方格晶格$S = 1$ 反铁磁体中场诱导自旋超固体的折叠布里渊区的戈德斯通模

SibinYang* 和 Pinaki Sengupta†南洋理工大学物理与数学科学学院，新加坡南洋连路*21*号，邮编*637371*（日期：2026年11月25日）

迄今为止，具有单离子各向异性和交换各向异性的方格晶格 $S = 1$ 反铁磁体中的场诱导自旋超固体，仅通过静态观测量加以表征，其中包括双峰横向结构因子。我们通过对随机级数展开量子蒙特卡罗数据进行随机解析延拓，计算其动态自旋结构因子以及相邻相的动态自旋结构因子。计算针对一个 16×16 晶格，逆温度为 $\beta = 32$，并分别选取超固体、 $m_z = 1/2$ 伊辛平台和倾斜 XY 相中的一个场值。超固体只有一个戈德斯通模，棋盘格有序会将其折叠至序参量波矢$\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$和$\mathbf{q} = (0, 0)$，因此在这两个点的两个自旋通道中均可观测到该模，且速度相同，为 $v = 1.36 \pm 0.01$。倾斜相呈现这一图样的一半，而平台相则没有；后者取而代之的是一条有能隙磁振子带和一个双磁振子纵向连续谱。恰在$\mathbf{Q}$ 和$(0, 0)$处，有限晶格的谱由横向通道中的凝聚体转子塔以及纵向通道中的棋盘格伊辛双重态所主导；在超固体中，两者在$\mathbf{Q}$ 处均存在。通过三项无参数比较——将速度、声模权重和转子塔的热衰减与同一组计算所得的刚度及均匀磁化率进行比较——我们将延拓谱与原始蒙特卡罗观测量联系起来。折叠的戈德斯通模是超固体的动力学特征。

arXiv:2611.32798v1 [cond-mat.str-el] 24 Nov 2026

I. 引言

超固体同时打破平移对称性和 $U(1)$ 相位对称性，使晶体能够承载无耗散超流 [1–4]。在固态氦中的探索未能得出定论之后 [4, 5], ，这一相已在腔耦合和偶极量子气体中实现 [6–9]，而硬核玻色子的晶格超固体也已在受挫晶格上通过数值计算得到证实 [10–13]。量子磁体提供了另一条途径：处于场中的自旋系统可映射为晶格玻色子，其化学势由场决定 [14–16], ；“自旋超固体”则同时具有对角（伊辛）和非对角（XY）长程序。硬核（$S = 1/2$）自旋超固体需要受挫，这种受挫可以来自几何因素 [17] ，也可以来自竞争性远邻相互作用 [18], ，通常还伴有易轴交换各向异性；如今，$Na_2BaCo(PO_4)_2$ 和 $K_2Co(SeO_3)_2$ 等三角晶格钴酸盐正作为候选材料受到研究 [19–22]。

Sengupta 和 Batista 证明，对于 $S = 1$ 自旋 [23]（下文简称“论文”）而言，并不需要受挫，因为 $S = 1$ 格点可以容纳第二个玻色子，而硬核玻色子格点则不能。在具有平面单离子各向异性 D和易轴交换各向异性 Δ的方格晶格 $S = 1$反铁磁体中，场驱动体系从奈尔固体（IS1）经由超固体（SS）进入第二个伊辛平台（IS2），此时磁化强度为$m_z = 1/2$ ，随后通过一级相变进入倾斜的 XY 反铁磁体。同样的机制也存在于受挫 $S = 1$ 二聚体体系 [23] 的低能扇区以及各向异性 $S = 1$ 链 [24–26]中；具有强伊辛型二聚体间交换作用的自旋-$1/2$ 二聚体双层同样可以形成超固体 [27, 28]。

关于 $S = 1$ 超固体的证据完全是静态的：磁化平台、交错纵向结构因子、凝聚分数、自旋刚度，以及横向结构因子的双峰动量分布 [23]。据我们所知，其激发谱尚未被计算。最接近的计算是受挫自旋-$1/2$ 二聚体模型的广义自旋波理论；该模型的低能扇区与 $S = 1$ 模型几乎重合。计算发现了一个戈德斯通模，它在 $(0, 0)$ 和 (π, π) 附近的纵向响应中均可观测到，其流体动力学速度为 [29]。动力学所增加的是对共存序的一组定量约束，而对称性则决定了这些约束的形式。该超固体破缺了一种连续对称性，即绕磁场的 $U(1)$旋转对称性，以及一种离散对称性，即 Z_2 对子晶格的选择。只有前者会产生戈德斯通模 [30, 31]；离散对称性的破缺需要付出一个有能隙的畴壁代价，并且在有限晶格上只留下一个能量呈指数分裂的伊辛双重态。不同于连续超固体，其连续破缺的平移对称性会增加声子分支 [6–9], ，因此晶格超固体恰好只有一个无能隙模；由于只有一个破缺生成元，该模属于 A 型，并且即使磁化强度有限 [31]，其色散仍为线性的。棋盘格使原胞加倍，因此这一模应当同时出现在有序波

矢量 $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ 以及在 $\mathbf{q} = 0$ 处，其速度由流体动力学通过刚度与均匀磁化率之比确定， $v^2 = \rho_s/\chi_{zz}$ [32]。无论是平台（没有 $U(1)$ 序）还是倾斜的 XY 相位（没有 Z_2序），都无法产生这种模式。

我们计算了论文图1所示模型的横向和纵向动态结构因子

* sibin.yang@ntu.edu.sg
† psengupta@ntu.edu.sg

一个 16×16 晶格，采用随机级数展开（SSE）量子蒙特卡罗（QMC） [33–35] 以及随机解析延拓（SAC） [36–40]，在奈尔固体上方的三个有序相中各取一个场值进行研究。超固体在两个通道中均呈现出预测的加倍戈德斯通模，且速度相同；图案的一半相位 XY，平台相则没有（第IVC节），并且将谱与原始蒙特卡罗数据联系起来的三项无参数比较，采用了同一批计算的静态观测量（第IVG节）。

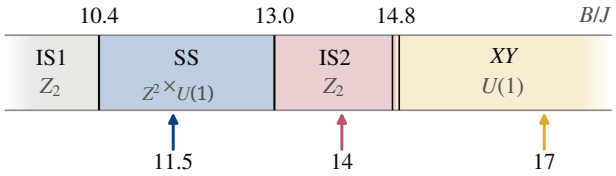


图1. 式（1）在 $D=3.0$，$J_z=3.6$ 沿场轴的相及其各自破缺的对称性：棋盘格的 Z_2 子晶格对称性，以及绕场轴的 $U(1)$ 旋转对称性。单线表示连续相变（根据论文，IS1–SS 相变属于此类），双线表示一阶相变；各相变对应的场值见第 IIA 节（扫描结果见附录 A）。箭头：所研究的三个场值，颜色与图 3–6中的相同。

II. 模型和相

A. 哈密顿量和参数

我们研究

$$\mathcal{H}=J\sum_{\langle ij\rangle}\left(S_i^xS_j^x+S_i^yS_j^y+\Delta\,S_i^zS_j^z\right)+\sum_i\left[D\,(S_i^z)^2-B\,S_i^z\right], \tag{1}$$

方格子上的 $S=1$，反铁磁横向（J）和纵向（$J_z\equiv\Delta J$）耦合、平面单离子各向异性 $D>0$ 以及场 B。我们设定 $J=1$，因此 J_z 和 Δ 是同一个数；在引用论文时我们写作 Δ，而在耦合项作为能量时写作 J_z。

我们注意到，论文中的量子蒙特卡罗模拟遗漏了交换项横向分量中的克莱布什-戈丹系数。这导致有效横向耦合为 $J/2$；除整体能量单位外，这等价于在固定 J 时将 D、J_z 和 B 加倍。换言之，能够得到论文图1所示相图的参数正确值，是论文中所列数值的两倍。因此，我们取 $D=3.0$、$J_z=3.6$，即论文图1在方程（1）单位下的正确参数。这使超固体的下边缘位于 $B\simeq10.4$；我们的扫描将该边缘夹在 10.0 和 10.5 之间，并得到两个平台边缘 13.0 和 14.8。附录 A 通过与精确对角化结果以及论文中的相序列、相边界和刚度进行比较，验证了这些模拟。以下所有结果均对应于 $B=11.5$、14 和 17，即分别处于超固体、IS2 平台和倾斜 XY 相中的三个场值；场采用方程（1）的单位，所有能量均采用 J 为单位。

B. 相

在 $D=3.0$，$J_z=3.6$ 随着场增强，基态会依次经历四个相（图1）。低于 $B\simeq10.4$时，它是有能隙 Néel 伊辛固体（IS1），两个子晶格上的自旋大多处于 $S^z=\pm1$，$m_z=0$ 和 $\rho_s=0$。在10.4 至13.0之间，连续的玻色-爱因斯坦凝聚 [23] 使 $S^z=0$ 位点以更高的概率占据 $S^z=-1$ 子晶格，并使对角序 $[S^{zz}(\mathbf{Q})/N$ 变为有限值，N 其中位点数为] 共同存在非对角长程序 $[S^{xx}(\mathbf{Q})/N$ 为有限值]，且刚度 ρ_s为有限值：这就是超固体，其横向结构因子在 $\mathbf{q}=0$ 和$\mathbf{Q}$ 处均有类布拉格峰（论文中的双峰诊断）。在 13.0 至 14.8 之间，所有 $S^z=-1$ 位点都已变为 $S^z=0$，形成第二种伊辛固体（IS2），这是一个平台，其 $m_z=1/2$恰好为...，且刚度为零。高于 14.8 时，一级相变（m_z：$0.5\to0.59$）进入均匀倾斜的XY 反铁磁体。

在玻色子语言中，$S_i^z=n_i-1$ 将式（1）映射为半硬核玻色子（$n_i\le2$），具有最近邻排斥 $V=J_z$、量级为 J 的跃迁、现场排斥$U=2D$，其归一化为论文式（5）中的 $\frac{U}{2}\sum_i n_i(n_i-1)$，以及化学势 $\mu=D+B$；排斥项写作 $V(n_i-1)(n_j-1)$。场决定在耗尽子晶格上放置一个玻色子所需的代价，$E_0=zV-\mu=4J_z-D-B$（$z=4$ 个邻居），该代价在 $B=zJ_z-D=11.4$处消失；超固体窗口就在该场值附近。当 $B=11.5$时，$E_0=-0.1$：将一个耗尽位点从 $S^z=-1$ 翻转为0可获得0.1，反向翻转则需付出0.1。（下文还会用到这类局部代价，它们是经典棋盘格中改变一个位点对应的对角能量。）论文讨论的二聚体模型条件 $|zV-U|\lesssim t$有所不同：此处 $zV-U=8.4$，而调节系统进入该窗口的是场。两者共有的要素，也是 $S=1/2$ 无法做到这一点的原因，是新增玻色子所需的 $n=2$ 态 [18, 41]。

E_0 单独存在会将窗口缩小到单一场值$B=11.4$。它具有有限宽度，是因为翻转的格点可以移动，从而降低其能量。耗尽子晶格上的两个格点永远不是邻居，因此移动需要通过一个公共邻居进行两次横向步进 a。对于 IS1 棋盘格中的 $S^z=0$ 格点 b 和第二个耗尽格点 b'，$(S_b^z,S_a^z,S_{b'}^z)$ 经过 $(0,+1,-1)\to(0,0,0)\to(-1,+1,0)$。对于 $S=1$，每一步的振幅为 J，而中间态中 a 已离开 $+1$，代价为$\delta E=6J_z-2D=15.6$，因此翻转格点以$t_2=J^2/\delta E=0.064$跃迁。对于平台上的 $S^z=-1$ 格点，断裂的键较少：$\delta E=4J_z-2D=8.4$和 $t_2=0.12$。在其子晶格上，该格点通过 $2t_2$跃迁到四个对角邻居（每个有两条路径），并且通过

表 I。在三个场值 ($L = 16$, $\beta = 32$) 下的等时结构因子，以及它们所表征的序参量[m_z ，其中 $S^{zz}(0,0) = Nm_z^2$; 固体序 $S^{zz}(\mathrm{Q})/N$; 凝聚体 $S^{xx}(\mathrm{Q})/N$; 折叠凝聚态 $S^{xx}(0,0)/N$]; 还包括由相同计算得到的刚度和均匀磁化率，以及它们所预测的两个量：流体动力学速度和转子能隙（第 IV G 节和第 IV B 节）。 ρ_s 和 χ_{zz} 均为每格点数值，其统计误差小于 10^{-4}; 在平台上， $\chi_{zz} < 10^{-4}$ 和 ρ_s 处于其有限尺寸背景。标记为参考文献 [23] 的行取自论文图1中相同场值处的数据（其坐标轴上的 $B/2$ ），或者对于面板 (c) 和 (d)，由于它们是相对于m_z绘制的，则取相同磁化强度处的数据；根据该图坐标轴读取时的不确定度约为 ± 0.03 （对于 ρ_s ，给出了读取范围）；其 ρ_s以该图所采用的能量单位表示（第 II A 节），为我们所用单位的一半。比值根据未四舍五入的数值计算；短横线表示该量在相应相中未定义。

	$B = 11.5$ SS	$B = 14$ IS2	$B = 17$ XY
m_z	0.360	0.500	0.706
参见 [23], 图1(a)	≈ 0.35	0.5	≈ 0.70
$S^{zz}(\mathbf{Q})/N$	0.323	0.200	0.002
参见 [23], 图1(c)	≈ 0.35	≈ 0.2	0
$S^{xx}(\mathbf{Q})/N$	0.123	0.011	0.148
参见 [23], 图1(b)	≈ 0.13	$\to 0$	≈ 0.15
$S^{xx}(0,0)/N$	0.0257	0.0027	0.0015
$S^{xx}(0,0)/S^{xx}(\mathbf{Q})$	0.21	0.24	0.01
ρ_s	0.2508	0.0006	0.4372
参见 [23], 图1(d)	0.10–0.13	0	0.2–0.3
χ_{zz}	0.1355	$< 10^{-4}$	0.0510
$\sqrt{\rho_s/\chi_{zz}}$	1.36	–	2.93
$\Delta_{\mathrm{rot}} = 1/(2\chi_{zz}N)$	0.0144	–	0.0383

t_2 沿轴向延伸至相隔两步的四个格点（只有一条路径），形成宽度为 $16t_2$ （1.0和1.9）的能带，其底部比局域代价低 $12t_2$ 。因此，当 $E_0 - 12t_2$ （IS1中的$S^z = 0$ 个格点）或 $-E_0 - 12t_2$ （平台上的$S^z = -1$ 个格点）降至零以下时，翻转格点便会进入，所对应的场分别为 $B \simeq 10.6$ 和12.8。同样的虚跃迁还会使局域代价发生 -0.12和 $+0.17$的偏移，从而将这些场移至10.5和12.7；忽略翻转格点之间的相互作用。边缘分别为10.4（论文以我们的单位表示的数值，经扫描确定其范围在10.0和10.5之间）以及实测的13.0。同样的、宽度为1–2且并非 $|E_0|$的能带，决定了Goldstone支的能标（第IV D节）。

始终，横向结构因子采用对称组合 $S^{xx} = \langle S^x S^x \rangle = \frac{1}{4}\langle S^+S^- + S^-S^+ \rangle$。尽管论文的式（3）写作 $\langle S_j^+ S_k^- \rangle$，但其中计算的量与我们的代码一样，都是这一对称组合；只有在引用论文时，我们才写作 S^{+-} 。

III. 方法

A. 模拟与关联函数

我们使用SSE方法模拟式（1） [33–35] 上的周期性 $L \times L$ 晶格， $L = 16$ （$N = 256$）处于逆温度 $\beta = 32$。我们分辨出的每个激发都具有$\beta\omega \geq 16$，因此除了阶数为 $e^{-\beta\omega}$的修正外，这些谱都是基态性质；但两个特殊波矢处恢复对称性的扇区除外，其热占据会被显式处理（第IV B节和IV G节），此外还需考虑横向Goldstone峰因这些扇区的能级间距而产生的移动（第IV G节）。虚时间关联函数

$$G^{xx}(\mathbf{q},\tau) = \tfrac{1}{4}\left\langle S^+_{\mathbf{q}}(\tau)S^-_{-\mathbf{q}}(0) + S^-_{\mathbf{q}}(\tau)S^+_{-\mathbf{q}}(0)\right\rangle \qquad (2)$$

并在动量网格（, , , , ）上分别运行测量了

G^{zz} τ $= \langle S^z_{\mathbf{q}}\ \tau\ S^z_{-\mathbf{q}}\ 0\ \rangle$ $0 \leq$(q) ( ) $\tau \leq \beta/2$ 9×9 $q_{x\ y} = 0\ \pi/8\ \ldots\ \pi$ ( )。横向关联函数采用参考文献 [42]，中非对角格林函数的分时切片虫估计量，使用其公式（50）中的边界均匀插入变体；该方法建立在参考文献 [43] 的定向环测量之上。虫子以相同概率提出 S^+ 和 S^- 头，且两个定向通道未分别存储，因此只能得到对称组合。每个测量区间包含 10^5 蒙特卡罗步数，每一步都进行一次测量；各次运行均从已存储的平衡构型继续进行。在 $B = 11.5$ 和 14 处，每个通道有 4096 个区间；在 $B = 17$ 处，分别有 4086 （G^{xx}）和 3875 （G^{zz}）个区间，解析延拓前先将数据按每两个区间重新分箱。虚时间网格遵循估计量的切片方式 $\delta\tau = 0.1$: 在 $\tau = 5$ 之前均匀分布，此后按二次规律逐渐加宽，因此在 $\tau = 0.1$ 与 15.6 之间最多有 61 个点。同一批运行还给出了表 I 中的静态观测量： m_z、均匀磁化率 $\chi_{zz} = \beta[\langle (S^z_{\mathrm{tot}})^2\rangle - \langle S^z_{\mathrm{tot}}\rangle^2]/N$、由绕数得到的刚度 $\rho_s = \langle W_x^2 + W_y^2\rangle/(2\beta)$ ，以及汇集两个通道运行结果的 S^{zz} (Q)； χ_{zz} 和 ρ_s 为每格点量。

B. 解析延拓

这些谱采用 SAC [36–40, 44], (最大熵方法 [37, 45], 的一种随机推广) 2000 δ 得到，其中 $\omega \in [0, 60]$ 函数的频率和振幅均为自由参数，定义在 $\omega \in [0, 60]$ ($B = 11.5$) 或 $[0, 30](B = 14, 17)$ 上，输出分箱为 0.005; 同时使用了对称化核 $K(\tau, \omega) = [e^{-\tau\omega} + e^{-(\beta-\tau)\omega}]/(1 + e^{-\beta\omega})$。由于两个关联函数都是厄米自关联，并且在 $\tau \to \beta - \tau$ 下为偶函数，因此该核是精确的，详细平衡严格成立，正频率横向谱以相同的权重包含自旋升阶和降阶激发。δ 函数之所以保持自由，是因为事先无法确定这些谱中有任何尖锐结构；而带有内置前沿或准粒子极点 [46, 47]的参数化形式会强加这样的

特征，而它可能并不存在。保留相对误差低于 20% 的网格点后，每个动量留下 $N_\tau = 15$–61 个点（附录 B）；最短窗口包含 S^{zz} 列 $B = 14$，因此第 IVE 节中的双磁振子边界属于我们给出的约束最弱的量之一。协方差矩阵来自 40000个自助法样本，采样温度由判据 $a = (\langle\chi^2\rangle - \chi^2_{\min})/\sqrt{2\chi^2_{\min}} \simeq 0.5$ [40]确定；针对留出虚时间数据的交叉验证表明，该判据适用于此类谱 [48]；每个谱都达到 $\chi^2_{\min}/N_\tau = 0.21$–$1.60$，且 $a = 0.40$–0.55。

绘制的谱 $S(\mathbf{q}\ \omega)$ 归一化为

$$G(\mathbf{q},\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\, S(\mathbf{q},\omega)\big[e^{-\tau\omega} + e^{-(\beta-\tau)\omega}\big], \qquad (3)$$

其在 $\tau = 0$ 处即为求和规则

$$\int_0^\infty S(\mathbf{q},\omega)\big(1 + e^{-\beta\omega}\big)\, d\omega = \pi\, G(\mathbf{q},0). \qquad (4)$$

对图 2 中 159 个经过延拓的谱逐一进行反变换，所得结果在每个网格点上与测得的$G(\mathbf{q}\ \tau)/G(\mathbf{q},0)$ 的偏差均小于 5×10^{-4}，与 $G(\mathbf{q},0)$ 的偏差均小于 3×10^{-4}（附录 B）。若某个谱在 $\omega \lesssim 1/\beta$处没有权重，则式 (4) 简化为 $\int_0^\infty S\, d\omega = \pi S(\mathbf{q})$，其中 $S(\mathbf{q}) = G(\mathbf{q},0)$ 为等时结构因子；在除三个转子塔列之外的每个动量处，$\int S\, d\omega/[\pi S(\mathbf{q})]$均为 1.0000；在这三列中，热退激发权重位于 $\omega < 0$ （第四节G）。谱特征的“权重”是指它对 $S(\mathbf{q})$的贡献，即其在绘制的谱中所占的份额除以 π，并在必要时校正热占据。

峰位是用宽度为 $\sigma_\omega = 0.05$ 的高斯函数平滑谱后得到的局部极大值；平滑仅用于确定极大值和极小值。谱的下边缘是其权重中有 0.5% 位于其下方的能量，而权重分数则是峰两侧极小值之间未平滑谱的积分（附录 B）。无能隙分支的速度是其在 $\delta\mathbf{q} \to 0$ 处的斜率，通过该分支趋近于以下形式的点时，沿途最先两个动量处的最低峰 ω_1 得到：沿某一轴为 ($|\delta\mathbf{q}| = \pi/8$ 和 $\pi/4$)，沿对角线则为其 $\sqrt{2}$ 倍，形式为 $\omega_1 = v|\delta\mathbf{q}|(1 - a|\delta\mathbf{q}|^2)$。对于 S^{xx}，先从 ω_1 中减去转子偏移 $\Delta_{\rm rot}$ （第四节G）。同时给出第一步割线 $\omega_1/|\delta\mathbf{q}|$，它是 v 的下界。由于这些谱是对自举关联函数进行单次解析延拓所得，因此峰位不附带统计不确定性；若有可用的检验结果，则改为报告该结果。

IV. 结果

A. 概述

图2 展示了沿穿过布里渊区的一条路径得到的六条谱，图 3 展示了最低峰的色散关系和等时权重，图4展示了 $(\pi, 0)$ 和 Q 处的谱形状。归一化每一列的等时权重已经标识出各个相（表 I）。平台相的数值精确到$m_z = 0.500$ 三位有效数字，并且 S^{zz}(Q) $/N = 0.20$；棋盘格相为 $|{+1},\ 0\rangle$ 固体（经典情况下为 0.25），但受到量子涨落的削弱。超固体带有一个折叠的凝聚峰 $S^{xx}(0,0)/N = 0.026$，其权重为 Q 峰的 21%，比另外两个相高出一个数量级；这个绝对权重，而不是其与 Q 峰的比值（仅在 IS2 中两者权重都很小时该比值才相近），才是论文图 1(e) 中双峰诊断的依据。平台相是不可压缩的（$\chi_{zz} \simeq 0$, $\rho_s \simeq 0$），而超固体相和 XY 相是超流体；超固体的可压缩性高出 2.7 倍，刚度则低 1.7 倍。将论文图 1 中的场及其 ρ_s 换算为公式 (1)（第二节A）的单位后，每个数值都与该图一致。表 I 的最后两行是第四节G 中检验的流体动力学预测。

在二维中，$T > 0$ $U(1)$序在 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless意义下属于准长程有序，[49]，“凝聚体”和“戈德斯通模”也均是在这一意义下使用的。测得的刚度超过普适跃变值 $2T/\pi = 0.020$ [50]，超出倍数分别为13（超固体）和22（XY），因此横向关联按指数 $\eta = T/(2\pi\rho_s) \lesssim 0.02$衰减，在 $L = 16$范围内仅变化几个百分点，有限系统表现为有序。Z_2 棋盘格在有限温度下以通常意义上的方式形成有序。

B. Q和$(0,\ 0)$处的有限尺寸态

在有限周期性晶格上，$\mathcal{H}$ 具有平移不变性，$S^z_{\rm tot}$ 守恒，因此没有任何本征态会破缺 Z_2 子晶格对称性或 $U(1)$自旋旋转对称性。有序基态由一小组准简并对称本征态组成，并且序参量波矢处的 $S^z_{\mathbf{q}}$ 和 $S^x_{\mathbf{q}}$ 将基态与该集合中的其他态连接起来 [51–54]。这决定了如何处理$\mathbf{Q}$ 和$(0,\ 0)$处的列。最简单的情况是$\mathbf{q} = (0,\ 0)$处的 S^{zz}： $S^z_{\mathbf{q}=0}$ 与 $\mathcal{H}$对易，因此 $G^{zz}(\mathbf{q} = 0,\ \tau) = Nm_z^2$在每个相中都成立，该列是一条纯弹性线，没有可延续的非弹性谱。

a. 伊辛双重态位于 $S^{zz}(\mathbf{Q}\ \omega)$。棋盘格序参量为 $M_{\rm stag} = \sum_i(-1)^{x_i+y_i}S^z_i = \sqrt{N}S^z_{\mathbf{Q}}$，其中有 $m_{\rm stag} = M_{\rm stag}/N$。平移一个晶格间距会将图样 $|A\rangle$映射到 $|B\rangle$，而晶体动量为 0 和 $\mathbf{Q}$ 的本征态$|\pm\rangle = (|A\rangle \pm |B\rangle)/\sqrt{2}$由隧穿振幅 $\Delta_{\rm dbl} \sim e^{-cL^2}$分裂：从 $|A\rangle$到 $|B\rangle$ 需要经历一个在虚时间中覆盖整个 $L\times L$ 晶格的畴壁。 $S^z_{\mathbf{Q}}$ 通过宏观矩阵元 $\sqrt{N}m_{\rm stag}$将它们连接起来，因此

$$G^{zz}(\mathbf{Q},\tau) \simeq Nm^2_{\rm stag}\,\frac{\cosh[\Delta_{\rm dbl}(\beta/2-\tau)]}{\cosh(\beta\Delta_{\rm dbl}/2)} + \text{inelastic}, \qquad (5)$$

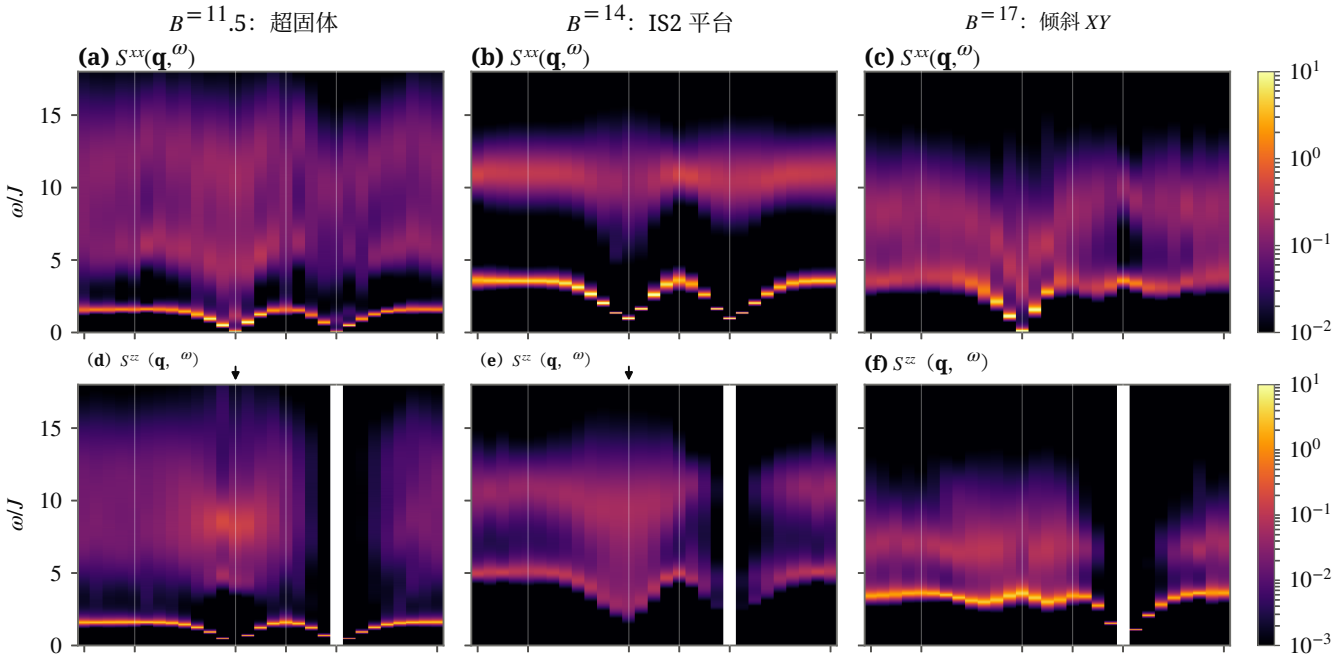


图 2。 $S = 1$ 模型（方程 (1)）在 $D = 3.0$、 $J_z = 3.6$、 $L = 16$、 $\beta = 32$ 下沿路径 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (\pi, 0) \to (\pi, \pi) \to (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (0, 0) \to (\pi, 0)$（29 个动量点）的动态自旋结构因子。(a)–(c) 超固体（$B = 11.5$）中的横向 $S^{xx}(\mathbf{q}\ \omega)$，以及 (d)–(f) 纵向 $S^{zz}(\mathbf{q}\ \omega)$；还包括 IS2 平台（$B = 14$）和倾斜 XY相（$B = 17$）。在解析延拓的原生 $\Delta\omega = 0.005$ 网格上显示对数强度；同一行各面板共用相同的标度范围，从 10^{-2}（横向）和 10^{-3}（纵向）延伸至 10^{1}。 S^{zz} 中 (0, 0) 处的白色列为守恒 S^{z}_{tot}的纯弹性响应（权重 Nm_z^2），没有可供解析延拓的非弹性部分。(d) 和 (e) 中的箭头标出了连通（π、 π）列，在解析延拓之前，已从其中移除 $S^{zz}(\mathbf{Q})$] 的伊辛双重态权重 [$> 99.7\%$（见第 IV B 节）；在 S^{xx} 中，对原始关联函数进行解析延拓，位于 (π, π) [(a) 和 (c)] 以及 (0, 0) [(a)] 处的饱和列是 $U(1)$ 凝聚体的转子塔。

表 II. 无能隙（戈德斯通）分支出现的位置。“是”表示存在一条线性色散至零的峰，其速度按第三节B中的定义计算（$\delta\mathbf{q} \to 0$ 斜率取自前两个轴向动量，并在从 S^{xx} 峰中扣除转子偏移 Δ_{rot} 后得到；分辨率为 0.01）；SS 中的首步割线斜率分别为 1.32（S^{xx}）和 1.33（S^{zz}），而 XY相中为 2.85 和 2.86。“有能隙”给出该点的最低峰能量。恰在 Q 处， S^{zz} 在 SS 和 IS2 中是伊辛双重态加上有能隙的连通余项（边缘分别为 3.9 和 2.0），而在 XY相中则是普通的有能隙模。

	S^{xx} 在**Q**附近	S^{xx} 在 (0，0) 附近	S^{zz} 在 (0，0) 附近	S^{zz} 在**Q**附近
SS（$B = 11.5$）	是的， $v = 1.35$	是的， $v = 1.35$	是的， $v = 1.37$	是的， $v = 1.37$
IS2（$B = 14$）	有能隙 1.00	有能隙 1.00	双磁振子， $2\Delta_{\mathrm{IS2}} = 2.0$[a]	双磁振子， $2\Delta_{\mathrm{IS2}} = 2.0$[a]
XY（$B = 17$）	是， $v = 2.90$	有能隙 3.59	是， $v = 2.91$	有能隙 3.62

[a] 计算得到的阈值位于 po int 本身（图 5），是起始点的下界（第 IVE节），而非测量峰；最近的测量 dS^{zz} 边缘在（$\frac{\pi}{8}$，0）处为 2.18，98 接于Q。

在 $\omega = \pm\Delta_{\mathrm{dbl}}$ 处有一条权重为 Nm^2_{stag} 的线，其 τ 对 $\beta\Delta_{\mathrm{dbl}} \ll 1$、 $1 - \frac{1}{2}\Delta^2_{\mathrm{dbl}}\tau(\beta - \tau)$的依赖关系关于$\Delta_{\mathrm{dbl}}$呈二次变化。在超固体 $G^{zz}(\mathbf{Q}\ \tau)$ 中，从 $\tau = 2$ 到网格末端 $\tau = 15.6$ 的范围内，相对于 10^{7}，，其平坦程度达到一个单位，而统计误差为 2×10^{-8}，对应于 $G^{zz}(\mathbf{Q}\ \tau)/G^{zz}(\mathbf{Q},\ 0)$，由此限定了 $\Delta_{\mathrm{dbl}} \lesssim 3 \times 10^{-5}$。双重态占 $S^{zz}(\mathbf{Q}) = 82.8$ (SS) 的 99.7% 以上，以及 IS2 的 51.2%，即 $m^2_{\mathrm{stag}} = 0.32$ 和 0.20。原始延拓无法准确表示这条弹性线（拟合在 SS 中的 $\chi^2/N_\tau \simeq 200$处、在 IS2 中的 $\simeq 10^8$ 处停滞），因此对于这两列 [图 2(d) 和 2(e) 中的箭头] 表示我们继续使用连通关联函数，即对每个 $\tau \simeq \beta/2$自助法样本扣除平台（布拉格扣除）后得到的结果。扣除后， $S^{zz}(\mathbf{Q})$ 中剩余的连通权重 $S^{zz}(\mathbf{Q}) - G^{zz}(\mathbf{Q}\ \beta/2)$ 为 0.164（SS）和 0.127（IS2）；与平台一同 $\omega \simeq 1/\beta$ 移除的任何非弹性权重均低于其 0.1%（附录 B）。在 XY相中不存在固体序，因此使用原始关联函数。

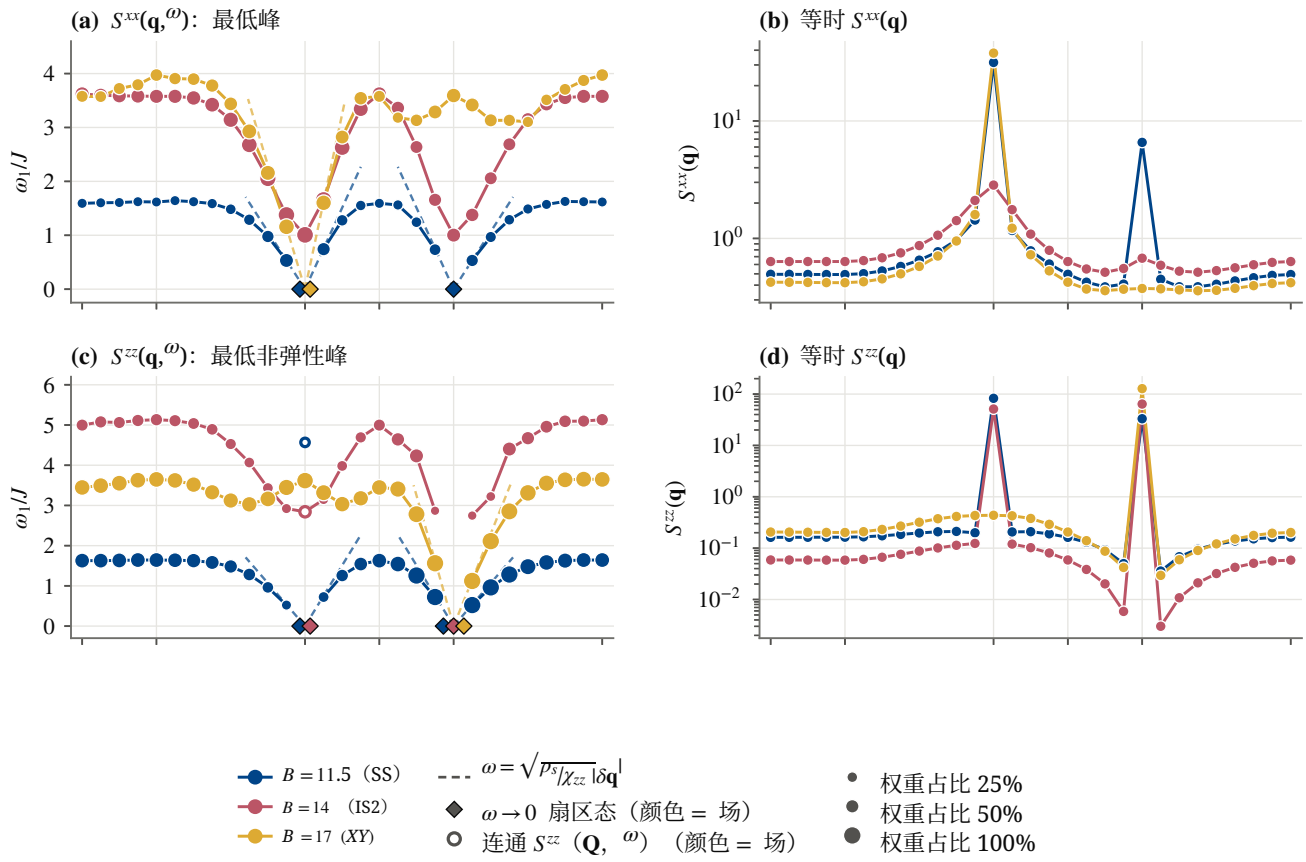


图3. 沿图 2 所示路径的色散关系和静态权重。(a)、(c) ω_1 of $S(\mathrm{q}\ \omega)$ 中最低峰的位置（标记面积随该峰所占总权重的比例线性增大，图例见底部）；仅当相邻动量处都有峰时，才用线段连接。菱形标记（水平偏移）表示有限尺寸对称性扇区态：(a) 中为 (π,π) [SS 、 XY] 以及 (0, 0) [SS] 处的转子塔；(c) 中为所有场下 (0, 0) 处权重为 Nm_z^2 的精确弹性线，以及 (π,π) [SS 、 IS2] 处的伊辛双重态。虚线表示根据测得的静态量（表 I）得到的流体动力学预测 $\omega=\sqrt{\rho_s/\chi_{zz}}\,|\delta\mathrm{q}|$，并非拟合曲线。(c) 中的空心圆表示超固体相和平台上的连通 $S^{zz}(\mathrm{Q}\ \omega)$ 的最低非弹性峰；超固体相中的峰较弱，仅占连通权重的 8%，因此正文改用其边缘 3.9 和质心 8.5 来描述该谱。(b)、(d) 等时结构因子（对数尺度）；(d) 中 (0, 0) 和 (π,π) [SS、IS2] 处的数值，以及 (b) 中 (π,π) [SS、 XY] 和 (0, 0) [SS] 处的数值，均为序参量权重。(b) 和 (d) 中的统计误差小于符号尺寸；(a) 和 (c) 中的峰位未给出误差估计（第三节B）。

b. S^{xx} 在 Q 和 (0,0)处的转子塔。 对于破缺的 $U(1)$ 对称性，对称本征态形成的是转子塔，而非双重态 [51, 52]。具有面内磁矩 $m_\perp$ 的凝聚体是总-S^z扇区在 Nm_z附近构成的波包，其转子能级为

$$E(S^z_{\rm tot})-E_{\rm min}\simeq\frac{(S^z_{\rm tot}-Nm_z)^2}{2\chi_{zz}N},\qquad \Delta_{\rm rot}\simeq\frac{1}{2\chi_{zz}N}, \tag{6}$$

由于转子的转动惯量为 $\chi_{zz}N$；能隙按 $1/N$ 的幂次变化，而非指数级地小。 $S^x_{\mathbf{Q}}$ 使 $S^z_{\rm tot}$ 改变 ±1，并将基态与相邻的两个转子能级相连，总权重为 $\simeq\frac{1}{2}Nm_\perp^2$，

$$G^{xx}(\mathbf{Q},\tau)\simeq\tfrac{1}{2}Nm_\perp^2\,e^{-\Delta_{\rm rot}\tau}+\text{inelastic} \tag{7}$$

位于 $T=0$，即位于 $\omega=\Delta_{\rm rot}$ 处的一条谱线，承载着凝聚体权重。根据测得的 χ_{zz} （表 I）， $\Delta_{\rm rot}=0.014$ 在超固体中为 0.038，在 XY 相位中为 0.038，低于 $\beta=32$处的分辨率；解析延拓将这些权重几乎全部置于最低的几个箱中（$\omega\simeq0.03$），即图2(a)和图2(c)中饱和的柱，以及图3(a)中的菱形。在超固体中，棋盘格将 Q 折叠到 (0, 0)，因此同一个塔在 (0, 0) 处的 S^{xx} 中出现。由于 $\beta\Delta_{\rm rot}=0.46$ 和 1.2，该塔受到热激发，并且 $G^{xx}(\mathrm{Q}\ \tau)$ 仍保持 τ依赖性，因此减去其 $\beta/2$ 值并无意义（该尝试不收敛， $\chi^2/N_\tau\simeq2\times10^5$ 在 $B=17$处），所以对原始关联函数进行解析延拓；第四节G对该塔进行了定量检验。当 $L\to\infty$ [55]时，两个扇区都变为弹性布拉格峰。戈德斯通模是向这些点色散的另一独立分支，下面所说的“无能隙”正是指它。

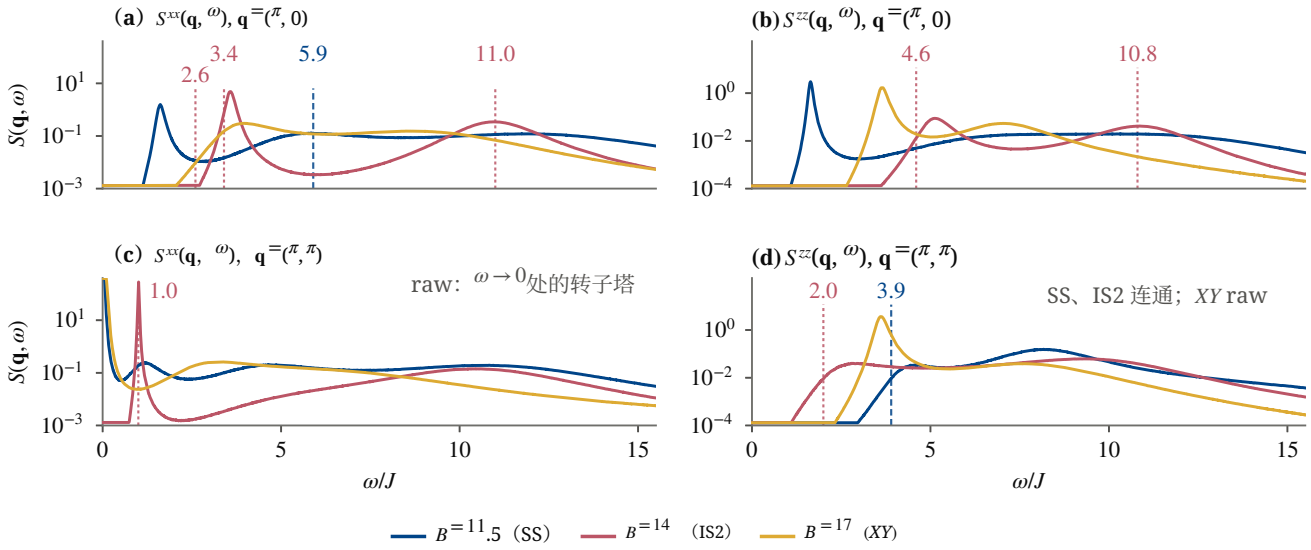


图4。$(\pi,0)$（上）和(π,π)（下）处的谱线截面，横向通道（左）和纵向通道（右），叠加显示三个场（对数纵轴，在 $\Delta\omega=0.005$ 网格上的原始SAC输出，未进行平滑处理，归一化方式与图 2相同；横向列覆盖 10^{-3} 至 4×10^{2}，纵向列覆盖 10^{-4} 至 1.5×10^{2}）。虚线竖线标示正文中讨论的参考能量，并按数值标注；每个场对应一种虚线样式和颜色：(a)中的局域翻转代价 $D-B+4J_z=5.9$ （SS）以及 $D+B-4J_z=2.6$、 $D-B+4J_z=3.4$、 $B-D=11.0$ （IS2）；(b)中的IS2双磁振子阈值 $\varepsilon(0)+\varepsilon(\pi,0)=4.6$ （ε：较低的IS2 S^{xx} 能带，图5）以及最近邻交换代价 $3J_z=10.8$；(c)中的IS2 能隙 $\Delta_{\mathrm{IS2}}=1.0$；(d)中的 $2\Delta_{\mathrm{IS2}}=2.0$ 和超固体连通边缘3.9。在(c)中， S^{xx} 谱为原始谱（SS和XY：转子塔在 $\omega\to0$处达到纵轴范围上限；IS2：有隙磁振子），而在(d)中， S^{zz} 谱是SS和IS2的连通谱， XY的原始谱。

C. 四个位置中的一个戈德斯通模

表 II汇总了第 IVD–IV F节的结果，是核心结论。超固体具有一个戈德斯通模，并且由于 Z_2 棋盘格使布里渊区减半，该模在趋近于$\mathbf{Q}$ 和 (0,0)时，在两个通道中都可见，且具有单一速度$v=1.36\pm0.01$。每个相邻相位只呈现这一模式的一部分： XY 超流体仅在 $\mathbf{Q}$ 处（横向）以及 (0,0) 处（纵向）出现该模，而 IS2 固体中则完全没有。计数方式与第 I节相同：一个破缺生成元，因此有一个 A 型模；尽管磁化强度有限，该模仍呈线性色散。相关二聚体模型的广义自旋波理论在纵向通道中也发现了同样的加倍现象 [29]。

这种倍增是双峰的动力学对应物 $S^{+-}(\mathbf{q})$，论文将其作为超固体的诊断依据；而由于对折叠的探测，这两者几乎等价，因为方格子上的均匀面内分量本身就要求子晶格不等价性。动力学所增加的是定量信息：位于 $\mathbf{Q}$ 和(0,0) 处的分支共享同一个速度，并且该速度和声模权重都与静态 ρ_s 以及 χ_{zz}（第IVG节）相符。这一区分了均匀超固体与分离成固体区域和超流体区域的样品；硬核玻色子从棋盘格 [18, 41]掺杂后会形成后者：在那里，模速度应当是超流体区域的速度，而 ρ_s 和 χ_{zz} 则是样品平均值，因此二者未必一致；而在这里，它们在两个超流体相中都一致到 1% 以内。无论如何，在 $B=11.5$ 处都不应预期出现相分离，因为该点位于两个连续相变之间；论文将其置于一阶 IS2–XY 边界处。

D. 超固体， $B=11.5$

a. 横向通道。一个尖锐而强烈的低能分支贯穿整个布里渊区 [图2(a)和图3(a)]。沿着棋盘格的布里渊区边界 $|q_x|+|q_y|=\pi$ （路径的第一段）并延伸至（π， $3\pi/8$），它在 $\omega_1\simeq1.6$ 处保持平坦，并承载局域权重的21–24%。在接近Q和（0，0）时，它线性色散至零；随着峰变得尖锐，其权重占比在Q附近升至58%，且两个“V”形的斜率为$v=1.35$–1.37，位于 $\delta\mathbf{q}\to0$ （第四节G；第一步割线斜率沿坐标轴方向为1.32，沿对角线方向为1.29–1.31）。Q和（0，0）处的谱柱本身承载转子塔（第四节B），其中 S^{xx}（0，0）$=6.6$，是相邻数值的15倍。在该分支之上，从 $\omega\simeq4.5$ 到14的宽连续谱在远离Q处占据 ~78%的权重，其中包含5.7–6.5和10–13处的成分。前者对应于将耗尽子晶格的一个 $D-B+4J_z=5.9$ 位点、其周围环绕着$S^z=+1$ 个邻居，激发至图4(a)],中标记的 $S^z=+1$ [所需的代价；而翻转 $-1\to0$ 和 $0\to-1$ 只需付出 ∓0.1的代价：这些

软翻转形成凝聚体，其跃迁能带（第IIB节）而非0.1 的代价决定了戈德斯通分支的尺度；其平顶在1.6处测得。暗窗口 $2 \lesssim \omega \lesssim 4.5$ 的权重很小，但并非能隙：双磁振子态——一个磁振子与位于**Q** 或（0，0）处的软磁振子配对——一直延伸到该分支本身，但携带的横向权重很小。

b. 纵向通道。在布里渊区的大部分区域 S^{zz}都存在一个单一的尖锐模 [图 2(d)和图 3(c)]。沿布里渊区边界，该模位于 $\omega_1 = 1.63$–1.64处，并占据67–68%的权重（其余权重位于 $\omega \simeq 8$–10处的微弱连续谱中），能量正好对应横向分支的平顶：在同时具有 $m_z \neq 0$和倾斜凝聚态的状态中，横向磁振子含有纵向分量（第四节 F），因此同一个准粒子也能在S^{zz}中观测到。接近(0, 0)时，该模随$v = 1.36$–1.37线性软化（第一步割线为1.33），并且是唯一可分辨的特征（占全部权重的100%）：这就是自旋超流体的声（相位）模，通过与相位共轭的密度观测到；而 G^{zz} 的大-τ 衰减在没有进行任何解析延拓的情况下证实了这一点（第四节 G）。接近Q时，同一个软分支再次出现，此时占据21–45%的权重；在Q附近其权重最小（21%），其余权重转移到图 2(d)中以Q为中心、位于 $\omega \simeq 8$–9处的明亮瓣状结构中。在Q处，响应恰好是伊辛双重态加上一个连通剩余部分，没有可分辨的低能权重：其下边缘为3.9（在一组独立的1152-bin数据中为4.2；附录 B），质心为8.5 [图4(d)]，，且没有可分辨的子结构，因为连通信号只有延伸至 $\tau \simeq 2$才超过噪声。图 2(d)中Q附近 $\omega \simeq 4$ 以下的暗色穹顶就是这个能隙：棋盘格振幅的涨落需要付出能量，而 Z_2 固体没有戈德斯通模。

尽管超固体打破的对称性与 IS2 相同，但其仍然无能隙，这是可压缩性的结果。IS2 的能隙并非来自序，而是源于缺少超流组分：IS2 有粒子-空穴能隙，因此在任何位置改变密度都要付出能量。序本身只会使**Q**处的振幅涨落产生能隙，而超固体也继承了这一点（IS2 中边缘为 2.0，超固体中为 3.9）。然而，超固体是可压缩的，而且小**q**处的密度与凝聚态相位共轭，因此流体动力学要求存在一个声模 $\omega = v|\mathbf{q}|$，其权重为 $\propto \chi_{zz} v|\mathbf{q}|$。棋盘格结构会将该声模折叠到**q** $\to$**Q**；如果小**q**处的谱有能隙且权重消失，就无法维持可压缩性$\chi_{zz} = \lim_{\mathbf{q}\to 0}$

$(2/\pi)\int_0^\infty S^{zz}(\mathbf{q}\ \omega)\ \omega^{-1} d\omega$ 有限。在**Q** 处，超固体看起来恰好像IS2；趋近于(0，0)时，它像 XY 相位；而趋近于**Q** 时，则显示出声模的折叠副本，这是另外两个邻域都没有的。

c. 子晶格结构。纵向权重较小，为 $[S^{zz}(\mathbf{q}) \simeq 0.04$–$0.21$；相对于 $S^{xx} \simeq 0.4$–$1.4]$，这是因为**Q** 布拉格峰占布里渊区总和的 53%$\langle (S_i^z)^2\rangle = 0.607$。测得的两个序参量确定了每个子晶格的磁矩。由 $m_z = 0.3597$和 $m_{\mathrm{stag}} = \sqrt{S^{zz}(\mathbf{Q})/N} = 0.5686$可知，$\langle S^z\rangle = m_z \pm m_{\mathrm{stag}}$在子晶格 A 上为 $+0.928$，在子晶格 B上为 -0.209，其中 A 和 B，其标记方式与第 IV.E 节的平台态 $|{+}1\rangle_A|0\rangle_B$ 相同。由于对于占据数 p_m，$\langle S^z\rangle = p_{+1} - p_{-1}$和 $\langle (S^z)^2\rangle = p_{+1} + p_{-1}$，$\langle (S^z)^2\rangle$ 在 A及布里渊区总和上介于 0.928 和 1 之间；两个子晶格的平均值（总计 $2 \times 0.607 = 1.214$）在 B上为 0.21–0.29：B 位点中有 71–79% 处于 $|0\rangle$，21–25% 处于 $|{-}1\rangle$。对于交错面内图样，$\langle S^+\rangle = m_A e^{i\phi}$ 在 A上而 $-m_B e^{i\phi}$ 在 B上，$S^{xx}(\mathbf{Q})/N = \frac{1}{2}[(m_A + m_B)/2]^2$ 和$S^{xx}(0, 0)/N = \frac{1}{2}[(m_A - m_B)/2]^2$，因此，(0, 0) 处折叠后的凝聚体测量的是两个磁矩之差。测得的 0.123 和 0.026 对应面内磁矩 0.72 和 0.27；而近乎饱和的 A子晶格在面内最多只能容纳 $\sqrt{1 - 0.928^2} = 0.37$，因此~~$m_B = 0.72$~~ 和 $m_A = 0.27$。因此，凝聚体并非稀薄缺陷气体：A基本已饱和且不活跃，而强掺杂的 B 子晶格承载着凝聚体，这正是第 IV.E 节 SS–IS2 相变背后的图景。

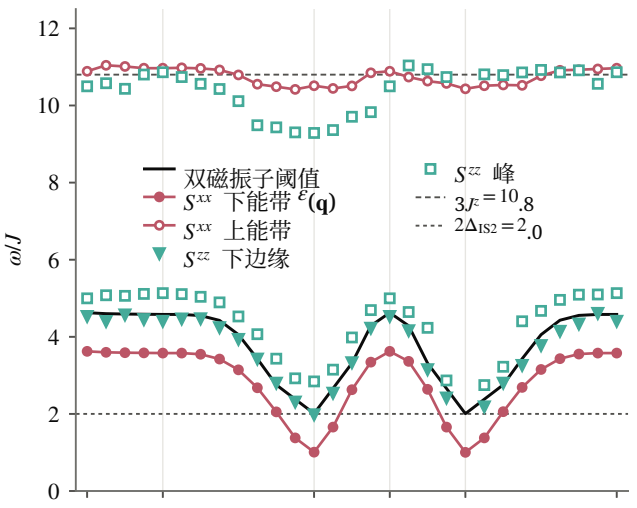


图5. IS2 平台上的双磁振子阈值，$B = 14$。实心玫瑰色圆点表示较低的 S^{xx} 磁振子带（最低峰）；空心玫瑰色圆点表示其上带（$\omega = 8$上方最高的峰）；黑线表示双磁振子阈值 $\min_{\mathbf{k}}[\varepsilon(\mathrm{k}) + \varepsilon(\mathbf{q} - \mathrm{k})]$，由整个布里渊区的低能带计算得出（81 个动量点经反射扩展）；青绿色三角形表示 $S^{zz}(\mathrm{q}\ \omega)$的下边缘；空心青绿色方块表示其峰。在 (π, π) 处，S^{zz} 点来自连通谱。测得的边缘平均比计算得到的阈值低 0.12（第 IV.E 节）。水平虚线：$2\Delta_{\mathrm{IS2}} = 2.0$ 和最近邻交换代价 $3J_z = 10.8$。

E. IS2 平台，$B = 14$

a. 横向通道。 谱呈现有能隙的伊辛固体 [图 2(b) 和 4(c)]，处处都没有无能隙模，而且不可能存在这样的模：该平台

只打破离散的 Z_2 对称性， $U(1)$ 对称性则保持完整 $|S^{xx}(\mathrm{Q})/N = 0.011$；在论文中，随着 N 外推至零； $\rho_s \simeq 0$]。相干磁振子能带在 Q 和 (0, 0) 处均达到最低点；由于棋盘格使原胞加倍，这两个位置等价。能带在 $(\pi, 0)$ 和 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处升至 3.58–3.62，在 Q 处及其邻近位置承载 87–92% 的权重，在其他位置则承载 48–84% 的权重。该能带源于平台态中一个 B位点的两次自旋翻转 $|{+1}\rangle_A|0\rangle_B$：将其升高的代价为 $D - B + 4J_z = 3.4$，将其降低的代价则为 $D + B - 4J_z = 2.6$[图4(a)]，；跃迁使其展宽为一条能带。由于S^{xx} 将 S^+ 和 S^- 两种类型叠加，而它们的裸能级仅相差 0.8，能带宽度却达 2.6，因此观测到的是它们的下包络。降低一个 A位点的代价为$B - D = 11.0$；由于其邻居是 $S^z = 0$，它几乎不发生色散：这就是第二条近乎平坦的能带，位于 $\omega = 10.4$–11.0，承载该列 8–52% 的权重。

能隙衡量的是到较低平台边缘的距离。平台基态与磁场无关，因为它是在固定 $S^z_{\mathrm{tot}} = N/2$ 下的本征态，因此，具有 $\Delta S^z = -1$ 的激发在恰好 $= B - B_c$ 处具有 $\Delta_{\mathrm{IS2}}(B)$，其中 B_c 是其凝聚时的磁场。因此，在 $B = 14$ 处测得的 $\Delta_{\mathrm{IS2}} = 1.00$ 仅凭一个磁场值便可得到 $B_c = 13.0$；在峰位稳定度为 0.05 的范围内（附录 B），这一结果与通过 $L = 16$ 磁场扫描得到的 $B_c = 13.01 \pm 0.01$ 一致（附录 A）。这里假设较低能的味道在整个平台范围内始终能量最低；根据局域代价判断，它是空穴（2.6，相比之下为 3.4）。因此，超固体戈德斯通模源自这条空穴能带；在连续的 SS–IS2 相变处，该能带在 Q 点软化至零。在高磁场一侧，平台在 $B^* = 14.81$ 处以一级相变结束（附录 A），因此超固体戈德斯通模并未与平台能带连续连通。

b. 纵向通道。不存在清晰的模；在远离 Q 的区域，图 2(e) 的共同标度下，其强度比超固体 [的等时权重为 $S^{zz}(\mathrm{q}) = 0.003$–0.12]低 10 倍。该谱是一个宽连续谱，其下边缘在 Q 处为 2.0[连通谱，图4(d)]，并沿布里渊区边界升至 4.4–4.6 [图4(b)]。对有能隙伊辛态进行纵向探测会产生横向磁振子对，而图5对此进行了定量说明：双磁振子阈值 $\min_{\mathbf{k}}[\varepsilon(\mathrm{k}) + \varepsilon(\mathrm{q} - \mathrm{k})]$, 由从全部 81 个动量点提取的下$S^{xx}$ 能带以及粒子-空穴起始的一个下界（见下文）计算得到，其极小值$2\Delta_{\mathrm{IS2}} = 2.0$ 位于 Q 和 (0, 0)，并沿布里渊区边界保持在 4.6 附近 $[\varepsilon(0) + \varepsilon(\pi, 0) = 4.6$ 在 $(\pi, 0)]$, ；在整个路径上，测得的边缘都跟随其动量依赖关系。位于 $\omega \simeq 9$–11 的上瓣与最简单的 S^z_{tot}-守恒过程相吻合，即最近邻交换 $|{+1}\rangle_A|0\rangle_B \to |0\rangle_A|{+1}\rangle_B$，该过程使被移动的 $+1$粒子拥有三个 $+1$ 邻居，代价为 $3J_z = 10.8$。它位于自由双能带连续谱（≥ 11.4）之下，因此在高能处，探测激发的是束缚对，而非两个自由磁振子。

测得的边缘平均比阈值略低，在这条路径的 26 个不同动量上低了 0.12。除 (0，0) 外（极大值为 0.29；仅有四个点高于该值，且最多高出 0.04）。有限频率分辨率会使尖锐起始向两个方向展宽，而 0.5%- 分位数边缘会捕捉向下展宽的部分；如果真实起始就是计算得到的阈值，那么这里的偏移量便衡量了边缘定位的分辨率。然而，由于 $S^z_{\mathbf{q}}$ 守恒 S^z_{tot}，这一对由一个粒子和一个空穴组成，因此由下包络计算出的阈值只是实际起始点的下限，只有当两种味共享同一个极小值时才能达到该下限。裸代价 2.6 和 3.4 表明它们可能并非如此；在这种情况下，**Q** 处的真实起始点更接近连通谱中 2.8 的峰值，而测得的边缘则是连续谱的低权重尾部。无论哪种情况，这一边缘都不能作为连续谱以下存在态的证据。

F. 倾斜 XY 反铁磁体， $B = 17$

a. 横向通道。线性色散的戈德斯通模仅从 Q 点 [图 2(c)]，发出 $v = 2.90$（第四节G；沿轴向和对角线方向的首步割线斜率分别为 2.85 和 2.82），超过超固体值的两倍；Q 列是 XY 凝聚体的转子塔。(0, 0) 处完全开隙，$\omega_1 = 3.59$ 权重为 65%，而 $S^{xx}(0, 0) = 0.375$ 相较其邻近位置没有增强：由于不存在固体序，因此没有什么可以将 Q 折叠到 (0, 0)，超固体的双峰结构也消失了，正如论文中所示。在远离 Q 和 (0, 0) 的位置，位于 $\omega_1 \simeq 3.1$–4.0 的最低能带远不如平台处相干，权重仅为 32–49%，其余部分则形成位于 6–10 的宽连续谱，这与非共线倾斜序所允许的单磁振子态与双磁振子态耦合相一致 [56]。

b. 纵向通道。一个尖锐的单模（沿 $(\pi, 0)$–(π, π) 方向的权重占 73–90%，在小 q 时为 100%）位于 $\omega_1 \simeq 3.0$–3.65 [图 2(f)]，并随 $v = 2.91$ 线性软化至 (0, 0)（首步割线斜率为 2.86 和 2.81）；这就是 Q 点处横向戈德斯通模的速度。这是 $U(1)$ 自旋超流的标准结果： $S^z_{\mathbf{q}}$ 与凝聚态相位共轭，因此相位模在 $\mathrm{q} \to 0$ 处以小权重出现在 S^{zz} 中， $S^{zz}(\mathrm{q}) \propto q$，表现为声模。在倾斜态 [57] 的线性自旋波理论中，实验室坐标系下一个从 z倾斜 θ 的自旋，其 S^z_i 包含 $-\sin\theta\,(-1)^{x_i+y_i}$ 倍的局域横向分量，因此小 q 处的 $S^z_{\mathbf{q}}$ 会在 Q+q 处产生戈德斯通态。同样的分解使另一条有能隙的单磁振子分支出现在 Q 附近的 S^{zz} 中，以及 (0, 0) 附近的 S^{xx} 中；这就是两个有能隙的数值相同（3.62 和 3.59，在峰位置 0.05 的稳定性范围内）的原因：两个通道呈现相同的两条分支，只是在 (0, 0) 和 Q 之间互换。

G. 三个无参数检查

这些谱通过三种比较与原始蒙特卡罗观测量建立联系，这些比较仅使用表 ρ_s 和 χ_{zz} 中的 I

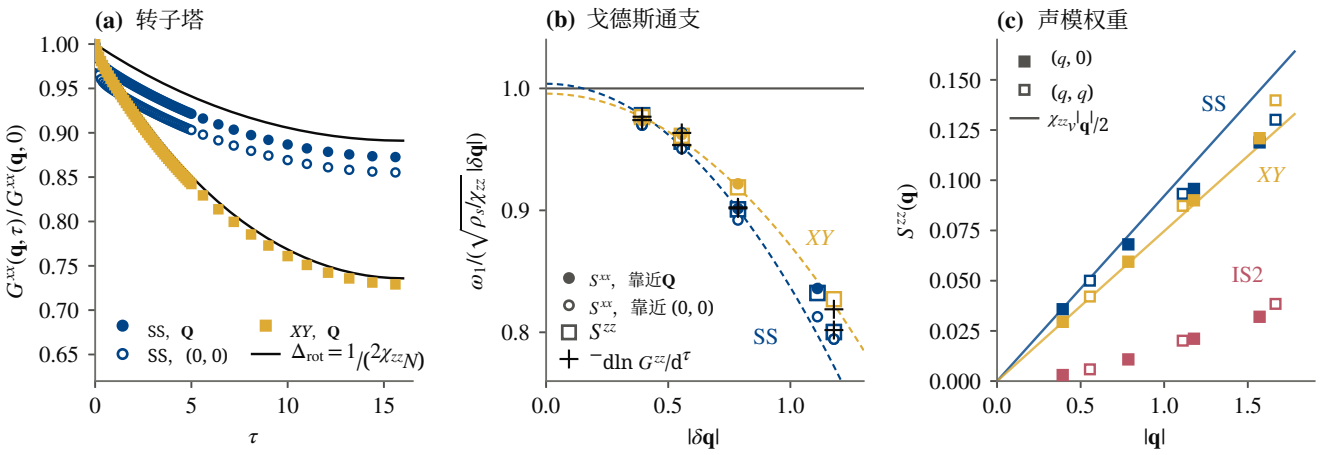


图 6. 无参数流体力学检验，均使用表 I 中测得的 ρ_s 和 χ_{zz}。（a）Q 点处的原始横向关联函数，以及对于超固体在 (0, 0)] 处的原始横向关联函数，归一化为 $\tau = 0$，并与式（8）的热刚性转子塔（实黑线）进行比较；该转子塔的唯一输入是表 I 中的能隙 $\Delta_{\rm rot} = 1/(2\chi_{zz}N)$ 和 m_z，因此同一条曲线适用于 Q 点和 (0, 0)；常数偏移即为非弹性权重。（b）每个无能隙分支的最低峰能量除以流体力学值 $\sqrt{\rho_s/\chi_{zz}}\,|\delta\mathbf{q}|$，并绘制为其趋近点的距离 $|\delta\mathbf{q}|$ 的函数（小圆点 S^{xx} 表示减去转子偏移 $\Delta_{\rm rot}$后的结果，在趋近 Q 点时为实心，在趋近 (0, 0) 时为空心；大空心方块 S^{zz}表示趋近两个点时的结果，此时两者重合；颜色按（a）所示随场变化；采用轴向和对角步长）。加号表示在第四节G所列动量处、无需解析延拓的、大-τ衰减率 $-d\ln G^{zz}/d\tau$，并以相同方式除以相应量。虚线：穿过每个相的前两个轴向 S^{zz} 点的 $c - a|\delta\mathbf{q}|^2$，其中 $c = 1.004$（SS）和 0.996（XY）。（c）沿 $(q, 0)$ 和 (q, q) 趋近 (0, 0) 时的等时 $S^{zz}(\mathbf{q})$，与声模权重 $\chi_{zz}v|\mathbf{q}|/2$进行比较，这是对每个相最小动量处的无参数检验；IS2 点展示了不可压缩态的结果。（a）和（c）中的量子蒙特卡罗数据的统计误差小于符号大小。

（图 6），并且无需解析延拓即可确认软纵向分支。

a. 速度。超固体的四条无能隙分支（两个通道、两个特殊点）分别沿一个轴向和对角线取样，而 XY 相位具有两条分支。原始首步割线斜率在超固体中为 1.30 至 1.36，在 XY 相位中为 2.81 至 2.95，这一展宽由两种系统效应造成。第一种是第 IV B 节的转子塔：在超固体中，横向峰比纵向峰高 0.010–0.020，而在 XY相位中高 0.035–0.040。 $S^x_{\mathbf{q}}$ 变化$S^z_{\rm tot}$ 为 ±1，因此一次横向激发的代价等于戈德斯通能量加上转子塔的一个能级间距 $[\varepsilon^{\pm}_M$，其见式（8）下方]，，两个符号的平均值在每个扇区 M中为 $\Delta_{\rm rot} = 0.0144$(SS)和 0.0383 ($XY$)，而 $S^z_{\mathbf{q}}$保持在同一扇区内。将 $\Delta_{\rm rot}$ 从 S^{xx}峰中扣除后，超固体中的轴向割线斜率为 1.32 (S^{xx}) 和 1.33 (S^{zz})，而 XY 相位中为 2.85 和 2.86；对角割线斜率则分别为 1.29–1.31 和 2.81–2.82。这样，两个通道分别达到 1% 和 0.3% 的一致性，这正是谱的 0.005 输出网格精度，而剩余差异来自两个方向之间的不同。第二种效应是曲率。割线是分支 $\delta\mathbf{q} \to 0$ 斜率的下界，因为分支向其布里渊区边界最大值弯曲，而图 6(b) 展示了这种弯曲：对于两个通道和两个相位，峰能量与$\sqrt{\rho_s/\chi_{zz}}\,|\delta\mathbf{q}|$ 之比几乎沿同一条曲线，从第一个轴向步的 0.97–0.98 降至第二步的 0.89–0.92，再降至第三步的 0.79–0.83。对于无能隙分支，首项修正为三次的， $\omega = v|\delta\mathbf{q}|(1 - a|\delta\mathbf{q}|^2)$，而用某个分支最初两个动量拟合这种形式，可得超固体的全部八个分支（轴向和对角向均包括在内）的数值为 1.37，以及相 XY 的两个轴向分支的数值 2.90 和 2.91 [图6(b)中的虚线]。我们给出 $v = 1.36 \pm 0.01$ 和 2.91 ± 0.01，其中不确定性反映了不同分支间的离散程度，以及输出网格所允许的精度（ v中为 0.008）。加入第三个轴向动量和一个五次项后， v 的变化最多为 0.004；下文给出的无延拓衰减率以同样方法得到 1.36 和 2.93。对于 $U(1)$超流体，相位ϕ 与守恒密度互为共轭，能量密度为$\frac{1}{2}\rho_s(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\chi_{zz}^{-1}(\delta S^z)^2$, 因此流体动力学确定了$v^2 = \rho_s/\chi_{zz}$ [32]:超固体中为 $\sqrt{\rho_s/\chi_{zz}} = 1.36$ ，相 XY 中为 2.93。测量速度与这些数值相差不到 1%（各分支平均值分别为 1.359 对 1.360，以及 2.908 对 2.927）；对于 Q 处的横向分支和 (0, 0) 处的纵向分支，这一结论也分别成立，因此它们是同一个流体动力学模；首步割线的数值则低 2–3%（轴向）和 4–5%（对角向）。外推假定存在无能隙分支。用最初两个轴向动量拟合的直线，其斜率比$\sqrt{\rho_s/\chi_{zz}}$ 低 13–19%，正截距为 0.07 至 0.13；因此，若将截距解读为能隙，就会与流体动力学速度相矛盾，不过仅凭单一尺寸下的两三个动量，本身无法排除一个小能隙。两个相之间 2.2 的因子可分解为刚度带来的 $\sqrt{\rho_s^{XY}/\rho_s^{\rm SS}} = 1.32$

以及可压缩性带来的 $\sqrt{\chi_{zz}^{\rm SS}/\chi_{zz}^{XY}}=1.63$，因此在$B=11.5$、接近简并点 $zJ_z-D=11.4$时，超固体较软，主要是因为它的可压缩性更高。这并非该相本身的固有性质：随着接近平台，dm_z/dB 从 $B=11.0$ 处的 0.34 降至 12.5 处的 0.08（图 7(a)中的 $L=12$ 扫描），而 ρ_s 保持在 0.15–0.25；在 $B=12$附近，刚度和可压缩性带来的因子变得相等（均为 1.41）。

b. 声模权重与无需解析延拓的速率。如果单个位于 $\omega=v|\mathbf{q}|$ 的声极点耗尽了 $T=0$ 处的权重，则等时权重就是与相位共轭的密度的基态涨落，$S^{zz}(\mathbf{q})=\chi_{zz}v|\mathbf{q}|/2$：相位的每个傅里叶模都是一个质量为 χ_{zz}、频率为 $v|\mathbf{q}|$ 的振子，而密度就是其动量。取 $\chi_{zz}=0.1355$ 和 $v=\sqrt{\rho_s/\chi_{zz}}=1.36$ 时，该理论在超固体中 $\overline{\mathbf{q}}=$ 为 $(\frac{\pi}{8},0)$、$(\frac{\pi}{4},0)$、$(\frac{3\pi}{8},0)$ 处预测的数值分别为 0.036、0.072、0.109，而测得值为 0.036、0.068、0.096；取 $\chi_{zz}=0.0510$、$v=2.93$ 时，它在 XY 相中预测的数值为 0.029、0.059、0.088，而测得值为 0.030、0.059、 0.090 [图 6(c)]。只有最小动量处是无参数检验，因为再往后权重涉及 $\chi_{zz}(\mathbf{q})$，而非其 $\mathbf{q}\to 0$ 极限；在该处超固体结果符合到 1%，且 XY 值在三个动量处均相符。在平台上，$S^{zz}(\mathbf{q})$ 在 $(\frac{\pi}{8},0)$], 处小了一个数量级 [0.003，正如不可压缩态所要求的那样。软纵向分支也可以无需解析延拓地确定。对于衰减指数函数之和，局部对数斜率 $-d\ln G^{zz}/d\tau$ 会单调下降，趋近于承载权重的最低激发能，因此其大-τ 值是该能量的上界。在 τ 范围的最后 40% 内进行拟合，其中 $G^{zz}>5\sigma$（包含镜像项 $e^{-(\beta-\tau)\omega}$ 的拟合给出的数值在三位有效数字内相同），在超固体中，$(\frac{\pi}{8},0)$、$(\frac{\pi}{4},0)$ 和 $(\frac{3\pi}{8},0)$ 处的数值分别为 0.52、0.96 和 1.29，在 $(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8})$ 处为 0.72；前两个数结合三次形式给出 $v=1.36$（第一步割线为 1.32），而在接近 Q [加号处，图 6(b)] 中再次得到 0.52 和 0.72。与 SAC 峰位相比，这些上界在两位有效数字内一致；在 XY 声学分支上，在相同的三个轴向动量处，[1.12, 2.07 和 2.82，以及在 $(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8})$ 处的 1.57]，与之相差不超过 0.04，因此软分支存在于数据中，而不是解析延拓伪影。在平台上，由于不存在尖锐模且上界位于连续谱内部，两者最大相差 0.41。上界本身不能证明 IS2 能隙，但较大的数值（没有低于 2.59 的）、随机解析延拓谱边，以及比超固体小一个数量级的等时权重，共同表明不存在软分支的空间。

c. 转子塔。该转子塔在$\beta=32$处并未被冻结，这一点从原始数据中清晰可见：$G^{xx}(\mathbf{Q},\tau)/G^{xx}(\mathbf{Q},0)$在最大的 τ、$15.6\simeq\beta/2$处降至0.873（SS）和0.729（XY），而不是保持不变。转子模型无需任何自由参数即可预测这种衰减。对扇区 $M=S^z_{\rm tot}$进行热平均，使用 $E(M)=\Delta_{\rm rot}(M-Nm_z)^2$ 和玻尔兹曼权重$p_M=e^{-\beta E(M)}$，并令 $S^{\pm}$ 将 $M\to M\pm1$ 与一个与 M无关的矩阵元相连接，

$$\frac{G^{xx}_{\rm rot}(\tau)}{G^{xx}_{\rm rot}(0)}=\frac{\sum_M p_M\left[e^{-\tau\varepsilon^+_M}+e^{-\tau\varepsilon^-_M}\right]}{2\sum_M p_M},\qquad(8)$$

与 $\varepsilon^{\pm}_M=E(M\pm1)-E(M)$ 一起，在此处给出 0.891（SS）和 0.736（XY），并且在整个窗口内都紧随测量曲线：在超固性相中，Q 处的偏差不超过 0.02，(0, 0) 处不超过 0.04，而在 XY 相中不超过 0.01 [图6(a)]。这一微小亏损在 $\tau\lesssim0.5$ 时就已确定，此后与 τ 无关：真正非弹性谱中所占的是 $S^{xx}(\mathbf{q})$ 的 2%（Q，SS）、4% [(0, 0)，SS]以及 1%（XY）。在超固性相中，这一部分在 Q 处的 $\omega=1.19$ 附近有一个弱极大值 [图4(c)]，在 (0, 0) 处则位于 0.90；二者各自占 $S^{xx}(\mathbf{q})$ 的 0.3%，对此我们不作任何解释。同一模型还解释了第二个数值。由于该塔受到热激发，其部分权重位于 $\omega<0$，根据式 (4)，正频率权重恰好因这一部分而低于 $\pi S^{xx}(\mathbf{q})$：用 $m_z=0.3597$ 和 0.7063 计算转子求和（该分数取决于 Nm_z 对 1 取模，因此需要四位数字），预测正频率分数分别为 0.691（SS）和 0.799（XY）；相比之下，超固性相中 Q 处为 0.697、(0, 0) 处为 0.707，而XY 相中为 0.786，全部误差都在 0.02 以内；在其他所有动量处，该比值均为 1.0000。在超固性相中，归一化的$G^{xx}(\mathbf{q},\tau)$在 $\mathbf{q}=(0,0)$ 处具有与 Q 处相同的 τ依赖关系（局部对数斜率精确到三位相同），这正是折叠所要求的结果。超固性相在同一个 Q 处同时具有 S^{zz} 中的双重态和 S^{xx} 中的塔，这是超固性的有限尺寸表述；而决定转子能隙的 χ_{zz}，正是同时确定戈德斯通速度和声模权重的同一参数。

V. 总结与讨论

我们计算了论文图1所示模型中方格晶格 $S=1$ 反铁磁体的动态结构因子，分别选取了超固体、IS2 平台和倾斜 XY 相中的一个场值。超固体具有一个戈德斯通模，棋盘格将其折叠到 **Q** 和 (0，0)；它在两个通道中均出现，具有单一速度 $v=1.36\pm0.01$，与相同计算所得的 $\sqrt{\rho_s/\chi_{zz}}$在1%以内一致。XY相仅在 S^{xx} 中的 **Q** 处以及 S^{zz}中的 (0, 0) 处显示该模，而平台则显示出一条有能隙磁振子带和一个双磁振子纵向连续谱。在这些特殊波矢处，有限晶格在 S^{xx} 中显示出一个 $1/N$ 转子塔，并在 S^{zz}中显示出指数分裂的伊辛双重态；超固体在**Q**处同时承载二者。完全开隙的 S^{zz} 是不可压缩平台的特征，而不是 Z_2 有序的特征。

论文中的双峰横向结构因子表明，凝聚体受到棋盘格调制。动力学呈现出相同的折叠，并额外给出静态峰不具备的两项约束：在两个通道中，**Q** 和 (0,0) 处的分支具有相同的速度，而该速度由 ρ_s 和 χ_{zz}确定。结合

无延拓衰减率，这些比较是我们能够提出的最有力论据，证明软分支是真实的，而非解析延拓造成的假象。

单个戈德斯通模正是具有离散密度波的晶格自旋超固体与量子气体中的连续体超固体的区别所在；在后者中，平移对称性破缺会带来第二个无能隙分支 [6–9]。在方格子上，Z_2 序与$U(1)$生成元对易，只贡献一个有能隙的振幅扇区，在此表现为连通$S^{zz}(\mathrm{Q}\ \omega)$的 3.9 边缘。实验研究的三角晶格钴酸盐在零场超固体相中呈现宽广的连续谱 [21, 22], ，这被归因于受挫晶格上的磁振子衰变 [21, 22] ，也可能与接近狄拉克自旋液体有关 [22]。采用随机解析延拓的量子蒙特卡罗能够解析这类连续谱：它们出现在一维系统中 [46, 47]（此处使用了针对边缘或准粒子极点调整的参数化形式），也出现在二维退禁闭量子临界点处 [58], 。因此，无受挫 $S = 1$ 模型中低能处缺少这类连续谱，反映的是模型本身的性质，而非方法所致。尽管如此，在横向通道中，超固体仍是三个相里相干性最弱的一个：在 4.5–14 的范围内，约 78% 的权重位于连续谱中，而其平顶上的分支仅占 21–24%；相比之下，远离 Q 和 (0,0) 处的 XY 相中，这一比例为 32–49%，平台相则沿整个路径达到 48–92%。

对于实验而言，这一结果指明了寻找的方向。在由方程（1）描述的材料中，在超固体磁场区间内进行非弹性中子散射，应能发现一个线性色散模：它分别从反铁磁波矢和核布里渊区中心出现，并且在这两个通道中具有相同的速度；测得的微分磁化率 $\chi_{zz} = dm_z/dB$ 随后通过 $\rho_s = \chi_{zz} v^2$将该速度转换为自旋刚度。磁 $\delta_{ab} - \hat{q}_a \hat{q}_b$性截面带有因子 S^{zz}，因此沿场方向的散射矢量无法观测到它；必须在与场垂直或近乎垂直的方向寻找纵向模，而将两个通道分别对应于自旋翻转和非自旋翻转散射，仅在给定中子极化的情况下成立。在平台上，同样的实验应在纵向通道中发现一个有能隙能带和一个双磁振子连续谱；在倾斜相中，则只能在反铁磁波矢处发现单一的戈德斯通锥。

致谢

本研究获新加坡教育部（MOE）学术研究基金三级资助（编号：MOE-MOET32023-0003）和二级资助（编号：MOE- T2EP50223-0019）支持。我们谨此感谢新加坡南洋理工大学高性能计算中心（HPCC）提供计算资源、设施和服务，这些都对本研究作出了重要贡献。我们还感谢使用国家超级计算中心（NSCC）的计算资源，新加坡。

数据可用性

由于在本研究项目的条件下，从技术上不可行和/或准备、存储及托管数据的成本过高，支持本文研究结果的数据在发表时无法公开获取。经合理请求，可向作者获取这些数据。

人工智能使用披露

本研究由作者构思并指导；模型和参数的选择、量子蒙特卡罗和随机解析延拓计算，以及对结果的物理解释，均由作者独立完成。在作者的指导下，Claude Code（Anthropic）及其 Claude Opus 5、Claude Opus 5.5、Claude Fable 5.1 和 Claude Fable 5.2 模型被用作辅助工具：根据作者的研究笔记协助起草和编辑文本、编写绘制图表的脚本，以及对所报告的量进行一致性检查和辅助分析，例如第IVG节中的无参数比较。作者审阅了每一步，将每个数字、陈述和图表与模拟数据进行了核对，并对本文内容承担全部责任。

附录 A：验证与磁场扫描

三项检查验证了我们的模拟及其能量单位。第一项是绝对检验：本文使用的估计量已在该参数点通过稠密精确对角化得到验证，在虚时间和距离上逐项对应，且不含拟合常数（2×2个团簇位于 $\beta = 8$和32，以及一个 4×2 团簇位于 $\beta = 8$；在328个条目上，均方根归一化偏差为 $\simeq 1$），因此我们的能量单位就是按原式写出的方程（1）的 J 。第二项是相图，即图7(a)和7(b)。论文中报告的完整磁场驱动相序列随着场强增加得以重现：伊辛固体一直持续到 $B = 10.0$；随后是一个超固体窗口，在该窗口内 m_z、 ρ_s 和$S^{zz}(\mathrm{Q})/N$ 同时为有限值；接着是在 $B = 13.5$、14.0和14.5处出现的精确 $m_z = 1/2$平台；从 $B = 15.0$起则进入倾斜的 XY态。扫描将超固体的下边缘限定在10.0和10.5之间；该转变为二级这一点取自论文，而0.5的步长过于粗略，无法显示这一点（m_z 从 $B = 10.5$ 处的0.02升至11.0处的0.27）。相边界与论文图1中的相边界一致：其场轴上的数值为5.2、6.5和7.3，在方程（1）的单位中则为其两倍（第二节A），误差不超过扫描步长 $\Delta B = 0.5$ 。第三项是自旋刚度：换算为相同单位后，从论文图1(d)中在相同磁化强度处读出的 ρ_s 为

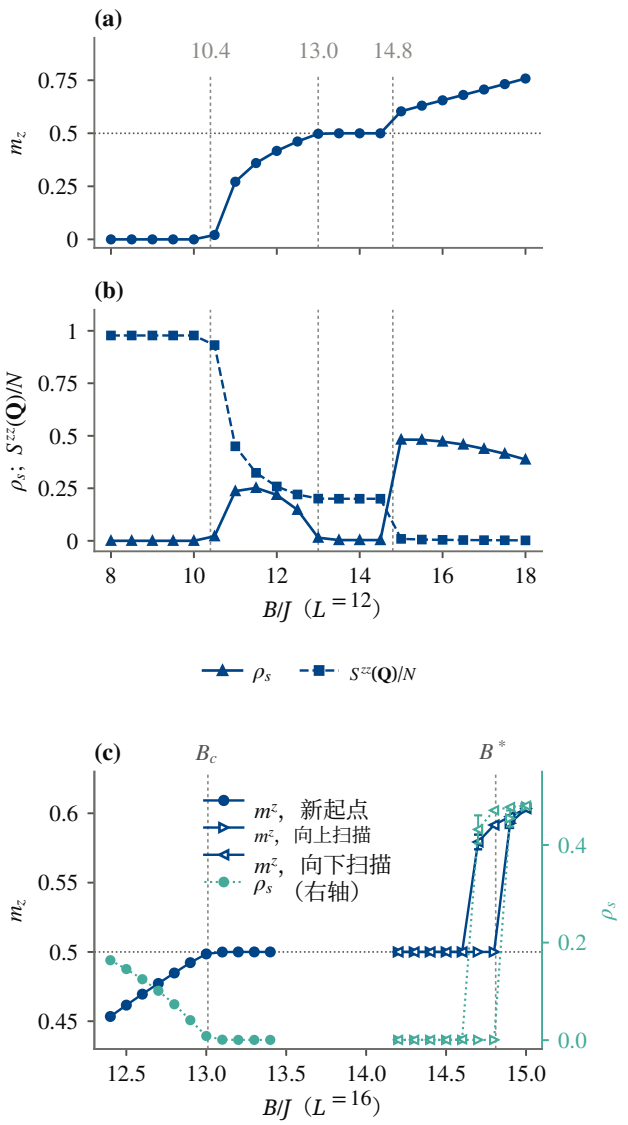


图7。用于确定相边界和平台边界的静态场扫描。(a)、(b) $L = 12$、$\beta = 32$、$D = 3.0$、$J_z = 3.6$ $\Delta B = 0.5$ 1 ，步长为，所有面板中的场均采用公式（ ）的单位。(a) 磁化强度；水平点线为 $m_z = 1/2$。(b) 自旋刚度（实线、三角形）和交错结构因子（虚线、方形）。竖直点线标出图1中的转变场 10.4、13.0 和 14.8。(c) $L = 16$、$\beta = 32$ 、$D = 3.0$、$J_z = 3.6$，跨越两个平台边界的步长为 $\Delta B = 0.1$：m_z（左轴）和 ρ_s（右轴，点线）。跨越连续 SS–IS2 边界时，每个场值均重新开始；跨越一级 IS2–XY 边界时，场从 14.2 向上扫描，并从 15.0 向下扫描，每个点均从前一个点继续。竖线：$B_c = 13.01$ 以及能量交叉点 $B^* = 14.81$。(c) 中的误差条为一个标准误差；只有在扫描的两个切换点处，误差条才超出数据符号，即 $B = 14.9$ （向上）和 14.7（向下）。(a) 和 (b) 中的统计误差小于数据符号。

与我们的结果一致，且在读数不确定度范围内（该图坐标轴上的±0.03 ， ±0.06 在我们的单位下；表 I），无量纲量可直接对应。

图 7(c)以 $L = 16$为步长0.1细化了两个平台边界，仅使用静态观测量。在连续 SS–IS2 边界两侧，$\frac{1}{2} - m_z$ 和 ρ_s 呈线性下降：在 $B = 12.8$ 处分别为0.0152和0.074，在12.9处为0.0077和0.041，在13.0处为0.0014和0.009；将二者分别从12.8和12.9进行线性外推，得到 $B_c = 13.00$ 和13.02，即 $B_c = 13.01 \pm 0.01$，不确定度取两次外推结果之差的一半。13.0处的数据点未被采用，因为此时晶格中的平均空穴数少于一个 [$N\left(\frac{1}{2} - m_z\right) = 3.9$，三个场下分别为2.0和0.4]。跨越一级 IS2–XY 边界时，上扫和下扫显示出滞后现象：平台一直持续到14.8，而倾斜态则延续至14.7。两条分支的总能量关于 B 呈线性，其斜率分别为 -0.4998 和 -0.599，按理应等于 $-m_z$ ，并在 $B^* = 14.81 \pm 0.01$处相交；其中的不确定度考虑了在 $T = 1/32$处被忽略的小熵差。在论文图1的场轴上， B^* 为7.4，而从该图读出的数值为7.3。差异处于滞后范围内：在我们的下扫中，平台在 $B = 14.6$处恢复，该点在该坐标轴上为7.3。

附录 B：解析延拓：窗口、归一化和峰值提取

保留的虚时间点数 N_τ（相对误差低于 20%）在不同数据集之间变化很大：沿动量路径的中位数对于 S^{xx} 在 $B = 11.5$ 时为 41 和 42，对于 S^{zz} 在 $B = 11.5$ 时为 14 和 52，但对于 S^{xx} 在 $B = 17$ 时仅为 19，对于 S^{zz} 在 $B = 14$ 时为 21，对于 S^{zz} 在 $B = 17$ 时为 30，总体范围为 15 至 61；窗口较短的情况对应于关联函数衰减最快或携带的权重最少的情形。每个数据集的中位数 $\chi^2_{\min}/N_\tau$ 为 0.76–0.94。

通过在每个谱的原生 $\Delta\omega = 0.005$ 网格上利用公式 (3) 从 G 重构，在所有图 2 的 159 个延拓谱中（ 27 个不同动量、六个数据集，减去 (0, 0) 处的三个弹性 S^{zz} 列），均能以优于 3×10^{-4} 的精度复现测得的 G(q, 0)（在第四节 B 中转子塔列之外的 10^{-9} 范围内），并以优于 5×10^{-4} 的精度复现 G(q τ)/G(q, 0) 在每个 $0.1 \le \tau \le 15.6$ 点的数值。将谱分箱平均至 $\Delta\omega = 0.05$ 后再进行反变换，会使转子塔列处的 G(q, 0) 产生 2–3 $\times 10^{-2}$ 的偏差，因为在 $\omega \simeq 0.03$ 处的一个分箱内，$e^{-(\beta-\tau)\omega}$ 的变化幅度可达五倍，因此所有谱均以未分箱的形式使用和绘制。第四节 B 中的布拉格扣除还会去除 Q 处低于分辨率的任何非弹性权重；如果这类权重高于 $\omega \simeq 1/\beta$，则会使 G^{zz}(Q τ) 在 $\tau = 2$ 和 15.6 之间变化，变化量至少达到其自身的 8%，因此观测到的平坦性将其限制在该列约 10^6 分之一以内，低于连通权重的 0.1%。

文中引用的所有峰位、权重分数和边缘均来自采用固定阈值的一套处理流程。对宽度为

$\sigma_\omega = 0.05$、经高斯函数平滑处理的谱，显著度至少为极大值 2% 的极大值被视为峰。由于这一阈值随最高峰值缩放，随着某一分支增强，其旁边较弱的连续谱会降至阈值以下；超固体中的 **Q** 附近便是如此。因此，每个峰的窗口由更精细的峰集（显著度为 0.2%）的极小值界定，从而避免将此类连续谱的权重计入该分支。只有这些极大值和极小值的位置取自平滑谱；权重和边缘则取自未经平滑处理的谱，因此平滑处理带来的展宽会没有引用的数值。2%峰窗口之外的权重属于尚未解析的余量，因此同一动量处的各部分之和不必为1。两种选择都不会造成实质影响：对于 $0.01 \le \sigma_\omega \le 0.05$ ，每个谱的平均峰数仅从1.74变为1.80，最低峰的位置移动不超过0.05；且文中使用的每个最低峰的显著性都高于5%。在 $B = 11.5$ 处的独立1152箱数据集给出了相同的峰位；在这项比较中，最不稳定的量——连通 S^{zz}(**Q**)的边缘——在该数据集中为4.2，而在4096箱数据集中为3.9。

[1] A. F. Andreev和I. M. Lifshitz，《晶体中缺陷的量子理论》，《苏联物理学JETP》29，1107（1969）。[2] G. V. Chester，《关于玻色—爱因斯坦凝聚和量子晶体的推测》，《物理评论A》2，256（1970）。[3] A. J. Leggett，《固体能成为“超流体”吗？》，《物理评论快报》25，1543（1970）。[4] M. Boninsegni和N. V. Prokof'ev，综述：超固体：何为超固体？其存在于何处？《现代物理评论》84，759（2012）。[5] E. Kim和M. H. W. Chan，《可能观测到超固态氦相》，《自然》427，225（2004）。[6] J. Léonard、A. Morales、P. Zupancic、T. Donner和T. Esslinger，《在超固态量子气体中监测并操控希格斯模和戈德斯通模》，《科学》358，1415（2017）。[7] L. Tanzi、S. M. Roccuzzo、E. Lucioni、F. Famà、A. Fioretti、C. Gabbanini、G. Modugno、A. Recati和S. Stringari，《偶极量子气体中由压缩振荡引发的超固体对称性破缺》，《自然》574，382（2019）。[8] M. Guo、F. Böttcher、J. Hertkorn、J.-N. Schmidt、M. Wenzel、H. P. Büchler、T. Langen和T. Pfau，《受限偶极超固体中的低能戈德斯通模》，《自然》574，386（2019）。[9] G. Natale、R. M. W. van Bijnen、A. Patscheider、D. Petter、M. J. Mark、L. Chomaz和F. Ferlaino，《受限偶极超固体的激发谱及其实验证据》，《物理评论快报》123，050402（2019）。[10] S. Wessel和M. Troyer，《三角晶格上的超固态硬核玻色子》，《物理评论快报》95，127205（2005）。[11] D. Heidarian和K. Damle，《三角晶格上硬核玻色子的持久超固相》，《物理评论快报》95，127206（2005）。[12] R. G. Melko、A. Paramekanti、A. A. Burkov、A. Vishwanath、D. N. Sheng和L. Balents，《无序产生的超固序：三角晶格上的硬核玻色子》，《物理评论快报》95，127207（2005）。[13] M. Boninsegni和N. Prokof'ev，《三角晶格上硬核玻色子的超固体相》，《物理评论快报》95，237204（2005）。[14] T. Matsubara和H. Matsuda，《液氦的晶格模型，I》，《理论物理进展》16，569（1956）。[15] T. Giamarchi、C. Rüegg和O. Tchernyshyov，《磁性绝缘体中的玻色—爱因斯坦凝聚》，《自然物理》4，198（2008）。[16] V. Zapf、M. Jaime和C. D. Batista，《量子磁体中的玻色—爱因斯坦凝聚》，《现代物理评论》86，563 (2014). [17] D. Yamamoto、G. Marmorini 和 I. Danshita，磁场中三角晶格XXZ模型的量子相图，物理评论快报 112，127203（2014）。[18] G. G. Batrouni 和 R. T. Scalettar，超固体中的相分离，物理评论快报 84，1599（2000）。[19] Y. Gao、Y.-C. Fan、H. Li、F. Yang、X.-T. Zeng、X.-L. Sheng、R. Zhong、Y. Qi、Y. Wan 和 W. Li，近理想易轴三角晶格量子反铁磁体 $Na_2BaCo(PO_4)_2$，中的自旋超固体，自然量子材料 7，89（2022）。[20] J. Xiang、C. Zhang、Y. Gao、W. Schmidt、K. Schmalzl、C.-W. Wang、B. Li、N. Xi、X.-Y. Liu、H. Jin、G. Li、J. Shen、Z. Chen、Y. Qi、Y. Wan、W. Jin、W. Li、P. Sun 和 G. Su，自旋超固体候选材料 $Na_2BaCo(PO_4)_2$，中的巨磁热效应，自然 625，270（2024）。[21] J. Sheng、L. Wang、W. Jiang、H. Ge、N. Zhao、T. Li、M. Kofu、D. Yu、W. Zhu、J.-W. Mei、Z. Wang 和 L. Wu，有序磁体中的自旋激发连续谱，创新 6，100769（2025）。[22] M. Zhu、V. Romerio、N. Steiger、S. D. Nabi、N. Mu- rai、S. Ohira-Kawamura、K. Y. Povarov、Y. Skourski、R. Sibille、L. Keller、Z. Yan、S. Gvasaliya 和 A. Zhe- ludev，三角晶格自旋超固体中的连续激发，物理评论快报 133，186704（2024）。[23] P. Sengupta 和 C. D. Batista，自旋一海森堡模型中的场诱导超固体相，物理评论快报 98，227201（2007）。[24] P. Sengupta 和 C. D. Batista，各向异性自旋一海森堡链中的自旋超固体，物理评论快报 99，217205（2007）。[25] D. Peters、I. P. McCulloch 和 W. Selke，具有交换和单离子各向异性的自旋一海森堡反铁磁链，物理评论B 79，132406（2009）。[26] D. Rossini、V. Giovannetti 和 R. Fazio，海森堡链中的自旋超固体相：通过具有周期性边界条件的矩阵乘积态进行表征，物理评论B 83，140411（2011）。[27] K.-K. Ng 和 T. K. Lee，磁场下自旋二聚体XXZ系统中的超固体相，物理评论快报 97，127204（2006）。[28] N. Laflorencie 和 F. Mila，二维量子反铁磁体超固体相之外的量子和热相变，物理评论快报 99，027202（2007）。[29] Y. Murakami、T. Oka 和 H. Aoki，自旋系统中的超固态：相图与集体激发，物理评论B 88，224404（2013）。

[30] J. Goldstone，具有“超导体”解的场论，Il Nuovo Cimento 19，154（1961）。[31] H. Watanabe 和 H. Murayama，无洛伦兹不变性下南部-戈德斯通玻色子的统一描述，物理评论快报 108，251602（2012）。[32] B. I. Halperin 和 P. C. Hohenberg，自旋波的流体动力学理论，物理评论 188，898（1969）。[33] A. W. Sandvik 和 J. Kurkijärvi，自旋系统的量子蒙特卡罗模拟方法，物理评论B 43，5950 1991( )。[34] A. W. Sandvik，采用算符环更新的随机级数展开方法，物理评论B 59，R14157（1999）。[35] O. F. Syljuåsen 和 A. W. Sandvik，采用定向环的量子蒙特卡罗，物理评论E 66，046701（2002）。[36] A. W. Sandvik，量子蒙特卡罗数据解析延拓的随机方法，物理评论B 57，10287 1998( )。[37] K. S. D. Beach，将最大熵方法确定为随机解析延拓的特殊极限（2004），arXiv:cond-mat/0403055。[38] A. W. Sandvik，解析延拓的约束采样方法，物理评论E 94，063308（2016）。[39] H. Shao、Y. Q. Qin、S. Capponi、S. Chesi、Z. Y. Meng 和 A. W. Sandvik，方格晶格自旋-1/2海森堡反铁磁体中近禁闭的自旋子激发，物理评论X 7，041072（2017）。[40] H. Shao 和 A. W. Sandvik，量子蒙特卡罗数据随机解析延拓的进展，物理报告 1003，1（2023）。[41] P. Sengupta、L. P. Pryadko、F. Alet、M. Troyer 和 G. Schmid，二维晶格玻色子中的超固体与相分离，物理评论快报 94，207202 （ 2005 ）。[42] R. Flynn 、 A. Iaizzi 、 S. Yang、Y.-J. Kao 和 A. W. Sand- vik，时间切片随机级数展开中的虚时间关联（2026），arXiv:2608.13477 [cond-mat.str- el]。[43] A. Dorneich 和 M. Troyer，利用随机级数展开研究大型多粒子系统的动力学，物理评论E 64，066701（2001）。[44] S. Yang，低维量子自旋系统的谱性质，博士学位论文，波士顿大学（2026）。[45] M. Jarrell 和 J. E. Gubernatis，贝叶斯推断与虚时间量子蒙特卡罗数据的解析延拓，《物理报告》269，133（1996）。[46] S. Yang、G. Schumm 和 A. W. Sandvik，具有长程相互作用的自旋-1/2海森堡链的动态结构因子，《物理评论B》111，224404（2025）。[47] S. Yang、G. Schumm、B. Zhao 和 A. W. Sandvik，具有不同基态的一维量子磁体中的单空穴谱函数，《物理评论B》114，055132（2026）。[48] G. Schumm、S. Yang 和 A. W. Sandvik，随机解析延拓中的交叉验证，《物理评论E》110，055307（2024）。[49] J. M. Kosterlitz 和 D. J. Thouless，二维系统中的有序化、亚稳性与相变，《物理学杂志C：固体物理》6，1181（1973）。[50] D. R. Nelson 和 J. M. Kosterlitz，二维超流体超流体密度的普适跃变，《物理评论快报》39，1201（1977）。[51] P. W. Anderson，反铁磁基态的近似量子理论，《物理评论》86，694（1952）。[52] B. Bernu、C. Lhuillier 和 L. Pierre，有限晶格量子反铁磁体精确谱中的奈尔有序特征，《物理评论快报》69，2590（1992）。[53] C. Lhuillier，受挫量子磁体（2005），arXiv:cond-mat/0502464。[54] H. Tasaki，晶格量子系统中的长程序、态的“塔”与对称性破缺，《统计物理学杂志》174，735（2019）。[55] O. Penrose 和 L. Onsager，玻色-爱因斯坦凝聚与液氦，《物理评论》104，576（1956）。[56] M. E. Zhitomirsky 和 A. L. Chernyshev，专题：自发磁振子衰变，《现代物理评论》85，219（2013）。[57] M. E. Zhitomirsky 和 T. Nikuni，方格晶格海森堡反铁磁体的磁化曲线，《物理评论B》57，5013（1998）。[58] S. Yang 和 A. W. Sandvik，去禁闭量子临界点处的自旋子与自旋-电荷分离（2025），arXiv:2512.02962 [cond-mat.str-el]。