arXiv:2611.32818v1 [nlin.PS] 24 Nov 2026

多稳态黏弹性流动的数据驱动降阶建模

ShaoxuanChen* 和 Panayotis G. Kevrekidis美国马萨诸塞大学阿默斯特分校数学与统计学系，美国马萨诸塞州阿默斯特，邮编 01003-4515

Su Yang重庆大学数学与统计学院，中国重庆，邮编 401331

Simon J. Haward 和 Amy Q. Shen冲绳科学技术大学院大学，日本冲绳县恩纳村，邮编 904-0495

（日期：2026 年 11 月 25 日）

已有研究表明，黏弹性流体流经两个并排微圆柱时，会出现依赖于几何形状的转变，在对称、汇聚、发散和非对称发散流态之间切换，同时还存在双稳态和三稳态区域。在此，我们开发了一种数据驱动框架，利用对稳定流动状态的稀疏测量，学习描述该分岔结构的二维参数依赖正规形。我们采用流动不对称参数 I' 和 I'' 作为状态变量，并以间隙比 G 和魏森伯格数 Wi 作为控制参数。在缺乏轨迹数据的情况下，通过平衡约束和局部稳定性约束，将测得的稳态设定为学习得到的向量场的稳定平衡点。我们考察了相关正规形的多项式表示和神经网络表示，并将物理反射对称性直接纳入模型。所得模型重现了主要的、依赖于几何形状的转变，以及实验相图的整体结构。为减少未受测量数据约束的额外稳定平衡点，我们引入了一种迭代负样本程序，以完善预测得到的平衡结构。在所考察的模型中，结合平衡数据、局部稳定性、物理对称性和负样本的模型与实验相图最为吻合。剩余差异反映了可用信息有限，且仅有稀疏的平衡测量数据。总体而言，该框架旨在展示一个典型案例，说明从稀疏平衡测量推断非线性流动动力学的潜力与局限，并凸显物理约束和额外动力学信息对于重构复杂分岔结构的重要性。

I. 引言

小尺度下的黏弹性流动 [1–3] 即使惯性可以忽略，也可能表现出不稳定性 [4]。在这一状态下，弹性应力提供了非线性来源，可能导致对称性破缺、时间依赖行为，以及优选流道的选择。流动通道的选择对于多孔介质中的黏弹性流动尤为重要，因为障碍物的排列会影响优选流动通道，以及弹性不稳定性的发生、性质[5, 6]。理解几何形状如何影响黏弹性流动行为，对于过滤、 [7, 8], 地下水修复 [9–11], 和提高石油采收率 [12–14]等应用具有重要意义。

近年来，数据驱动的控制方程重构已成为非线性系统降阶建模的一条途径。例如，非线性动力学的稀疏识别（SINDy）通过从预先设定的候选库中选取合适的项——借助回归——从时间分辨测量数据中提取简约的常微分方程 [15]。其在偏微分方程（PDEs）和弱形式表述方面的扩展，使得研究人员能够识别时空规律，并提高对测量噪声的鲁棒性 [16, 17]。将稀疏回归与神经表示相结合，进一步实现了有效坐标的同步发现和控制方程 [18], , 包括从稀缺且含噪的观测中恢复偏微分方程[19]。与此同时，物理信息神经网络（PINNs）将已知约束纳入正向问题和反问题[20, 21], , 神经常微分方程则为动力向量场提供了灵活的连续时间参数化 [22], , 而傅里叶神经算子则学习参数化偏微分方程族的高效替代解映射[23]。近期采用延迟嵌入和隐状态推断的研究进展，还使得能够从部分观测中重构可解释动力学模型 [24, 25]。这些方法展现出巨大的潜力，但通常依赖时间分辨测量、导数信息或关于控制动力学的某些先验知识。

这些进展对流体力学产生了重大影响，因为高维流场可以表现出相对低维的相干动力学 [

26]。约束稀疏伽勒金回归为圆柱尾流和腔流生成了符合物理规律的降阶模型[27], , 而物理信息学习则能够根据流动可视化结果重建原本无法获取的速度场和压力场[28]。对于观测不完整的实验流动，将稀疏回归与物理约束相结合，已在从弱湍流的噪声测量数据中恢复控制方程以及潜在压力场和强迫场方面取得了显著进展 [29]。相关的弱形式方法还从高度湍流数值数据中恢复了流体力学控制方程

* 通讯作者：shaoxuanchen@umass.edu

关系 [30]。在复杂流体和黏弹性流体的背景下，研究人员开发了流变学信息神经网络，用于识别本构参数 [31], ，而物理信息方法则能够根据有限的速度数据重建应力场，并在候选黏弹性本构方程之间进行判别[32]。

与本研究尤其相关的是，此前针对受限障碍物周围剪切变稀黏弹性流动开展的实验研究。对于绕单圆柱流动的情况，弹性效应的增强会诱发稳态对称性破缺转变，使流体优先选择障碍物周围两条可用路径中的一条 [33]。最近， [34], 的研究（包括本文部分作者）考察了由两个并排微圆柱构成的更为丰富的构型。在引入第二个障碍物后，圆柱之间形成了额外的流动通道；该通道与两条外侧路径之间的竞争，导致了显著更为复杂的分岔结构。具体而言，实验揭示了对称、汇聚、发散和非对称发散等流动状态，以及取决于系统几何形状和施加流量的双稳态与三稳态区域。这些采用蠕虫状胶束溶液获得的观测结果，为本研究奠定了实验基础。

受上述数据驱动建模进展以及前述黏弹性流动中实验观察到的丰富现象学启发，本文旨在弥合这样一道鸿沟：一方面是实验上可获取但在动力学方面较为稀疏的测量数据，另一方面是有效低维动力学方程的重构。更具体地说，我们希望推断出一个统一的、耦合的、参数依赖的正规形，使其能够再现实验观察到的黏弹性流动分岔结构和多稳态现象。不同于依赖时间分辨轨迹或时间导数估计的方法，我们的框架仅使用稳定稳态的测量结果，并以两个适当定义的流动不对称参数表示。我们研究了底层向量场的多项式表示和神经网络表示，同时纳入平衡点与局部稳定性约束、系统的物理反射对称性，以及有针对性的负样本，以抑制缺乏依据的稳定分支。除重构观测到的流动状态和分岔图外，我们的目标函数还在于评估：仅凭此类受限的实验信息推断有效非线性动力学的潜力与内在局限，尤其是考察在无法获得瞬态动力学测量的情况下，能够确定全局分岔结构到何种程度。

我们对上述研究结果的介绍安排如下。第二节介绍装置的几何形状，并讨论其实验布局和可能的状态，以及我们用于诊断这些状态的有效状态变量。第三节介绍我们的数学方法和计算方法，以及系统正规形的研究结果，并将其与实验确定的[34]进行比较。最后，第四节总结我们的主要研究结果，并强调未来研究的若干方向。

II. 实验与几何设置

实验的几何形状 [34] 如图 1(1) 所示。两个圆柱将通道分为三个间隙：一个圆柱间隙，以及靠近通道壁的两个侧间隙。各间隙的相对宽度由几何参数

$$G = \frac{L_1}{L_1 + L_2},$$

其中， L_1 为 L_1 圆柱间距， L_2 为每个圆柱与相邻壁面之间的距离。施加的流量通过预期模型的第二个关键参数——魏森伯格数——来表示，

$$Wi = \frac{\lambda U}{R},$$

其中， λ 为流体松弛时间， R 为圆柱半径， $U = Q/(WH)$ 为宽度为W、高度为 H的通道内的平均速度，该通道由体积流量 Q驱动。

在较低的 Wi下，弹性不稳定性尚未出现，流动仍处于基流状态，流体通过全部三个间隙。随着 Wi 增大，流动在临界魏森伯格数 Wi_1 处发生第一次转变，具体转变为发散（D）态或汇聚（C）态，取决于 G。如图 1（2）中的代表性速度场所示，当 $G = 0.500$时，流动首先转变为D态，此时流体避开圆柱间隙，转而通过两个侧间隙。随后，在 Wi_2 处发生第二次转变，形成两个非对称发散（AD）态，流体会优先选择上侧或下侧间隙。相比之下，当 $G = 0.603$时，第一次转变会形成C态，此时流体优先通过圆柱间隙；该状态在更高的 Wi 下仍会持续。这些观察表明，流动可因几何参数 G而发生不同的转变，并且在相同条件下可能存在多个稳定流动状态。

因此，流动状态通过[34] 两个无量纲非对称参数进行表征，

$$I' = \frac{\frac{1}{2}(\bar{u}_+ + \bar{u}_-) - \bar{u}_0}{\frac{1}{2}(\bar{u}_+ + \bar{u}_-) + \bar{u}_0}, \qquad I'' = \frac{\bar{u}_+ - \bar{u}_-}{\bar{u}_+ + \bar{u}_- + \bar{u}_0}, \tag{1}$$

其中 $\bar{u}_+$、 $\bar{u}_-$ 和 $\bar{u}_0$ 分别表示通过上部、下部和圆柱间隙的平均流向速度。因此， I' 衡量了流动在两个侧间隙与中心间隙之间的分布，而 I'' 衡量了上、下侧间隙流动之间的不对称性。为便于可视化，我们还考虑了组合非对称性度量 $I = I' + I''$，该度量显示在分岔图中，但在其中不作为独立的状态变量处理

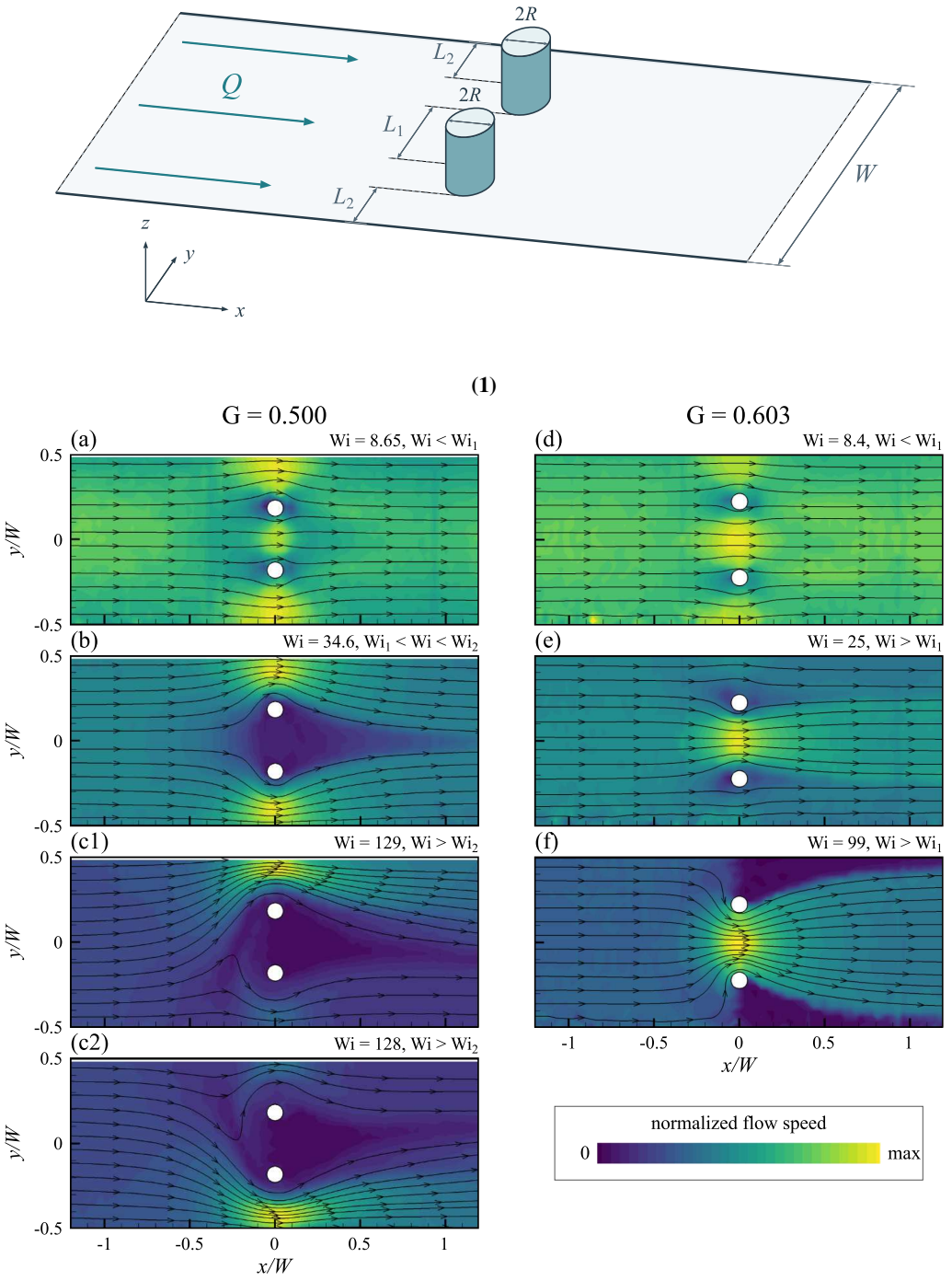


图1. 参考文献中的实验几何结构和代表性流动状态 [34]。（1） x-y 平面内通道的示意图。通道宽度为 $W = 400\,\mu\mathrm{m}$，每个圆柱的半径为 $R = 20\,\mu\mathrm{m}$，流动以体积流量 Q从左向右流动。圆柱间隙和圆柱-壁面间隙的宽度分别为 L_1 和 L_2。（2）蠕虫状胶束溶液的测得的速度场随 Wi的演化。面板（a）–（c2）对应于 $G = 0.500$，其中基流状态首先在 $Wi_1 \approx 13$处转变为发散（D）状态，随后在 $Wi_2 \approx 44$处转变为两个互为反射的非对称发散（AD）状态。面板（d）–（f）对应于 $G = 0.603$，其中基流状态首先在 $Wi_1 \approx 20$处转变为汇聚（C）状态。在该间隙比下未观察到第二次稳态转变，并且C态在更高的 Wi下持续存在。颜色表示归一化流速，黑色曲线表示流线。经Hopkins等人 [34], 许可转载。

学习得到的模型。对称态具有 $I' \approx I'' \approx 0$，D态具有 $I' > 0$ 和 $I'' \approx 0$，C态具有 $I' < 0$和 $I'' \approx 0$，而两个AD态具有 $I' > 0$ 以及 I''的大小相等、符号相反的非零值。显然，这些诊断量非常适合对该动力系统中不同的可能状态进行量化和区分。

文献 [34] 报告的稳态分岔测量结果表明，观测到的流动转变强烈依赖于间隙比。对于 $G = 0.500$，沿实验观测分支增大 Wi会产生对称态–D态–AD态的序列。相比之下，对于 $G = 0.603$，对称态转变为C态，且在稳态流动区域内未观测到后续的稳态对称性破缺转变。在中间值 $G = 0.588$下，D 分支和 C 分支在参数范围的一部分内均可通过实验获得。在更大的 Wi下，C 分支与两个与反射相关的AD分支共存，从而形成三稳态。

从对称态转变为 D 态或 C 态的首次转变，分别由 I' [正值或负值],量化，它衡量中心与侧间隙之间的流动重新分配。由 D 态转变为 AD 态的第二次转变，则由 I'' 量化，并打破上下反射对称性。实验观测到的稳态构成了用于约束我们模型平衡结构的数据。图2 以及后续分岔图中以黑色空心圆表示这些数据，并同时展示了模型预测。文献 [34], 报告的流态图（包括中间 G条件下的 D–C 双稳态区域和 AD–C 三稳态区域）在图3 的（B）面板中重现，并用于后续的相图比较。文献[34] 采用分别拟合于 I' 和 I''的四阶朗道型势描述各个转变。这些拟合捕捉了观测到的分岔的局部形式，并说明几何缺陷如何使某一分支相较于其他分支更占优势；但它们无法为 I' 和 I'' 在完整的(G, Wi)参数域内的耦合演化提供一个统一的（随时间变化的）动力系统。

在本文中，我们转而针对 I' 和 I''的耦合动力学，学习一个低维、依赖参数的正规形，其中 G 和 Wi 作为控制参数。随后利用学习得到的向量场重构平衡分支和相图。这一设定可用于检验如何结合平衡数据与物理约束，根据稀疏的实验观测推断出动力学一致的全局分岔结构。

III. 方法与结果

我们首先介绍学习问题，以及所有模型表示共同遵循的平衡点和稳定性约束。随后，我们描述物理系统的反射对称性，以及将其纳入学习到的动力学的两种方法。接下来的小节将介绍多项式模型和神经网络模型，以及各自的平衡求解器。

A. 一般设定

根据式（1），取

$$x = I', \qquad y = I'' \tag{2}$$

作为状态变量，而 G 和 Wi 作为控制参数。由 [34] 开展的工作所获得的实验数据表示为

$$\mathcal{D} = \left\{ \left(x^i, y^i, G^i, Wi^i\right) \right\}_{i=1}^{N}, \tag{3}$$

其中，(x^i, y^i)是在(G^i, Wi^i)处实验观测到的稳定流动状态。在双稳态和三稳态区间内，同一组参数值可能对应多个稳定状态，因此每个观测状态都作为 $\mathcal{D}$中的独立样本纳入。我们的目标是学习一个依赖参数的动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, G, Wi), \\ \dot{y} = f_2(x, y, G, Wi), \end{cases} \tag{4}$$

其稳定平衡点能够在(G, Wi)参数域内重现测量分支。

在固定的（G， Wi）下，所学习系统的平衡点满足

$$f_1(x, y, G, Wi) = 0, \qquad f_2(x, y, G, Wi) = 0. \tag{5}$$

由于测量数据主要由稳定平衡点组成，而非完整轨迹，因此我们通过惩罚观测状态处的向量场残差来训练模型：

$$\mathcal{L}_{\text{eq}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\left| f_1(x^i, y^i, G^i, Wi^i) \right|^2 + \left| f_2(x^i, y^i, G^i, Wi^i) \right|^2 \right]. \tag{6}$$

它们的局部稳定性由雅可比矩阵决定

$$J_i = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix}_{(x^i, y^i, G^i, Wi^i)}. \tag{7}$$

在平衡点处， J_i 的特征值决定其局部线性稳定性。对于二维系统，当

$$\operatorname{tr}(J_i) < 0, \qquad \det(J_i) > 0. \tag{8}$$

这些稳定性条件通过损失函数施加

$$\mathcal{L}_{\text{stab}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\max\{0, \operatorname{tr}(J_i) + \alpha\}^2 + w_{\det} \max\{0, \beta - \det(J_i)\}^2 \right], \tag{9}$$

其中， α和 $\beta > 0$ 提供稳定裕度， $w_{\det} > 0$ 控制行列式惩罚项的相对权重。

训练完成后，我们在整个 （G， Wi）参数定义域内求解方程（

采用 Bertini 求解 [35], , 而神经网络平衡方程则使用多起点牛顿型求根器求解。两种数值过程的详细信息见相应的小节。对于每个参数对，我们都会在每个平衡解处计算雅可比矩阵，并仅使用满足方程（8）的稳定平衡点来构建相图。根据实验分支在视觉上的分离情况，我们采用阈值 $\delta = 0.15$将每个稳定平衡点归入相应的流动状态。该阈值仅用于状态分类，不参与模型训练。

与上述讨论一致，采用容差阈值 δ，当$|x| < \delta$ 且 $|y| < \delta$时，将平衡点归类为对称态；当 $x > \delta$ 且 $|y| < \delta$时，归类为 D态；当 $x < -\delta$ 且 $|y| < \delta$时，归类为 C态。AD态在满足 $x > \delta$ 且 $y > \delta$时归类为 AD^{+}，在满足$x > \delta$ 且 $y < -\delta$时归类为 AD^{-}。对于对称性约束模型，该阈值可能无法区分弱非对称态与 D态。因此，我们还会检查最初归类为 D态的两个不同稳定根是否具有近乎相等的 x值以及符号相反且非零的 y 值。若是，则分别将其归类为 AD^{+} 和 AD^{-}。用于识别此类配对的数值判据见附录C。在给定的 (G, Wi) 下，AD^{+} 与 AD^{-} 的共存定义了 AD双稳态区域。D态与 C态的共存定义了 D–C双稳态区域，而 C态与两个 AD态同时共存则定义了 AD–C 三稳态区域。在整个参数域内应用这一流程，即可得到预测的稳定平衡分支和相图。

B. 反射对称性作为物理先验

在理想化几何结构中，通道关于水平中心线反射对称。该反射会交换上下流道，同时保持圆柱间流动不变。因此，它使 I'保持不变，并反转 I''的符号。用模型坐标表示，反射为

$$(x, y) \longmapsto (x, -y). \tag{10}$$

尽管微小的实验缺陷可能会轻微破坏这种对称性，我们仍将理想化几何结构的反射对称性用作学习动力学的物理先验。相应的向量场反射等变条件为

$$\begin{aligned} f_1(x, -y, G, Wi) &= f_1(x, y, G, Wi), \\ f_2(x, -y, G, Wi) &= -f_2(x, y, G, Wi). \end{aligned} \tag{11}$$

因此，f_1 关于 y是偶函数，而 f_2 关于 y是奇函数。特别地，$f_2(x, 0, G, Wi) = 0$，这使得 $y = 0$ 成为包含对称、D 分支和 C 分支的不变子空间。对于严格满足式 (11) 的模型，每个离轴平衡态（x^*, y^*）都有一个反射对应项（$x^*, -y^*$），且二者具有相同的局部稳定性。这两个平衡点分别对应 AD^{+} 态和 AD^{-}态。

我们通过两种方式将这一物理信息纳入模型。第一种方式是反射数据增强，即为每个观测值（x^i, y^i, G^i, Wi^i）补充其反射对应项（$x^i, -y^i, G^i, Wi^i$）：

$$\mathcal{D}_{\mathrm{aug}} = \mathcal{D} \cup \left\{ \left(x^i, -y^i, G^i, Wi^i \right) \right\}_{i=1}^{N}. \tag{12}$$

反射状态被赋予与原始观测相同的平衡点和稳定性约束。这种数据层面的方法有助于在训练数据附近得到反射一致预测，但不会在整个定义域内强制实现精确对称性。

第二种方法将方程（11）直接纳入模型表示。因此，f_1 关于 f_2 是偶函数，而 y 在整个状态域和参数域内是奇函数。下文将分别介绍多项式模型和神经网络模型中这两种数据层面与模型层面方法的实现。

C. 多项式正规形

我们首先考虑参数依赖向量场的多项式表示。这一做法源于动力系统中正规形的标准理论 [36, 37]。多项式模型提供了一个易于解释的基线，用于考察平衡点、稳定性和对称性约束如何决定所学习的分岔结构。

现有数据由在 (G, Wi) 参数定义域内稀疏采集的实验稳定平衡点组成。我们的目标是学习一个向量场，使其稳定平衡点能够再现观测到的分支，并恢复实验参数范围内的分岔结构。对于下文给出的对称性约束多项式模型，我们使用 $\mathcal{D}$ 中所有可用的原始平衡观测，不进行反射数据增强。为改善数值条件，所有四个输入均按以下方式缩放

$$\widetilde{z} = \frac{z}{s_z}, \qquad s_z = \max_i |z^i| + 10^{-12}, \qquad z \in \{x, y, G, Wi\}. \tag{13}$$

多项式向量场及其稳定性约束均在这些缩放坐标中进行评估。为重建平衡点，学习得到的方程将按下文所述以原始坐标表示。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \widetilde{x}^1 & \widetilde{y}^1 & \widetilde{G}^1 & \widetilde{Wi}^1 \\ \widetilde{x}^2 & \widetilde{y}^2 & \widetilde{G}^2 & \widetilde{Wi}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{x}^N & \widetilde{y}^N & \widetilde{G}^N & \widetilde{Wi}^N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 4}. \tag{14}$$

自然，这种表示也有一定局限性。正规形通常预期仅在分岔点附近有效，而在这里，我们旨在优化所识别多项式形式在现有数据集中的应用。我们预计，这会在一定程度上限制这种表示的适用性，

不过，如果取得成功，我们或许就能获得一种可解释表示，不仅涵盖分岔点的直接邻域，也能体现更高阶效应。考虑到这一点，同时认识到这些潜在局限性，我们提出了正规形各项的相关函数形式。

根据这些输入，我们构造出如下形式的单项式特征

$$\phi_k(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{G},\widetilde{Wi}) = \widetilde{x}^{p_k}\widetilde{y}^{q_k}\widetilde{G}^{m_k}\widetilde{Wi}^{n_k}. \tag{15}$$

为控制多项式表示的复杂度，我们根据以下条件限制候选单项式的次数：

$$\begin{aligned} &p_k + q_k \le d_{\text{state}}, \quad m_k + n_k \le d_{\text{param}}, \\ &p_k + q_k + m_k + n_k \le d_{\text{total}}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中，d_{state}、d_{param}和d_{total}分别控制状态变量的次数、控制参数的次数以及总次数。

我们分别为向量场的两个分量构造字典。为强制施加第IIIB节所述的反射对称性，f_1的字典仅包含具有偶函数q_k的单项式，而f_2的字典仅包含具有奇函数q_k的单项式。在数值实验中，我们设定

$$d_{\text{state}} = 4, \qquad d_{\text{param}} = 2, \qquad d_{\text{total}} = 5,$$

并排除常数特征。每个分量$j \in \{1,2\}$保留的单项式记为$\{\phi_k^{(j)}\}_{k=1}^{M_j}$，其中$M_j$为候选特征的数量。在缩放观测值处计算这些特征，得到

$$\mathbf{\Phi}_j = \begin{bmatrix} \phi_1^{(j)}(\widetilde{x}^1,\widetilde{y}^1,\widetilde{G}^1,\widetilde{Wi}^1) & \cdots & \phi_{M_j}^{(j)}(\widetilde{x}^1,\widetilde{y}^1,\widetilde{G}^1,\widetilde{Wi}^1) \\ \phi_1^{(j)}(\widetilde{x}^2,\widetilde{y}^2,\widetilde{G}^2,\widetilde{Wi}^2) & \cdots & \phi_{M_j}^{(j)}(\widetilde{x}^2,\widetilde{y}^2,\widetilde{G}^2,\widetilde{Wi}^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(j)}(\widetilde{x}^N,\widetilde{y}^N,\widetilde{G}^N,\widetilde{Wi}^N) & \cdots & \phi_{M_j}^{(j)}(\widetilde{x}^N,\widetilde{y}^N,\widetilde{G}^N,\widetilde{Wi}^N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times M_j}, \qquad j = 1,2. \tag{17}$$

Let

$$\mathbf{a} = [a_1,\dots,a_{M_1}]^{\mathsf{T}}, \qquad \mathbf{b} = [b_1,\dots,b_{M_2}]^{\mathsf{T}}$$

表示可学习系数向量。在观测状态处的向量场值通过线性投影组装为

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{\Phi}_1\mathbf{a}, \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{\Phi}_2\mathbf{b}. \tag{18}$$

等价地，在缩放坐标下，学习得到的正规形为

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}} = f_1(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{G},\widetilde{Wi}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{M_1} a_k\phi_k^{(1)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{G},\widetilde{Wi}), \\ \dot{\widetilde{y}} = f_2(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{G},\widetilde{Wi}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{M_2} b_k\phi_k^{(2)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{G},\widetilde{Wi}). \end{cases} \tag{19}$$

因此，该模型关于状态变量和控制参数是非线性的，但关于未知系数是线性的。通过在观测状态处施加平衡点条件，并利用雅可比矩阵强制其局部稳定性，可以学习这些系数。由于该模型是多项式模型，雅可比矩阵可通过对单项式特征关于$\widetilde{x}$和$\widetilde{y}$求导进行解析计算，从而避免数值微分。为获得紧凑的表示形式，我们采用稀疏性惩罚

$$\mathcal{L}_{\text{sparse}} = \|\mathbf{a}\|_1 + \|\mathbf{b}\|_1. \tag{20}$$

完整的训练目标为

$$\mathcal{L}_{\text{poly}} = \mathcal{L}_{\text{eq}} + \lambda_{\text{stab}}\mathcal{L}_{\text{stab}} + \lambda_{\text{sparse}}\mathcal{L}_{\text{sparse}}, \tag{21}$$

其中$\mathcal{L}_{\text{eq}}$和$\mathcal{L}_{\text{stab}}$分别在公式（6）和（9）中定义。系数通过全批次Adam进行优化。训练超参数及其他实现细节见附录A。

在模型开发过程中，我们还考察了反射对称性在多项式模型中的作用。无约束模型无法准确再现实验中的平衡点分支，如附录B所示。尽管如式（12）所示，反射数据增强改善了重构效果，但直接在多项式表示中施加偶奇结构，与实验分支更加吻合。此外，将对称性约束与数据增强相结合并未带来任何明显改善。因此，在下文所呈现的结果中，我们重点采用不使用数据增强的对称性约束多项式模型。

将多项式向量场拟合至所有可用的平衡观测后，我们代入输入缩放，以便在原始的x、y、G和Wi坐标中表示平衡方程。对于指数为（p、q、m、n）的单项式，其对应系数变为

$$c_{\text{eq},k} = \frac{c_{\text{scaled},k}}{s_x^p s_y^q s_G^m s_{Wi}^n}, \qquad k = 1,2. \tag{22}$$

该变换保留了平衡解。随后，使用 Bertini 1.7 版（一种用于多项式方程的数值同伦延拓软件包）在原始输入坐标中求解方程（5），从而获得平衡点 [35]。每个返回的有限实根都会被映射到缩放坐标，并根据完整学习得到的多项式进行检验

多项式方程。当一个根满足条件时，将其保留

$$\sqrt{|f_1(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{G},\widetilde{Wi})|^2+|f_2(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{G},\widetilde{Wi})|^2}<10^{-6}. \quad (23)$$

根据相对于$\widetilde{x}$和$\widetilde{y}$的雅可比矩阵确定稳定性，这与训练过程一致。仅保留在原始坐标中满足 $|x|\le 1.5$ 和 $|y|\le 1.5$ 的稳定根，用于绘制分岔图和相图。

对于单参数分岔图，在 $G=0.500$、0.588 和 0.603 处重复计算

$$Wi=1,6,\ldots,196.$$

对于双参数相图，在以下范围内执行相同的计算

$$G=0.50,0.51,\ldots,0.63, \qquad Wi=8,13,\ldots,198.$$

在每个参数对处，根据第 IIIA 节中介绍的判据，将保留的稳定平衡点分类为对称态、C态、D态或AD态。在该参数值下，共存的稳定状态集合决定了重构的相。因此，分岔图和相图是根据学习得到的向量场的平衡结构获得的，而不是通过直接预测相标签得到的。

图 2 和 3 展示了根据最终多项式模型重构的分岔图和相图，该模型具有精确的偶奇结构且未采用反射数据增强。模型使用所有可用的平衡点观测数据进行拟合，然后在上述更密集的参数网格上进行评估。图 2 将 $G=0.500$、0.588 和 0.603 处预测的稳定平衡点与实验观测进行了比较。黑色空心圆表示实验数据，叉号和彩色符号表示学习得到的多项式向量场的稳定平衡点。

对于 $G=0.500$，该模型再现了观测到的 D 分支和两个 AD分支。然而，与实验相比，从 D态 到 AD 的转变发生在更大的 Wi 处。该模型还预测了 $Wi\gtrsim 100$对应的一个额外 C 分支，但实验中并未观测到。对于 $G=0.588$，该模型恢复了 D、C 和两个 AD分支，但预测的 C 和 AD态起始点均向更大的 Wi偏移。特别是，在实验观测到 AD分支 的参数范围中，有相当一部分范围内模型未能预测出这些分支。对于 $G=0.603$，该模型再现了较大 Wi处的 C 分支，但其起始点同样有所延迟。该模型还在较宽的 Wi 范围内预测了一个额外的 D 分支。在更大的 Wi处，该分支进一步发生对称性破缺转变，形成两个 AD分支。在该间隙比下，实验中既未观测到 D态，也未观测到 AD态。因此，尽管多项式模型捕捉到了稳定分支的主要类型，但在定位其起始点方面准确性较低，并且在参数域的部分区域引入了额外的稳定状态。

图 3 比较了重构相图与实验结果。在实验中，低Wi 流动对所有 G均呈对称状态。增加 Wi 会在较小 G下先产生 D，随后产生 AD；在较大 G 下产生 C，并在狭窄的中间范围内出现 D–C 和 AD–C 共存。多项式模型并未完全恢复这种对 G 的依赖关系。相反，对于 $G\lesssim 0.58$，D 分支会延伸至采样到的最低 Wi；而在几乎整个 G 范围内，只要 Wi 足够大，模型就会预测出 C。额外的 C 和 D 分支分别导致 AD–C 共存区域和 D–C共存区域比预期更宽。

在较小的 G 下，额外的 C 分支在广泛的高 Wi 范围内与两个 AD分支共存。因此，该模型预测在实验仅显示两个 AD态的区域内，C、AD$^+$ 和 AD$^-$ 三者呈现三稳态。在较大的 G 下，该模型预测在中等 Wi 时出现 D–C双稳态，随后在更高的 Wi 下，C、AD$^+$ 和 AD$^-$ 之间呈现三稳态。相比之下，实验在参数域的这一部分仅识别出 C态。因此，预测的多稳态区域远远超出了实验观测到的狭窄中间 G 范围。尽管对称性约束多项式模型能够恢复各个流动状态，但它无法再现这些状态在整个参数域中的分布。这在一定程度上可能反映了多项式表示在宽参数范围内灵活性有限。正是这一局限性促使我们在下一节考虑更灵活的神经网络表示。

D. 神经网络正规形

多项式表示具有可解释性，但其灵活性受到预先规定的单项式库的限制。因此，我们考虑使用神经网络表示，使状态变量和控制参数之间能够建立更一般的非线性依赖。我们分三个阶段构建这些模型。首先，使用不受约束的神经网络直接参数化向量场。随后，通过对称性投影架构严格施加物理反射对称性。最后，引入迭代式负样本程序，以移除实验观测不支持的其他稳定平衡点。

1. 直接神经网络模型

我们首先使用神经网络直接表示向量场。不同于多项式模型（其中，所有四个输入都经过缩放，以改善多项式特征的数值条件性），我们仅对控制参数进行缩放 G，并Wi 遵循式（13）。由于 x 和 y 是归一化的流动不对称性度量，其值通常介于 -1 和 1之间，因此可以直接将其用作网络输入，而不会引入输入尺度之间的较大差异。随后，将观测到的平衡点组装成输入矩阵

$$\mathbf{X}_{\mathrm{NN}}=\begin{bmatrix} x^1 & y^1 & \widetilde{G}^1 & \widetilde{Wi}^1 \\ x^2 & y^2 & \widetilde{G}^2 & \widetilde{Wi}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^N & y^N & \widetilde{G}^N & \widetilde{Wi}^N \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{N\times 4}. \quad (24)$$

该网络由一个共享非线性主干 $T_{\boldsymbol{\theta}}$ 和两个标量输出头 $H_{\boldsymbol{\theta},\,1}$ 和 $H_{\boldsymbol{\theta},\,2}$组成。应用

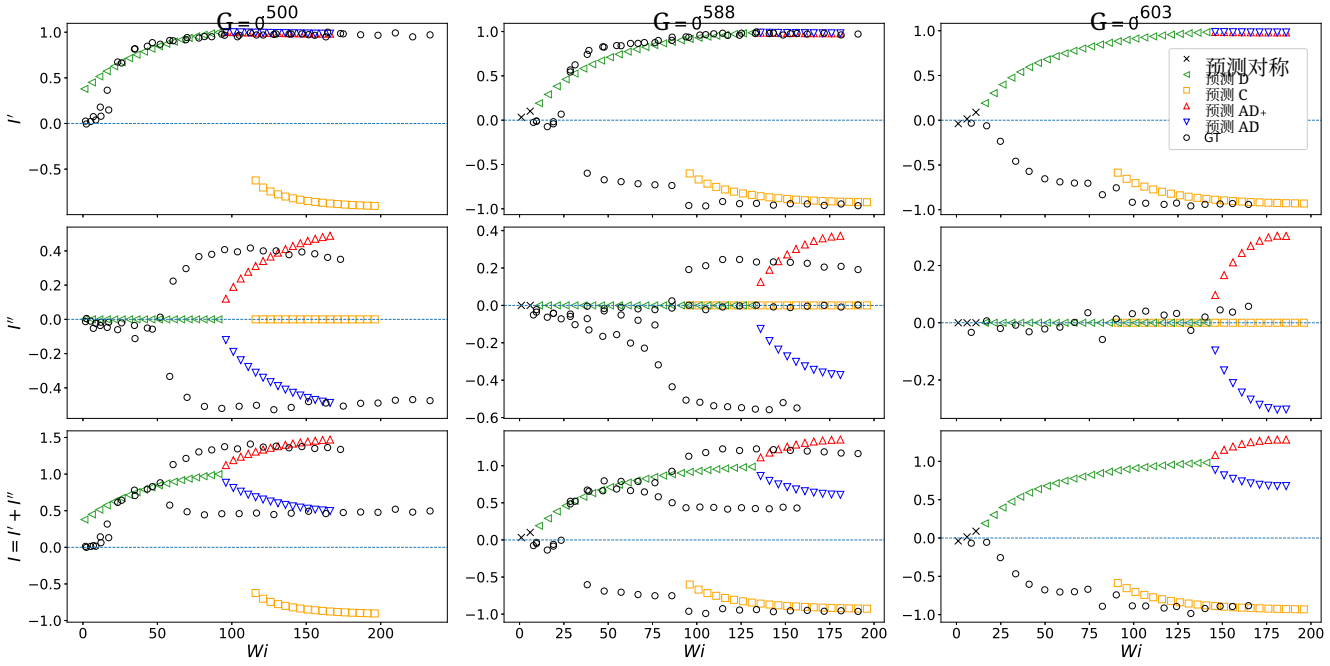
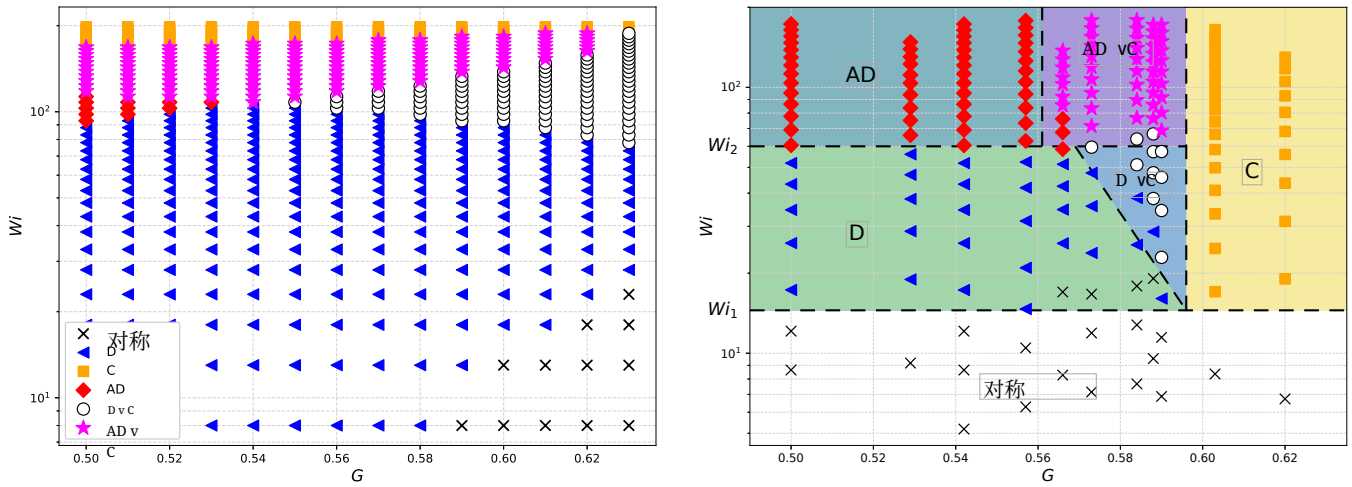


图2。由未经反射数据增强的最终对称性约束多项式正规形重构的分岔图。从左到右，各列分别对应 $G = 0.500$、 $G = 0.588$ 和 $G = 0.603$；各行分别显示 $I' = x$、 $I'' = y$ 和 $I = I' + I''$。黑色空心圆表示实验平衡测量值，在图例中标记为“GT”（真实值）。十字表示预测的对称态，向左三角形表示 D态，方形表示 C态，向上和向下三角形分别表示 AD^{+} 和 AD^{-} 态。图中仅显示学习得到的向量场的稳定平衡点。满足 $|I'| < 0.15$ 和 $|I''| < 0.15$ 的预测平衡点被归类为对称态。该模型再现了观测到的主要分支，但有若干转变向较大的 Wi方向偏移。此外，模型还预测了位于 $G = 0.500$ 的额外 C 分支，以及位于 $G = 0.603$的额外 D 分支和 AD分支。



(A) **(B)**

图3. 重构相图与实验相图的比较。（A）由未采用反射数据增强的对称性约束多项式模型的稳定平衡点得到的相图。十字、左指三角形、方形和菱形分别表示对称态、D态、C态和AD态。空心圆表示D–C双稳态，星号表示AD–C三稳态。该模型预测，在参数范围的大部分区域内，低 Wi对应D态，而在较大 Wi的情况下几乎所有 G均对应C态，从而导致多稳态区域过宽。（B）实验流动稳定性图，显示低 Wi时的对称流动、小 G时的D/AD行为、大 G时的C行为，以及中间 G范围内的多稳态。后一图经Hopkins等人 [34], 许可后转载。

于各观测行后，该架构可概括为

$$\mathbf{X}_{\mathrm{NN}} \in \mathbb{R}^{N\times 4} \xrightarrow{T_{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N\times 50} \xrightarrow{H_{\boldsymbol{\theta},1}, H_{\boldsymbol{\theta},2}} (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \in \mathbb{R}^{N} \times \mathbb{R}^{N}. \tag{25}$$

共享主干包含三个宽度为 50 的全连接层，每层后接一个双曲正切激活。每个输出头包含一个宽度为 64 的全连接层、一个双曲正切激活，以及一个标量输出层。由此得到的向量场为

$$\begin{cases} \dot{x} = f_{\boldsymbol{\theta},1}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi}) = H_{\boldsymbol{\theta},1}\left[T_{\boldsymbol{\theta}}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi})\right], \\ \dot{y} = f_{\boldsymbol{\theta},2}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi}) = H_{\boldsymbol{\theta},2}\left[T_{\boldsymbol{\theta}}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi})\right]. \end{cases} \tag{26}$$

共享主干学习流动状态的通用非线性表示，而两个输出头则分别对动力学的两个分量进行参数化。

与多项式形式一样，该网络使用稳定平衡观测而非时间轨迹进行训练。平衡损失函数见方程（6），其中向量场在缩放后的控制参数处进行评估。雅可比导数通过自动微分计算，由此得到的迹和行列式用于方程（9）中定义的稳定性损失。由于神经网络表示没有多项式系数向量，因此不包含稀疏性惩罚。故完整的训练目标为

$$\mathcal{L}_{\text{direct}} = \mathcal{L}_{\text{eq}} + \lambda_{\text{stab}}\mathcal{L}_{\text{stab}}. \tag{27}$$

训练完成后，将缩放后的控制参数作为神经网络输入，通过求解方程（5）重建平衡分支。由于双曲正切网络是非多项式的，无法使用 Bertini 进行此项计算。因此，我们采用基于 Powell 混合法的多起点牛顿型求根过程，并以 $(x,\ y)$ 定义域内的网格点作为初始值。根据残差筛选收敛解，合并重复根，并根据雅可比矩阵的特征值确定局部稳定性。下文介绍的神经网络模型也采用相同的求根过程。更多数值细节见附录 C。

直接神经网络模型使用未经反射数据增强的原始平衡观测进行训练。图 4 比较了在三个具有代表性的间隙比下，学习得到的向量场所预测的稳定平衡点与实验测量值。该模型再现了若干独立分支，但未能恢复完整的分岔结构。在 $G = 0.500$处，模型捕捉到了初始的 D 分支和随后的 AD分支，但预测的 I'' 转变发生在比实验数据更大的 Wi 处。预测得到的两个 AD分支并不是彼此的精确反射。模型还在中等 Wi 处预测出一条较短的 C 分支，并在更大的Wi处预测出其他未分类平衡态。在 $G = 0.588$处，模型近似再现了共存的 D 和 C 分支，但未能恢复从 D态到两个 AD态的次级转变。在 $G = 0.603$处，实验观测到的 C 分支得到了较为合理的再现，但模型还预测出其他正值-I' 平衡点，其中大多数被分类为 AD态。预测得到的 AD^+ 和 AD^- 分支覆盖了不同范围的 Wi，且不满足预期的反射对称性。

这些分支层面的误差也反映在图中所示的重构相图中。5（A）。在较小的 G条件下，该模型总体上捕捉到了从对称态到 D态、再到 AD态的演变过程，随着 Wi 的增加而变化。然而，在间隙比小至 $G = 0.50$时，模型也预测出 D–C 共存，而实验仅识别出 D态或 AD态。类似地，预测的 AD–C 区域延伸至约$G = 0.55$，超出了实验观察到的中间 G 范围。在较大的 G条件下，差异变得更加明显。在接近 $G = 0.59$–0.61时，模型预测出宽广的 D–C区域和 AD–C 区域，而实验相图显示的是从狭窄的多稳态区域向 C态的转变。在采样参数域内，该模型未能恢复出仅 C 状态区域。相反，对于 $G \gtrsim 0.60$，额外的 AD态、AD– C 共存以及未分类状态仍然存在，而实验主要识别出 C态。因此，该直接神经网络在较小的 G 条件下捕捉到了部分实验相图，但未能正确再现较大 G条件下多稳态区域的范围或 C 主导区域。

我们还在模型开发过程中测试了反射数据增强。它并未改善直接神经网络重构，反而导致对稳定平衡分支的重构精度降低。因此，在下文展示的神经网络模型中，我们不使用反射数据增强。上述结果还表明，仅凭平衡点损失函数和稳定性损失，并不能使学习得到的向量场自动满足反射对称性。接下来，我们通过网络架构直接施加该对称性，确保在整个状态域和参数域内，f_1 关于 y 为偶函数，而 f_2 关于 y 为奇函数。

2. 对称性投影神经网络正规形

直接神经网络并不能保证其输出遵循物理系统的反射对称性。为了精确施加该对称性，我们保留相同的底层网络架构，但对其输出应用反射平均投影。设

$$g_{\boldsymbol{\theta},1}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi}), \qquad g_{\boldsymbol{\theta},2}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi})$$

表示网络的两个无约束输出。学习得到的向量场的分量定义为

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{\theta},1}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi}) &= \frac{1}{2}\Big[g_{\boldsymbol{\theta},1}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi}) + g_{\boldsymbol{\theta},1}(x, -y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi})\Big], \\ f_{\boldsymbol{\theta},2}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi}) &= \frac{1}{2}\Big[g_{\boldsymbol{\theta},2}(x, y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi}) - g_{\boldsymbol{\theta},2}(x, -y, \widetilde{G}, \widetilde{Wi})\Big]. \end{aligned} \tag{28}$$

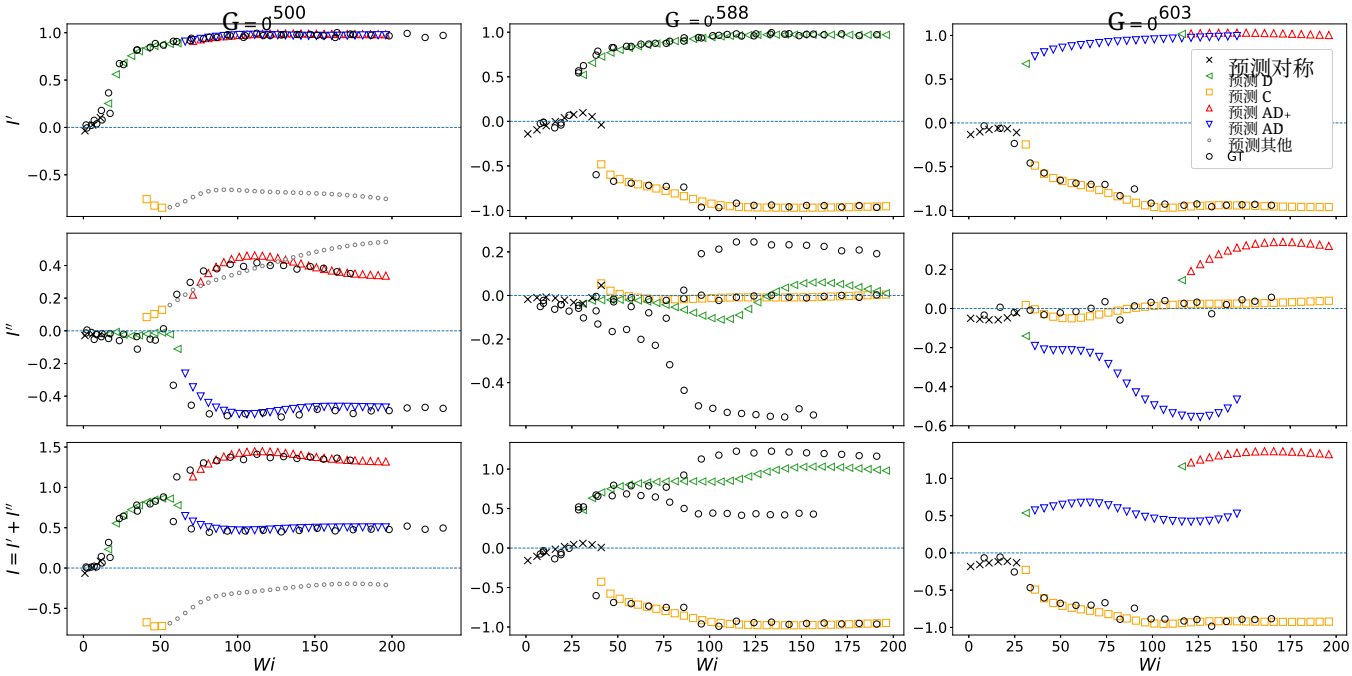
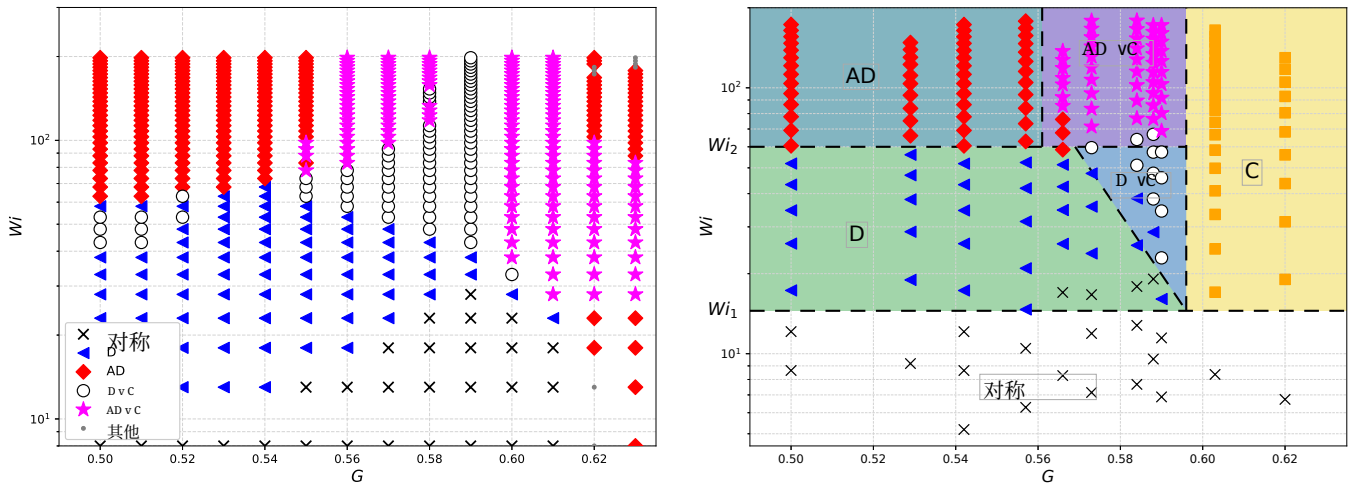


图4. 使用未经反射数据增强训练的直接神经网络模型重构的分岔图。各列分别对应 $G = 0.500$、 $G = 0.588$和 $G = 0.603$，各行分别显示 I'、 I''和 $I = I' + I''$。彩色符号表示学习得到的向量场预测的稳定平衡点，黑色空心圆表示实验测量值。该模型将 $G = 0.500$处的 AD 转变推迟，在 $G = 0.588$处无法恢复 AD 分支，并在 $G = 0.500$ 和$G = 0.603$处预测出额外的稳定平衡点。预测的 AD^+ 和 AD^- 分支也不满足预期的反射对称性。



(A) **(B)**

图5. 重构相图与实验相图的比较。(A) 根据未采用反射数据增强训练的直接神经网络模型的稳定平衡点重构得到的相图。在较小的 G范围内，模型大体上恢复了 D 区域和 AD 区域，但预测的 D–C 区域和 AD–C 区域超出了实验观察到的 G中间范围。模型也未能恢复较大 G时的仅 C 状态区域，此处仍存在其他 AD、多稳态及未分类状态。(B) 在(G, Wi) 参数空间中的实验流动稳定性图。符号表示测得的对称、D、C 和 AD 态，彩色区域和虚线边界则标示相应的稳定区域和多稳态区域。中间间隙区域包含 D–C 双稳态和 AD–C 三稳态。经 Hopkins等人许可转载。[34], 。

根据构造，投影向量场满足式（11）中的反射对称条件，而与网络的任何选择无关

工作参数。因此，$f_{\boldsymbol{\theta},\,1}$ 关于 y 严格为偶函数，而 $f_{\boldsymbol{\theta},\,2}$关于 y 严格为奇函数，与所学习的网络参-

数无关。该投影使 $y = 0$ 成为一个不变子空间，并保证每个离轴平衡态（x^*，y^*）都有一个具有相同局部稳定性的镜像平衡态（x^*，$-y^*$）。

对称性投影模型仅使用原始平衡观测进行训练，未通过反射数据增强。除投影操作外，其底层网络架构、参数缩放和优化设置均与直接模型保持不变。我们采用与式（27）相同的训练目标，并使用式（28）中的投影向量场计算两个损失项。随后，按照附录 C 中所述的相同多起点求根过程，计算稳定平衡点。

图 6 展示了由对称性投影模型重构的稳定平衡分支。在 $G = 0.500$，模型再现了从对称态到 D 态的转变，以及随后形成的两个 AD 分支。与直接网络不同（这也是设计所致），预测的两个 AD 分支具有相同的 I'、相反的I''值，且稳定性相同。它们出现的位置接近实验观测到的转变。然而，对于 $Wi \gtrsim 100$，模型还预测出一条额外的稳定 C 分支。在$G = 0.588$，模型近似再现了正、负 I' 分支，但未能恢复 I''中相应的结构。预测的正I' 分支仍处于 $I'' = 0$，因此未发生实验观测到的从 D 态到两个 AD 态的转变。模型再现了 C 分支中较高Wi 部分，但未能还原其向较低 Wi延伸的部分。在 $G = 0.603$，C 分支中较高Wi 部分也得以再现，但在中等和较高Wi 范围内，另一条额外的稳定 D 分支仍然存在。此外，对于 $G = 0.588$ 和 $G = 0.603$，模型还预测出低 Wi 下孤立的 C 平衡点。因此，对称性投影确保了 AD 态的正确配对，但本身并不能消除缺乏依据的稳定分支，也不能恢复完整的实验分支结构。

对应的相图如图7(A)所示。与直接神经网络相比，相态分类更加规整，因为此时 AD态呈反射相关对的形式出现。模型捕捉到了从小 G 时的 D 和 AD 行为，逐渐转变为包含 C 的状态这一总体变化；随着 G 增大，这种变化也随之发生。然而，与图7(B)中的实验相图对比后，可以发现几处系统性误差。对于$0.50 \lesssim G \lesssim 0.57$ 以及较大的 Wi，额外的 C 分支与两个 AD 分支共存。因此，模型预测该区域出现 AD–C 三稳态，而实验则将其判定为 AD 状态区。在 $G = 0.588$附近，预测的正I' 分支仍保持在 $I'' = 0$ 上，而没有分裂为两个 AD 分支。结果是，在较大的Wi下，D–C双稳态仍然存在，取代了实验观察到的部分 AD–C 区域。对于 $G \gtrsim 0.60$，额外的 D 分支与 C 共存，使预测的 D–C 双稳态区域延伸至实验观察到的 C 状态区。因此，对称性投影修正了 AD态的反射相关配对，并改善了与实验观察相图的整体吻合度，但仍未能完全确定正确的稳定分支集合。

为进一步改进我们对正规形的表示，一个关键观察如下：平衡点和稳定性损失将测量态限制为稳定平衡点，但不会惩罚观测之外的其他稳定根。为解决这一问题，我们引入了迭代细化过程，在该过程中，识别出实验数据不支持的稳定平衡点，并在训练期间将其作为负样本加入。

3. 使用负样本进行迭代细化

如图 6所示，对称性投影模型在 $G = 0.500$ 和较大的 Wi 处预测出一个额外的稳定 C 分支，并在中等和较高 Wi 范围内的 $G = 0.603$ 处预测出一个额外的稳定 D 分支。前者在较小间隙比处产生 AD–C 三稳态，而实验在这些位置识别出 AD 状态；后者在较大间隙比处产生 D–C双稳态，而实验在这些位置识别出 C。这些误差显示在图 7的（A）面板中。

为减少这些缺乏依据的分支，我们引入了一种迭代细化流程，对实验观测不支持的预测稳定分支施加惩罚。在每个训练阶段之后，我们在参数域上计算稳定分支，并将其与实验相图进行比较。将流动状态分类与实验相图不一致的预测稳定根收集到

$$\mathcal{D}_- = \left\{ \left(x_j^-, y_j^-, G_j^-, Wi_j^- \right) \right\}_{j=1}^{N_-}. \tag{29}$$

与测量平衡态不同，这些点在后续训练过程中不受必须保持为平衡态或局部稳定的约束。相反，除非每个负样本处的雅可比矩阵具有一个实部足够为正的特征值，否则将对其施加惩罚。

令 J_j^- 表示在第 j 个负样本处计算得到的雅可比矩阵。我们将其特征值中实部的最大值定义为

$$\mu_{\max}(J_j^-) = \max_{\zeta \in \sigma(J_j^-)} \mathrm{Re}(\zeta), \tag{30}$$

其中，$\sigma(J_j^-)$ 表示 J_j^- 的特征值集合。局部稳定的平衡点满足 $\mu_{\max} < 0$。因此，我们将负样本损失定义为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{neg}} = \frac{1}{N_-} \sum_{j=1}^{N_-} \left[\max \left\{ 0, \gamma_{\mathrm{neg}} - \mu_{\max}(J_j^-) \right\} \right]^2, \tag{31}$$

其中，$\gamma_{\mathrm{neg}} > 0$ 是不稳定性裕度。当 $\mu_{\max}(J_j^-) < \gamma_{\mathrm{neg}}$ 时，该损失函数处于激活状态，并促使至少一个雅可比矩阵特征值的实部大于 γ_{nego}。由于未在负样本处施加平衡残差，相应的根可能在微调过程中发生移动或消失。如果该点仍然是一个平衡点，则该损失函数会促使其变得局部不稳定。

模型通过以下方式进行微调

$$\mathcal{L}_{\mathrm{iter}} = \mathcal{L}_{\mathrm{eq}} + \lambda_{\mathrm{stab}} \mathcal{L}_{\mathrm{stab}} + \lambda_{\mathrm{neg}} \mathcal{L}_{\mathrm{neg}}. \tag{32}$$

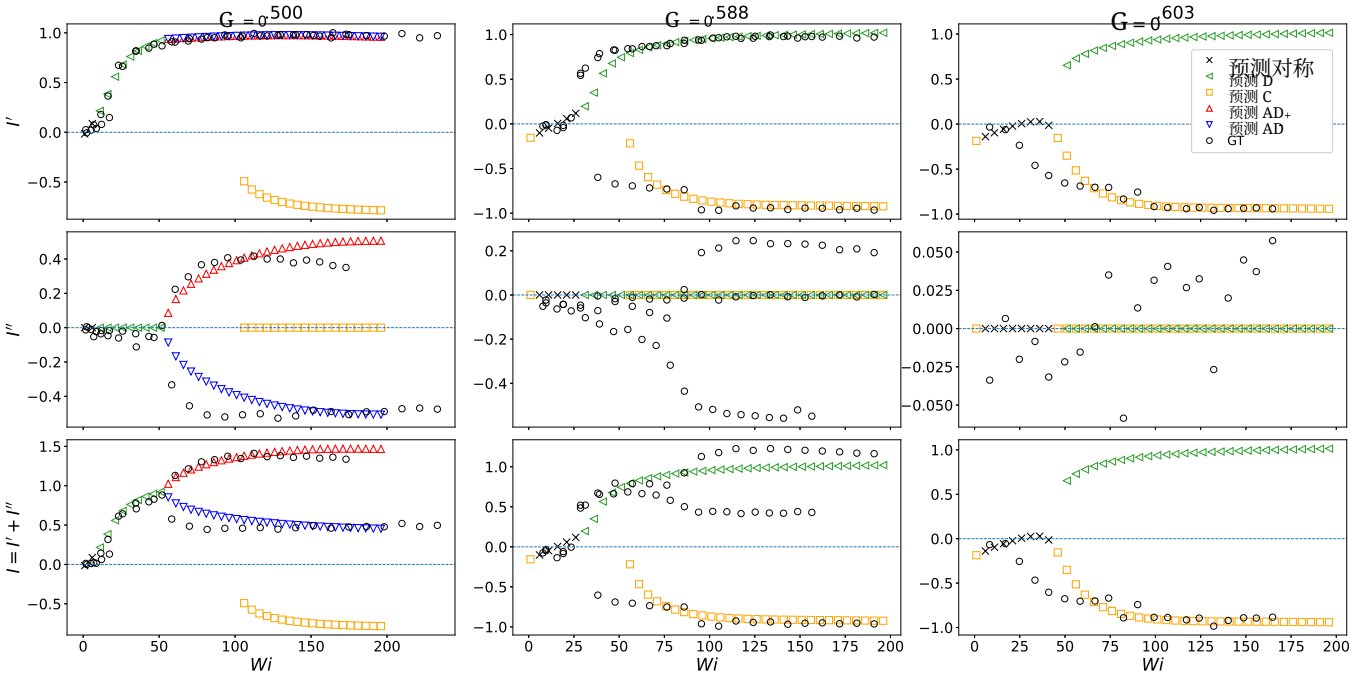


图6。由对称性投影神经网络正规形重构的分岔图。各列分别对应 $G = 0.500$、$G = 0.588$ 和 $G = 0.603$。各行分别显示 I'、I'' 和 $I = I' + I''$。有色符号表示学习得到的向量场预测的稳定平衡点，黑色空心圆表示实验测量值。对称性投影产生了成对的 AD^+ 和 AD^- 分支，它们具有相同的 I' 和相反的 I''。在 $G = 0.500$处，该模型捕捉到了主要的 D 和 AD 分支，但在较大的 Wi处预测出一个额外的稳定 C 分支。在 $G = 0.588$处，该模型近似再现了正、负 I' 分支，但预测的正-I' 分支仍位于 $I'' = 0$ 上，未分裂为实验观测到的两个 AD 分支。在 $G = 0.603$处，该模型再现了 C 分支的高-Wi 部分，但保留了一个额外的稳定 D 分支。

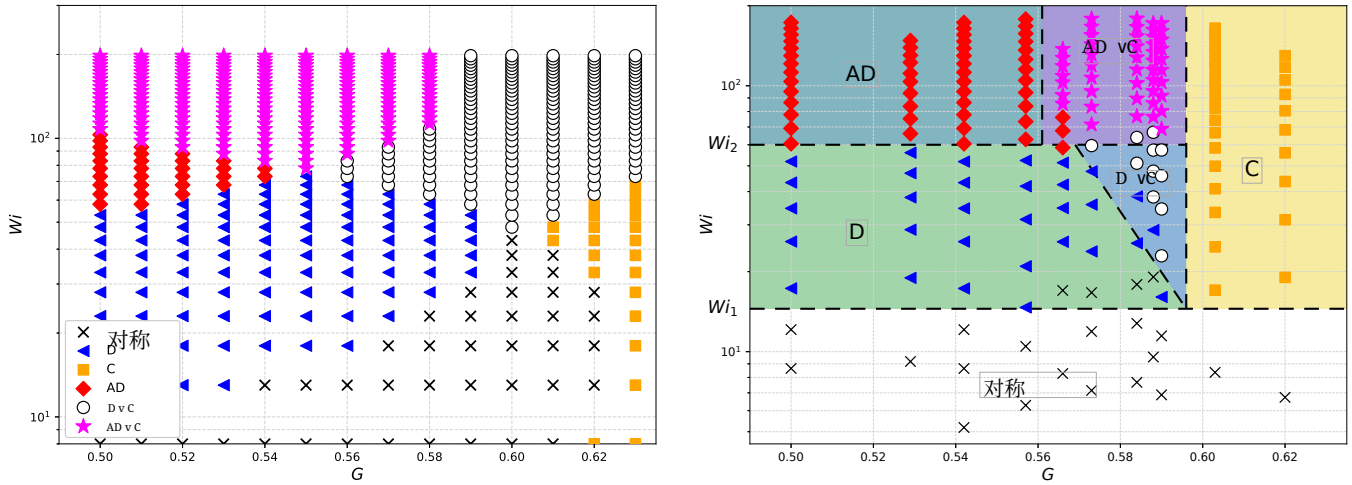


图7. 重构相图与实验相图的比较。(A) 根据对称性投影神经网络正规形的稳定平衡点重构的相图。对称性投影确保 AD 态以反射相关对的形式出现。然而，额外的 C 分支导致小 G处的 AD–C 三稳态区域过宽；而在 $G = 0.588$ 附近缺失的 AD 分支，使 D–C 双稳态在较大 Wi处持续存在；此外，额外的 D 分支使 D–C 区域延伸至较大的G区域。(B) $(G,\ Wi)$ 参数空间中的实验流动稳定性图。符号表示测得的对称态、D态、C态和 AD 态，彩色区域及虚线边界则标示相应的稳定区域和多稳态区域。中间间隙区域包含 D–C 双稳态和 AD–C 三稳态。经 Hopkins等人 [34], 许可转载。

前两项维持平衡点和稳定性条件——　　在测量态处的约束，而第三项则抑制

从其余稳定平衡点中选取负样本。每个微调阶段结束后，都会重新计算平衡分支，并可在下一轮细化中将其他不受支持的稳定根纳入负样本池。整个过程中均保留对称性投影架构，且不使用反射数据增强。负样本区域、分类标准、损失权重和微调设置见附录D。

我们将此过程应用于在 $G = 0.500$ 处预测出的额外 C 分支。如图 8 所示，在采样的 Wi 范围内，目标分支被移除，而 D 分支和两个与反射相关的AD分支得以保留。在 $G = 0.588$ 和 $G = 0.603$ 处的 C 分支也仍然存在，这表明这种细化不会消除整个参数域中的 C 分支行为。微调后，其他预测分支几乎没有变化。这些结果表明，负样本能够有选择地移除一个不受支持的稳定分支，同时保留反射对称性以及其他位置受到实验支持的分支。

相应的相图如图 9(A) 所示。图 8 中的分支级修正明显改善了相分类。在较小的 G下，模型现在能够重现从对称态到 D 态、再到 AD 态的演变过程，且这一过程随 Wi 增大而发生。移除额外的 C 分支后，此前大部分被高估的 AD–C 区域消失，并恢复了小G、高Wi定义域内的 AD 状态。因此，预测的 AD–C 区域集中在中间间隙比附近，与图 9(B) 中的实验相图更为吻合。较大 G 下的 C 态也得以保留。

剩余差异集中在中间和较大 G处。在 $G = 0.588$附近，预测的正I'分支仍处于 $I'' = 0$，导致较大 Wi 下仍存在 D–C双稳态，而未能产生观察到的 AD–C三稳态。对于 $G \gtrsim 0.60$，额外的 D 分支使预测的 D–C区域延伸至实验观测到的 C 状态区的一部分。尽管如此，修正后的相图更准确地捕捉了小G 下的 AD 区域，同时保留了较大 G下包含 C 态的状态区。

请注意，我们还对 $G = 0.603$ 处额外的 D 分支采用了相同的细化过程。然而，如果不降低对测得平衡点的拟合效果，就无法移除该分支。预测得到的 D 分支可能是学习得到的模型的伪影，也可能是实验中未观测到的稳定态。现有数据不足以区分这两种可能性。还需要进行额外的实验测量，以确定该分支是否存在于物理系统中。

在 $G = 0.500$处对 C 分支的成功细化表明，负样本能够在保留测量平衡态和施加的反射对称性的同时，纳入有关稳定分支缺失的信息。对称性投影与负样本细化相结合，可以直接控制学习得到的向量场的对称性和稳定平衡结构。

表 I. 多项式正规形和神经网络正规形的平衡重构误差，使用 445 个实验平衡观测进行评估。

模型	E_{eq}
多项式（不受限）	0.3544
多项式（奇偶）	0.2960
神经网络（直接）	0.1814
神经网络（对称性投影）	**0.1503**
神经网络（对称性投影 +负样本）	0.2067

E. 定量比较

为了定量比较多项式正规形和神经网络正规形，我们测量每个实验观测到的平衡点与模型在相同控制参数下预测的最近稳定平衡态之间的距离。平衡重构误差定义为

$$E_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{N_{\mathrm{eq}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{eq}}} \min_{\boldsymbol{\xi}^* \in \mathcal{S}(G^i, Wi^i)} \left\| \boldsymbol{\xi}^i - \boldsymbol{\xi}^* \right\|_2 , \tag{33}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}^i = (x^i, y^i)$表示实验观测平衡点，$\mathcal{S}(G^i, Wi^i)$表示模型在相应参数下预测的稳定平衡点集合。误差使用全部 $N_{\mathrm{eq}} = N = 445$ 个实验平衡点观测值进行评估，其中多个平衡点可能对应于同一组(G, Wi)。

结果汇总于表 I。总体而言，神经网络模型的平衡重构误差小于多项式模型。施加反射对称性后，多项式模型的误差由 E_{eq} 从 0。3544 降至 0。2960 ，神经网络模型的误差则由 0。1814降至 0。1503 。经过负样本优化后，对称性投影神经网络的误差为 0。2067。虽然与非神经网络方法相比，这似乎使重构误差（略有）增加，但负样本策略的重要优势在于其与实验结果具有更好的定性对应，包括对多稳态区域的表征。由于 E_{eq} 仅衡量与最近稳定平衡点之间的距离，因此无法描述预测得到的全部稳定分支；这些分支已在上文的分岔图和相图中进行了考察。

IV. 结论与展望

在本研究中，我们探讨了能否利用稳定流动状态的稀疏测量，为流体绕过两个并排微圆柱的黏弹性流动学习一个低维降阶动力系统。学习得到的向量场将两个流动不对称参数 I' 和 I''耦合起来，其中间隙比G 和魏森伯格数 Wi 作为控制参数。其稳定平衡点为以下内容提供了统一描述：

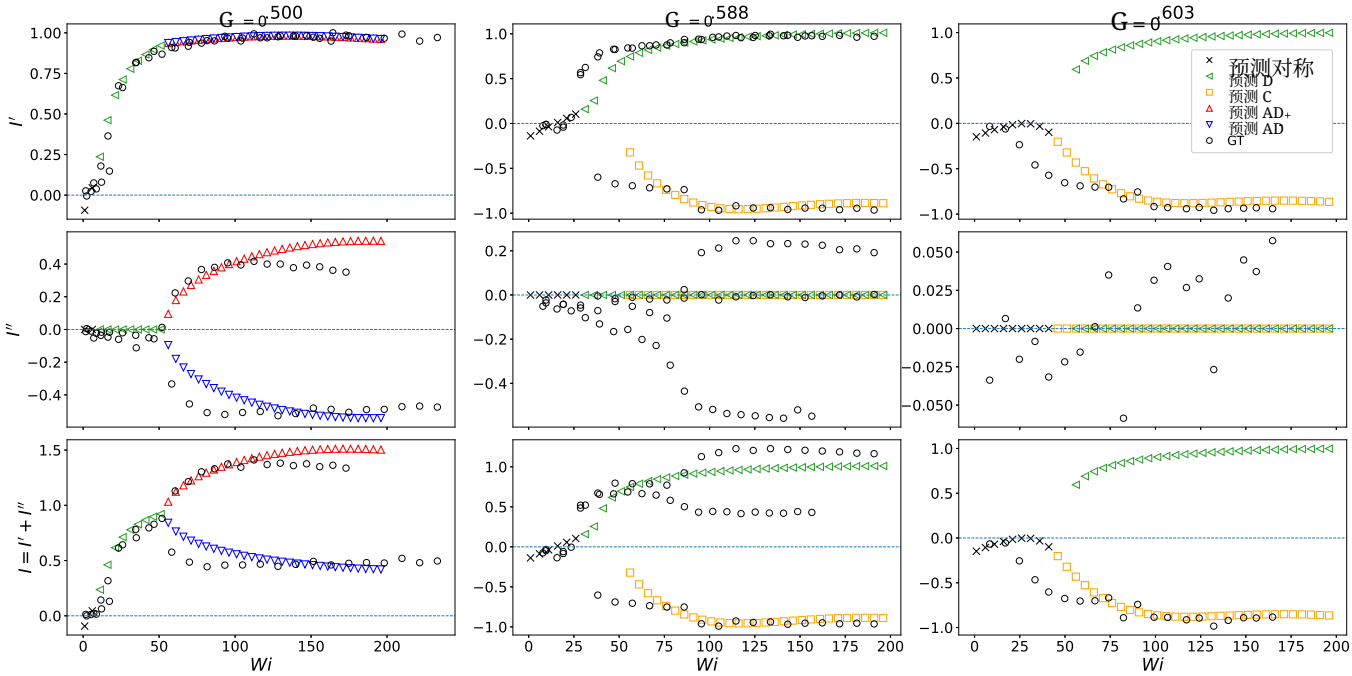
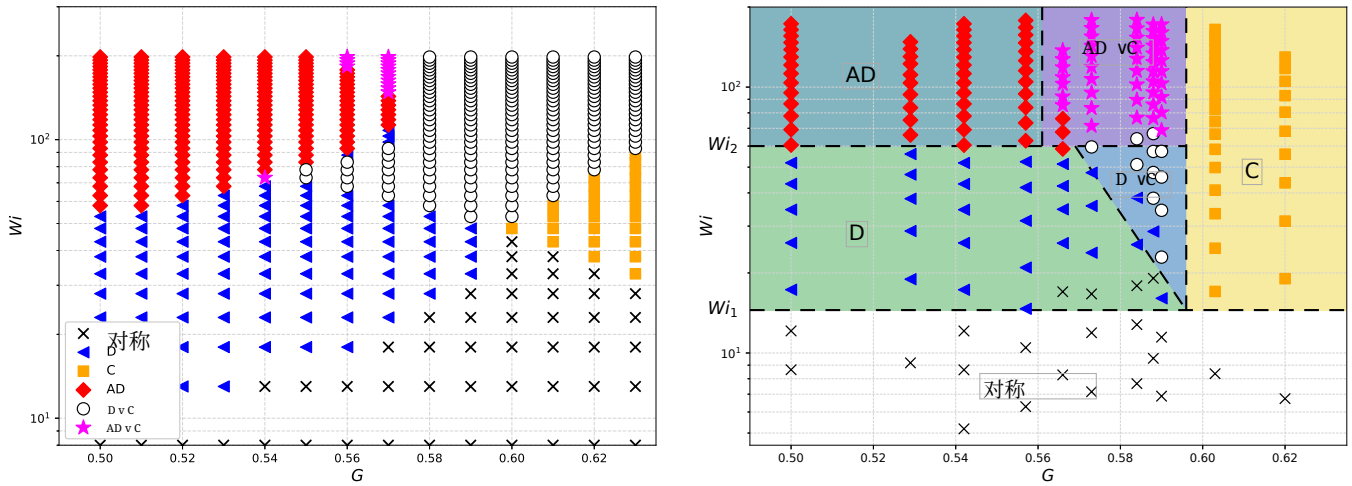


图8. 使用来自额外 C 分支的负样本进行迭代细化后得到的分岔图，参数为 $G = 0.500$。各列分别对应 $G = 0.500$、$G = 0.588$ 和 $G = 0.603$，各行分别显示 I'、I'' 和 $I = I' + I''$。彩色符号表示预测的稳定平衡点，黑色空心圆表示实验测量值。$G = 0.500$ 处目标 C 分支被移除，而 $G = 0.500$ 处的 D 分支和与反射相关的 AD 分支，以及较大 G 处的 C 分支均得以保留。结果表明，负样本细化能够有选择地修改所学的平衡结构，同时不破坏施加的反射对称性。



(A) **(B)**

图 9. 重构相图与实验相图的比较。(A) 利用来自额外 C 分支的负样本进行迭代细化后重构的相图。移除该分支后，在较小的Wi处可恢复高 G AD 区域，并使预测的大部分 AD–C 三稳态局限于中间间隙比范围。在中间和较大的 G处，$G = 0.588$ 附近缺失的 AD态以及较大 G 处额外的 D 分支，使 D–C 双稳态区域比实验观测到的更宽。(B) (G, Wi) 参数空间中的实验流动稳定性图。符号表示测得的对称、D、C 和 AD态，而彩色区域和虚线边界则标示相应的稳定区域和多稳态区域。中间间隙区域包含 D–C双稳态和 AD–C 三稳态。经 Hopkins等人许可转载。[34],

测量分支以及（G, Wi）参数定义域上的相图，而非对各个分支分别进行局部拟合

性转变。

一个核心结果是，平衡位置和局部稳

仅凭稳定性并不足以确定全局分岔结构——至少就当前情况而言。多项式模型提供了可解释表示，但产生了偏移的转变和额外的稳定分支。更灵活的直接神经网络复现了若干测得的分支，但未能保留两个 AD 态之间的反射关系。通过网络架构直接施加反射对称性解决了这一不一致：每个预测的 AD 态都有一个对应态，其 I' 相同、I'' 相反，且局部稳定性相同。对称性约束确定了这些状态之间的关系，但无法确定定义域其他位置应存在哪些稳定分支。定量比较还表明，神经网络模型的平衡态重建误差小于多项式模型。

我们通过结合负样本进行迭代细化，解决了这一遗留的不确定性。训练完成后，我们识别出与实验相图不一致的稳定根，并在微调过程中抑制其继续作为稳定平衡点存在。该过程去除了小 G 处额外的 C 分支，同时保留了 $G = 0.500$ 处的 D 分支和 AD分支，以及较大 G处的 C 分支。所得相图在小 G 区域的大部分范围内恢复了对称态–D–AD 序列，并显著缩小了此前预测过大的 AD–C 三稳态区域。这些结果表明，反射对称性和负样本提供了不同但互补的信息：前者确定了对称相关态之间的关系，而后者则有助于筛选出实验观测所支持的稳定分支。

最终重构结果在两个区域仍与实验相图存在差异。在 $G = 0.588$附近，正 I'分支仍位于 $I'' = 0$上，并且未能恢复从 D态到两个 AD态的转变。在 $G = 0.603$附近，仍然存在一条额外的稳定 D 分支。尝试移除该分支会使测量平衡态处的拟合效果变差。现有数据无法确定该分支究竟是学习得到的模型产生的伪影，还是一个实验中未被观测到的稳定态。这一不确定性凸显了仅根据稳定平衡态测量结果学习全局向量场的局限性。进一步的实验或许能够确定额外预测出的分支是否确实存在但未被观测到，这可能是因为其吸引域较小，或由于初始条件不同。

瞬态测量以及对受控扰动的响应，能够提供观测到的平衡态之外有关动力学的更多信息。采用更系统的方法选择负样本，也有助于改进相图的重建。在中等和较大的 G 条件下进行更多测量，将有助于阐明尚未发现的 AD 转变和预测的 D 分支。最后，所提出的框架还可扩展到更复杂的几何结构，包括更大的障碍物阵列和规则晶格。目前正在考虑将这些扩展作为未来的研究方向。

致谢

作者特别感谢朱伟教授（佐治亚理工学院）在整个研究过程中给予的指导和大量反馈。SJH 和 AQS 衷心感谢冲绳科学技术大学院大学（OIST）获得日本政府内阁府的补助资金支持。SJH 和 AQS 还感谢日本学术振兴会（JSPS，资助编号：24K07332,and 24K00810）提供的科研费。本研究部分基于美国国家科学基金会通过资助项目 PHY-2408988（PGK）支持的工作。本研究的部分工作是在 P.G.K. 访问冲绳科学技术大学（OIST）理论科学访问计划（TSVP）期间、通过悉尼数学研究所（SMRI）访问项目访问悉尼大学期间，以及通过富布赖特奖学金访问首尔大学机械工程系期间开展的。谨此衷心感谢各方支持。最后，本研究还获得了西蒙斯基金会的资助 [SFI-MPS-SFM-00011048, P.G.K]。

代码可用性

用于模型训练、平衡点重构、相分类和图表生成的代码已发布在GitHub 仓库中。

附录 A：多项式实现细节

最终的多项式模型使用所有原始平衡观测进行训练，不采用反射数据增强。由于奇偶对称性被严格施加，每个反射观测与其对应的原始观测所产生的平衡损失和稳定性损失相同。因此，纳入反射观测不会改变全批次平均训练目标。

输入缩放定义见公式（13）。对于本文所考虑的实验数据，没有任何缩放因子接近于零，从而避免了除以较小数值可能导致的数值不稳定性。所有多项式特征和稳定性约束均在缩放坐标中进行计算。

多项式字典遵循公式（16）中的次数约束以及公式（11）中的反射对称性。排除常数项后，所得字典包含44个候选特征，适用于 f_1，以及30 个，适用于 f_2。

系数向量**a** 和 **b** 均初始化为零，并使用全批次Adam以64位浮点精度进行优化。训练目标见公式（21），其中稳定性惩罚定义见公式（9）。超参数为

$$\lambda_{\mathrm{stab}} = 500, \quad \lambda_{\mathrm{sparse}} = 10^{-5}, \quad \alpha = 0.03, \\ \beta = 10^{-5}, \quad w_{\mathrm{det}} = 100. \tag{A1}$$

训练进行 25 000 个优化步数。初始学习率为 5×10^{-4}，并在第 12 000 步和第 20 000 步时乘以 0.2。固定随机种子以确保可复现性。

优化后，多项式系数会根据公式（22）进行转换，以用于平衡求解。为在原始状态坐标中表示相应的向量场，令$\mathbf{z} = (x, y)^{\mathsf{T}}$, $\tilde{\mathbf{z}} = S^{-1}\mathbf{z}$，以及 $S = \mathrm{diag}(s_x, s_y)$。坐标变换给出

$$\mathbf{F}_{\mathrm{raw}}(\mathbf{z}, G, Wi) = S\mathbf{F}_{\mathrm{scaled}}(\tilde{\mathbf{z}}, G/s_G, Wi/s_{Wi}), \quad \text{(A2)}$$

其中，$\mathrm{F}_{\mathrm{scaled}} = (f_1, f_2)^{\mathsf{T}}$ 是缩放坐标中的学习得到的向量场。因此，这两个分量的系数满足

$$c_{\mathrm{raw},1} = s_x c_{\mathrm{eq},1}, \qquad c_{\mathrm{raw},2} = s_y c_{\mathrm{eq},2}. \quad \text{(A3)}$$

缩放坐标和原始坐标中的雅可比矩阵满足

$$J_{\mathrm{raw}} = S J_{\mathrm{scaled}} S^{-1}, \qquad J_{\mathrm{scaled}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathrm{scaled}}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}}, \quad \text{(A4)}$$

因此，它们具有相同的特征值和局部稳定性。稳定性评估使用 J_{scaled}，与训练时相同。

对于 Bertini，系数绝对值小于 10^{-10}的项将被省略。每个计算得到的根的残差均使用完整多项式方程进行评估。

附录B：多项式消融研究

为评估施加反射对称性的作用，我们将最终的对称性约束多项式模型与完全无约束多项式表示进行比较。无约束模型采用与附录A中所述相同的次数界、损失函数、优化设置和平衡点求解流程，但向量场的任一分量中 y 的奇偶性均不受限制。拟合模型时使用原始平衡观测，不进行反射数据增强。

图10 比较了 $G = 0.500$、$G = 0.588$和 $G = 0.603$处预测的平衡分支与实验结果。尽管无约束模型捕捉到了 I'中观测到的部分变化，但未能再现 I''中所要求的反射结构。在 $G = 0.500$处，模型只生成了两个 AD 分支中的一个，还在较大的 Wi处预测出一个 C 分支。在 $G = 0.588$处，也未能恢复与反射相关的 AD 分支对。在 $G = 0.603$处，预测的 C 分支和 D 分支呈现出系统性的非零 I''值，而未能保持在不变子空间 $I'' = 0$上。这些结果表明，对于无约束多项式表示，仅依靠测量态上的平衡点约束和稳定性约束，不足以恢复向量场的物理反射对称性。

由于无约束模型在平衡分支层面已经表现出较大的偏差，因此本消融实验不再报告单独的相图。最终对称性约束多项式模型得到的完整分岔与相图重构结果见第 IIIC节。

附录C：直接神经网络实现细节

直接神经网络模型使用所有可用的原始平衡观测进行拟合，不采用反射数据增强，也不进行训练集—测试集划分。按照式（13），仅对控制参数进行缩放，而状态变量x 和 y 不进行缩放。网络架构见第 III D1节。所有计算均采用 64位浮点精度，并使用固定的随机种子以确保可复现性。

模型使用AdamW以全批量方式进行优化，权重衰减为零。训练目标由式（27）给出，稳定性惩罚定义于式（9）。超参数为

$$\lambda_{\mathrm{stab}} = 50, \quad \alpha = 0.09, \quad \beta = 10^{-3}, \quad w_{\mathrm{det}} = 50. \quad \text{(C1)}$$

训练共进行60 000个优化步数。初始学习率为 5×10^{-4}，并在20000步和40 000步后降低为原来的 0.5倍。因此，三个训练区间的学习率分别为 5×10^{-4}、2.5×10^{-4}和 1.25×10^{-4}。

对于每个固定的参数对（G, Wi），使用 scipy.optimize.root中实现的Powell混合算法求解平衡方程。求解器从一个均匀 9×9 网格初始化，覆盖

$$(x_0, y_0) \in [-1.1, 1.1] \times [-1.1, 1.1],$$

从而在每个参数对处给出81个初始猜测值。收敛解（x^*, y^*）在满足以下条件时被接受

$$\sqrt{\left|f_{\boldsymbol{\theta},1}(x^*, y^*, \widetilde{G}, \widetilde{Wi})\right|^2 + \left|f_{\boldsymbol{\theta},2}(x^*, y^*, \widetilde{G}, \widetilde{Wi})\right|^2} < 10^{-6}. \quad \text{(C2)}$$

由于不同的初始猜测值可能收敛到同一个平衡点，因此当两个解在 (x, y) 平面中的欧几里得距离小于 10^{-4} 时，将它们视为相同解。通过自动微分计算雅可比矩阵，并使用式（8）确定每个平衡点的稳定性。

根据第 IIIA节中定义的判据，将稳定平衡点划分为不同的流动状态，其中 $\delta = 0.15$。对于具有对称约束的多项式和神经网络模型，在每个固定的(G, Wi)处识别反射相关稳定根。若两个最初被分类为 D 的稳定根，其 x 坐标几乎相同，而其 y 坐标近似相反且彼此充分分离，则将它们识别为反射相关的 AD 对。具体而言，我们要求

$$|x_1 - x_2| < 10^{-3}, \qquad |y_1 + y_2| < 10^{-3},$$

以及

$$y_1 y_2 < 0, \qquad |y_1 - y_2| > 10^{-3}.$$

随后，根据其 y 坐标的符号，将这些根标记为 AD^+ 和 AD^-。不满足上述任何判据的稳定根标记为其他。

分岔图是在

$$G = 0.500, \qquad G = 0.588, \qquad G = 0.603$$

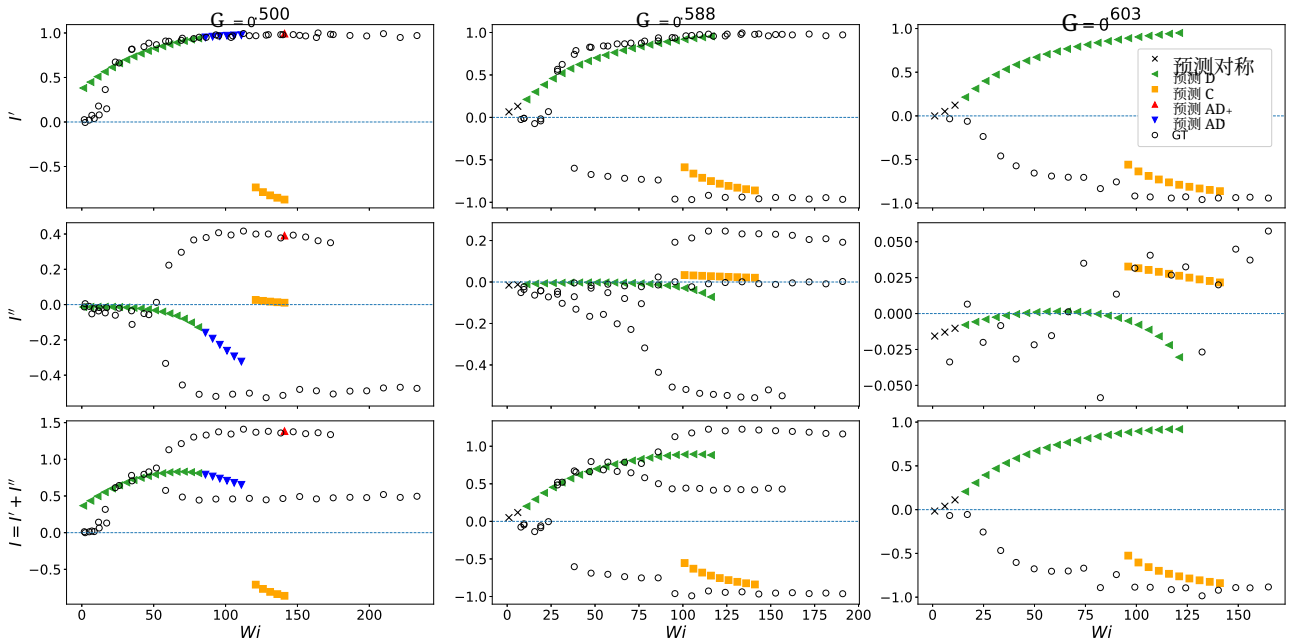


图10. 无约束多项式模型得到的分岔图。从左到右各列分别对应 $G = 0.500$、$G = 0.588$ 和 $G = 0.603$，而各行分别显示 I'、I'' 和 $I = I' + I''$。黑色空心圆表示实验平衡测量值，彩色符号表示学习得到的向量场预测的稳定平衡点。满足 $|I'| < 0.15$ 和 $|I''| < 0.15$ 的预测平衡点被归类为对称。没有偶奇限制时，模型无法保持不变子空间 $I'' = 0$，也无法生成一对互为反射关系的两个 AD态。未使用反射数据增强。

通过在 $Wi = 1$、6、……、196 处求解平衡方程得出。双参数相图在网格上进行评估

$$G = 0.50, 0.51, \ldots, 0.63, \qquad Wi = 8, 13, \ldots, 198. \quad \text{(C3)}$$

进行相分类时，仅保留满足 $|x| \leq$1.1 和 $|y| \leq 1.1$ 的稳定根。包含 D 和 C 两种平衡点的参数值被归类为 D–C双稳态，而包含 C 平衡点以及 AD 平衡点的参数值则被归类为 AD–C多稳态。

附录 D：负样本细化详情

对于负样本细化，我们遵循第 IIID 2 节所述的对称性投影神经网络框架。在这些实验中，我们首先训练一个包含三个宽度为 50 的全连接隐藏层、采用双曲正切激活函数并后接两个原始输出的网络。随后按照式（28）进行反射平均，以强制满足所需的偶奇结构。在每次细化迭代中，都会重新计算

$$G = 0.50, 0.51, \ldots, 0.55, \qquad Wi = 100, 105, \ldots, 200. \quad \text{(D1)}$$

采用附录中相同的初始化和收敛判据C ，仅保留搜索域内的稳定根。在这些根中，将被分类为 C 且满足

$$-1.2 < x < 0, \qquad |y| < 0.2$$

的根保留为负样本。新检测到的根会被添加到累积负样本池中，并移除 (G, Wi, x, y) 中的完全重复项。如果未检测到负 C 根，则提前终止细化过程。

对于每个负样本，根据其雅可比矩阵的迹和行列式计算特征值实部的最大值。定义

$$\Delta_j = \mathrm{tr}(J_j^-)^2 - 4\det(J_j^-), \quad \text{(D2)}$$

特征值实部的最大值计算如下

$$\mu_{\max}(J_j^-) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{tr}(J_j^-) + \sqrt{\Delta_j}}{2}, & \Delta_j \geq 0, \\ \dfrac{\mathrm{tr}(J_j^-)}{2}, & \Delta_j < 0. \end{cases} \quad \text{(D3)}$$

在数值实现中，将平方根的被开方数下限截断为零，并加入10^{-12} 正则化。

负样本损失定义于式（31）中，其中$\gamma_{\mathrm{neg}} = 10^{-4}$。该项仅使用雅可比矩阵；不会对负样本施加平衡损失。因此，微调可能会移动或移除相应的根，或将其保留为不稳定平衡点。

使用式（32）中定义的目标函数对网络进行微调。平衡点和稳定性损失参数与附录C中的设置保持不变，并设定 $\lambda_{\mathrm{neg}} = 1$。执行三次负样本迭代。每次迭代中，当前网络参数均进行2000

步全批量优化，使用 AdamW，学习率为10^{-4}，权重衰减为零。网络不会重新初始化

在迭代之间。每个微调阶段结束后，重新计算稳定平衡点，并将区域 Eq. (D1) 中任何剩余的 C 根添加到负样本池中。

[1] A. Groisman 和 V. Steinberg，黏弹性 Couette 流中的孤立涡旋对，《物理评论快报》78，1460（1997）。[2] L. Pan、A. Morozov、C. Wagner 和 P. E. Arratia，低雷诺数下通道流中的非线性弹性失稳，《物理评论快报》110，174502（2013）。[3] H. A. Castillo S´anchez、M. R. Jovanovi´c、S. Kumar、A. Morozov、V. Shankar、G. Subramanian 和 H. J. Wilson，理解黏弹性流动失稳：Oldroyd-B 及其他模型，《非牛顿流体力学杂志》302，104742（2022）。[4] T. M. Squires 和 S. R. Quake，微流体学：纳升级尺度的流体物理学，《现代物理评论》77，977（2005）。[5] D. M. Walkama、N. Waisbord 和 J. S. Guasto，混乱抑制黏弹性流动中的混沌，《物理评论快报》124，164501（2020）。[6] S. J. Haward、C. C. Hopkins 和 A. Q. Shen，驻点控制黏弹性多孔介质流中的混沌波动，《美国国家科学院院刊》118，e2111651118（2021）。[7] F. Miele、P. de Anna 和 M. Dentz，多孔材料过滤的随机模型，《物理评论：流体》4，094101（2019）。[8] F. Miele、A. D. Bordoloi、P. de Anna、M. Dentz、H. Tabuteau、V. L. Morales、P. K. Das 和 S. Hilgenfeldt，流动诱导的间歇性输运塑造复杂介质中的胶体过滤，《物理评论快报》137，044002（2026）。[9] R. Budania 和 S. Dangayach，地下水污染修复用可渗透反应屏障的全面综述，《环境管理杂志》332，117343（2023）。[10] F. Obiri-Nyarko、S. J. Grajales-Mesa 和 G. Malina，可渗透反应屏障在原位可持续地下水修复中的应用概述，《化学圈》111，243（2014）。[11] K.-H. Wei、J. Ma、B.-D. Xi、M.-D. Yu、J. Cui、B.-L. Chen、Y. Li、Q.-B. Gu 和 X.-S. He，原位化学氧化修复石油污染土壤和地下水的最新进展，《危险材料杂志》432，128738（2022）。[12] W. Yang、J. Lu、B. Wei、H. Yu 和 T. Liang，表面活性剂驱油提高石油采收率的微模型研究：综述，《ACS Omega》6，6064（2021）。[13] B. Wei、L. Romero-Zer´on 和 D. Rodrigue，黏弹性聚合物提高石油采收率（EOR）的驱油机制：综述，《石油勘探与生产技术》4，113（2014）。[14] Z. Liu、Y. Li、H. Luan、W. Gao、Y. Guo 和 Y. Chen，水包油乳液提高石油采收率的孔隙尺度及宏观可视化驱替，《化学工程科学》197，404（2019）。[15] S. L. Brunton、J. L. Proctor 和 J. N. Kutz，通过非线性动力系统的稀疏识别，从数据中发现控制方程，《美国国家科学院院刊》113，3932（2016）。[16] S. H. Rudy、S. L. Brunton、J. L. Proctor 和 J. N. Kutz，偏微分方程的数据驱动发现，《科学进展》3，e1602614（2017）。[17] D. A. Messenger 和 D. M. Bortz，偏微分方程的 Weak SINDy，《计算物理学杂志》443，110525（2021）。[18] K. Champion、B. Lusch、J. N. Kutz 和 S. L. Brunton，数据驱动的坐标与控制方程发现，《美国国家科学院院刊》116，22445（2019）。[19] Z. Chen、Y. Liu 和 H. Sun，基于物理信息学习从稀缺数据中获取控制方程，《自然·通讯》12，6136 (2021)。[20] M. Raissi、P. Perdikaris 和 G. E. Karniadakis，《物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题和反问题的深度学习框架》，《计算物理学杂志》378，686 (2019)。[21] G. E. Karniadakis、I. G. Kevrekidis、L. Lu、P. Perdikaris、S. Wang 和 L. Yang，物理信息机器学习，《自然·物理评论》3，422 (2021)。[22] R. T. Q. Chen、Y. Rubanova、J. Bettencourt 和 D. K. Duvenaud，神经常微分方程，载于《神经信息处理系统进展》（NeurIPS），第31卷（2018），第6571–6583页。[23] Z. Li、N. B. Kovachki、K. Azizzadenesheli、B. Liu、K. Bhattacharya、A. Stuart 和 A. Anandkumar，用于参数化偏微分方程的傅里叶神经算子，载于《国际学习表征会议》（ICLR）（2021）。[24] J. Bakarji、K. Champion、J. N. Kutz 和 S. L. Brunton，利用深度延迟自编码器从部分测量中发现控制方程，《英国皇家学会会刊 A 辑》479，20230422 (2023)。[25] G. Stepaniants、A. D. Hastewell、D. J. Skinner、J. F. Totz 和 J. Dunkel，从部分观测中发现非线性振荡系统和混沌系统的动力学与参数，《物理评论研究》6，043062 (2024)。[26] S. L. Brunton、B. R. Noack 和 P. Koumoutsakos，流体力学中的机器学习，《流体力学年度评论》52，477 (2020)。[27] J.-C. Loiseau 和 S. L. Brunton，约束稀疏伽勒金回归，《流体力学杂志》838，42 (2018)。[28] M. Raissi、A. Yazdani 和 G. E. Karniadakis，隐藏的流体力学：从流动可视化中学习速度场和压力场，《科学》367，1026 (2020)。[29] P. A. K. Reinbold、L. M. Kageorge、M. F. Schatz 和 R. O. Grigoriev，通过物理约束符号回归，从含噪、不完整的高维实验数据中稳健学习，《自然·通讯》12，3219 (2021)。[30] D. R. Gurevich、M. R. Golden、P. A. K. Reinbold 和 R. O. Grigoriev，利用稀疏物理信息经验关系发现（SPIDER）从高度湍流数据中学习流体物理学，《流体力学杂志》996，A25 (2024)。[31] D. Dabiri、M. Saadat、D. Mangal 和 S. Jamali，用于数据驱动识别黏弹性本构模型的分数阶流变学信息神经网络，《流变学学报》62，557 (2023)。[32] S. Thakur、M. Raissi 和 A. M. Ardekani，ViscoelasticNet：用于应力发现和模型选择的物理信息神经网络框架，《非牛顿流体力学杂志》330，105265 (2024)。[33] S. J. Haward、N. Kitajima、K. Toda-Peters、T. Takahashi 和 A. Q. Shen，高长径比、低阻塞比条件下蠕虫状胶束溶液绕微流控圆柱的流动，《软物质》15，1927 (2019)。[34] C. C. Hopkins、S. J. Haward 和 A. Q. Shen，黏弹性流动绕过并排微圆柱时的三稳态，《物理评论快报》126，054501 (2021)。[35] D. J. Bates、J. D. Hauenstein、A. J. Sommese 和 C. W. Wampler，Bertini：数值代数几何软件，

可访问于 https://bertini.nd.edu，永久 DOI: https://doi.org/10.7274/R0H41PB5。[36] S. H. Strogatz，《非线性动力学与混沌：物理学、生物学、化学和工程学应用》，第 3 版。(CRC出版社，博卡拉顿，FL，2024年)。[37] J. Guckenheimer 和 P. Holmes，非线性振荡、动力系统与向量场分岔

《应用数学科学》，第 42 卷（施普林格出版社，纽约，1983年）。