arXiv:2611.32804v1 [cond-mat.quant-gas] 24 Nov 2026

# 玻色–费米混合物沿解嵌套线的精确解

Soham Chandak、Aleksandra Petkovi´c 和 Zoran Ristivojevic大学 ´图
卢兹´，法国图卢兹（日期：2026年11月25日）

一个具有接触排斥相互作用的玻色–费米混合物一维模型可通过嵌套Bethe Ansatz精确求解。本文沿着一条特殊线对这一形式解进行了简化，在该特殊线上，贝特拟设方程可以解嵌套。模型的解可用已知的Lieb–Liniger模型以及平衡情形下具有吸引相互作用的自旋-$\frac{1}{2}$费米子Yang–Gaudin模型的解来表示。我们得到了弱相互作用和强相互作用下基态能量、激发速度以及Drude权重的显式解析结果。在弱相互作用下，这条特殊线对应于这样一组参数值：自由费米子和弱相互作用玻色子这两个孤立系统具有相同的速度。

## I. 引言

近年来，超冷原子的囚禁与冷却技术取得了进展，使得在准一维构型中实现量子气体成为可能 [1–3]。这类一维系统尤其受到关注，原因在于量子涨落所起的显著作用 [4]。尽管玻色化等非微扰方法能够成功描述低能区，但要捕捉任意能量尺度下的物理，精确的理论方法仍然十分理想。虽然对于大多数相互作用量子系统而言，计算精确的多体谱通常难以实现，但Bethe拟设框架为若干基本的一维模型提供了精确解。著名的例子包括海森堡自旋链 [5], Lieb–Liniger模型[6], Yang–Gaudin模型 [7, 8], Hubbard模型 [9],Kondo模型 [10], 以及sine-Gordon模型 [11]。

仅仅存在Bethe拟设解，并不保证能够直接获得物理观测量。然而，对于某些模型，在特定参数值处会出现显著简化，此时精确解可以映射为性质更易获取的简单理论。例如，沿Luther–Emery线，sine–Gordon模型对应于有质量Thirring模型的非相互作用极限 [12, 13], ，因而可以表述为自由费米子理论。类似的映射使得单通道和多通道Kondo模型分别沿图卢兹线和Emery–Kivelson线可以作为自由费米子理论求解 [14, 15]。另一个可以用自由费米子理论表示的例子是海森堡模型的零各向异性极限；该极限可通过Jordan–Wigner变换对角化 [16]。

具有接触相互作用的一维玻色–费米混合物可以通过Bethe Ansatz[17, 18]精确求解。在这一精确解的基础上，人们广泛研究了该系统，包括其基态性质和低能激发谱 [18–21], 、各种关联函数 [18, 22, 23], 以及热力学行为 [24–26]。然而，与Lieb–Liniger模型等较简单的可积系统不同，玻色–费米混合物具有多组分特性，因此必须采用嵌套Bethe Ansatz。在这一框架中，该解引入了辅助准动量；例如，它们并不显式出现在哈密顿量的本征能量中，但是构建Bethe方程所必需的。

本文确定了参数空间中的一条特定曲线，在这条曲线上，玻色–费米混合物复杂的嵌套Bethe拟设解可以用两个更简单的非嵌套模型精确表示。具体而言，我们证明，在由以下条件确定的参数下，该系统可分解为Lieb–Liniger模型和吸引型自旋-$\frac{1}{2}$ 费米子的平衡Yang–Gaudin模型 –

$$n_F \frac{\partial \mu_F}{\partial n_F} = (n_B + n_F) \frac{\partial \mu_F}{\partial n_B}. \tag{1}$$

这里， $n_F$ 和 $n_B$ 分别表示玻色–费米混合物中费米子和玻色子的密度，而 $\mu_F$ 则是费米子的化学势。重要的是，这种分解使我们能够利用两个组成模型的已知关系，推导出玻色–费米混合物的显式结果。最后需要强调的是，不同于前文讨论的映射，这里给出的分解显然并不对应于一种平凡的自由费米子理论，而是将该系统与真正的相互作用理论联系起来。

本文其余部分的组织如下。在第II节中，我们讨论玻色–费米混合物的Bethe拟设解。第III 节和第IV 节简要回顾Lieb–Liniger模型以及平衡的Yang–Gaudin吸引自旋模型所对应的积分方程

$1/2$费米子，分别。在第 V 节中，我们确立了沿特殊参数线对玻色–费米混合物进行精确分解的方法。利用这一映射，我们进一步推导出弱耦合和强耦合区域中基态能量、激发速度及 Drude权重的显式解析表达式。所得结果将在第VI节讨论。

## II. 玻色–费米混合物的 Bethe拟设解

我们研究一维玻色子与自旋极化费米子的混合物，其中粒子通过接触排斥相互作用。在玻色子和费米子的质量相等且粒子间相互作用强度相等的情况下，该系统具有精确的 Bethe拟设解 [17, 18]。相应的

哈密顿量表示为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\hbar^2 c}{2m}\sum_{\substack{j,l=1\\ j\neq l}}^{N}\delta(x_j - x_l), \tag{2}$$

其中， $m$是粒子的质量， $N$ 是粒子的总数， $c>0$ 描述排斥相互作用。

哈密顿量（2）通过 Bethe Ansatz[17, 18]进行对角化。对于具有周期性边界条件的系统，所得方程组为

$$Lk_j = 2\pi I_j + \sum_{l=1}^{N_B}\theta(2k_j - 2\Lambda_l), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{3a}$$

$$2\pi J_l = \sum_{j=1}^{N}\theta(2\Lambda_l - 2k_j), \quad l = 1, 2, \ldots, N_B. \tag{3b}$$

这里， $N_B$ 是玻色子的数目， $L$是系统尺寸，而 $k_j$和 $\Lambda_l$ 分别是准动量和辅助准动量。哈密顿量本征态的能量为 $E = (\hbar^2/2m)\sum_{j=1}^{N} k_j^2$，相应的动量为$p = \hbar\sum_{j=1}^{N} k_j$。相互作用的信息编码在两粒子散射相移中。

$$\theta(k) = -2\arctan(k/c). \tag{4}$$

数字 $I_j$ 和 $J_l$ 是整数或奇半整数，具体取决于 $N_B$ 和 $N$ 的宇称。特别地，在基态中，我们有

$$I_j = j - \frac{N+1}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{5a}$$

$$J_l = l - \frac{N_B+1}{2}, \quad l = 1, 2, \ldots, N_B. \tag{5b}$$

$\{I_j\}$和 $\{J_l\}$的其他取值会产生激发态。

### A. 基态

我们将在热力学极限下研究该系统， $L$， $N$， $N_B \to \infty$，使得总密度 $n = N/L$和玻色子密度 $n_B = N_B/L$ 均为有限值。因此，费米子密度 $n_F = n - n_B$ 也为有限值。基态的方程（3）随后由以下积分方程组描述

$$\varrho(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} dy\,\frac{\varsigma(y)}{\lambda^2 + (x-y)^2}, \tag{6a}$$

$$\varsigma(x) = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} dy\,\frac{\varrho(y)}{\lambda^2 + (x-y)^2} \tag{6b}$$

决定无量纲密度 $\varrho$ 准动量的密度以及 $\varsigma$ 辅助准动量的密度。无量纲参数 $\lambda$ 和 $\eta$ 在方程（6）中与费米准动量（或最高占据准动量） $Q$ 和辅助费米准动量 $B$ 通过以下简单关系相联系

$$\lambda = \frac{c}{2Q}, \quad \eta = \frac{B}{Q}. \tag{7}$$

利用粒子密度 $n = Qm_0$ 的结果，其中我们将 $\varrho$ 的矩引入为

$$m_j = \int_{-1}^{1} dx\, x^j \varrho(x), \tag{8}$$

我们可以将 $\lambda$ 和 $\eta$ 与模型的无量纲参数联系起来，

$$\gamma = \frac{c}{n}, \quad \alpha = \frac{n_B}{n}. \tag{9}$$

它们为

$$\gamma = \frac{2\lambda}{m_0} \tag{10}$$

and

$$\alpha = \frac{\int_{-\eta}^{\eta} dx\,\varsigma(x)}{m_0}. \tag{11}$$

虽然方程（6）自然会导出以 $\lambda$和 $\eta$表示的结果，但一般而言，我们更倾向于将相同结果表示为 $\gamma$ 和 $\alpha$的形式；这可以通过对方程（10）和（11）求逆来实现。

方程（6）使我们能够求得 $\varrho$（$x$） 对应于 $-1 \le x \le 1$ 和$\varsigma$（$x$） 对应于 $-\eta \le x \le \eta$。它们决定了系统的物理性质。特别是，基态能量 $E_0$ 可以方便地表示为

$$\frac{E_0}{L} = \frac{\hbar^2 n^3}{2m} e(\alpha, \gamma), \tag{12}$$

其中 $e(\alpha,\ \gamma)$ 是无量纲能量函数。它由矩（8）表示为

$$e(\alpha, \gamma) = \frac{m_2}{m_0^3}. \tag{13}$$

请注意，矩自然地取决于 $\lambda$ 和 $\eta$，最终应利用关系式（$\gamma$ 和 $\alpha$ （10）和（11）以

### B. 激发速度

系统的激发态能量也由 Bethe Ansatz 描述。它们编码在函数Ξ($x$)和 Ω($x$)中，这些函数满足耦合积分方程

$$\Xi(x) = x + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} dy\,\frac{\Omega(y)}{\lambda^2 + (x-y)^2}, \tag{14a}$$

$$\Omega(x) = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} dy\,\frac{\Xi(y)}{\lambda^2 + (x-y)^2}. \tag{14b}$$

通过扰动量子数 $I_j$ 得到的右移基本激发的动量 $p$ 和激发能 $\varepsilon$ 为

$$p = 2\pi\hbar Q\left|\int_1^{\tau} dx\,\varrho(x)\right|, \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2 Q^2}{m}\left|\int_1^{\tau} dx\,\Xi(x)\right|. \tag{15}$$

这里的 $\tau$ 是控制激发的动量和能量的参数。对于 I 型激发，有 $\tau > 1$；对于 II 型激发，有 $-1 < \tau < 1$。类似地，通过扰动量子数 $J_l$ 得到的右移基本激发，其动量和能量为

$$p = 2\pi\hbar Q \left| \int_\eta^\tau dx\, \varsigma(x) \right|, \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2 Q^2}{m} \left| \int_\eta^\tau dx\, \Omega(x) \right|. \tag{16}$$

对于 I 型激发，我们有 $\tau > \eta$；对于 II 型激发，$-\eta < \tau < \eta$。因此，玻色–费米混合物的激发谱由四个分支构成。在低动量下，激发谱呈线性，分支的斜率对应两个不同的激发速度。它们为

$$v_1 = \frac{\hbar Q}{2\pi m} \frac{\Xi(1)}{\varrho(1)}, \quad v_2 = \frac{\hbar Q}{2\pi m} \frac{\Omega(\eta)}{\varsigma(\eta)}. \tag{17}$$

与基态能量一样，速度取决于 $\alpha$ 和$\gamma$。

## III. Lieb–Liniger模型的Bethe拟设解

哈密顿量 (2) 也描述具有接触排斥相互作用的全同玻色子，这一模型称为 Lieb–Liniger模型。下文将用到该模型的一些性质，在此简要回顾。Lieb–Liniger模型也有精确的 Bethe拟设解 [6]。为明确符号，我们研究质量为 $m$、系统尺寸为 $L$ 、包含$N_L$ 个粒子且相互作用强度为 $c_1$的系统。在热力学极限下，该系统由密度 $n_L$表征。

### A. 基态

系统的基态由 Lieb积分方程 [6] 描述

$$\varrho_L(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-1}^{1} dy\, \frac{\varrho_L(y)}{\lambda_1^2 + (x-y)^2}, \tag{18}$$

它定义了准动量的无量纲密度 $\varrho_L$。在方程 (18) 中，$\lambda_1 = c_1/Q_1$，其中 $Q_1$ 是费米准动量。玻色子密度为 $n_L = Q_1 m_{0L}$，其中我们定义了矩

$$m_{jL} = \int_{-1}^{1} dx\, x^j \varrho_L(x). \tag{19}$$

然后，无量纲Lieb参数 $\gamma_L = c_1/n_L$ 可表示为

$$\gamma_L = \frac{\lambda_1}{m_{0L}}. \tag{20}$$

基态能量 $E_L$ 可表示为

$$\frac{E_L}{L} = \frac{\hbar^2 n_L^3}{2m} e_L(\gamma_L), \tag{21}$$

其中非平凡的无量纲函数 $e_L$ 定义为

$$e_L(\gamma_L) = \frac{m_{2L}}{(m_{0L})^3}. \tag{22}$$

注意， $e_L$ 仅取决于 $\gamma_L$。

### B. 激发速度

激发谱可通过 $\Xi_L$ 表示，其中它满足以下积分方程

$$\Xi_L(x) = x + \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-1}^{1} dy\, \frac{\Xi_L(y)}{\lambda_1^2 + (x-y)^2}. \tag{23}$$

于是，基本激发的动量和能量可分别表示为

$$p_L = 2\pi\hbar Q_1 \left| \int_1^\tau dx\, \varrho_L(x) \right|, \quad \varepsilon_L = \frac{\hbar^2 Q_1^2}{m} \left| \int_1^\tau dx\, \Xi_L(x) \right|. \tag{24}$$

它们取决于参数 $\tau$。当 $\tau > 1$ 时，方程（24）描述右移型 I 激发；而当 $-1 < \tau < 1$ 时，它描述 II 型激发 [27]。在低动量下，激发谱呈线性，其特征由单一的激发速度决定

$$v_L = \left. \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial p_L} \right|_{p_L \to 0} = \frac{\hbar Q_1}{2\pi m} \frac{\Xi_L(1)}{\varrho_L(1)}. \tag{25}$$

请注意，关于激发速度有两个精确关系。第一个关系将速度与边缘处的准动量密度联系起来 [28],

$$[2\pi\varrho_L(1)]^2 = \frac{\pi\hbar n_L}{m v_L}. \tag{26}$$

第二个关系涉及速度以及基态能量及其导数。它表示为 [27]

$$v_L = \frac{\hbar n_L}{m} e_{vL}(\gamma_L), \tag{27a}$$

其中

$$e_{vL}(\gamma_L) = \frac{\gamma_L^2}{\sqrt{2}} \left[ \frac{d^2}{d\gamma_L^2} \left( \frac{e_L(\gamma_L)}{\gamma_L^2} \right) \right]^{1/2}. \tag{27b}$$

## IV. 吸引型Yang–Gaudin模型的Bethe拟设解

现在，我们简要回顾一下后续章节所需的另一个精确可解模型。它描述了一个由

具有接触吸引的自旋$\frac{1}{2}$费米子组成的系统，该模型称为Yang–Gaudin模型 [7, 8]。它具有 Bethe拟设解，其数学结构与 Lieb–Liniger 模型相似。我们研究质量为$m$的费米子在强度为$-c_2$的接触吸引作用下的性质，其中我们考虑$c_2 > 0$。聚焦于平衡情形，即具有两个自旋投影的费米子数目相等，且费米子总数为 $N_Y$，我们考虑尺寸为 $L$ 的系统，并取热力学极限。其密度为 $n_Y = N_Y/L$。

### A. 基态

由于吸引作用，自旋投影不同的费米子结合成对。在贝特拟设描述中，这体现为准动量以复共轭对的形式出现，且具有恒定的虚部 $\pm ic_2/2$。其无量纲密度的实部 $\varrho_Y$ 满足方程 [7, 8]

$$\varrho_Y(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{\lambda_2}{\pi}\int_{-1}^{1} dy\, \frac{\varrho_Y(y)}{\lambda_2^2 + (x-y)^2}. \tag{28}$$

这里 $\lambda_2 = c_2/Q_2$，其中 $Q_2$ 是费米准动量。费米子密度为 $n_Y = 2Q_2 m_{0Y}$，其中我们引入了以下记号

$$m_{jY} = \int_{-1}^{1} dx\, x^j \varrho_Y(x). \tag{29}$$

那么，无量纲相互作用强度 $\gamma_Y = c_2/n_Y$ 为

$$\gamma_Y = \frac{\lambda_2}{2m_{0Y}}. \tag{30}$$

系统的基态能量 $E_Y$为

$$\frac{E_Y}{L} = \frac{\hbar^2 n_Y^3}{2m}\left[-\frac{\gamma_Y^2}{4} + e_Y(\gamma_Y)\right]. \tag{31}$$

能量的第一项（负值）描述了 $N_Y/2$ 对费米子的结合能。其余非平凡部分由无量纲函数 $e_Y$描述，该函数为

$$e_Y(\gamma_Y) = \frac{m_{2Y}}{4(m_{0Y})^3}, \tag{32}$$

它仅取决于 $\gamma_Y$。

### B. 激发速度

激发谱的信息包含在$\Xi_Y$中，其满足方程

$$\Xi_Y(x) = x - \frac{\lambda_2}{\pi}\int_{-1}^{1} dy\, \frac{\Xi_Y(y)}{\lambda_2^2 + (x-y)^2}. \tag{33}$$

元激发的动量 $p_Y$ 和能量 $\varepsilon_Y$ 可表示为

$$p_Y = 2\pi\hbar Q_2\left|\int_1^{\tau} dx\, \varrho_Y(x)\right|, \quad \varepsilon_Y = \frac{2\hbar^2 Q_2^2}{m}\left|\int_1^{\tau} dx\, \Xi_Y(x)\right|. \tag{34}$$

这里，$\tau$是一个决定 $p_Y$和 $\varepsilon_Y$的参数。对于 $\tau > 1$，存在 I 型激发；而对于 $-1 < \tau < 1$，存在 II 型激发。比较式（24）和（34）时，请注意乘法因子相差 2 。这是因为，在 Yang–Gaudin模型中，吸引性费米子会结合成配对，每个组成粒子都会对激发能作出贡献。另一方面，$\varrho_Y$ 本身已经描述了配对，因为对其积分得到的是配对密度，因此式（34）中的动量无需额外乘以因子 2 。在低动量下，激发谱呈线性，其特征由激发速度 $v_Y$决定。它的表达式为

$$v_Y = \left.\frac{\partial\varepsilon_Y}{\partial p_Y}\right|_{p_Y\to 0} = \frac{\hbar Q_2}{\pi m}\frac{\Xi_Y(1)}{\varrho_Y(1)}. \tag{35}$$

与Lieb–Liniger模型类似，我们注意到激发速度满足以下精确关系：

$$[2\pi\varrho_Y(1)]^2 = \frac{\pi\hbar n_Y}{m v_Y}, \tag{36}$$

and

$$v_Y = \frac{\hbar n_Y}{m} e_{vY}(\gamma_Y), \tag{37a}$$

其中

$$e_{vY}(\gamma_Y) = \frac{\gamma_Y^2}{\sqrt{2}}\left[\frac{d^2}{d\gamma_Y^2}\left(\frac{e_Y(\gamma_Y)}{\gamma_Y^2}\right)\right]^{1/2}. \tag{37b}$$

这些关系可以类似于Lieb–Liniger模型中的关系推导得出。速度 $v_Y$描述了束缚对的线性低能色散，对应于密度激发 [29]。

## V. 嵌套系统的解 $\eta = 1$

本文的主要目标是为沿着由方程（1）定义的特殊线的玻色–费米混合物提供一个显式的精确解。如第VD节所示，这对应于积分方程系统（ $\eta = 1$ 6）中的特殊选择。在这种情况下，两个费米快度相等，$Q = B$；见方程（7）。

### A. 基态

在 6 式所描述的系统中，$\eta = 1$ 通过引入函数 $\varrho_\pm(x) = \varrho(x) \pm \varsigma(x)$ 即可将其解耦。事实上，将（6）式相加并相减，可得以下方程组：

$$\varrho_\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \pm \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} dy\, \frac{\varrho_\pm(y)}{\lambda^2 + (x-y)^2}. \tag{38}$$

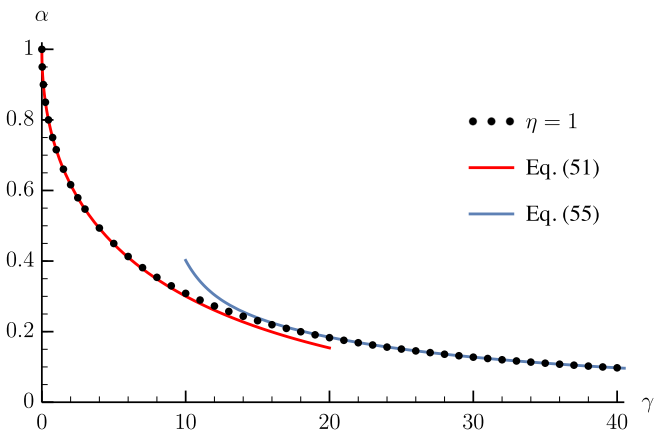


图1。圆点表示曲线的数值解 $\eta = 1$ 位于 $\alpha$-$\gamma$ 平面中的情形。实曲线是在51和55所对应的小 $\gamma$和大极限情形下的解析形式。

除相差一个平凡的乘法因子外，这些方程与（18）式和（28）式完全相同；后两式分别描述Lieb–Liniger模型的基态和吸引型Yang–Gaudin模型的平衡情形，条件是

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \tag{39}$$

可据此使用。特别地，我们可以确定

$$\varrho_+(x) = \varrho_L(x), \quad \varrho_-(x) = \frac{\varrho_Y(x)}{2}, \tag{40}$$

从而使我们能够求得

$$\varrho(x) = \frac{\varrho_L(x)}{2} + \frac{\varrho_Y(x)}{4}, \quad \varsigma(x) = \frac{\varrho_L(x)}{2} - \frac{\varrho_Y(x)}{4}. \tag{41}$$

因此，在 $\eta = 1$处，玻色–费米混合物的嵌套Bethe Ansatz大大简化。它化为Lieb–Liniger模型和完全配对Yang-Gaudin模型的两个更简单的Bethe拟设解。

根据定义（10）、（11）、（20）和（30），我们得到

$$\gamma_L = \frac{\gamma}{2(1+\alpha)}, \quad \gamma_Y = \frac{\gamma}{8(1-\alpha)}, \tag{42}$$

连接无量纲参数。注意，沿着 $\eta = 1$这条线，只有一个自由参数，例如 $\gamma$，它决定了 $\alpha$、$\gamma_L$和 $\gamma_Y$的取值。 $\gamma$ 和 $\alpha$ 的取值由方程（10）和（11）确定。相应的曲线如图1所示。由图可见，当 $\alpha$ 趋近于1时，即费米子密度趋于零的极限，相互作用强度较小， $\gamma \ll 1$。相反，在 $\alpha$较小的极限下，即玻色子密度较小的情形，我们看到约束 $\eta = 1$ 对应于系统中的强相互作用， $\gamma \gg 1$。

根据各模型中基态能量的定义（13）、（22）和（32），我们得到如下关系：

$$e(\alpha,\gamma) = \frac{(1+\alpha)^3}{2} e_L\left(\frac{\gamma}{2(1+\alpha)}\right) + 8(1-\alpha)^3 e_Y\left(\frac{\gamma}{8(1-\alpha)}\right). \tag{43}$$

因此，玻色–费米混合物的基态能量是 Lieb–Liniger 模型和 Yang–Gaudin模型能量的加权和，其中后者是在特殊相互作用强度下实现的。注意，式（31）中的束缚能项不参与式（43）。

让我们沿着 $\eta = 1$这条线，解析地求出 $\alpha$ 与 $\gamma$ 之间的关系。为此，我们利用费米准动量与基态能量函数之间的关系。对于Lieb–Liniger模型，该关系可表示为 [30, 31]

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\gamma_L}}{2g_1(\gamma_L)}, \tag{44}$$

其中， $g_1(\gamma_L)$是以下微分方程的解

$$\frac{d}{d\gamma_L}\left(\frac{g_1(\gamma_L)}{\sqrt{\gamma_L}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{8}\frac{d^2}{d\gamma_L^2}\left(\frac{e_L(\gamma_L)}{\gamma_L^2}\right)}. \tag{45}$$

Yang–Gaudin模型的类似关系为

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{\gamma_Y}}{2g_2(\gamma_Y)}, \tag{46}$$

其中， $g_2(\gamma_Y)$是以下微分方程的解

$$\frac{d}{d\gamma_Y}\left(\frac{g_2(\gamma_Y)}{\sqrt{\gamma_Y}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{8}\frac{d^2}{d\gamma_Y^2}\left(\frac{e_Y(\gamma_Y)}{\gamma_Y^2}\right)}. \tag{47}$$

由于目前没有用初等函数表示 $e_L(\gamma_L)$和$e_Y(\gamma_Y)$ 的已知精确表达式，我们可以采用它们在弱相互作用和强相互作用区域内的级数展开[31, 32]。此外， $g_1(\gamma_L)$ 和 $g_2(\gamma_Y)$ 的线性微分方程需要一个积分常数。在强相互作用下，由于费米准动量必须有限这一物理要求，该积分常数为零。在弱相互作用下，积分常数的确定要复杂得多。对于Lieb–Liniger模型，相关推导见文献 [31], ；而对于Yang–Gaudin模型，可根据文献28中对方程（ [32, 33]）的解进行微扰计算得到的零阶矩来确定。

在弱相互作用下， $\gamma \ll 1$，我们有 $\gamma_L \ll 1$ 和 $\gamma_Y \ll 1$，这将通过事后验证。函数 $g_1$ 的级数展开为 [31]

$$g_1(\gamma_L) = 1 - \frac{\sqrt{\gamma_L}}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{32\pi}{\sqrt{\gamma_L}}\right) - 1\right] + \frac{\gamma_L}{32\pi^2} + O(\gamma_L^{3/2}). \tag{48}$$

对于另一个函数，我们得到

$$g_2(\gamma_Y) = \frac{\pi}{4\sqrt{\gamma_Y}} - \frac{\sqrt{\gamma_Y}}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{\pi^2}{2\gamma_Y}\right) + 1\right] + \frac{\gamma_Y^{3/2}}{8\pi^3} + O(\gamma_Y^{5/2}). \tag{49}$$

假设为幂律级数，由式（39）、（44）和（46），现在可得

$$\gamma_L = \frac{16}{\pi^2}\gamma_Y^2 - \frac{64[2\ln(2)-1]}{\pi^4}\gamma_Y^3 + \frac{128\{6[\ln(2)]^2 - 7\ln(2) + 2\}}{\pi^6}\gamma_Y^4 + O(\gamma_Y^5). \tag{50}$$

式（50）和（42）现已证实， $\gamma$较小意味着 $\gamma_L$ 和 $\gamma_Y$也较小。最终，利用式（50）和式（42），我们得到

$$\alpha = 1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{\pi} + \frac{\ln(2)}{2\pi^2}\gamma - \frac{\ln(2)}{16\pi^3}\gamma^{3/2} + O(\gamma^2). \quad (51)$$

曲线的解析形式 $\eta = 1$ 在 $\alpha = 1$附近；见图1。随后我们可以利用所得到的 $\alpha$（$\gamma$）对式（51）的依赖关系，并求得能量（43）。其表达式为

$$e^*(\gamma) = \gamma - \frac{\gamma^{3/2}}{\pi} + \frac{\pi^2 - 12\ln(2)}{24\pi^2}\gamma^2 + \frac{32[\ln(2)]^2 + 4\ln(2) + 3\zeta(3)}{64\pi^3}\gamma^{5/2} + O(\gamma^3), \quad (52)$$

其中我们引入了缩写 $e^*(\gamma) \equiv e(\alpha, \gamma)$ 其中 $\alpha$ 沿着 $\eta = 1$ 线取值，而 $\zeta$ 表示黎曼ζ函数。由于在 $\alpha$ 附近时1，当 $\gamma \ll 1$时，系统中的费米子密度非常小。在这种情况下，式（52）中的首项与Lieb–Liniger模型的结果 [6], 一致，正如预期。

在强相互作用区域 $\gamma \gg 1$中，我们有 $\gamma_L \gg 1$和 $\gamma_Y \gg 1$。函数 $g_1$ 由 [31]给出

$$g_1(\gamma_L) = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma_L}}\left[1 - \frac{2}{\gamma_L} + \frac{4}{\gamma_L^2} + \frac{4\pi^2 - 24}{3\gamma_L^3} + O(\gamma_L^{-4})\right]. \quad (53)$$

对于另一个函数，我们得到

$$g_2(\gamma_Y) = \frac{\pi}{8\sqrt{\gamma_Y}}\left[1 + \frac{1}{2\gamma_Y} + \frac{1}{4\gamma_Y^2} - \frac{\pi^2 - 6}{48\gamma_Y^3} + O(\gamma_Y^{-4})\right]. \quad (54)$$

利用方程（44）、（46）和（42），我们得到

$$\alpha = \frac{4}{\gamma} - \frac{32(\pi^2 + 6)}{3\gamma^3} + \frac{512(2\pi^4 + 25\pi^2 + 60)}{15\gamma^5} + O(\gamma^{-6}). \quad (55)$$

这是 $\eta = 1$ 线在 $\gamma \gg 1$处的解析表达式；见图1。利用方程（55），能量（43）变为

$$e^*(\gamma) = \frac{\pi^2}{3}\left(1 - \frac{32}{\gamma^2} + \frac{256(3\pi^2 + 25)}{5\gamma^4}\right) + O(\gamma^{-5}). \quad (56)$$

正如预期，结果（56）在领先阶与自由费子相同，因为在这种情况下， $\alpha$ 非常小，这表示玻色子密度很小。该系统主要由费子组成，对于费子而言，接触相互作用由于泡利原理而不起作用，因此它们表现为非相互作用粒子。能量 $e^*$（$\gamma$）绘于图2中。沿着 $\eta = 1$线前进时，它从0 （在 $\gamma = 0$ 处）单调增加到 $\pi^2/3$（在 $\gamma \to \infty$处）的最大值。

### B. 激发谱

当 $\eta = 1$ 在公式（14）中时，我们可以用 Ξ和Ω 表示为$\Xi_L$ 和 $\Xi_Y$的形式，它们决定了Lieb–Liniger模型和平衡吸引型Yang–Gaudin模型的激发谱。我们

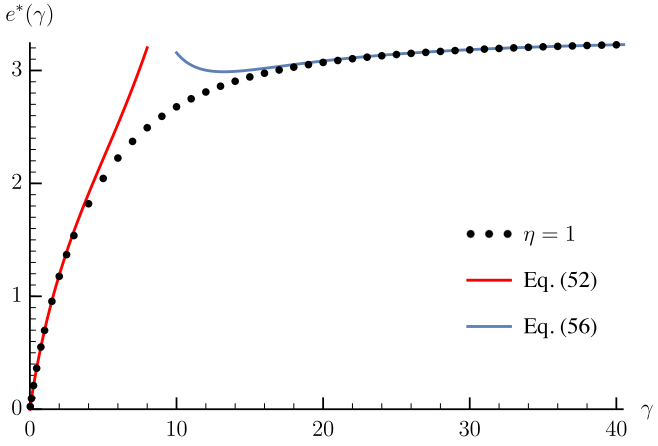


图2。圆点表示通过求解积分方程得到的沿 $\eta = 1$ 线的能量函数 $e^*(\gamma) \equiv e(\alpha, \gamma)$。实曲线表示弱相互作用和强相互作用这两种极限情形下的两个解析表达式（52）和（56）。

find

$$\Xi(x) = \frac{\Xi_L(x) + \Xi_Y(x)}{2}, \quad \Omega(x) = \frac{\Xi_L(x) - \Xi_Y(x)}{2}. \quad (57)$$

这使我们能够将玻色–费米混合物中的元激发表示为这两个更简单模型的元激发的组合。

根据玻色–费米混合物激发速度的定义（17）以及关系式（25）、（26）、（35）、（36）、（41）和（57），我们可以将玻色–费米混合物的激发速度表示为

$$v_{1,2} = \frac{\frac{2Q}{Q_1}v_L\varrho_L(1) \pm \frac{Q}{Q_2}v_Y\varrho_Y(1)}{2\varrho_L(1) \pm \varrho_Y(1)}. \quad (58)$$

然后，利用Lieb–Liniger模型和Yang–Gaudin模型中激发速度的关系式（27）和（37），以及定义式 $\lambda = \gamma n/2Q$、$\lambda_1 = \gamma_L n_L/Q_1$和 $\lambda_2 = \gamma_Y n_Y/Q_2$，我们可以将式（58）表示为

$$v_{1,2} = \frac{\hbar n}{m}\frac{\sqrt{e_{vL}e_{vY}}}{2\sqrt{e_{vY}} \pm \sqrt{e_{vL}}}\left(\frac{\gamma\lambda_1}{\gamma_L\lambda}\sqrt{e_{vL}} \pm \frac{\gamma\lambda_2}{2\gamma_Y\lambda}\sqrt{e_{vY}}\right). \quad (59)$$

最后，利用关系式（39）和（42），我们得到

$$v_{1,2} = \frac{\hbar n}{m}\frac{2(1+\alpha)\sqrt{e_{vL}} \pm 4(1-\alpha)\sqrt{e_{vY}}}{2\sqrt{e_{vY}} \pm \sqrt{e_{vL}}}\sqrt{e_{vL}e_{vY}}. \quad (60)$$

其中 $e_{vL} \equiv e_{vL}(\gamma_L)$ 和 $e_{vY} \equiv e_{vY}(\gamma_Y)$ 分别定义于式（27）和（37）中。

在弱相互作用极限下， $\gamma \ll 1$，对于玻色–费米混合物中的激发速度，我们得到

$$v_{1,2} = \frac{\hbar n}{m}\sqrt{\gamma}\left(1 \pm \frac{\gamma^{1/4}}{2\pi^{1/2}} - \frac{5\gamma^{1/2}}{8\pi} \mp \frac{2\ln(2) - 1}{4\pi^{3/2}}\gamma^{3/4} + \frac{48\ln(2) - 25}{128\pi^2}\gamma \mp \frac{13\ln(2) - 8}{64\pi^{5/2}}\gamma^{5/4} + O(\gamma^{3/2})\right). \quad (61)$$

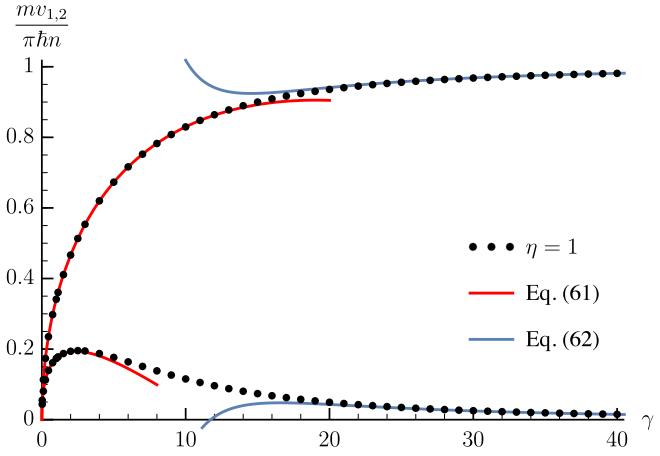


图3. 沿由 $\eta = 1$所定义的直线绘制的激发速度图。圆点表示通过求解积分方程得到的数值精确结果。实曲线表示弱相互作用与强相互作用区间内相应的解析形式，由式(61)和(62)给出。

注意，方程（61）描述了两种速度。在最低阶，$O(\sqrt{\gamma})$，Lieb–Liniger 声速和自由费米子费米速度 [对应于密度 $n_{F} = (1-\alpha)\, n = \sqrt{\gamma} n/\pi$] 相等，因此这两种模式是简并的。次领先阶项消除了这种简并。

在强相互作用极限下，$\gamma \gg 1$，我们发现

$$v_1 = \frac{\pi\hbar n}{m}\left(1 - \frac{32}{\gamma^2} + \frac{640(\pi^2+6)}{3\gamma^4}\right) + O(\gamma^{-5}), \quad (62a)$$

$$v_2 = \frac{\pi\hbar n}{m}\frac{8\pi^2}{3\gamma^2}\left(1 - \frac{16(7\pi^2+60)}{15\gamma^2}\right) + O(\gamma^{-5}). \quad (62b)$$

在领头阶，$v_1$ 对应于自由费米子速度。这是预期之中的，因为在 $\gamma \gg 1$处，我们有 $\alpha \to 0$，因此该系统中的玻色子密度可忽略不计。该系统中只存在一个速度这一点也反映在 $v_2$中，它随 $\gamma \to \infty$而消失。

图3 显示了激发速度 $v_1$ 和 $v_2$ 随 $\gamma$ 沿直线 $\eta = 1$的变化。我们看到，激发速度 $v_1$ 随 $\gamma$ 单调增大，并趋近于值 $\pi\hbar n/m$ （当 $\gamma \to \infty$时）。激发速度$v_2$，另一方面，作为 $\gamma$的函数是非单调的，并在 $\gamma$的某个中间值处达到极大值。速度 $v_2$ 趋近于0 （在两个极限 $\gamma \to 0$ 和 $\gamma \to \infty$下），这表明该混合物变为单组分系统。

### C. Drude权重

了解激发速度和基态能量后，我们便能直接求得Drude权重。Drude权重用于量化系统在无耗散条件下维持粒子流的能力。根据Kohn [34]，，可以通过对系统施加扭曲边界条件来计算Drude权重。因此，对于玻色–费米混合物，我们有

$$\Psi(\ldots, x_j + L, \ldots) = \Psi(\ldots, x_j, \ldots) \times \begin{cases} e^{i\varphi_B} & 1 \le j \le N_B, \\ e^{i\varphi_F} & N_B + 1 \le j \le N. \end{cases} \quad (63)$$

于是，Drude 权重矩阵

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{FF} & \mathcal{D}_{FB} \\ \mathcal{D}_{BF} & \mathcal{D}_{BB} \end{pmatrix} \quad (64)$$

定义为

$$\mathcal{D}_{ss'} = \frac{\pi L}{\hbar}\frac{\partial^2 E_t}{\partial\varphi_s \partial\varphi_{s'}}\bigg|_{\varphi_s, \varphi_{s'} \to 0}, \quad s, s' \in \{B, F\}, \quad (65)$$

其中，$E_t$ 是系统在扭曲边界条件下的基态能量。Drude 权重矩阵是对称的。

在文献 [21], 中，我们推导出 Drude 权重矩阵满足以下精确关系

$$\mathcal{D} = \mathcal{Z}\mathcal{V}\mathcal{Z}^T. \quad (66)$$

这里，我们定义

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z} = 2\pi \begin{pmatrix} \varrho(1) - \tilde{\varsigma}(1) & \varsigma(\eta) - \tilde{\varrho}(\eta) \\ \tilde{\varsigma}(1) & \tilde{\varrho}(\eta) \end{pmatrix}, \quad (67)$$

其中 $\tilde{\varrho}$ 和 $\tilde{\varsigma}$ 是耦合积分方程的解

$$\tilde{\varrho}(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} dy\, \frac{\tilde{\varsigma}(y)}{\lambda^2 + (x-y)^2}, \quad (68a)$$

$$\tilde{\varsigma}(x) = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} dy\, \frac{\tilde{\varrho}(y)}{\lambda^2 + (x-y)^2}. \quad (68b)$$

由于伽利略不变性，德鲁ude权重矩阵元满足 [21]

$$\mathcal{D}_{FF} + \mathcal{D}_{FB} = \frac{\pi\hbar n_F}{m}, \quad (69a)$$

$$\mathcal{D}_{BB} + \mathcal{D}_{FB} = \frac{\pi\hbar n_B}{m}. \quad (69b)$$

因此，Drude 权重矩阵只有一个独立的矩阵元，其余矩阵元可由求和规则推出（69）。因此，只需考虑 $\mathcal{D}_{FB}$，例如。

对于我们的情况 $\eta = 1$，方程（6）和（68）中的积分限相同，因此 $\varrho = \tilde{\varrho}$ 以及 $\varsigma = \tilde{\varsigma}$。在方程（66）中利用这一简化，可得

$$\mathcal{D}_{FB} = 4\pi^2[\varrho(1) - \varsigma(1)][v_1\varsigma(1) - v_2\rho(1)]. \quad (70)$$

利用方程（60），最终得到

$$\mathcal{D}_{FB} = \frac{\pi\hbar n}{m}\frac{4(1-\alpha)e_{vY} - (1+3\alpha)e_{vL}}{4e_{vY} - e_{vL}}, \quad (71)$$

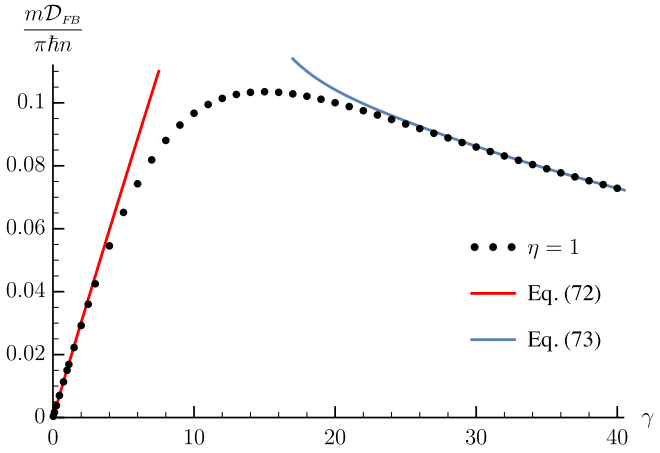


图4. 圆点表示通过研究相应积分方程得到的数值精确值 $\mathcal{D}_{FB}$，对应参数为 $\eta = 1$。曲线表示极限情况下的解析展开（72）和（73）。

其中 $e_{vL} \equiv e_{vL}(\gamma_L)$ 和 $e_{vY} \equiv e_{vY}(\gamma_Y)$ 分别如方程（27）和（37）所定义。

在弱相互作用区间，德鲁ude权重 $\mathcal{D}_{FB}$ 具有显式形式

$$\mathcal{D}_{FB} = \frac{\pi\hbar n}{m}\left[\frac{1-\ln(2)}{2\pi^2}\gamma - \frac{3\ln(2)-2}{8\pi^3}\gamma^{3/2} + O(\gamma^2)\right]. \tag{72}$$

有趣的是，与速度（61）不同，德鲁ude权重矩阵元是 $\gamma^{1/2}$的幂级数。这是因为 $\gamma^{1/4}$ 的奇次幂在乘积 $v_1v_2$中消失，而该乘积作为乘法因子出现在德鲁ude权重矩阵元中。在强相互作用的相反区间，我们得到

$$\mathcal{D}_{FB} = \frac{\pi\hbar n}{m}\left(\frac{4}{\gamma} - \frac{8(\pi^2+6)}{3\gamma^2} - \frac{32(\pi^2+6)}{3\gamma^3} + \frac{128(7\pi^4+90\pi^2+180)}{45\gamma^4}\right) + O(\gamma^{-5}). \tag{73}$$

其余的 Drude权重 $\mathcal{D}_{FF}$ 和 $\mathcal{D}_{BB}$ 可由求和规则（69）得到。这里在强相互作用下沿着直线 $\eta = 1$得到的显式结果，包括能量（56）、速度（62）以及 Drude权重（73），也可以通过将关系式（55）代入强相互作用和任意$\alpha$ [35]下计算得到的结果中而获得。在图 4 中，我们绘出了沿直线 $\mathcal{D}_{FB}$ 的 Drude权重 $\eta = 1$ 随 $\gamma$的变化关系。可以看出，Drude权重呈现非单调行为，在弱相互作用和强相互作用这两个极限情形下均趋于零。需要注意的是，从实际应用角度看，式（73）中与 $\gamma^{-3}$ 和 $\gamma^{-4}$成正比的项必须结合保留，因为它们的数值大小相当，从而显著提高了图 4所示 $\gamma$取值范围内精确结果与解析表达式（73）之间的一致性。

### D. 条件 $\eta = 1$ 的等价形式

基态能量 $E_0$ 使我们能够研究压缩率矩阵，

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{FF} & \mathcal{M}_{FB} \\ \mathcal{M}_{BF} & \mathcal{M}_{BB} \end{pmatrix}, \tag{74}$$

其中，矩阵元的定义如下，形式上较为简洁

$$\mathcal{M}_{ss'} = \frac{1}{\pi\hbar}\frac{\partial\mu_s}{\partial n_{s'}}, \quad s,s' \in \{B,F\}. \tag{75}$$

这里，$\mu_F$ 和 $\mu_B$ 是通过以下方式定义的化学势

$$\mu_F = \frac{\partial E_0}{\partial N_F}, \quad \mu_B = \frac{\partial E_0}{\partial N_B}, \tag{76}$$

其中 $N_F$ 为费米子数。矩阵 $\mathcal{M}$ 是对称的。在文献 [21]中，我们推导出压缩率矩阵满足精确关系

$$\mathcal{M} = (\mathcal{Z}^{-1})^T V \mathcal{Z}^{-1}. \tag{77}$$

反演方程（77），并利用方程（66）和（69），对于 $\eta = 1$ 我们得到两个约束条件

$$\frac{\pi\hbar n}{m} = \frac{v_1v_2}{\det\mathcal{M}}\mathcal{M}_{FF}, \tag{78a}$$

$$\frac{\pi\hbar n_B}{m} = \frac{v_1v_2}{\det\mathcal{M}}(\mathcal{M}_{FF} - \mathcal{M}_{BF}). \tag{78b}$$

由于$\det\mathcal{M}$ 以及乘积 $v_1v_2$ 在任意有限相互作用 [21], 下都非零，将两个表达式（78）相除可得到方程（1）。因此，直线 $\eta = 1$表示辅助准动量与准动量具有相同的费米准动量，可等价地表示为形式（1），其中包含系统的热力学量。

## VI. 讨论

这里给出一些补充说明。结合方程（66），求和规则（69）使我们能够将激发的速度表示为

$$v_1 = \frac{\hbar n}{4\pi m}\frac{\varrho(1) - \alpha\varsigma(1)}{\varrho(1)\{[\varrho(1)]^2 - [\varsigma(1)]^2\}}, \tag{79a}$$

$$v_2 = \frac{\hbar n}{4\pi m}\frac{\alpha\varrho(1) - \varsigma(1)}{\varsigma(1)\{[\varrho(1)]^2 - [\varsigma(1)]^2\}}. \tag{79b}$$

因此，速度只能用相应费米准动量处的准动量密度表示；见方程（6）。德鲁ude权重矩阵元同样如此，因为方程（70）给出

$$\mathcal{D}_{FB} = \frac{\pi\hbar n}{m}\left(1 + \alpha - \alpha\frac{\varsigma(1)}{\varrho(1)} - \alpha\frac{\varrho(1)}{\varsigma(1)}\right). \tag{80}$$

其他矩阵元可由求和规则（69）推出。

我们研究了由式（1）所定义的一组特殊参数下，玻色–费米混合物的Bethe-ansatz解如何精确分解为Lieb–Liniger模型和吸引性自旋-1 2 费米子Yang–Gaudin模型的解。借助另外两个模型的已知结果，这使我们能够得到该混合物的显式解析结果 [36]。在弱相互作用下，这组特殊参数描述的是由自由费米子和弱相互作用玻色子组成、且二者之间弱耦合的系统。费米子密度满足：孤立费米子系统的费米速度等于孤立弱相互作用玻色子系统的声速。然而，由于玻色子–费米子相互作用，两个速度发生分裂。式（61）中的次领项描述了这一现象，并表明速度分裂以一种不同寻常的方式标度，即 $\gamma^{3/4}$。

后一个结果可以通过一种简单的玻色化方法得到 [37]，该方法归结为以下结论：速度的平方是矩阵的特征值

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} n_F \frac{\partial \mu_F}{\partial n_F} & n_F \frac{\partial \mu_F}{\partial n_B} \\ n_B \frac{\partial \mu_B}{\partial n_F} & n_B \frac{\partial \mu_B}{\partial n_B} \end{pmatrix}. \tag{81}$$

方程（81）中的对角矩阵元对应于自由费米子和弱相互作用玻色子的速度平方。另一方面，非对角矩阵元则体现了两个子系统之间的密度-密度相互作用。利用平均场近似下的基态能量，

$$\frac{E_0}{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi^2}{3}n_F^3 + c n_B^2 + 2c n_F n_B\right), \tag{82}$$

我们发现，方程（81）中的对角矩阵元为$(\pi\hbar n_F/m)^2$ 和 $(\hbar\sqrt{c n_B}/m)^2$。应用方程（1）要求二者相等，从而得到 $\alpha = 1 - \sqrt{\gamma}/\pi$ 在 $\gamma \ll 1$处，参见方程（51）。随后对矩阵（81）进行对角化，得到结果（61），其中只应保留第一项修正。注意，平均场能量（82）与由方程（52）确定的精确能量结果在次阶项上有所不同。相应的差值项描述了弱相互作用玻色子的第一项能量修正；它与 $\gamma^{3/2}$ [6]成正比。然而，后者并不参与速度分裂（即不影响其主阶贡献）。另一方面，方程（82）最后一项所描述的子系统间耦合，与 $\gamma^{3/2}$ 同阶，因此必须予以考虑，因为它决定了速度分裂。

此时我们必须注意，玻色–费米混合物（或许更一般地说）中的速度平方是乘积 $\mathcal{D}\mathcal{M}$ [21]的特征值，而不是矩阵（81）的特征值。尽管如此，由方程（81）得到的速度在主导阶和次主导阶上都是正确的。这是因为 $\mathcal{D}$的非对角矩阵元很小，其值为 $\mathcal{D}_{FB} \propto \gamma$；见方程（72）。事实上，Drude 权重矩阵可以分解为

$$\mathcal{D} = \frac{\pi\hbar}{m}\begin{pmatrix} n_F & 0 \\ 0 & n_B \end{pmatrix} + \mathcal{D}_{FB}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{83}$$

将公式（83）右侧第一个矩阵与 $\mathcal{M}$ 相乘即可得到公式（81）。另一方面，可以验证，公式（83）右侧第二项所产生的修正要到次次主导阶才会改变速度。因此，在当前求速度分裂的情况下，与 $\mathcal{D}_{FB}$成正比的公式（83）中的项可以忽略。不过，这种省略 $\mathcal{D}_{FB}$应被视为例外，而非普遍规则 [35]。

**致谢**

本项目部分ĺđšu QuanTEdu-FranceANR-22-CMAS-0001 France2030 计划的资助。

[1] J. Catani、G. Lamporesi、D. Naik、M. Gring、M. Inguscio、F. Mi- nardi、A. Kantian 和 T. Giamarchi，一维玻色气体中杂质的量子动力学，《物理评论A》**85**，023623（2012）。[2] R. Senaratne、D. Cavazos-Cavazos、S. Wang、F. He、Y.-T. Chang、A. Kafle、H. Pu、X.-W. Guan 和 R. G. Hulet，具有可调相互作用的一维费米气体中的自旋-电荷分离，《科学》**376**，1305（2022）。[3] P. Sch¨uttelkopf、M. Tajik、N. Bazhan、F. Cataldini、S.-C. Ji、J. Schmiedmayer 和 F. Møller，通过测量Drude权重表征量子气体中的输运，《科学》**391**，290（2026）。[4] T. Giamarchi，《一维量子物理》（克拉伦登出版社，牛津，2003）。[5] H. Bethe，《论金属理论》。I. 线性原子链的本征值和本征函数，Zeit. f¨ur Physik **71**，205（1931）。[6] E. H. Lieb 和 W. Liniger，相互作用玻色气体的精确分析。I. 一般解与基态，《物理评论》**130**，1605（1963）。[7] M. Gaudin，一维相互作用费米子系统，《物理快报A》24，55–56（1967）。[8] C. N. Yang，具有排斥性 $\delta$函数相互作用的一维多体问题的一些精确结果，《物理评论快报》19，1312（1967）。[9] E. H. Lieb 和 F. Y. Wu，一维短程单带模型的精确解中不存在莫特转变，《物理评论快报》20，1445（1968）。[10] N. Andrei、K. Furuya 和 J. H. Lowenstein，近藤问题的解，《现代物理评论》55，331（1983）。[11] H. Bergknoff 和 H. B. Thacker，有质量Thirring模型的结构与解，《物理评论D》19，3666（1979）。[12] A. Luther 和 V. J. Emery，一维电子气中的后向散射，《物理评论快报》33，589（1974）。[13] S. Coleman，量子正弦-戈登方程作为有质量Thirring模型，《物理评论D》11，2088（1975）。[14] G. Toulouse，近藤哈密顿量在某一特定˙值下基态˙能量的精确表达式，《巴黎科学院报告》268，1200（1969）。

[15] V. J. Emery 和 S. Kivelson，将双通道近藤问题映射为共振能级模型，《物理评论B辑》46，10812（1992）。[16] E. H. Lieb、T. Schultz 和 J. N. Mattis，反铁磁链的两个可解模型，《物理年鉴》（纽约）16，407（1961）。[17] C. K. Lai 和 C. N. Yang，具有排斥性 $\delta$函数相互作用的一维费米子与玻色子混合物的基态能量，《物理评论A》3，393（1971）。[18] A. Imambekov 和 E. Demler，精确解在强相互作用一维玻色–费米混合物中的应用：低温关联函数、密度分布和集体模，《物理年鉴》（纽约）321，2390（2006）。[19] M. T. Batchelor、M. Bortz、X. W. Guan 和 N. Oelkers，一维玻色-费米相互作用混合气体的精确结果，《物理评论A》72，061603(R)（2005）。[20] P. Schlottmann，一维陷阱中相互作用的超对称无自旋费米子与玻色子混合物，《现代物理快报B》30，1630007（2016）。[21] S. Chandak、A. Petkovi´c 和 Z. Ristivojevic，玻色-费米混合物的贝特拟设研究，《物理评论B辑》113，195141（2026）。[22] H. Frahm 和 G. Palacios，一维玻色-费米混合物的关联函数，《物理评论A》72，061604(R)（2005）。[23] O. I. Pˆat.u 和 A. Kl¨umper，一维量子气体的普适Tan关系，《物理评论A》96，063612（2017）。[24] C. K. Lai，具有排斥性 $\delta$函数势的一维费米子与玻色子混合物的热力学，《数学物理杂志》15，954（1974）。[25] X. Yin、X.-W. Guan、Y. Zhang 和 S. Chen，一维玻色-费米混合物的量子临界性，《物理评论A》85，013608（2012）。[26] X. Yin、S. Chen 和 Y. Zhang，《玻色-费米混合物的杨-杨热力学》，《物理评论A》79，053604（2009）。[27] E. H. Lieb，《相互作用玻色气体的精确分析。II. 激发谱》，《物理评论》130，1616（1963）。[28] F. Haldane，《证明贝特拟设可解模型具有一维量子流体的“卢廷格液体”特性》，《物理快报A》81，153（1981）。[29] J. N. Fuchs、A. Recati 和 W. Zwerger，《BCS-BEC交叉的精确可解模型》，《物理评论快报》93，090408（2004）。[30] Z. Ristivojevic，《若干贝特拟设可解模型的差分-微分方程方法》，《物理评论A》106，062216（2022）。[31] Z. Ristivojevic，《Lieb–Liniger模型》，《物理学杂志A》59，373001（2026）。[32] M. Mari˜no 和 T. Reis，《超导体的重求和》，《统计力学杂志》2019，123102（2019）。[33] C. A. Tracy 和 H. Widom，《关于δ函数费米气体的基态能量 II：进一步的渐近展开》，载于《物理学中的几何方法 XXXV》，P. Kielanowski、A. Odzijewicz 和 E. Previato 编（Springer International Publishing，查姆，2018），第209页。[34] W. Kohn，《绝缘态理论》，《物理评论》133，A171（1964）。[35] S. Chandak、A. Petkovi´c 和 Z. Ristivojevic（未发表）。[36] 请注意，感兴趣的读者可以在 $e_L$ 和 $e_Y$ 采用更多展开项后，直接解析地求得物理量级数展开中的更多项。[37] M. A. Cazalilla 和 A. F. Ho，《一维简并量子气体二元混合物中的不稳定性》，《物理评论快报》91，150403（2003）。