mathrm{E}|N_t^n|^p \le C\int_0^t K(t-s)^2 f_n(s)\,\mathrm{d}s$。在（A1）中取 p次方并取期望，得到

$$f_n(t) \le C + C\int_0^t \big(K(t-s) + K(t-s)^2\big) f_n(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \le T.$$

取 $\varrho > 0$ 使得 $C\int_0^T e^{-\varrho u}\big(K(u) + K(u)^2\big)\mathrm{d}u \le 1/2$，这是可能的，因为 $K + K^2$ 在 $[0,T]$上可积。将不等式乘以 $e^{-\varrho t}$ 并对 $t \le T$取上确界，得到 $\sup_{t\le T} e^{-\varrho t} f_n(t) \le 2C$，从而 $\sup_n \sup_{t\le T} f_n(t) \le 2Ce^{\varrho T}$。

步骤 *4*：上确界界。在 $x \ge 0$, $|b_n(x)| \le c_0 + |c_1|x + dx^2$ 上，因此用 $2p$ 替代 p 后，步骤 3 可对 $\sup^{t\le T} \mathrm{E}|b_n(\sigma_t^n)|^p$ 给出关于 n 一致的界。Abi Jaber 等人（2019年）的引理 2.4 进而给出：当 $p > \max\{2, 1/H\}$ 时，$\mathrm{E}\big[\sup^{t\le T}(\sigma_t^n)^p\big] \le C$，以及在 K^N 情形下 $p > 2$。令 $\tau_n = \inf\{t \ge 0 : \sigma_t^n \ge n\}$，由 Markov 不等式可得

$$\mathrm{P}(\tau_n \le T) \le Cn^{-p}. \tag{A2}$$

步骤 5：局部唯一性与去除截断。令 X 和 Y 为连续适应过程，并令 τ 为 $|X|$ 或 $|Y|$ 达到 n 的首次时间。假设在 τ 之前，二者都满足方程 (10)，使用同一个布朗运动，且漂移在 $[-n,n]$ 上与 b 一致。在 $\{t \le \tau\}$ 上，两个漂移被积函数都等于在 $[-n,n]$ 中取值的 b，其中 b 是利普希茨函数，并且可以在两个积分中都插入指标函数 $\mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}$。因此，函数 $\Delta(t) = \mathrm{E}\big[|X_t - Y_t|^2\mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}\big]$ 满足 $\Delta(t) \le C_n\int_0^t \big(K(t-s) + K(t-s)^2\big)\Delta(s)\,\mathrm{d}s$，而步骤 3 的论证给出 $\Delta \equiv 0$，即在 $[0,\tau]$ 上有 $X = Y$。特别地，对于 $m \ge n$，在 $[0,\tau_n]$ 上有 $\sigma^m = \sigma^n$，这些时间 τ_n 递增，并且根据 (A2)，$\tau_n \to \infty$ 几乎处处成立。极限 $\sigma = \lim_n \sigma^n$ 是连续且非负的。该极限在 $[0,\infty$ 上满足方程 (10)，因为在 $[0,\tau_n]$ 上 $b_n(\sigma^n) = b(\sigma)$，并且在某个事件上一致的被积函数的随机积分在该事件上一致。相同的局部论证给出连续解之间的路径唯一性。矩界由步骤 4 和法图引理推出：先对较大的 p 成立，再由 Jensen不等式推广到每个 $p \ge 1$。 □

命题 *3.1* 的证明。对于 $\kappa_2 = 0$，系数满足全局 Lipschitz 条件并具有线性增长。Abi Jaber 等人（2019年）的引理 3.1 给出了每个有限时域上的 $\sup^{s\le T}\mathrm{E}[\sigma_s^2] < \infty$，而其例 2.3(ii) 验证了核正则性。由于 $K \in L^2_{\mathrm{loc}}$，式（6）中的随机积分是平方可积的，且其条件均值为零。因此 $m_t(s) = \Theta_s^t + \kappa_1\int_t^s K(s-r)(\theta - m_t(r))\,\mathrm{d}r$。记 $\phi = m_t - \theta$，可得在 $[t,\infty)$ 上有 $\phi = \psi_t - \kappa_1 K * \phi$，因此由（11）得到 $\phi = \psi_t - R * \psi_t$。在 $t = 0$ 时，$\backsim\psi_0 \equiv \sigma_0 - \theta$，从而得到无条件均值。对于分数阶核，$R(z) = \kappa_1/(z^\alpha + \kappa_1)$，反解可得（12）。当 $\kappa_1 = 0$ 时，$R = 0$。 □

命题 *3.2* 的证明。从式 (6) 中减去关于 m_t 的方程，中心化过程 $\chi_s = \sigma_s - m_t(s)$ 在 $[t,\infty)$ 上满足 $\chi = -\kappa_1 K * \chi + K * \mathrm{d}M$，其中 $\mathrm{d}M_r = \vartheta\sigma_r\,\mathrm{d}W_r^\sigma$。过程 $G * \mathrm{d}M$ 满足同一个线性方程，因为当 $\kappa_1 > 0$ 时由式 (11) 可得 $G = K - \kappa_1 K * G$，而当 $\kappa_1 = 0$ 时则可直接由 $G = K$ 得到，再结合随机 Fubini 定理。线性方程的唯一性给出 $\chi_s = \int_t^s G(s-r)\vartheta\sigma_r\,\mathrm{d}W_r^\sigma$。Itˆo 等距性得到 $\mathrm{E}[\chi_s^2 \mid \mathcal{F}_t] = \vartheta^2\int_t^s G(s-r)^2 v_t(r)\,\mathrm{d}r$，并且 $v_t(s) = m_t(s)^2 + \mathrm{E}[\chi_s^2 \mid \mathcal{F}_t]$，因为 $\mathrm{E}[\chi_s \mid \mathcal{F}_t] = 0$。命题 3.1 的证明中的先验界保证每一项都是有限的。 □

推论 *3.3* 的证明。其中 $\kappa_1 = 0$, $G = K$ 和 $m \equiv \sigma_0$。由于 $\vartheta^2 K(t)^2 = a\,t^{2H-1}/\Gamma(2H)$，方程 (14) 在 $t = 0$ 处写作 $v = \sigma_0^2 + a\mathcal{I}^{2H}v$，其中 $\mathcal{I}^{2H}$是 $2H$阶黎曼–刘维尔积分。其解为 $\sigma_0^2 E_{2H}(a\,t^{2H})$，逐项积分得到 $\mathrm{E}[I_T]$。渐近性质由 $E_{2H}(z) \sim (2H)^{-1}\exp(z^{1/(2H)})$（当 $z \to +\infty$ 时）得出（Gorenflo 等 2014年）。 □

命题 *3.9* 的证明。对于连续路径，$-\frac{2}{\Delta}\mathrm{E}[\ln(S_{T+\Delta}/S_T) \mid \mathcal{F}_T] = \frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[I_{T+\Delta} - I_T \mid \mathcal{F}_T] = \frac{1}{\Delta}\int_T^{T+\Delta} v_T(s)\,\mathrm{d}s$。代入命题 3.2 中的 $v_T = m_T^2 + \widetilde{R} * m_T^2$并交换积分次序，得到 (25)。在 K^N 下，(9) 使 ψ_T 关于 u 呈仿射形式，而 (13) 保持仿射性。于是，平方 m_T^2 是 u 的二次型，其关于 ϖ_T 的积分也如此。 □

推论 *3.8* 的证明。配方得到 $b(x) = c_0 + c_1 x - dx^2 \le C_\lambda - \lambda x$。令 Y 求解具有该仿射漂移以及相同核、布朗运动、乘性扩散和初值的方程。为应用 Alfonsi（2025，定理 3.3）的标量比较定理，使用 $b_n(x) = \min\{b((-n)\vee(x\wedge n))\ C_\lambda - \lambda x\}$。两个比较漂移都是全局 Lipschitz 的，并且 $b_n = b$ 在 $[-n,n]$ 上。

分数阶核是完全单调的，并且对于 $H>0$ 满足该定理的可积性条件和增量条件。常数核满足通常的标量扩散比较。定理 2.2 中直到首次离开 $[-n,n]$ 之前的局部唯一性以及非爆炸性，得到对所有 t 都有 $0\le\sigma_t\le Y_t$。Y 的均值介于 σ_0 和 C_λ/λ 之间。在每个有限时域上，其二阶矩更新方程 (14) 给出 $\sup_{t\le T}\mathrm{E}[Y_t^2]$ 被 $\max\{\sigma_0,C_\lambda/\lambda\}^2+\gamma_\lambda\sup_{t\le T}\mathrm{E}[Y_t^2]$ 所界。整理后，在 T 中一致地得到 (23)。由于 $2H/\alpha>0$，足够大的 λ 会使 $\gamma_\lambda<1$。 $\square$

命题 *4.4* 的证明。 记 $\widehat{\sigma}$ 为带有份额测度漂移 $c_0+c_1\widehat{\sigma}+(\beta-\kappa_2)\widehat{\sigma}^2$ 的辅助波动率，直至其爆炸时刻 ζ。其有限因子提升具有局部利普希茨系数。令 $k=K(0)>0$，令 L 为第一类预解核，并置 $M=K'*L$。Bondi 和 Pulido（2026）的停时分解（预印本中的引理 1 和备注 2）表明，在离开有界区间之前，

$$\mathrm{d}\widehat{\sigma}_t=(a\widehat{\sigma}_t+q\widehat{\sigma}_t^2+A_t)\,\mathrm{d}t+v\widehat{\sigma}_t\,\mathrm{d}B_t,\qquad A_t=kc_0+\int_{(0,t]}\widehat{\sigma}_{t-s}\,\mathrm{d}M(s)-\sigma_0M(t),$$

其中 $a=kc_1+K'(0)/k$，$q=k(\beta-\kappa_2)>0$ 且 $v=k\vartheta>0$。完全单调性给出 $M\le0$ 和 $\mathrm{d}M\ge0$，因此当 $\widehat{\sigma}$ 保持为正时，$A_t\ge0$。令 $E_t=\exp((a-v^2/2)t+vB_t)$，则过程 $Y=\widehat{\sigma}/E$ 从 σ_0 开始并满足 $Y'\ge qEY^2$。因此，在爆炸前 $\widehat{\sigma}$ 保持为正，并且 $1/Y_t\le1/\sigma_0-q\int_0^t E_s\,\mathrm{d}s$。布朗运动以正概率在 $[0,T]$ 上保持在一条足够陡峭的直线周围的一致管状邻域内。在该事件上，$q\int_0^T E_s\,\mathrm{d}s>1/\sigma_0$，从而 $\zeta\le T$。有界的 $\widehat{\sigma}$ 会使有限时域内常数变易公式中每个因子的漂移和扩散被积函数均有界。因此，只要 $\widehat{\sigma}$ 保持有界，该提升就不会爆炸。由局部唯一性可知，直至首次达到上界 n，其分布与定理 4.3 证明中所使用的停时份额测度律一致。令这些上界递增，并应用该密度恒等式，得到 $\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[S_T]/S_0=\Pr_{\mathrm{aux}}(\zeta>T)<1$，其中 $\Pr_{\mathrm{aux}}$ 表示辅助提升的分布。

$\square$

定理 *4.3* 的证明。 随机指数 S/S_0 是一个正的局部鞅，因此是一个上鞅。根据定理 2.2，波动率非负且不会爆炸。对于 $n>\sigma_0$，定义 $\tau_n=\inf\{t\ge0:\ \sigma_t\ge n\}$，其中 $\inf\varnothing=\infty$。根据 Novikov 判据，停止价格过程是一个鞅，因为 $\int_0^{T\wedge\tau_n}\sigma_s^2\mathrm{d}s\le n^2T$。定义

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{Q}}^{(n)}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_T}=\frac{S_{T\wedge\tau_n}}{S_0}.$$

于是 $\widehat{W}^{(n)}_t=W^{(0)}_t-\int_0^{t\wedge\tau_n}\sigma_u\,\mathrm{d}u$ 和 $W^{(1)}$ 在 $\widehat{\mathbb{Q}}^{(n)}$ 下构成一个二维布朗运动，并且 $\widehat{B}=(\beta\widehat{W}^{(n)}_t+\varepsilon W^{(1)}_t)/\vartheta$ 是一个布朗运动。在 τ_n 之前，波动率相对于 B 满足式（10），其漂移为

$$(\kappa_1+\kappa_2\sigma)(\theta-\sigma)+\beta\sigma^2=\kappa_1\theta-(\kappa_1-\kappa_2\theta)\sigma-(\kappa_2-\beta)\sigma^2.$$

设 $\widehat{\sigma}$ 为由 B 驱动的方程 (10) 的全局解，其中满足 $c_0=\kappa_1\theta$、$c_1=\kappa_2\theta-\kappa_1$ 和 $d=\kappa_2-\beta\ge0$，该解由定理 2.2 保证存在。令 $\widehat{\tau}_n$ 为 $\widehat{\sigma}$ 首次达到 n 的时间。定理 2.2 证明中的步骤 5 给出，在 $[0,\tau_n\wedge\widehat{\tau}_n]$ 上有 $\sigma=\widehat{\sigma}$，因此 $\tau_n=\widehat{\tau}_n$。$\widehat{\sigma}$ 的分布不依赖于 n，所以由定理 2.2 的矩界和 Markov 不等式可得 $\widehat{\mathbb{Q}}^{(n)}(\tau_n\le T)\le Cn^{-p}$，其中 C 与 n 无关。因此

$$\frac{\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[S_T\mathbf{1}_{\{\tau_n>T\}}]}{S_0}=\widehat{\mathbb{Q}}^{(n)}(\tau_n>T)\ge1-Cn^{-p}\longrightarrow1.$$

由于 $\mathbf{1}_{\{\tau_n>T\}}\uparrow 1$ 几乎处处成立，单调收敛给出 $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[S_T]=S_0$。期望在 $[0,T]$ 上保持不变的非负超鞅是鞅，从而证明了该结论。 □

推论 *4.2* 的证明。 将 (27) 中的随机指数记为 $D_\cdot$。过程 D 是一个正的 P-局部鞅，并且按照前一个证明中的记号 τ_n，停止过程 $D_{\cdot\wedge\tau_n}$ 根据 Novikov 判据是一个鞅。在密度为 $D_{T\wedge\tau_n}$的测度下，证明命题 4.1 时所采用的代换表明，在 τ_n之前，波动率满足带有 $c_0=\kappa_1\theta$、$c_1=\kappa_2\theta-\kappa_1$ 和 $d=\kappa_2^{\mathrm{Q}}$的式 (10)。对于 $\kappa_2^{\mathrm{Q}}\ge 0$，前一个证明中的论证给出 $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[D_T\mathbf{1}_{\{\tau_n>T\}}]\ge 1-Cn^{-p}$，因此 $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[D_T]=1$。 □

命题 *3.4* 的证明。 均值 $m(t)=\theta+(\sigma_0-\theta)E_\alpha(-\kappa_1 t^\alpha)$介于 σ_0 和 θ之间，因此 m^2被正的常数从上下界定，且 $m^2\to\theta^2$。核 $h=\vartheta^2G^2$ 非负且可积：在零点处 $G(t)\sim t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$，其中 $\alpha>1/2$；当$\alpha<1$ 时，G 按 $O(t^{-1-\alpha})$衰减，并且在 $\alpha=1$处指数衰减。其正预解具有局部收敛的卷积级数 $\widetilde{R}=\sum_{j\ge1}h^{*j}$。Tonelli 定理给出

$$\int_0^\infty \widetilde{R}(s)\,\mathrm{d}s=\sum_{j\ge1}\Big(\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}s\Big)^j=\sum_{j\ge1}\gamma^j.$$

若 $\gamma<1$，命题 3.2 给出 $\sup v\le \sup m^2/(1-\gamma)$，并且 $\widetilde{R}*m^2$ 中的控制收敛给出 $v(t)\to\theta^2/(1-\gamma)$。若 $\gamma\ge1$，则当 $m=\min(\sigma_0,\theta)>0$ 时，$v(t)\ge m^2(1+\int_0^t\widetilde{R}(s)\,\mathrm{d}s)\to\infty$。

这一方向只需要 $\theta\neq0$。若对于 $s\ge s_0$，$m(s)^2\ge\theta^2/4$，则 $\overline{v}(t)\ge(\theta^2/4)\int_0^{t-s_0}\widetilde{R}(s)\mathrm{d}s\to\infty$。对于范数，$G(z)=1/(z^\alpha+\kappa_1)$，结合 Parseval 恒等式可得

$$\int_0^\infty G^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{|\omega|^{2\alpha}+2\kappa_1|\omega|^\alpha\cos(\pi\alpha/2)+\kappa_1^2}.$$

代换 $\omega=\kappa_1^{1/\alpha}u$ 给出因子 $\kappa_1^{1/\alpha-2}$。对于 $\alpha<1$，将 $y=u^\alpha$ 代入剩余积分，并对两个共轭复线性因子进行积分，得到

$$C(\alpha)=-\frac{\cot(\pi\alpha/2)}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}.$$

在 $\alpha=1$ 处，直接积分得到 $C(1)=1/2$，这也是该表达式的极限。 □

命题 *3.5* 的证明。 Parseval 恒等式给出了（17）中的第二个表达式。我们将其应用于 $u\mapsto e^{-\lambda u/2}G(u)$，其在虚轴上的拉普拉斯变换为

$$\widehat{G}(\lambda/2+\mathrm{i}\omega)=\big((\lambda/2+\mathrm{i}\omega)^\alpha+\kappa_1\big)^{-1}.$$

$\widehat{\ }$函数 h 连续且严格递减，并且根据单调收敛，$h(0+)=\gamma$。$\widehat{\ }$对于 $\kappa_1>0$，控制收敛给出，当 $\lambda\to\infty$ 时，$h(\lambda)\to0$；对于 $\kappa_1=0$，其变换为 $a\lambda^{-2H}$，其中 a 来自（15）。因此，对于 $\gamma>1$，根 λ^* 存在且唯一。当$t=0$ 时，方程（14）写成 $v=m^2+h*v$。两边乘以 $e^{-\lambda^*t}$，得到关于$v_*(t)=e^{-\lambda^*t}v(t)$的更新方程 $v_*=z+h_**v_*$，其中 $z(t)=e^{-\lambda^*t}m(t)^2$，且 $h_*(t)=e^{-\lambda^*t}h(t)$。函数 h_* 是一个概率密度，其有限均值为 $\int_0^\infty u\,h_*(u)\,\mathrm{d}u=|\widehat{h}'(\lambda^*)|$。函数 z 连续，并且被 $e^{-\lambda^*t}$ 的某个倍数所界，因此直接黎曼可积。关键更新定理（Feller 1971，第 XI 章）给出 $v_*(t)\to|\widehat{h}'(\lambda^*)|^{-1}\int_0^\infty z(s)\,\mathrm{d}s$，这就是（18）。对于 $\sigma_0=\theta$，我们有 $m\equiv\theta$，以及 $\int_0^\infty z(s)\,\mathrm{d}s=\theta^2/\lambda^*$。

对于 $\gamma=1$，核 h 本身就是一个概率密度。其均值 μ_h 有限，因为 $u\,G(u)^2$ 在零点处是 $u^{2\alpha-1}$ 阶、在无穷远处是 $u^{-1-2\alpha}$ 阶（对于 $\alpha<1$），并且在 $\alpha=1$处指数衰减。

解为 $v = m^2 + \widetilde{R} * m^2$，其中 $\widetilde{R} = \sum_{j\geq 1} h^{*j}$ 是更新密度。更新定理给出 $t^{-1}\int_0^t \widetilde{R}(s)\,\mathrm{d}s \to 1/\mu_h$。由于 m^2 有界且 $m^2 \to \theta^2$，将卷积在距 t 固定距离处进行分割，可得 $v(t)/t \to \theta^2/\mu_h$。

□

命题 *C.1* 的证明。对于 $K \equiv 1$，令 $\delta = \vartheta/\sqrt{n}$。马尔可夫链 $(\sigma^n,\ P^n)$ 以速率 $n\sigma^2$ 发生跳跃 $(\delta\zeta,\ n^{-1/2}\eta)$，其中 ζ 和 η 表示一次交易的标记。对于 $f \in C_c^\infty((0,\ \infty) \times \mathbb{R})$，其生成元为 $A_n f(\sigma,\ p) = n\sigma^2 \mathrm{E}\big[f(\sigma+\delta\zeta,\ p+n^{-1/2}\eta) - f(\sigma,\ p)\big]$。泰勒展开和 (C2) 中的标记矩给出

$$A_n f = \sqrt{n}\,\vartheta\sigma^2\bar{\zeta}_n\,\partial_\sigma f + \tfrac{1}{2}\vartheta^2\sigma^2\,\partial_{\sigma\sigma} f + \tfrac{1}{2}\sigma^2\,\partial_{pp} f + \rho(1-|\bar{\zeta}_n|)\vartheta\sigma^2\,\partial_{\sigma p} f + O(n^{-1/2}),$$

在 $(0,\ \infty) \times \mathbb{R}$ 的紧子集上一致成立。固定命题中的定义域 D。在其闭包的某个邻域内，对于所有充分大的 n，截断函数均不起作用，因此第一个系数等于 $-(\kappa_1 + \kappa_2\sigma)(\theta - \sigma)$，并且 $|\zeta_n| \to 0$ 一致成立。于是，A_n 在那里收敛于 (C3) 的生成元。停时漂移和可预测二次变差率一致有界，且跳跃大小趋于零。这些界保证停时鞅问题的紧性，并且每个极限都具有连续路径。极限系数是局部利普希茨的。在 D 上，协方差矩阵一致正定，因为 $\sigma \geq \sigma_- > 0$ 和 $1 - \rho^2 = \varepsilon^2/\vartheta^2 > 0$。因此，停时扩散律是唯一的，并且矩形的边界对于退出而言是正则的。将 Ethier 和 Kurtz (1986) 的扩散逼近论证进行局部化，可确定该极限为离开 D 前停时的扩散；同时，链的退出超调随其跳跃大小一同趋于零。这些步骤证明了所述的停时收敛性。若要移除停时，需要在 $\sigma_- \downarrow 0$ 和 $\sigma_+,\ \bar{p} \uparrow \infty$ 时对这些链使用一致退出估计，但本文未提供这些估计。

□

命题 *3.6* 的证明。对于 $K \equiv 1$，波动率是定义在 $(0,\ \infty)$ 上的扩散过程 $\mathrm{d}\sigma = b(\sigma)\,\mathrm{d}t + \vartheta\sigma\,\mathrm{d}W^\sigma$，其中 $b(\sigma) = \kappa_1\theta - (\kappa_1 - \kappa_2\theta)\sigma - \kappa_2\sigma^2$。其速度密度正比于

$$\sigma^{-2}\exp\left(\int \frac{2b(\sigma)}{\vartheta^2\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma\right),$$

这就得到 (19)。令 $A = 2\kappa_1\theta/\vartheta^2 > 0$、$B = 2\kappa_2/\vartheta^2 > 0$ 以及 $c = 2(\kappa_1 - \kappa_2\theta)/\vartheta^2$。尺度密度和速度密度分别正比于 $\sigma^c e^{A/\sigma + B\sigma}$ 和 $\sigma^{-c-2}e^{-A/\sigma - B\sigma}$。尺度积分在两个端点处均发散，排除了从内部到达端点的可能性；而进入积分是有限的，因此两个端点都是进入边界。有限的速度测度归一化后得到平稳分布。因子 $e^{-B\sigma}$ 和 $e^{-A/\sigma}$ 使所有正阶和负阶平稳矩均有限。对于确定性初始状态，生成元满足

$$\mathcal{L}\sigma^2 = 2\kappa_1\theta\sigma + (-2\kappa_1 + 2\kappa_2\theta + \vartheta^2)\sigma^2 - 2\kappa_2\sigma^3 \leq C - c_2\sigma^2$$

对于某个 $C,\ c_2 > 0$。因此，停止后的 Itˆo 估计和局部化给出 $\mathrm{E}[\sigma_t^2] \leq e^{-c_2 t}\sigma_0^2 + C(1 - e^{-c_2 t})/c_2$，从而证明了一致有界性。 □

命题 *3.7* 的证明。令 $b(x) = \kappa_1\theta + c_1 x - \kappa_2 x^2$ 满足 $c_1 = \kappa_2\theta - \kappa_1$，并定义半鞅 $Z_t = \int_0^t b(\sigma_s)\,\mathrm{d}s + \vartheta\int_0^t \sigma_s\,\mathrm{d}W_s^\sigma$，从而 $\sigma - \sigma_0 = K * \mathrm{d}Z$。两个核都是完全单调的。根据 Abi Jaber 等人 (2019年) 的例 3.7，它们满足条件 (3.4)，其中包括一个非负的第一类预解 L。对于具有 $\alpha < 1$ 的分数阶核，$L(\mathrm{d}s) = s^{-\alpha}\mathrm{d}s/\Gamma(1-\alpha)$，且 $L([0,T]) = T^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$。当 $\alpha = 1$ 时，$L = \delta_0$ 且 $L([0,T]) = 1$，这与前式相同。其引理 2.6 给出 $Z = L * (\sigma - \sigma_0)$。由于根据定理 2.2 有 $\sigma \geq 0$，且 $L \geq 0$，

$$Z_T = \int_{[0,T]} (\sigma_{T-s} - \sigma_0)\,L(\mathrm{d}s) \geq -\sigma_0\,L([0,T]). \tag{A3}$$

定理 2.2 中的矩使 Z 中的随机积分成为鞅。令 $m(t)=\mathrm{E}[\sigma_t]$，且 $v(t)=\mathrm{E}[\sigma_t^2]$，对 (A3) 两边取期望可得

$$\kappa_2\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t \le \kappa_1\theta\,T + c_1\int_0^T m(t)\,\mathrm{d}t + \sigma_0\,L([0,T]).$$

如果 $c_1\le 0$ 我们舍去中间项，这是因为 $m\ge 0$。如果 $c_1>0$ 我们使用 $m\le\sqrt{v}$ 和柯西–施瓦茨不等式，$\int_0^T m(t)\,\mathrm{d}t \le \big(T\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t\big)^{1/2} = T\sqrt{A_T}$。除以 T得到（20），这是关于 $\sqrt{A_T}$的二次不等式。因此 $\sqrt{A_T}$ 至多为 y_T所表示的 $\kappa_2 y^2 - c_1 y - \kappa_1\theta - \sigma_0 L([0,T])/T = 0$的正根，并且 y_T随最后一项增大而增大。

对于分数阶核，当 $T\to\infty$时，最后一项趋于零。如果 $c_1\le 0$，则 $y_T^2\to\kappa_1\theta/\kappa_2$，并且在这种情况下 $\kappa_1/\kappa_2\ge\theta$。如果 $c_1>0$，则 $y_T\to\big(c_1+\sqrt{c_1^2+4\kappa_2\kappa_1\theta}\big)/(2\kappa_2)=\theta$，因为在这种情况下 $\sqrt{c_1^2+4\kappa_2\kappa_1\theta}<(\kappa_2\theta+\kappa_1)^2$，且 $\theta>\kappa_1/\kappa_2$。两种情况均得到（21）。

对于 K^Nput $k(t)=\int_0^t K^N(s)\,\mathrm{d}s$。我们对 $K^N * L\equiv 1$在 $[0,T]$上积分并交换积分次序，得到对于每个 $T>0$均有 $T=\int_{[0,T]} k(T-s)\,L(\mathrm{d}s)$。函数 k是非递减的，且 $L\ge 0$，因此 $T\le k(T)\,L([0,T])$。在 $T+a$处使用同一恒等式，由于当 $s\le T$时 $k(T+a-s)\ge k(a)$，对于每个 $a>0$均有 $T+a\ge k(a)\,L([0,T])$。因此

$$\frac{1}{k(T)} \le \frac{L([0,T])}{T} \le \frac{1+a/T}{k(a)}.$$

令 $T\to\infty$，然后令 $a\to\infty$，得到 $L([0,T])/T\to 1/k(\infty)=\ell_N$。$y_T^2$的极限是式（22）的右端。□

附录 B：模拟方案与验证

B.1. 因子系统的对称分裂

我们在均匀网格 $t_n=nh$ 上近似因子系统 (8)。在本附录中，h 表示时间步长，不再表示第 3.3 节中的核。在本附录中，网格时间状态符号表示数值近似，而非精确解。每条路径都包含全部 N 个因子，因此 t_n 处的状态包含马尔可夫模型的完整历史。

按 (10) 中的定义，记 $c_0=\kappa_1\theta$ 和 $c_1=\kappa_2\theta-\kappa_1$。式 (8) 的 Stratonovich形式为

$$\mathrm{d}\sigma_t^{(i)} = \Big[-x_i\big(\sigma_t^{(i)}-\sigma_{0,i}\big)+c_0+\tilde{c}_1\sigma_t^N-\kappa_2\big(\sigma_t^N\big)^2\Big]\mathrm{d}t+\vartheta\sigma_t^N\circ\mathrm{d}W_t^\sigma,\qquad \tilde{c}_1=c_1-\tfrac{1}{2}\bar{w}\vartheta^2. \quad \text{(B1)}$$

修正项 $-\frac{1}{2}\bar{w}\vartheta^2\sigma^N$ 对所有因子都相同，因为每个因子都受到噪声 $\vartheta\sigma^N\mathrm{d}W^\sigma$ 的作用，并且 σ^N 关于 $\sigma^{(j)}$ 的导数为 w_j。

我们将 (B1) 的右端拆分为线性部分、二次阻尼和噪声。每一部分都有闭式形式的流，而线性部分包含衰减率 x_i，它们是系统的刚性项。令 $\boldsymbol{U}=(U^1,\ \ldots\ldots,\ U^N)^\top$，其中 $U^i=\sigma^{(i)}-\sigma_{0,\,i}$，表示引理 2.1 的证明中的中心化因子，使得 $\sigma^N=\sigma_0+w^\top\boldsymbol{U}$，并令 $\mathbf{1}$ 表示全 1 向量。记忆映射 $\mathcal{M}_\tau$ 在时间 τ 内满足线性部分方程 $\mathrm{d}\sigma^{(i)}/\mathrm{d}t=-x_i(\sigma^{(i)}-\sigma_{0,\,i})+c_0+\tilde{c}_1\sigma^N$，

$$\mathcal{M}_\tau:\ \boldsymbol{U}\mapsto\boldsymbol{U}^*+e^{-\Lambda\tau}\big(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}^*\big),\qquad \Lambda=\mathrm{diag}(x)-\tilde{c}_1\mathbf{1}w^\top,\qquad \boldsymbol{U}^*=(c_0+\tilde{c}_1\sigma_0)\,\Lambda^{-1}\mathbf{1}. \quad \text{(B2)}$$

阻尼映射 $\mathcal{D}_\tau$在时间 τ内求解 $\mathrm{d}\sigma^{(i)}/\mathrm{d}t=-\kappa_2(\sigma^N)^2$，而噪声映射 $\mathcal{N}_h$求解

在一个步长内求解 $\mathrm{d}\sigma^{(i)} = \vartheta\sigma^N \circ \mathrm{d}W^\sigma$。两个映射都作用于加权和，

$$\mathcal{D}_\tau :\ \sigma^N \mapsto \frac{\sigma^N}{1 + \bar{w}\kappa_2\tau\,\sigma^N}, \qquad \mathcal{N}_h :\ \sigma^N \mapsto \sigma^N \exp\left(\bar{w}\vartheta\sqrt{h}\,Z^\sigma\right), \tag{B3}$$

其中 Z^σ 为标准正态变量，且两者给每个因子增加相同的量，即σ^N 的变化量除以 $\bar{w}$。该格式的一步是对称组合

$$\boldsymbol{U}_{n+1} = \mathcal{M}_{h/2} \circ \mathcal{D}_{h/2} \circ \mathcal{N}_h \circ \mathcal{D}_{h/2} \circ \mathcal{M}_{h/2}\big(\boldsymbol{U}_n\big), \tag{B4}$$

每步使用一个正态变量 Z_n^σ。

记忆映射会精确积分衰减率，因此最大的节点不会限制时间步长。用于校准的核中，最大节点为每年 7.4×10^6。通过 $\mathrm{diag}(\sqrt{w_i})$ 进行共轭变换后， Λ 变为对称矩阵；对于每个参数向量和时间步长，程序都会对该对称矩阵进行一次对角化。[1] 程序要求Λ 的最小特征值为正；当 $\tilde{c}_1 < 0$ 以及所有节点均为正时，这一条件成立。这是数值方法的要求，定理 2.2 不需要满足这一条件。

阻尼映射和噪声映射会保持 σ^N 为正。记忆映射是仿射的，无法保证 $N > 1$对应的 σ^N 为正。如果波动率状态非正或不是有限值，程序便会报错并停止；程序不使用下限项、不重置状态，也不删除路径。表 3、表 4 以及图 1 和图 3 中的所有运行均未出现此类错误。

这三个流都是精确的，而它们的组合（B4）近似于方程（8）的解。Ninomiya 和 Victoir（2008）在其弱格式中以弱二阶组合 Stratonovich 向量场的流，Bayer 和 Breneis（2024）则将此类分裂格式用于粗糙 Heston 的马尔可夫近似。Shinozaki（2026）将漂移分为因子的衰减部分和剩余漂移，并证明了对于导数有界的向量场，该格式具有弱二阶精度。对于粗糙 Heston，他还证明了在满足某个参数条件时，方差保持非负。对于波动率因子，组合（B4）具有相同的对称形式，但漂移的分组方式不同。我们将线性漂移保留在记忆映射中，因为这样当 $\kappa_2 = 0$ 时，该映射便能对整个漂移进行精确积分。他的组合还包含价格，我们通过单独的步骤（B5）推进价格。二次漂移不满足其定理的假设。对于（B4），我们既未证明其收敛阶，也未证明其非负性。B.5 节用精确矩来衡量其时间离散化误差。

B.2. 价格步与离散鞅

价格步将波动率保持在其步初值 σ_n^N，

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \big(\sigma_n^N\big)^2 h, \qquad J_{n+1} = J_n + \sigma_n^N\sqrt{h}\,Z_n^\sigma, \\ X_{n+1} &= X_n - \tfrac{1}{2}\big(\sigma_n^N\big)^2 h + \sigma_n^N\sqrt{h}\left(\rho Z_n^\sigma + \sqrt{1-\rho^2}\,Z_n^\perp\right), \end{aligned} \tag{B5}$$

其中 $I_0 = J_0 = 0$。这里， Z_n^σ 是第 n 步噪声映射中的正态变量，而 $Z_n^\perp$是一个与所有其他变量相互独立的标准正态变量。和 I_n 及 J_n 分别是 $\int(\sigma_u^N)^2\,\mathrm{d}u$ 和 $\int \sigma_u^N \mathrm{d}W_u^\sigma$的左端点和。对于 Itˆo 和 J_n，步初波动率是可预测的，并给出下面的条件鞅恒等式。

LEMMA B.1（离散鞅）假设方案 （B4）的波动率状态 σ_n^N 几乎处处为有限值。那么，对于每个步长 $h > 0$、每个 $\kappa_2 \geq 0$ 和每个 $\rho \in [-1, 1]$，离散

[1]模块 `src/stochvolmodels/models/rough_logsv/history.py`的函数 `prepare history` 和 `simulate history`。

价格 $S_n = S_0 e^{X_n - X_0}$ 满足（B5）中的鞅性质，并且对于每个 n都有$\mathrm{E}[S_n] = S_0$ 。对于$S_0 \exp\big(\rho J_n - \tfrac{1}{2}\rho^2 I_n\big)$，同样成立。

引理 ***B.1*** 的证明。状态 σ_n^N是 $Z_0^\sigma, \dots, Z_{n-1}^\sigma$的函数。因此，在给定前 n步的正态变量的条件下，比值 S_{n+1}/S_n 服从均值为 1 的对数正态分布，而 S_{n+1} 的条件期望为 S_n。非负变量的塔式性质给出 $\mathrm{E}[S_{n+1}] = \mathrm{E}[S_n] = S_0$，因此 S_n 可积。第二个结论的证明方法相同，只需用 ρZ_n^σ 替换 $\rho Z_n^\sigma + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_n^\perp$，并用 $\rho^2(\sigma_n^N)^2\hbar$ 替换 $(\sigma_n^N)^2 h$。 □

在每个适应波动率有限的网格上，价格的期望为 S_0。对于 K^N 和 $\beta > \kappa_2$，根据命题 4.4，其连续时间对应物的期望更小。仅有弱收敛仍允许出现这种差异，因为它并不意味着一致可积性。

B.3. 高斯半倾斜下的条件蒙特卡罗

给定波动率正态变量 $Z_0^\sigma, \dots, Z_{n-1}^\sigma$ 后，(B5) 的对数收益 $X_n - X_0$服从均值为 $\rho J_n - \tfrac{1}{2} I_n$、方差为 $(1-\rho^2)$ I_n 的高斯分布。在我们的零利率约定下，$F = S_0$，欧式收益的条件价格可由布莱克公式计算，其远期和总方差为

$$F_n = F \exp\big(\rho J_n - \tfrac{1}{2}\rho^2 I_n\big), \qquad v_n = (1-\rho^2)\, I_n, \tag{B6}$$

因此无需抽取 $Z^\perp$（Willard 1997；Romano 和 Touzi 1997）。表 3 报告了原始条件远期 F_n/F 的样本均值。我们既不通过样本远期进行乘法归一化，也不对价格进行加法平移，因此样本远期的不足仍然可见。[1]

对于正相关，条件远期具有厚右尾。在表 3 的 15 个单元格中，200,000 个条件远期中的最大值介于远期的 31 倍和 182 倍之间，条件看涨期权价格也继承了这一尾部特征。因此，我们在第二个测度下为期权定价，并在网格上将其定义为

$$\frac{\mathrm{dQ}^{1/2}}{\mathrm{dQ}} = \Big(\frac{S_n}{S_0}\Big)^{1/2} e^{I_n/8} = \exp\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{m<n} \sigma_m^N \sqrt{h}\,\Big(\rho Z_m^\sigma + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_m^\perp\Big) - \tfrac{1}{8} I_n\Big). \tag{B7}$$

根据引理 B.1 的论证，该密度的期望为 1。上标 $1/2$ 是（B7）中 S_n/S_0 的指数，第 4 节的股票测度的密度为 S_n/S_0。Rheinl¨ander 和 Schmutz（2013）将密度（B7）的连续时间对应物表示为对数价格的最小鞅测度的密度。在网格上，我们将 $\mathrm{Q}^{1/2}$ 称为高斯半倾斜。在 $\mathrm{Q}^{1/2}$下，变量 $\tilde{Z}_m^\sigma = Z_m^\sigma - \tfrac{1}{2}\rho\sigma_m^N\sqrt{h}$和 $\tilde{Z}_m^\perp = Z_m^\perp - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_m^N\sqrt{h}$是相互独立的标准正态变量。要在 $\mathrm{Q}^{1/2}$ 下进行模拟，我们抽取 $\tilde{Z}_m^\sigma$，在噪声映射中使用 $Z_m^\sigma = \tilde{Z}_m^\sigma + \tfrac{1}{2}\rho\sigma_m^N\sqrt{h}$，并累加 $\bar{J}_n = \sum_{m<n}\sigma_m^N\sqrt{h}\,\tilde{Z}_m^\sigma$。测度变换在网格上是精确的，因为 σ_m^N 在步长 m开始时已知。在连续时间极限下，该平移会向波动率的漂移中加入$\tfrac{1}{2}\beta\sigma^2$，因此二次系数变为 $\kappa_2 - \tfrac{1}{2}\beta$（参见命题 4.1）。在 $\mathrm{Q}^{1/2}$ 下，给定波动率正态变量后，对数收益 $X_n - X_0$ 服从高斯分布，其均值为 $\rho\bar{J}_n$，方差为 v_n。

对于执行价 K，等式 $(S-K)^+ = S - \min(S,K)$ 和 $(K-S)^+ = K - \min(S,K)$ 以及引理 B.1 给出看涨期权价格 $C = F - \mathrm{E}[\min(S_n,K)]$ 和看跌期权价格 $P = K - \mathrm{E}[\min(S_n,K)]$。我们在 $\mathrm{Q}^{1/2}$ 下计算这一公共项，

$$\mathrm{E}\big[\min(S_n,K)\big] = F\,\mathrm{E}^{1/2}\big[\Pi_n\big], \qquad \Pi_n = \sqrt{K/F}\; e^{-I_n/8}\,\Psi\big(\rho\tilde{J}_n - \ln(K/F),\, v_n\big), \tag{B8}$$

[1]函数 `raw forward`。

其中 $\mathsf{E}^{1/2}$ 表示在 $\mathsf{Q}^{1/2}$ 下的期望，并且

$$\Psi(z,v) = e^{v/8}\Big[e^{-z/2}\,\Phi\Big(\frac{z-v/2}{\sqrt{v}}\Big) + e^{z/2}\,\Phi\Big(-\frac{z+v/2}{\sqrt{v}}\Big)\Big], \qquad \Psi(z,0) = e^{-|z|/2},$$

标准正态分布函数 Φ。方程（B8）成立，因为 $\min(S_n, K)$ 除以密度（B7）等于 $\sqrt{KF}\,e^{-I_n/8}$ $\exp\big(-\frac{1}{2}|X_n - X_0 - \ln(K/F)|\big)$，而 $\Psi(z,v)$ 是在均值为 z、方差为 v 的高斯分布下 $\exp(-\frac{1}{2}|\cdot|)$ 的期望。由于 $\Psi \le 1$，对于所有参数，该收益都满足 $0 \le \Pi_n \le \sqrt{K/F}$，且其方差至多为 K/F。在 Q 下的条件看涨期权价格没有这样的界。我们在定理 4.3 的条件 $\kappa_2 \ge \beta$ 下使用（B8）；在该条件下，连续时间价格是真鞅，并且在极限模型中成立关系 $C = F - \mathsf{E}[\min(S_T, K)]$。[1]

B.4. 校准的核与抽样设计

$H = 0.30$ 第 5 节中的校准使用了一个具有 $N = 97$ 个正节点和权重的核 K^N。该核近似于平滑核函数

$$K_{t_0}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[(t+t_0)^{\alpha-1} + \frac{b}{\alpha}\,t_0^{\alpha-1}e^{-bt/t_0}\Big], \qquad t_0 = \frac{1}{365\cdot 512}\ \text{years}, \tag{B9}$$

其中包含 $\alpha = H + \frac{1}{2}$。平移 t_0 消除了分数阶核在零点处的奇异性。指数项恢复了平移所移除的质量：其振幅给出 $\int_0^\infty (K_{t_0} - K)\,\mathrm{d}t = 0$，常数 $b = 0.0712$ 满足 $\int_0^\infty (K_{t_0}^2 - K^2)\,\mathrm{d}t = 0$。我们使用高斯求积，在 12 个区间中的每个区间上取 8 个节点，对平移幂函数的拉普拉斯表示进行离散化，而指数项增加了一个节点。在图 1 所示的六个到期期限处，$\int_0^T K^N(t)\,\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^T K^N(t)^2\,\mathrm{d}t$ 相对于分数阶核的相对误差最大分别为 0.022% 和 0.017%。[2]

这些价格是对（B8）的多层估计（Giles 2008），基于六个网格计算，每天的步数从 32 到 1,024 不等。最粗层使用控制变量，即带有二次漂移的经典模型（$H = 1/2$），采用相同的方案，以相同的布朗增量在每天 16 步的网格上模拟。通过傅里叶反演进行确定性反向递推，得到这个离散控制变量的期望。每一层使用 16 个独立扰乱 Sobol 网，每个网包含反变量对。Sobol 点驱动每天 16 步网格上的布朗桥，而以布朗桥增量为中心化依据的伪随机正态变量则用于填充更细的网格。每个网在最粗层包含 16,384 对，在最细层包含 256 对。价格的 95%半宽为 $2.131\,\big(\sum_l s_l^2/16\big)^{1/2} + a_{\mathrm{c}}$。其中，$s_l^2$是第 l 层 16 个网均值的样本方差，而 2.131 是自由度为 15 的斯图登特分布的 0.975 分位数。a_{c} 这一项用于计入控制均值的数值误差。[3]

B.5. 矩基准

对于线性漂移，精确的离散矩遵循线性递推。复现代码将这些矩与相同核下的精确连续矩以及每个网格上的样本估计进行比较。[4]

---

[1]函数 `conditional payoffs`，倾斜参数设置于 `prepare history` 中。在本小节中，K 表示执行价，K^N 表示核。[2]复现文件夹中的脚本 `rough logsv table5 kernel.py` 97 `inputs/` 重新构建文件中的节点和权重。[3]类 `RoughLogSVPricer` 和函数 `sample multilevel`。[4]定价实现和复现脚本可在 `https://github.com/ArturSepp/StochVolModels` 中找到。

附录 C：微观结构解读

粗糙 Heston 和粗糙 Bergomi 模型是订单驱动市场的标度极限。在每种情况下，该极限由两个选择决定：订单移动的波动率状态，以及订单到达的速率。表 C1 列出了这些选择。Jaisson 和 Rosenbaum (2016) 以及 El Euch等人(2018) 从 Hawkes 过程出发，其中每笔交易都会为交易强度（即方差）增加一个常数，并由此得到粗糙 Heston 的平方根噪声。Hager等人(2026年) 从恒定速率的订单出发，每个订单都会对数波动率施加一个独立同分布的中心化冲击，并由此得到粗糙 Bergomi 的高斯对数波动率。下面的候选构造使用恒定的带符号输入冲击，其速率与状态的平方成正比。该构造确定了我们模型的局部噪声和漂移系数。正性和全局收敛需要额外的论证。按照构造，漂移通过冲击的分布体现；在相关之处我们会明确说明。补偿计数过程的可预测二次变差率等于订单速率。因此，速率为 σ^2 的恒定输入冲击具有噪声幅度 $\vartheta|\sigma|$，这与正分支上的乘法系数 $\vartheta\sigma$ 一致。随后，核将每个冲击传播至状态中。

扰动的符号决定漂移和稳定性条件。方差上的单符号扰动产生 Hawkes 过程的均值反馈 $\varphi * V$，其核为 φ，而稳定性条件为 L^1 条件$\|\varphi\|_1 < 1$。近临界不稳定状态 $\|\varphi\|_1 \to 1$ 生成 Mittag-Leffler 核以及粗糙 Heston 的均值回复。均值为零的带符号扰动不会产生均值反馈，而稳定性是关于二次反馈核 k 的 L^2 条件 $\|k\|_2^2 < 1$ （Blanc 等 2017）。对于线性漂移，命题 3.4 给出了相应的统一二阶矩条件，其中包含 $k = \vartheta G$。该条件不适用于一般的二次漂移模型；对于后者，命题 3.6 和 3.7 给出了无需对 ϑ施加限制的界。表 C1 中的 L^1 项描述了底层 Hawkes 反馈核。临界性不会生成带符号扰动模型的核。核是一个输入量；正如 Gatheral 等(2020) 所做的那样，我们取 Blanc 等(2017) 中二次反馈的经验衰减作为该核。

C.1. 候选订单流模型

设 n 为单位年化方差对应的交易数量，因此每笔交易使对数价格变动一个大小为 $n^{-1/2}$ 的最小价格变动单位。设 K_n 为一个核，满足 $K_n(0) < \infty$，并且在 L^2_{loc} 中收敛于 K；例如平移核 $K_n(t) = (t + 1/n)^{H-1/2}/\Gamma(H + 1/2)$，它在归一化意义下就是 Hager等人（2026年）所用的核。交易在计数过程 N^n 的跳跃时刻 τ_k 到达，其强度为 $n(\sigma^n_{t-})^2$。每笔交易都带有一个符号 $\eta_k \in \{-1, 1\}$，该符号服从对称分布，并带有一个波动率标记$\zeta_k \in \{-1, 1\}$。波动率和对数价格的鞅部分为

$$\sigma^n_t = \sigma_0 + \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \sum_{\tau_k \le t} K_n(t - \tau_k)\, \zeta_k, \qquad P^n_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau_k \le t} \eta_k. \tag{C1}$$

标记的分布取决于交易前的波动率，

$$\mathrm{P}\big(\zeta_k = \eta_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k -}, \eta_k\big) = \tfrac{1}{2}\big(1 + \rho(1 - |\bar{\zeta}_n|) + \eta_k \bar{\zeta}_n\big), \qquad \bar{\zeta}_n = \mathrm{clip}\left(\frac{(\kappa_1 + \kappa_2\sigma)(\theta - \sigma)}{\sqrt{n}\,\vartheta\,\sigma^2}\bigg|_{\sigma = \sigma^n_{\tau_k -}}, -1, 1 \right), \tag{C2}$$

其中 $\mathrm{clip}(x, -1, 1) = \max\{-1, \min\{x, 1\}\}$，并且 $\zeta_n = 0$ 在 $\sigma = 0$ 处定义，此时交易强度为零。于是 $\mathrm{E}[\zeta_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k -}] = \zeta_n$ 和 $\mathrm{E}[\eta_k \zeta_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k -}] = \rho(1 - |\zeta_n|)$。输入冲击为$\pm\vartheta/\sqrt{n}$，而瞬时状态跳跃为 $\pm\vartheta K_n(0)/\sqrt{n}$。在非零处，漂移通过每笔交易阶数为 $n^{-1/2}$ 的符号偏差产生。

令 $b(s) = (\kappa_1 + \kappa_2 s)(\theta - s)$。补偿后的输入冲击的可预测二次变差率为 $(\vartheta^2/n)n\sigma^2 = \vartheta^2\sigma^2$，其均值速率在截断函数未起作用的区域为 $\sqrt{n}\vartheta\sigma^2\bar{\zeta}_n = b(\sigma)$。这两种

速率是进入式（1）中核卷积的系数。在该区域，二次系数为每笔交易贡献与水平无关的平抑偏差 $-\kappa_2/(\sqrt{n}\vartheta)$，而其他系数则贡献与 $1/\sigma$ 和 $1/\sigma^2$ 成正比的项。

当 s 为正时，只有在 $b(s) \geq \sqrt{n}\vartheta s^2$ 的情况下，扰动才始终向上。若 $\kappa_1\theta > 0$，则该区间为$0 < s \leq r_n$，其中

$$r_n = \frac{2\kappa_1\theta}{\kappa_1 - \kappa_2\theta + \sqrt{(\kappa_1 - \kappa_2\theta)^2 + 4(\kappa_2 + \sqrt{n}\vartheta)\kappa_1\theta}}.$$

对于 $K \equiv 1$，且 n 足够大使得 $r_n > \vartheta/\sqrt{n}$，跳链始终高于 $\min\{\sigma_0, r_n - \vartheta/\sqrt{n}\} > 0$。该下界随 n 趋于零，无法证明状态一致地保持在远离零的紧集内。对于移位分数阶核，状态跳跃为 $\vartheta n^{-H}/\Gamma(H + 1/2)$，而 r_n 的阶为 $n^{-1/4}$。当 $H < 1/4$ 时，向下跳跃可能超出保护区间。在交易之间，核衰减也会推动状态变化。因此，标记偏差并不能确立分数阶构造的正性，也无法证明猜想 2.3。

强度具有二次反馈形式 $n(\sigma_0 + Z^n)^2$, ，其中 Z^n 是核加权有符号输入。状态标记与价格符号通过 ρ 相关联，而偏移量 σ_0 会使二次强度的顶点发生平移。这些特征使该构造与二次 Hawkes 模型（Blanc 等 2017）相关，但对于奇异核，尚未确立固定的正分支。当初始状态为零且没有基准强度时，该过程处于非活跃状态。因此，若要与 Dandapani 等 (2021) 进行有意义的比较，就需要采用其正基准强度，或使用不同的非零初始输入，详见下文。

经济学解释。 该构造将波动率创新的大小与产生它的活动区分开来。一笔交易可以通过揭示失衡来增加不确定性，也可以通过完成一笔订单并吸收该失衡来降低不确定性。有符号标记表示这两种可能的影响。我们假设，在给定的缩放层级上，输入冲击具有相同的幅度，而交易以与 σ^2 成正比的速率到达。于是，波动性更高的状态在每单位日历时间内产生更多冲击，因此其聚合噪声幅度随 σ 缩放。活跃市场中较大的波动率冲击，并不一定意味着每笔单独交易产生了更大的输入冲击。相同幅度和二次活动关系属于建模假设：实际的状态跳跃还包含因子 $K_n(0)$，而本文并未估计冲击大小或活动关系。

该核描述了每个输入如何随时间传递。对于 $H < 1/2$，其幂律加权可以解释为参与者在广泛的时间范围内调整头寸并补充流动性所产生的聚合效应。这一解释说明了创新为何具有持续性，同时无需选定单一的反应时间。幂律被施加于输入核。完整的响应还取决于漂移和后续的状态依赖活动。特别是，线性漂移响应会经过第 3 节的预解 G 进行滤波。与异质反应时间尺度的类比，并不能从交易行为中推导出分数阶指数。

二次阻尼表示一种拟议的稳定响应：在波动性更高的状态下，该响应会变得更强。在参考水平 θ 之上，漂移（$\kappa_1 + \kappa_2\sigma$）（$\theta - \sigma$）为负；当 σ 较大时，其主导项为 $-\kappa_2\sigma^2$ 。对于 $\vartheta \geq 0$，随着 σ 增大，（C2）中的未截断平均标记趋近于 $-\kappa_2/(\sqrt{n}\,\vartheta)$：一种幅度较小且渐近地与水平无关的平抑性扰动偏好，与二次到达率相结合，产生二次阻尼。库存调整和流动性回补可以解释这种净偏差。标记分布律经过选择以编码该漂移，因此，这一计算并未独立推导交易者的激励，也未确立其响应在每个市场中都具有稳定性。

正的现货-波动率相关性与平缓的平均响应可以并存。相关性涉及价格创新与波动率创新的联合符号。平均标记控制漂移。这一区分对定价模型很重要：停止的股权测度变换会在波动率漂移中加入 $+\beta\sigma^2$ ，同时保留首项 $-(\kappa_2 - \beta)\sigma^2$。定理 4.3 表明， $\kappa_2 \geq \beta$ 足以使价格成为真鞅。该不等式是在所指定

定价测度下对模型的一个条件。我们并不声称这是对流动性提供者的实证约束。在猜想 4.5 所述的情形下，该条件的必要性仍有待解决。

C.2. 马尔可夫情形

Proposition C.1（局部化马尔可夫近似）令 $K_n \equiv K \equiv 1$、$\kappa_1 > 0$、$\theta > 0$、$\kappa_2 \geq 0$和 $\sigma_0 > 0$。固定 $0 < \sigma_- < \sigma_0 < \sigma_+$ 和 $\bar{p} > 0$，并设 $D = (\sigma_-, \sigma_+) \times (-\bar{p}, \bar{p})$。从 (σ^n, P^n) 出发的链，在 $(\sigma_0, 0)$ 处开始，并在首次离开 D 时停止，在 D 上 $([0,T]; \mathbb{R}^2)$ 中弱收敛于下述方程的解

$$\mathrm{d}\sigma_t = (\kappa_1 + \kappa_2\sigma_t)(\theta - \sigma_t)\,\mathrm{d}t + \vartheta\sigma_t\,\mathrm{d}W_t^{\sigma}, \qquad \mathrm{d}P_t = \sigma_t\,\mathrm{d}W_t^{(0)}, \qquad \mathrm{d}\langle W^{(0)}, W^{\sigma}\rangle_t = \rho\,\mathrm{d}t, \tag{C3}$$

停止于首次离开 D 时。相应的资产对数价格为 $X_t = X_0 + P_t - I_t/2$。

附录 A 中的证明确定了生成元，并证明了停止扩散近似。该证明并未断言这些链的全局收敛性。要去除停止条件，需要对它们趋近于零和无穷的过程给出一致估计。候选极限扩散是 Sepp and Rakhmonov (2023) 的经典模型；对于 $\kappa_2 > 0$，其平稳分布和二阶矩界见命题 3.6。这一识别说明了候选极限中平抑偏差所起的作用，但并未提供全局微观极限定理。

C.3. 与二次 *Hawkes* 极限的关系

Dandapani 等人（2021）的定理 2（按 arXiv 版本的编号）给出了在宏观时间尺度下，具有基准强度 $\mu > 0$、Zumbach 核 $k_T = \sqrt{\gamma/T}\,k(\cdot/T)$、$\|k\|_2 = 1$ 以及 $\gamma \in (0,\ 1)$ 的纯二次 Hawkes 过程的缩放极限。该极限为 $\mathrm{d}P_t = \sqrt{V_t}\,\mathrm{d}B_t$，$V_t = \mu + Z_t^2$以及 $Z_t = \sqrt{\gamma}\int_0^t k(t-s)\sqrt{V_s}\,\mathrm{d}B_s$。他们的例子取 k 与 Mittag-Leffler 密度$f^{\alpha,\ \lambda}(t) = \lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\ \alpha}(-\lambda t^{\alpha})$ 成正比，该密度等于式（12）的预解 R，其中 $\kappa_1 = \lambda$。当 $k = G/\|G\|_2$时，极限写作

$$Z_t = \vartheta\int_0^t G(t-s)\sqrt{\mu + Z_s^2}\,\mathrm{d}B_s, \qquad \vartheta = \frac{\sqrt{\gamma}}{\|G\|_2}, \tag{C4}$$

因此，同一个参数 $\gamma = \vartheta^2\|G\|_2^2$ 控制着其平稳二阶矩。预解恒等式给出了精确的带符号状态方程

$$Z_t = \int_0^t K(t-s)\big[-\kappa_1 Z_s\,\mathrm{d}s + \vartheta\sqrt{\mu + Z_s^2}\,\mathrm{d}B_s\big].$$

形式上将 $\sqrt{\mu + Z^2}$ 替换为 $|Z|$，便可进行布朗旋转 $\mathrm{d}\widetilde{B} = \mathrm{sign}_*(Z)\,\mathrm{d}B$，其中 $\mathrm{sign}_*(0) = 1$，并为带符号过程 Z 生成一个线性乘性噪声方程。由于取绝对值与 Volterra 卷积不交换，该旋转不会为 $|Z|$给出这一方程。根据 Z 的符号，该旋转还会改变与价格布朗运动的相关性。在 $\mu = 0$ 以及 (C4) 的零初始输入下，这个齐次利普希茨方程具有零解。因此，这种比较只是针对带符号过程的形式类比。该比较并不能将该极限认定为我们的正波动率参数族。

如果存在平稳二阶矩，伊藤等距式给出 $\mathbb{E}[Z^2] = \mu\gamma/(1-\gamma)$。当 $\gamma \uparrow 1$ 时比值较大，这描述了平均二阶矩放大，但并不能证明可以逐路径地省略下限项，尤其是在接近零时。相反，我们的构造通过标记分布律引入漂移截距 $\kappa_1\theta$，而其正性与收敛性问题是彼此独立的。

C.4. 奇异核的缩放极限

注 C.2（开放问题：分数阶流极限）对于 (C1)–(C2)，仅凭 L^2 的局部 K_n 收敛性无法推出连续缩放极限。状态跳跃的幅度为 $\vartheta K_n(0)/\sqrt{n}$。例如，完全单调核

$$K_n(t) = K(t + 1/n) + ne^{-n^3 t}$$

收敛到 K in L^2_{loc}，因为加入的尖峰具有平方 L^2 范数 $1/(2n)$，但 $K_n(0)/\sqrt{n} \sim \sqrt{n}$。在第一笔交易之前，状态等于 σ_0，因此交易以概率 $1-e^{-n\sigma_0^2 T} \to 1$ 发生在 T 之前，并且状态跳跃幅度发散。无论所提出极限的适定性如何，这样的跳跃都排除了在 Skorohod J_1 拓扑下收敛到连续过程的可能性。

一个可行的极限定理至少必须施加 $K_n(0)/\sqrt{n} \to 0$。这样的定理还需要一致的核正则性，以便为非线性带标记过程提供充分的紧性、矩和退出估计，控制零点附近的截断，识别每个极限点，并确保目标方程的唯一性。一个值得研究的核界是：对某个 $\varsigma > 0$ 以及每个 T，

$$\int_0^h K_n(s)^2 \, \mathrm{d}s + \int_0^T |K_n(s+h) - K_n(s)|^2 \, \mathrm{d}s \le C_T h^{2\varsigma},$$

关于 n 和 $0 < h \le 1$一致成立。该界是一个候选正则性要求。我们并未证明它足以支持完整的非线性构造。平移分数阶例子具有消失的跳跃尺度 n^{-H}，但上述符号保持问题仍然存在。因此，我们将对 (1) 的全局收敛留作开放问题。Dandapani 等 （2021）、Horst 等 （2024）和 Hager 等 （2026年）的极限使用了各自的状态空间、基准强度和正则性假设，其中没有一个是当前构造已有极限定理的特殊情形。

不过，局部漂移计算仍然给出了参数解释。波动率的波动率 ϑ 对带符号输入冲击进行缩放。系数 κ_2 为每笔交易贡献一个与水平无关的平抑偏差，而二次到达率将其转化为二次阻尼。截距 $\kappa_1\theta$在低活跃度下产生向上偏差。在测度变换下，命题 4.1 将二次系数平移了 $\beta\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1$，但须遵守其中所述的可容许性限制。

阶为 $n^{-1/2}$ 的偏差并不会使漂移无法从逐笔数据中识别：相关限制在于，在固定时间跨度内提高采样频率本身并不能提供一致的漂移估计，而更长的观测跨度则包含漂移信息。实证评估需要交易层面观测，将到达率、带符号价格变动和波动率创新联系起来，同时还需要一个潜在波动率状态的可观测代理变量。第 5 节中的期权校准涉及风险中性系数，并不能识别这一现实概率订单流机制。因此，我们利用该构造来解释这些系数，并建立局部化马尔可夫近似。全局分数阶极限以及交易机制的实证识别仍是彼此独立的研究问题。

表 1. 零方差下限的对数正态 Volterra 模型 (1)、粗糙 Bergomi 模型和二次粗糙 Heston 模型。在二次粗糙 Heston 模型中，$V_t = a(Z_t - b)^2$ 和 $Y_t = \sqrt{a}(Z_t - b)$ 是带符号状态。其二阶矩阈值使用带有 $\kappa_1 = \lambda$ 和 $\vartheta = \lambda\eta\sqrt{a}$ 的公式 (16)。

	粗糙 Bergomi 模型	二次粗糙 Heston 模型，$c = 0$	对数正态 Volterra 模型
波动率	高斯 Volterra 过程对于 $\ln \sigma_t$	$\lvert Y_t\rvert$，噪声为 $\lambda\eta\sqrt{V_s}\mathrm{d}\overline{W}_s$ in Z的方程	σ_t 满足一个 Volterra 方程，其中包含噪声 $\vartheta\sigma_s\,\mathrm{d}W_s^\sigma$
正性	对一个严格正的正初始方差曲线	由构造保证非负	非负（定理 2.2）。严格正性对于奇异情形仍是开放问题
漂移	确定性对数方差修正和初始曲线	线性均值回复 Y 至 $-\sqrt{a}\,b$	核对 $\theta > 0$ 的二次均值回归
相关性	常数 ρ	乘性噪声驱动过程 Y 的相关性符号为 $\mathrm{sign}(Z_t - b)$ 与 $Z_t \neq b$ 的价格驱动过程	常数 ρ
$\rho > 0$的价格	严格局部鞅（Gassiat 2019年）	相关性取决于状态	当 $\kappa_2 \geq \beta$ 时为真鞅。这一条件对于正有限混合是必要的（定理 4.3，命题 4.4）
长期二阶矩	$\mathrm{E}[\sigma_t^2]$ 等于初始在 t 时的远期方差	对于 $b > 0$，$\mathrm{E}[Y_t^2]$ 是一致有界当且仅当 $\gamma < 1$	在线性漂移和 $\kappa_1 > 0$ 下，有界当且仅当 $\gamma < 1$。在 $\kappa_2 > 0$，对每个 ϑ 均有界且 $0 < H \leq 1/2$（推论 3.8）。命题 3.7还界定了时间平均
初始状态	初始远期方差曲线	Z_0 通过输入曲线 $\theta_0(t)$	σ_0 在 $t = 0$处，输入保持不变 $\Theta_s^0 = \sigma_0$
微观结构	作用于……的泊松订单 $\ln\sigma$ (Hager *et al.* 2026)	相关的带符号二次 Hawkes 状态（Dandapani *et al.* 2021）	带标记订单流。停止后的常核极限已得到证明。全局粗糙极限尚未解决

表2。 ϑ_c 年$^{-H}$ 的临界波动率的波动率（左栏）及相应的单日创新代理量 $\nu_{1/252,\ c}$ （右栏），其中 κ_1 年为$^{-(H+1/2)}$。对于线性漂移，当且仅当 $\vartheta < \vartheta_c$时，二阶矩在时间上有界。该代理量通过将波动率系数在一天内冻结来定义。该闭式常数已通过独立谱求积进行检验。

		ϑ_c					$\nu_{1/252,\ c}$				
H	$C(\alpha)$	$\kappa_1 = 1$	2	3	5	10	$\kappa_1 = 1$	2	3	5	10
0.5	0.500	1.414	2.000	2.449	3.162	4.472	0.089	0.126	0.154	0.199	0.282
0.4	0.515	1.394	1.897	2.272	2.851	3.879	0.160	0.217	0.260	0.327	0.444
0.3	0.574	1.319	1.711	1.992	2.413	3.129	0.279	0.361	0.421	0.509	0.660
0.2	0.747	1.157	1.411	1.584	1.833	2.234	0.466	0.569	0.639	0.739	0.901
0.1	1.398	0.846	0.949	1.016	1.106	1.241	0.730	0.820	0.877	0.955	1.072

表 3. 附录 B 中采用时间步长 h 和三因子核的方案，在最后一个时间步 $t_n = T = 1$ 的 (B6) 原始条件远期 $F_n/S_0 = \exp(\rho J_n - \tfrac{1}{2}\rho^2 I_n)$ 样本均值，其中 $H = 0.1$、$\beta = 0.6$、$\varepsilon = 0.8$ $\sigma_0 = 0.5$ $\theta = 0.4$ $\kappa_1 = 2$ 200,000 3 40 5,000 、和 。每个单元格使用随机种子为 的路径，分为 批次。粗网格聚合了 5,760 步网格的布朗增量，五列使用相同的增量。每个单元格中离散远期的期望均为 1（引理 B.1）。标准误包括每条路径的样本值以及 40 个批次均值的标准误。对于 $\kappa_2 < \beta$，它们描述抽样路径，不提供与期望之间距离的界。

κ_2	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2
$h = 1/1440$	0.94109	0.98471	0.99627	0.99858	0.99924
逐路径标准误	0.00075	0.00155	0.00160	0.00131	0.00112
批次标准误	0.00073	0.00166	0.00171	0.00134	0.00111
$h = 1/2880$	0.94028	0.98516	0.99720	0.99921	0.99967
逐路径标准误	0.00074	0.00168	0.00183	0.00142	0.00117
批次标准误	0.00067	0.00180	0.00192	0.00143	0.00115
$h = 1/5760$	0.93971	0.98473	0.99711	0.99917	0.99965
逐路径标准误	0.00072	0.00158	0.00180	0.00143	0.00118
批次标准误	0.00068	0.00155	0.00177	0.00137	0.00111

表4。在选定的比特币和以太币快照上进行的固定-H 校准，每列在三个到期期限上使用一个六系数向量。时间以年为单位，系数采用依赖于 H的单位（见公式 (1)）。加权均方根是以买卖价差为单位的价格误差均方根，三个到期期限的权重相等。 γ 行给出了在拟合的 H、 κ_1 和 ϑ下，带分数阶核的线性漂移模型的稳定性参数 (16)。区间内计数涉及溢价。最后两行报告以价差为单位的不同数值诊断。在 $H = 0.50$ 处，误差是求解器检查过程中价格最大变化的幅度。在 $H = 0.30$ 处，我们报告蒙特卡罗估计的逐点最大 95%半宽（附录 B.4）。

	比特币		以太币	
	$H = 0.30$	$H = 0.50$	$H = 0.30$	$H = 0.50$
σ_0	0.36324	0.37746	0.77823	0.80466
θ	0.36317	0.36609	3.92520	2.45560
κ_1	3.80371	11.89875	0.01003	0.57978
κ_2	0.19193	0.41383	0.57527	1.16610
β	0.18193	0.40383	0.19698	0.42839
ε	1.87830	4.09675	0.87174	1.87244
ρ	0.09641	0.09810	0.22041	0.22302
$\kappa_2 - \beta$	0.01000	0.01000	0.37828	0.73771
γ 在 $\kappa_2 = 0$处	0.75098	0.71211	14.47392	3.18184
加权均方根 / 价差	0.71651	0.79087	0.34923	0.30829
买卖价差内	27/45	28/45	33/39	33/39
最大偏微分方程差异/价差	–	0.00116	–	0.00101
最高价 95%半宽/价差	0.04932	–	0.01977	–

表 C1。订单移动的状态和订单速率决定极限模型的噪声。

极限模型	移动的状态	Kick	订单速率	噪声的状态	稳定性范数
粗糙 Heston	方差 V	常数, one-带符号的	$\propto V$	$\sqrt{V}$	$\|\varphi\|_1 < 1$
粗糙 Bergomi 模型	$\ln \sigma$	独立同分布、中心化	常数	常数	none
模型 (1)	波动率 σ	常数、有符号、双-ased	$\propto \sigma^2$	$\vartheta\sigma$	线性漂移: $\gamma < 1$

图 1

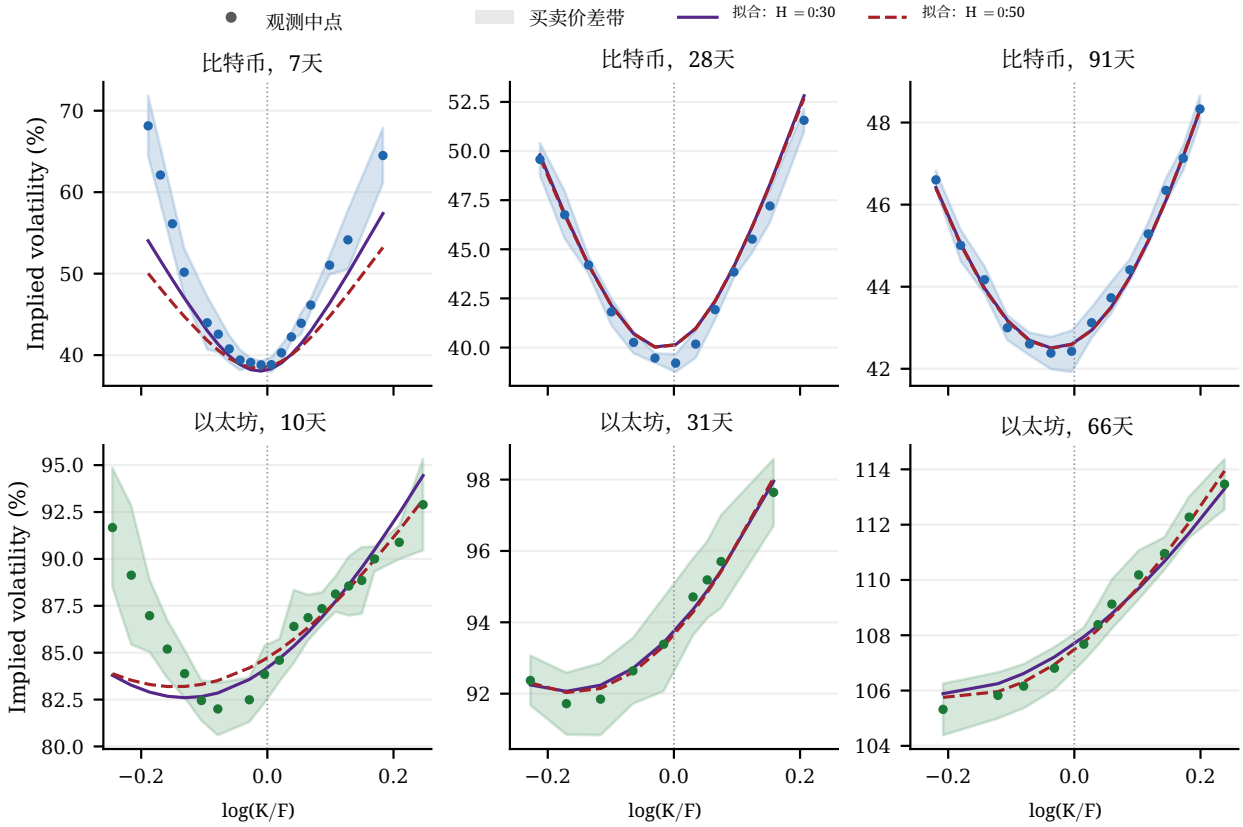

观测中点
买卖价差带
拟合：H = 0.30
拟合：H = 0.50
比特币，7天
比特币，28天
比特币，91天
以太坊，10天
以太坊，31天
以太坊，66天
Implied volatility (%)
log(K/F)

图2

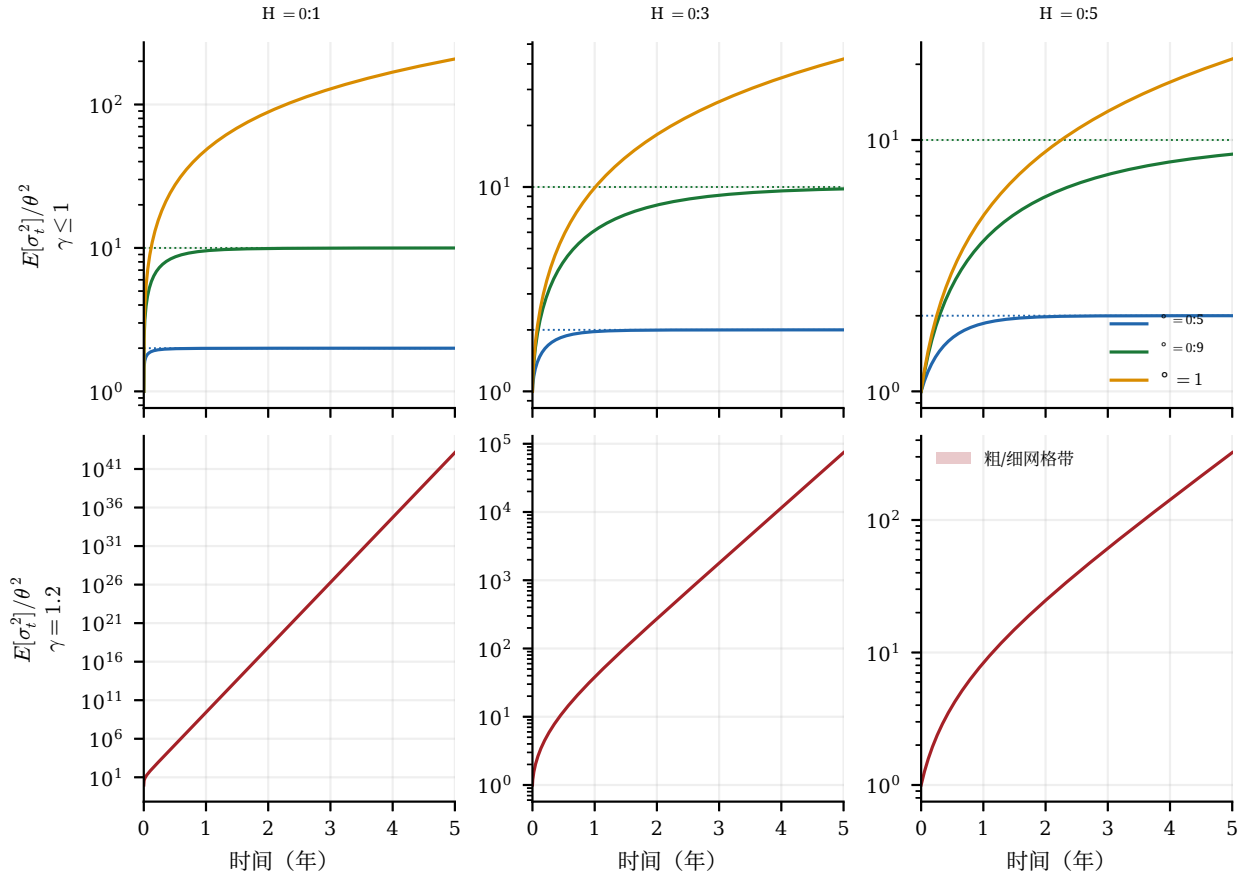
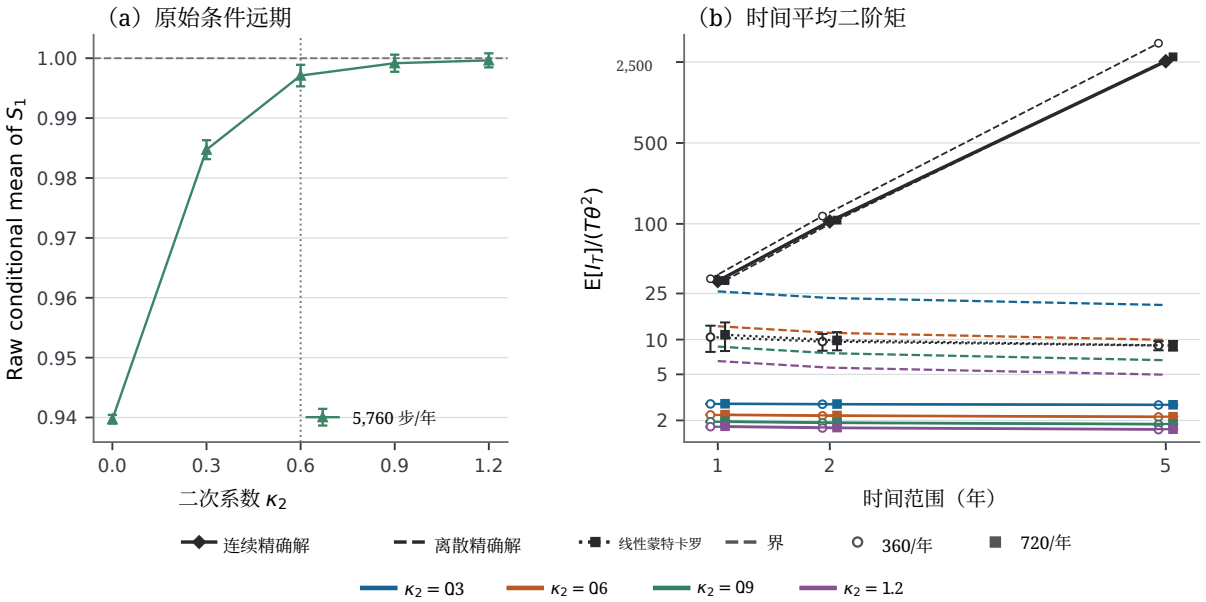

H = 0.1
H = 0.3
H = 0.5
$E[\sigma_t^2]/\theta^2$
$\gamma \leq 1$
$\gamma = 1.2$
$\gamma = 0.5$
$\gamma = 0.9$
$\gamma = 1$
粗/细网格带
时间（年）

图 3



图注

图 1。 观测到的比特币和以太币隐含波动率微笑曲线，以及两种资产在 $H = 0.30$ （紫色，实线）和 $H = 0.50$ （红色，虚线）下的买卖价差带与模型拟合结果。比特币数据观测于2023年6月30日协调世界时08:00，到期期限为7、28和91天；以太币数据观测于2021年10月26日协调世界时08:00，到期期限为10、31和66天。保留的84条价外 Deribit 报价针对每个到期日采用一个共同远期，并通过 $p =$ Black$(F,\ K,\ T,\ \mathrm{IV})/F$反推出执行价 K，其中币种溢价保持不变，并采用单位贴现。曲线连接报价执行价处的模型值。参数和拟合诊断见表4。这些案例是事后选定的。数据：归档于2026年10月25日的 Deribit 报价。

图2。 线性漂移二阶矩 $\mathrm{E}[\sigma_t^2]/\theta^2$ 关于 $\sigma_0 = \theta$、 $\kappa_1 = 2$、 $\kappa_2 = 0$ 和 $H \in \{0.1, 0.3, 0.5\}$的结果。顶行展示 $\gamma \in \{0.5, 0.9, 1\}$，并在 $\gamma < 1$时标出极限 $1/(1-\gamma)$。底行在彼此独立的对数坐标轴上展示 $\gamma = 1.2$ 。对于每个 γ，有限时域矩均保持有限；该阈值涉及 $t \to \infty$时的发散。阴影范围表示每年采用4,000步和8,000步计算得到的乘积积分解。

图 3。 在 $H = 0.1$ 处，根据附录 B 中的方案，对三因子核进行二次漂移诊断。面板 (a) 展示了表 3 中原始条件远期的样本均值，时间步长为每年 5,760 步，并附有一个逐路径标准误。各线分别表示单位远期和 $\kappa_2 = \beta$。面板 (b) 在对数尺度上展示了 $T = 1$、2、5 年时的时间平均二阶矩 $\mathrm{E}[I_T]/(T\theta^2)$，其中 $\sigma_0 = \theta = 0.4$、 $\kappa_1 = 2$、 $\rho = 0$和 $\vartheta = 1.2\,(\gamma_N = 1.0433$，第 3.3 节)。菱形表示连续时间下精确的线性漂移值。黑色虚线表示该方案在每年 360 步和 720 步时精确的线性漂移期望值。彩色虚线表示命题 3.7 的界 (20)，该界对每个 ϑ 均成立。实线表示 $\kappa_2 > 0$ 的蒙特卡洛估计，点线则给出作为对照的 $\kappa_2 = 0$ 的蒙特卡洛估计。空心圆和实心方块分别表示每年 360 步和 720 步，并在水平方向上错开；误差为基于 40 个批次均值计算的一个标准误。每个模拟单元均使用来自随机种子 3 的 200,000 条路径。