arXiv:2611.32819v1 [math.PR] 24 Nov 2026

具有质量作用动力学的弱可逆随机反应网络的正常返

Daniele Cappelletti 和 Giulio Cuniberti

数学科学系，都灵理工大学，意大利都灵
daniele.cappelletti@polito.it giulio.cuniberti@polito.it

2026年11月24日

摘要

我们研究具有质量作用动力学的有限随机反应网络。如果每个反应都位于由复合物构成的有向环上，则称该网络具有弱可逆性。我们证明，对于任意正速率常数，每个此类网络的马尔可夫链都是非爆炸的，并且在每个互通类上都是正常返的。这解决了长期悬而未决的化学反应常返猜想。证明通过构造李雅普诺夫函数完成。对于物种权重的一组固定选择，该函数是分子加权计数的指数，再经过一个有界量的调整；这个有界量通过通向参考种群的反应路径定义，并考虑了缺失或稀少的物种。在调整后的计数能够减少之前，可能需要若干准备步骤。我们分别对较快和较慢的步骤进行计数，并优先考虑所需慢步骤较少的路径。弱可逆性控制竞争反应对这些计数的改变方式。随后将有限组权重选择结合起来，并对尺度参数进行最小化，从而在每个互通类上得到一个单一函数。

关键词。随机反应网络，质量作用动力学，弱可逆性，正常返，李雅普诺夫函数。

数学主题分类（2020）。60J27,92C42.

贡献与人工智能的使用。作者发起并指导了该项目。他们对论证的阅读、对证明步骤及依赖关系的核查，以及详细的数学讨论，指导了对证明及其阐述的修订。GPT-6 Astra（OpenAI）被用于发展数学构造与论证、探究可能的反例、进行内部核查，以及起草和修订文本。Claude Opus 5.5 和 Claude Fable 5.2（Anthropic）协助审阅草稿并改进阐述。作者对稿件负责。

1 引言

随机反应网络（SRN）描述相互作用物种的种群如何随时间变化 [10, 19]。每个反应都规定了其消耗的物质、生成的物质以及

发生的频率。
一个基本问题是，种群是否会在有限平均时间内返回有界区域。这一性质称为正常返，意味着该链在每个闭通信类上都有唯一的平稳分布。如果链从某个闭通信类中的状态开始，则它在该类各状态上所花费的时间比例几乎必然收敛于相应状态的平稳概率。一个简单例子是可逆反应 $0 \rightleftharpoons X$：生成以恒定速率进行，而移除速率与 X的分子数成正比。由此得到的移民–死亡链是正常返的。在一般网络中，同样的比较就不那么直接了。多个反应可能具有相近的速率，返回反应所需的物种可能不存在，而且返回路径可能经过停留时间截然不同的状态。

“正常返性猜想”也称为“化学反应常返猜想”，它提出的问题是：对于任意正速率常数的选择，每个有限弱可逆质量作用随机反应网络在每个互通类上是否都是正常返的。该猜想在反应网络领域广为人知，Anderson 和 Kim 在 [9], 中陈述了这一猜想，并给出了正常返性的网络条件。它是确定性质量作用系统中持久性猜想的随机对应命题 [11], ；后者指出，对于固定的正速率常数，弱可逆网络的每个正化学计量相容类都存在一个紧子集，使得从该类出发的每条轨迹最终都会一直留在其中。近期有人在 [17] 中提出了持久性猜想的一个证明。

正常返性猜想的重要情形已经得到理解。复合物平衡系统具有乘积形式平稳分布 [8]，其非爆炸性已在 [5]中得到证明。Anderson、Cappelletti 和 Kim [6] 证明了：当每个复合物至多包含两个分子，且对于每个物种，都存在某个复合物是该物种的正倍数时，具有一个连锁类的弱可逆网络具有正常返性。他们的证明使用了 n步嵌入链。Kriebel 针对所有具有一个连锁类的弱可逆双分子网络提出了一种证明，从而去除了每个物种都必须单独出现在某个复合物中的假设 [13]。

Wiuf 和 Xu [20] 在化学计量子空间维数为一时证明了该猜想，同时允许任意数量的物种。对于其他结构性假设，Xu [21] 获得了非爆炸性结果，其中包括二元系统和二阶端向系统，并且 [22]研究了一阶端向系统的指数遍历性。Agazzi、Anderson、Cappelletti、Laurence 和 Mattingly 证明了具有两个物种的网络满足该猜想 [1]。Agazzi 和 Laurence 在结构性假设下获得了平面双分子系统内部区域的漂移估计，而在边界附近则需要单独的估计 [4]。
在本文中，我们在完全一般的情形下证明了这一猜想：对于每个具有质量作用动力学且正速率常数任意固定的有限弱可逆随机反应网络，其对应的连续时间马尔可夫链都是非爆炸的，并且在每个互通类上都是正常返的（定理 3.1）。

[1] 中两个物种的证明拼接了定义在状态空间不同区域上的函数。这里，李雅普诺夫函数由单一公式给出，并且漂移估计对有限集之外的每个种群状态都成立。 [17] 中关于持久性的证明依赖于对确定性动力学正向不变的紧集。这类集合的随机类比是一个在所有跳变下均闭合的非空有限集，而无限不可约类不存在这样的集合。我们证明的一部分，即第6节中有限多个斜率的选取，改编自 [16, 引理2.1和推论2.2], 中的仿射近似；对此我们给出了一个自包含证明。

Anderson、Cappelletti、Kim和Nguyen [7] 在层级分析中比较了反应级数。我们还比较速率，以确定在种群数量较大时哪些反应作用更快。Agazzi、Dembo和Eckmann在 [2, 3] 中为大种群构造了李雅普诺夫函数。我们在此处理的困难出现在某些物种数量丰富而其他物种只有少量分子时。一个本可使种群数量下降的反应可能需要一种缺失的分子，因此漂移函数还必须识别为使该反应能够发生而需要进行的准备过程。

我们利用可发生反应的路径来调整加权种群计数。这样便能将每一步中为空的物种纳入考量。保持调整后计数不变的反应，仍可能使我们更接近计数的下降。为衡量这一进展，我们将该反应的速率与其他竞争步骤的速率进行比较。最终的漂移估计会纳入所有可发生反应。

第 3 节对论证作初步介绍。第 4 节和第 5 节构造局部函数，并以第 4.3 节的网络为例加以说明。第 6–7 节将这些结果结合起来。第 7 节应用命题 3.2 的 Foster–Lyapunov 判据，该命题已在附录 B 中证明。

2 预备知识

我们记为 $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$。向量之间的不等式以及向量的对数均按坐标逐项理解。我们使用范数 $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ 和 $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$，并用$\mathbf{1}$ 表示全 1 向量。

定义2.1。 固定 d 物种 $S_1, \ldots\ldots, S_d$ 这一阶次。种群 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ 记录每种物种中存在的分子数量。复合物 $y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ 描述这些物种的一个组合，其中物种 i含有 y_i 个分子。反应 r：$y \to y'$ 消耗组合 y 并生成 y'。反应网络规定有限多个这样的复合物和反应。其反应图以复合物为顶点、以反应为有向边。连锁类是底层无向图的一个连通分支。如果每个连锁类都是强连通的，或者等价地，如果每个反应都位于某个有向环上，则该网络是弱可逆的。

我们舍弃含有 $y = y'$的反应，因为这些反应不会改变种群。

定义2.2。 反应 r： $y \to y'$ 在 n 处启用，当且仅当 $y \leq n$，因此其所有反应物均已存在。反应发生后，种群变为 $n + y' - y$。在随机质量作用动力学下，每个反应都有一个正的速率常数 κ_r，且其在 n 处的速率为

$$\lambda_r(n) = \kappa_r (n)_y, \qquad (n)_y = \prod_{i=1}^{d} (n_i)_{y_i}. \tag{2.1}$$

这里，下降阶乘$(n_i)_m = n_i(n_i - 1)\cdots(n_i - m + 1)$表示从物种 S_i 中有序选取 m 个分子的方法数。当 $n_i < m$ 时，它的值为零。空乘积等于一，因此 $(n_i)_0 = 1$。

例如，若物种按 X, Y 的顺序排列，则源复合物 $2X + Y$是向量 (2,1)。从该复合物出发的反应速率为 $\kappa_r n_X(n_X - 1)n_Y$。它需要两个 X 分子和一个 Y。

我们跟踪最小连续时间马尔可夫链 X 的连续跳跃，直至其可能出现的聚积时间。证明的一部分是说明该时间几乎必然为无穷大。令 Q 表示 X的生成矩阵 。对于 $f : \mathbb{Z}_{\geq 0}^d \to \mathbb{R}$，我们有

$$Qf(n) = \sum_{r : y \to y',\ y \leq n} \kappa_r (n)_y \big[f(n + y' - y) - f(n) \big]. \tag{2.2}$$

因此， $Qf(n)$等于对所有可发生反应的速率与 f变化量的乘积求和。我们将 f 在 n处的漂移 称为

定义 2.3。 如果两个种群可以通过有限次可发生反应从一个到达另一个，则称它们连通。关于这一关系的等价类称为连通类。如果从某个类出发的每个可发生反应都留在该类中，则称该类闭合。如果在每个有界时间区间内几乎必然只发生有限次跳跃，则称该链非爆炸。非平凡连通类中的状态若在首次离开后返回该状态的期望时间有限，则称其正常返。没有可发生反应的种群称为吸收状态。该链将永远停留在那里，按照约定，我们将其单元素类计为正常返。

例 2.4。 对于 $0 \rightleftharpoons X$，其生成速率为 κ_1，移除速率为 $\kappa_2 n$，取 $V(n) = e^n$。于是

$$\frac{QV(n)}{V(n)} = \kappa_1(e-1) + \kappa_2 n(e^{-1}-1) \longrightarrow -\infty.$$

负的移除项最终会超过生成项。下面的证明通过修正种群加权指数，重新揭示了相互作用物种中的这一效应。

3 主要结果及证明概述

本文的主要结果如下。

定理 3.1。 设一个有限反应网络是弱可逆的，且 (2.1) 中的每个速率常数均为正。则最小链 X 从每个初始种群出发都是非爆炸的。每个互通类都是闭合的，且限制在每个此类上的链都是正常返的。

定理 3.1 的证明构成了本文其余部分的内容，并在第 7 节末完成。

网络及其正速率常数在全文中均固定不变。其他固定选择及其依赖关系将在需要时给出，并汇总于附录 A 中。估计中的常数从不依赖于变化中的种群或试验尺度。证明没有给出漂移估计开始成立的具体数值阈值。

设某个反应将 $y+w$转化为 $y'+w$，其中 $w \geq 0$是留出反应物后剩余的种群。弱可逆性保证存在一条从 y' 返回y的复合物有向路径。在每个步骤中，都留出相同的 w 个分子。当前复合物中的分子恰好为下一步骤提供反应物，因此该路径将 $y'+w$带回 $y+w$。因此，每个可执行的跃迁之后都可以沿一条可行路径返回其源种群，所以每个互通类都是闭合的 [18]。对于有限类，链是不可约的，且具有有限个状态，因此它是非爆炸的和正常返的 [15]。下文固定一个无限类 Γ。

令 $q(n) = \sum_r \lambda_r(n)$ 为总离开速率。在一次跳变中，反应r 发生的条件概率为 $\lambda_r(n)/q(n)$。因此， V 在下一次跳变时的平均变化为 $QV(n)/q(n)$。我们的目标是一个函数 $V\colon \Gamma \to [1,\infty)$，其具有 有限次水平集，即对于每个有限的 L，$\{n \in \Gamma\colon V(n) \leq L\}$ 都是有限的，并且

$$QV(n)/q(n) \leq -1 \qquad \text{outside a finite subset of } \Gamma. \tag{3.1}$$

换言之，我们希望在某个有限集之外，每次跳变的平均下降量至少为一个单位。有限次水平集还可以防止在 V 保持有界时逃逸至无穷远。随后，结论将由下面这个众所周知的判据推出。该判据源自 [14,定理 2.1 和 4.2], ，为完整起见，我们在附录 B 中给出证明。

命题 3.2 (Foster–Lyapunov 判据)。设 X 是定义在可数状态空间 Γ 上的不可约极小连续时间马尔可夫链，其生成元为 Q，并假设每个状态都有有限个出向跃迁。设 $V\colon \Gamma \to [1,\infty)$ 是一个具有有限次水平集的函数，并假设存在 $c>0$ 和一个有限集 $K \subseteq \Gamma$，使得对于每个 $n \in \Gamma \setminus K$ 都有 $QV(n) \le -c$。那么，X 是非爆炸且正常返的。

3.1 证明的组织方式

在例子 $0 \rightleftharpoons X$ 中，只需考察 X 的分子数，我们就能看出种群为何会返回。存在多个物种时，则会出现一种新的可能性：某个能使较大计数降低的反应，可能需要另一种计数为零的物种提供一个分子。生成这个分子可能是迈向返回的一步，即使较大的计数尚未下降。我们希望构造一个函数 V，能够识别这两种进展。

我们在计数什么？ 取 $j = 10{,}000$ 作为参考规模。假设三个物种的计数为 $n = (10{,}000, 100, 3)$。第一个计数等于 j，第二个等于 $\sqrt{j}$。设第三个计数保持为 3，而 j 不断增大。这些规模对应的指数为 $a = (1, \tfrac{1}{2}, 0)$。我们称这个向量为一个斜率。将其各分量作为权重，可得 $a \cdot n = 10{,}000 + \tfrac{1}{2}(100) = 10{,}050$。第三个计数对这个加权和的贡献为零，但其确切值仍决定哪些反应能够发生。

第4节利用反应路径构造一个有界的调整项 $s(n)$，即种群修正项，加到加权和 $a \cdot n$ 上。由此得到的高度为

$$H(n) = a \cdot n - s(n) = 10{,}050 - s(10{,}000, 100, 3) \qquad \text{in this example.}$$

这里，j 是描述种群规模的试验尺度，而 $H(n)$ 则由种群的确切状态决定。并不要求 $j = H(n)$。每个固定斜率都对应一个关于种群的完整函数。稍后我们会比较这些函数，以选出合适的权重。每次进行漂移计算时，试验尺度都保持固定。

一般来说，当 a_i 接近 $\log_j(n_i + 1) = \log(n_i + 1)/\log j$ 时，拟议的指数 a_i 能拟合计数 n_i。加上 1 就能纳入计数为零的情况。指数为零可以拟合有界或缓慢增长的计数，例如阶为 1 或 $\log j$ 的计数。无论哪种阶，这些计数的增长速度都比 j^{ε} 慢，对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立，因此其极限指数为零。在这些情况下，我们保留精确计数，因为即使一个分子也可能决定反应能否发生。

在出现减少之前，我们如何判断进展？ 在我们的互通类中固定一个参考种群 $n_\star$。沿着返回该参考种群的路径，每个反应都会消耗少量分子，并留下其余未使用的库存。我们用 a 对这些未使用库存赋予权重。高度 $H(n)$ 是在固定下限约束下，允许返回所需的这些未使用层级的最小上限。修正项 $s(n) = a \cdot n - H(n)$ 有界。这种选择确定了由保持高度不变的准备过程接续一次减少所构成的路径。

我们通过按第4节定义的递增相对阶计算这些路径中的准备步骤来比较它们。这种比较衡量了哪些类型的反应仍然是必要的。

它并不假设随机链会毫无中断地沿着选定路径运行。弱可逆性恰恰在发生中断时发挥作用：一个具有正相对阶的竞争步骤能够保持高度不变，并且可以通过具有相同相对阶的可行路径予以撤销。因此，它无法迫使最佳准备过程额外加入相对阶更小的步骤。第5节将这一限制转化为数值修正量，并针对所有竞争反应检验漂移。

我们如何选择权重？ 一个斜率无法适用于大计数和小计数的所有组合。第6节选取有限个斜率，并为每个斜率指定一个惩罚项。平移后的总体 $n+\mathbf{1}$ 的加权计数减去该惩罚项，就是它的得分。这样的选择确保得分最高的斜率能够适用于该总体。我们将局部函数组合起来，使它们的贡献随得分呈指数增长：适用的斜率由此提供负漂移，而不太适用的斜率贡献太小，无法抵消它。

最后，我们对试探尺度取最小值，从而得到一个关于种群的函数。在发生跳变时，旧的最小化尺度仍可作为新种群的一个试验尺度。比较时保持该尺度不变，就能将固定尺度漂移估计转移到最终函数上。这就是为什么我们可以选择一个依赖于种群的尺度，而无需对这种选择求导或以其他方式估计其变化。由此，这一构造分为四个阶段：返回高度（第4节）、对准备步骤进行修正（第5节）、选取有限个斜率（第6节），以及构造李雅普诺夫函数（第 7 节）。

完整地说，第 7 节中构造的函数为

$$V(n)=\min_{j\in\mathbb{Z}_{\ge 0},\,j\ge 2}\Big[e^{j/2}+e^{-j/2}\sum_{a\in\mathcal{A}}C_0\,e^{B_{\mathbf{1}}(j)-B_a(j)}\,e^{H_a(n)}\big(1+D_{a,j}(n)\big)\Big].$$

这里， H_a 是与斜率 a （第4节）相关的高度，$D_{a,\,j}$ 是试验尺度 j 下准备步骤的修正项（第5节），$\mathcal{A}$ 是有限个选定斜率组成的族， B_a 是它们的惩罚项（第6节），而 C_0 是第7节中选取的正常数。

4 加权计数的有界修正项

我们根据可行返回路径构造高度。测量每次反应中留下的未使用分子，将使我们能够利用弱可逆性：一个反应及其逆向路径可以携带相同的未使用库存。

4.1 未使用分子与返回上限

定义 4.1。 固定一个至少包含一个正分量的斜率 $a\in[0,1]^d$ 。种群 n 的加权计数为 $a\cdot n$，而 y 的复合物阶数 为 $A_y=a\cdot y$。

如果对于每个 i 都有 $j\to\infty$，并且源为 y 的反应 r 已启用，则其速率为 $\lambda_r(n)=j^{A_y+o(1)}$。我们将 j^{A_y} 称为其 名义速率：即 j 主导幂次的参考值。这一描述允许存在乘法常数和大小为 $j^{o(1)}$ 的因子；但并不表示 $\lambda_r(n)/j^{A_y}\to 1$。确切的计数仍然决定该反应是否启用，包括权重为零的坐标。

定义 4.2。 步骤 是一个二元组 $(n,\ r)$，由起始种群 n 和在 n处启用的反应$r:y\to y'$ 组成。将 n' 记作该步骤的目的地，则有

$$n=y+w,\qquad n'=y'+w,\qquad w=n-y\ge 0.$$

称 w 为该步骤的未使用库存 。这些分子是在反应物 y被生成物 y'替代时留出的。其加权计数为未使用层级

$$\eta = a \cdot w = a \cdot n - A_y = a \cdot n' - A_{y'}.$$

弱可逆性提供了一条从 y' 返回到 y的复合物有向路径。将相同的库存 w 添加到每个复合物后，这条路径上的每个步骤都变得可行。所有步骤的未使用层级都相同，为 $a\cdot w$。这就是我们衡量未使用层级的原因。

例4.3. 我们的运行示例为

$$2X + Y \rightleftharpoons X, \qquad Y \rightleftharpoons 0. \tag{4.1}$$

将（N, b）记作 X, Y的计数，并取 $a = (\alpha, 0)$，其中 $0 < \alpha \leq 1$。未使用库存为$w = (m, b)$时，第一个连锁类给出

$$\underbrace{(m+1, b)}_{X+w} \quad \rightleftharpoons \quad \underbrace{(m+2, b+1)}_{2X+Y+w}.$$

两个步骤的未使用层级都是 αm。复合物阶数 α 和 2α 分别属于 X 和 $2X + Y$，且不会因添加库存而改变。在 $(N,0)$ 时，其中 $N \geq 1$，通过 Y生成一个 $X \to 2X + Y$会得到 $(N + 1,1)$，而使用 $0 \to Y$则会得到 $(N, 1)$。这两种生成 Y 的方式对后续返回的影响不同。

定义 4.4。 固定一个参考种群 $n_\star \in \Gamma$ 以及暂时固定一个下限 $R \geq 0$。返回路径 $\pi : n \to n_\star$ 是一个有限的连续步骤序列，从 n 开始并在 $n_\star$结束。对于每个起始种群 $n \in \Gamma$，以 R 作为未使用层级的上限，然后逐步提高该上限，直到其允许返回到 $n_\star$的返回路径。这样的最小上限就是高度 $H(n)$。因此

$$\begin{aligned} H(n) &= \min_{\pi : n \to n_\star} \max\big(\{R\} \cup \{\text{unused levels of the steps in } \pi\}\big), \\ s(n) &= a \cdot n - H(n). \end{aligned} \tag{4.2}$$

我们将 (4.2) 中的最大值称为路径 π的成本 。 $n_\star$ 处的空路径成本为 R，因此$H(n_\star) = R$。我们将 $H(n)$称为高度，将 R 称为其下限，并将 $s(n)$称为种群修正项。

下面的定理为固定的类、斜率和参考种群一次性选定 R ，使得 s 在 Γ 上有界且非递减（即当 $n \leq n'$按坐标逐一满足时， $s(n) \leq s(n')$）。第 4–5 节中的常数可以依赖于固定的类、斜率和参考种群，但不依赖于变化中的种群或试验尺度。在第 4–5 节中，这些固定参数均在 $H(n)$和 $s(n)$中省略。稍后比较斜率时，我们通过写作 $H_a(n)$ 和 $s_a(n)$来恢复对 a 的依赖。

引理 4.5 (最小值存在)。 对于每个 $n \in \Gamma$，(4.2) 中的最小值都能取到。

证明。 任取一条返回路径，设其有限成本为 L 。对于一个未使用库存 w ，若$a\cdot w \leq L$，则每个满足 $a_i > 0$ 的坐标都满足 $w_i \leq L/a_i$。这类整数坐标只有有限种可能取值。满足 $a_i = 0$ 的坐标对未使用层级没有贡献。因此，低于 L的未使用层级只有有限个，而不超过 L 的可能路径代价构成一个包含其最小值的有限集。 □

例4.3（续）。取 $a = (1,\ 0)$、 $n_\star = (1,\ 0)$ 和 $R = 2$。在上限3以下，种群 $(3,\ 0)$ 只能往返于 $(4,\ 1)$。在上限3时，它则可以先利用 $0 \to Y$ 生成一个 Y，然后再利用 $2X + Y \to X$ 消耗一个 X 和一个 Y。重复此过程即可到达 $(1,\ 0)$。因此， $H(3,\ 0) = 3$。往返反应会经过一个含有四个 X 分子的种群，而高度衡量的是返回所需的未使用层级数。

4.2 相对阶与弱可逆性的作用

我们区分未使用层级低于、等于或高于当前高度的步骤。这些步骤的相对阶分别为正、零或负。我们将阶为零作为比较速率的参考：如第5节将要证明的，在最小上限下返回时，首次高度下降必定发生在该上限上的某个步骤。

定义 4.6。 考虑一个步骤（$n,\ r$），其反应为 $r\colon\ y \to y'$，目的地为 $n' = n + y' - y$，未使用层级为 $\eta = a \cdot (n - y)$。其相对阶为

$$p_r(n) = H(n) - \eta = A_y - s(n).$$

在上限处的步骤中，$A_y = s(n)$，因此名义速率为 $j^{s(n)}$。在该种群处用这一公共因子除以所有速率，可将参考指数置为零。对于一般步骤（$n,\ r$），其归一化名义速率为

$$j^{A_y}/j^{s(n)} = j^{p_r(n)}.$$

归一化将 n 处的整个漂移乘以一个正因子，并保留该处反应速率的每个比率。这是一种代数比较；原过程不变。在不同种群之间，因子 $j^{s(n)}$ 可能发生变化，因此相同的相对阶不一定对应相同的物理速率。

定义 4.7。 如果 $p_r(n) \geq 0$ 且 $H(n') = H(n)$，则称一个步骤为保留的。如果 $p_r(n) = 0$ 且 $H(n') < H(n)$，则称其为零阶下降。

这些名称描述了第5节中用于构造返回前缀的步骤。所有可启用反应都保留在生成元中，并保留在最终的漂移估计中。

我们将使用以下形式的狄克逊引理。第 (i) 和 (ii) 部分是经典结论，[12], 我们将给出证明以求完整。第 (iii) 部分是第 (i) 部分的推论。子集$S \subseteq \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ 中的点 n 若逐坐标极小，则不存在满足 $m \leq n$ 和 $m \neq n$的 $m \in S$。

引理 4.8（狄克逊引理）。 设 $S \subseteq \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$。则以下结论成立：

(i) $\mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ 中的每个无限序列都有一个无限逐坐标非递减子序列；*(ii)* S 的逐坐标极小点数量有限，且 S 中的每个点都位于其中某个极小点之上；*(iii)* 如果某个量沿 S中的每个逐坐标非递减序列最终保持不变，那么它在 S上只取有限多个值。

证明。 对于 (i)，注意到每个自然数的无限序列都有一个无限非递减子序列。要么某个值无限次重复出现，要么每个值都只出现有限次，此时我们可以依次选择更大的值。将这一观察应用于每个坐标，并在有限个阶段中的每个阶段保留一个子序列。因此，$\mathbb{Z}^d_{\geq 0}$中的每个无限序列都有一个无限的逐坐标非递减子序列。对于 (ii)，一个由互不相同的极小点组成的无限列表将与此性质矛盾。最后，对于任意 $n \in S$，集合$\{m \in S\colon\ m \leq n\}$ 非空且有限。该集合中的一个极小点在S中也同样是极小点。对于 (iii)，假设该量取无穷多个值，并选择取值两两不同的种群。(i) 提供了一个逐坐标非递减子序列，在该子序列上，这些值仍然彼此不同，从而与最终恒定相矛盾。

□

定理 4.9 (返回高度与相对阶)。 存在 $R \geq 0$ ，使得以下结论成立：

(i) s 在 Γ上有界且非递减；
(ii) 对任意连锁类 L 及任意库存 w ，若对每个 $y \in L$ 都有 $y + w \in \Gamma$ ，

$$\max\{H(y+w) - a \cdot w, 0\} = \max\{A_y - s(y+w), 0\} \quad \textit{is independent of } y \in \mathcal{L}; \tag{4.3}$$

(iii) 每个正相对阶的步骤都被保留，而每个零相对阶的步骤要么被保留，要么是零阶下降；

(iv) 每个正相对阶的步骤 (n, r) p ，其目的地为 n' ，都存在一条从 n' 返回 n的可行路径：该路径上的每个种群的高度均为 $H(n)$，且每个步骤的相对阶均为 p；*(v)* 存在 $\gamma > 0$ ，使得每个负相对阶都不超过 $-\gamma$ ，且每次零阶下降都会使高度至少降低 γ。

证明。选取下限以控制高度的增加。 将从 n出发的返回路径平移库存 $v \geq 0$ ，即可得到一条从 $n + v$ 到 $n_\star + v$的路径。为了到达 $n_\star$，接下来必须移除 v。考虑非零盈余

$$\{w \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} : w \neq 0,\ n_\star + w \in \Gamma\}.$$

对于其有限多个极小元（引理 4.8），分别选择一条从$n_\star + w$ 到 $n_\star$的返回路径。选择足够大的 $R \geq a \cdot n_\star$，使得所有这些路径的未使用层级都不超过 R。如果该集合为空，则无需纳入此类路径。

这就涵盖了极小盈余的消除。对于任意满足$n_\star + v \in \Gamma$的非零盈余 v ，选择一个极小的 $w \leq v$。沿着为 w选定的返回路径携带库存 $v - w$。这会消除 w，使种群保持在 $n_\star + v - w$，并使所有未使用层级不超过

$$R + a \cdot (v - w) \leq R + a \cdot v.$$

新的种群仍处于闭类中。对剩余盈余重复此过程。每次重复时，额外分子的数量都会严格减少，因此该过程终止。每一步的未使用层级都不超过原始上限 $R + a \cdot v$：连续部分的成本通过取其最大值合并。我们已经证明

$$H(n_\star + v) \leq R + a \cdot v.$$

修正项的单调性和有界性。 对于 n， $n + v \in \Gamma$ 且满足 $v \geq 0$，将从 n 出发的最优返回通过 v进行平移。其未使用层级增加了 $a \cdot v$。接着执行刚刚构造的移除 v。由于 $H(n) \geq R$，整条路径都位于 $H(n) + a \cdot v$之下。因此

$$H(n + v) \leq H(n) + a \cdot v, \qquad s(n + v) \geq s(n).$$

Γ 中的每个种群都高于某个极小种群，因此，在有限个极小种群处， s 的最小值是整个类上的下界。对于上界，从 $n \neq n_\star$ 出发的任意返回的第一个反应步骤都具有未使用层级

$$a \cdot n - A_y \geq a \cdot n - \max_y A_y.$$

特别地，最小返回上限 $H(n)$ 至少如此之大，因此 $s(n) \leq \max_y A_y$。在参考种群处， $s(n_\star) = a \cdot n_\star - R \leq 0$。

比较沿平移联结的高度。取同一平移联结中的两个种群 $y+w$ 和 $y'+w$，并令 $\eta = a\cdot w$。弱可逆性给出了两个方向的路径，其中每一步的层级均为未使用层级 η。记 $H = H(y+w)$ 和 $H' = H(y'+w)$。沿任一连接路径执行最优返回可得

$$H \le \max\{\eta, H'\}, \qquad H' \le \max\{\eta, H\}.$$

若 $H > \eta$，第一个不等式迫使 $H' \ge H$，而第二个不等式给出 $H' \le H$，因此 $H' = H$。若 $H \le \eta$，第二个不等式给出 $H' \le \eta$。于是 $(H-\eta)_+ = (H'-\eta)_+$，其中 $u_+ = \max\{u,0\}$。这就证明了 (4.3)。

特别地，可以沿着具有相同相对阶的路径撤销一个正阶步骤。未使用库存、未使用层级和高度在该路径上都保持不变。该路径性质将控制一个竞争步骤如何改变一次下降之前仍需进行的准备过程。

零以下的一致间隙。对于每个复合物 y，考虑 $S_y = \{n \in \Gamma : s(n) > A_y\}$。如果该集合非空，则根据引理 4.8，它有有限多个极小点。它们的正差值 $s(n) - A_y$ 具有一个正的最小值。S_y 中的每个其他点都位于这些极小点之一之上，而 s 的单调性在这些点上给出相同的下界。对有限多个非空 S_y 取最小值，得到 $\gamma > 0$，其中

$$s(n) > A_y \quad\Longrightarrow\quad s(n) \ge A_y + \gamma. \tag{4.4}$$

如果每个 S_y 都为空，则任意正的 γ 均可行，我们取 $\gamma = 1$。对于具有未使用层级 η的步骤，恒等式 $\eta - H(n) = s(n) - A_y$ 表明，任何高于当前高度的未使用层级至少比它高 γ。特别地，零阶下降 $n = y + w \to n' = y' + w$ 会使高度至少降低 γ：在 n' 处对具有复合物 y'的情形应用间隙界，并使用$s(n') - A_{y'} = \eta - H(n') = H(n) - H(n') > 0$。 □

下一个例子说明了为什么下限要像定理 4.9的证明中那样选择，并且它不一定总是零。

例 4.10。考虑反应网络 $0 \to 2Y \to X + Y \to 0$，其中 $n_\star = (0,0)$ 和 $a = (0,1)$。如果 $R = 0$，则在上限为零的情况下，从 $(2,0)$ 可达的唯一种群构成循环 $(2,0) \to (2,2) \to (3,1) \to (2,0)$。在上限为一的情况下，我们则可以从 $(2,2)$ 转到 $(1,1)$，然后转到 $(0,0)$。因此 $H(2,0) = 1$ 以及 $H(0,0) = 0$：向 $(0,0)$ 添加两个 X 分子会使 s 从 0 降至 -1，尽管 X 的权重为零。在 $R = 1$下，两个高度均为一，且两个修正量均为 -1。

4.3 边界示例

例4.3（续）。在 (4.1) 中，将四个速率常数均设为 1。取类$N \ge 1$、参考态 $(1,\ 0)$、斜率 $a = (\alpha,\ 0)$ 和下限 $R = 2\alpha$。参考态上方的最小非零盈余导出 $(2,\ 0)$ 和 $(1,\ 1)$。从第一个盈余出发，创建一个 Y并使用 $2X + Y \to X$。从第二个盈余中移除 Y。两次返回均符合 R，正如定理所要求的那样。

我们断言

$$H(N,b) = \alpha\max\{2, N-2, N-b\}, \qquad s(N,b) = \alpha\min\{N-2, 2, b\}. \tag{4.5}$$

下限给出了关于 H的第一个下界。任何非空返回的第一步至多使用两个 X 分子，因此得到界 $\alpha(N-2)$。要得到第三个界，注意沿着一条路径，只有 $0 \to Y$才能减小当前 X 与 Y

计数之间的差值。如果初始时 $N-b>1$，则返回到(1，0)必须使用这一反应。在首次使用它之前，该差值并未减小，因此在那一步至少有 $N-b$ 个 X 分子存在且尚未使用。当 $N-b\le 1$时，下限已经给出了所需的界。

对于反向不等式，令 $h=\max\{2,N-2,N-b\}$。当 X 计数超过 h时，使用 $2X+Y\to X$。分子数量足够，因为 $N-h\le b$，且未使用层级至多为 $\alpha(N-2)$。当 X 计数不超过 h时，在需要时创建一个 Y，并继续移除，直到剩下一个 X。最后移除任何剩余的 Y。每一步都不超过 αh，从而证明 (4.5)。

在 $N\ge 4$处，修正项为 0、α 或 2α，分别对应 $b=0$、$b=1$ 或 $b\ge 2$；见图 1。反应 $2X+Y\to X$、$X\to 2X+Y$、$Y\to 0$和 $0\to Y$的实际速率分别为 $N(N-1)b$、N、b 和 1。为了与一般构造进行比较，固定一个试验尺度 j，并将大物种因子替换为其主导幂次 j^{A_y}。在此例中，最后一列给出归一化名义速率 $j^{p_r(n)}$ 乘以精确的 Y 因子，

$$(b)_{y_Y}\, j^{A_y-s(N,b)}.$$

对于 $N\ge 5$，下表列出了保留步和零阶递减。每个目的地由其新的 Y 计数指定，而其 X 计数则按该反应的规定变化。

b	反应	新的 b	role	具有精确 Y 因子的速率
0	$X\to 2X+Y$	1	保留的	j^{α}
0	$0\to Y$	1	零阶下降	1
1	$2X+Y\to X$	0	保留的	j^{α}
1	$X\to 2X+Y$	2	保留的	1
2	$2X+Y\to X$	1	保留的	2
$b\ge 3$	$2X+Y\to X$	$b-1$	零阶下降	b

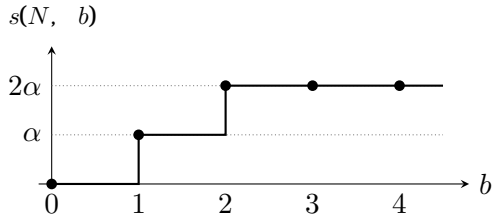
例如，源 $2X+Y$的复合物阶数为 2α，因此其表格条目为 $bj^{2\alpha-s(N,b)}$。在最后一行中，该步骤的相对阶为零。由于 $b\ge 3$，其高度从 $H(N,\ b)=\alpha(N-2)$ 下降到 $H(N-1,\ b-1)=\alpha(N-3)$。步骤也可能因负相对阶而保持高度不变，正如 $0\to Y$ 从 $(N,\ 2)$ 到 $(N,\ 3)$ 所做的那样。这类步骤将在漂移证明中单独估计。

这里，物理速率与相对阶之间的区别很重要。在 $b=2$处，反应$2X+Y\to X$ 的相对阶为零，实际速率为 $2N(N-1)$。相对阶为零意味着，在该种群下，其名义速率等于参考速率 $j^{s(N,2)}$。

最后，令 $\alpha=1$，并从 $(N,\ 1)$ 开始，其中 $N\ge 5$。这里 $H(N,\ 1)=N-1$。涉及 X 的两个反应都保持 H 不变。反应 $Y\to 0$ 和 $0\to Y$ 分别使 H 改变 $+1$ 和 -1，且速率均为 1。因此

$$\frac{Qe^{H}(N,1)}{e^{H(N,1)}}=e+e^{-1}-2>0.$$

高度标识了一条通向下降的可行路径，但一个成功的漂移函数还必须识别准备步骤中的进展。接下来我们构造这一额外的修正项。



Figu第 1 个： (4.5) 中任意固定 $N \geq 4$ 处的修正项。圆点给出了其在整数 Y 处的值 ts.

5 计算一次高度下降之前的步骤

第4节末尾的例子说明了为什么仅凭高度是不够的。现在，我们来衡量在高度能够下降之前还需要多少准备过程。首先，记录优选准备过程中各步骤的相对阶。然后，将这些记录转化为一个较小的数值修正量。我们选择这些权重，使进展带来的负漂移大于竞争反应带来的正漂移。保持第4节中的选择不变。记录 $c(n)$将独立于试验尺度 j，而其数值修正量 $D_j(n)$将取决于该尺度。

5.1 优选返回前缀及其记录

引理5.1 （首次高度下降）。 设 $n \in \Gamma$ 满足 $H(n) > R$，并考虑一条从 n 返回 $n_\star$ 、成本为 $H(n)$ 的返回路径。则该路径包含一个降高度步。其第一个此类步骤的相对阶为零，且此前的每个步骤都得以保留。

证明。 设 $h = H(n)$。由于 $H(n_\star) = R < h$，该路径上的高度最终会下降。在首次高度变化之前，每个步骤都有未使用层级 $\eta \leq h$。根据(4.3)，具有 $\eta < h$ 的步骤会保持高度不变，而具有 $\eta = h$ 的步骤只能保持高度不变或使其下降。因此，首次下降之前的所有步骤都得以保留，且该下降的相对阶为零。

□

定义 5.2。 如果某个高度大于 R 的种群在此处可进行零阶下降，则称其为标记种群。一个返回前缀由通往标记种群的保留步骤，随后再加上一个零阶下降组成。其准备过程是该下降之前的保留步骤序列；它可以为空。沿着从其终点出发的最优返回路径，返回前缀可以补全为一条通往 $n_\star$ 的返回路径。我们只统计其准备过程中的步骤。

定义 5.3。 对于返回前缀 π，令 $c_p(\pi)$统计其相对阶为 $p \geq 0$ 的准备步骤数。在计数不同的最小阶处比较两个返回前缀，优先选择计数较小者。这就是字典序 $\leq_{\mathrm{lex}}$：零阶步骤较少者优先，然后是下一正阶的步骤较少者，依此类推。

在固定高度 h 下，准备过程中只能出现有限多个相对阶。它们具有 $h - \eta$ 的形式，其中 $0 \leq \eta \leq h$，根据紧接在 (4.2) 之后的论证，这样的未使用层级只有有限多个。

定义 5.4。 对于 n，在 $H(n) > R$ 的条件下，依次最小化这些非负整数计数，可得到一个达到的最小值，即记录 $c(n)$。达到该记录的返回前缀称为优选返回前缀。将每条记录视为 $p \geq 0$ 的函数，在未使用的每个阶上取零；这也定义了不同高度的记录之间的比较关系。

每条记录仅在有限多个阶上非零。对于所有种群，一个共同的有限阶列表仍有待证明。当且仅当已经可以进行零阶下降时，记录才为零。

例4.3（续）。计数按相对阶0和 α编排。在高度$h > R$处，可能的记录为

Y 计数 b	优选准备过程	$c(N,\ b)$
0或 $b \geq 3$	无，已标记	(0，0)
1	一个阶-α 步骤到 $b = 0$	(0，1)
2	一个零阶步骤，然后一个阶-α 步骤	(1，1)

优先考虑零阶步骤很重要。采用多个正阶步骤的准备过程，可能比需要哪怕一个零阶步骤的准备过程更可取。

一个首选返回前缀所揭示的信息。其最后一个步骤具有未使用层级 $h = H(n)$。从起始加权计数中减去该层级，得到 $s(n) = a\cdot\ n - h$。从 h 中减去每个更早的未使用层级 η_i，得到在 $c(n)$ 中计数的相对阶 $h - \eta_i$。因此，同一个反应序列同时确定了修正项和最优记录。

例4.3（续）。取 $a = (1，0)$ 和 $n = (N，\ 1)$，其中 $N \geq 5$。该返回前缀

$$(N, 1) \xrightarrow{2X+Y\to X} (N-1, 0) \xrightarrow{0\to Y} (N-1, 1)$$

具有未使用层级 $N - 2$ 和 $N - 1$。后者给出 $H(n) = N - 1$ 和 $s(n) = 1$。这两个未使用层级相差一，因此得到 $c(n) = (0，\ 1)$。

将序列平移 $v \geq 0$，会使其起始加权计数和每个未使用层级都增加 $a \cdot v$。这些数之间的差保持不变。平移后的序列在新的起始种群下不一定仍是返回前缀，因为最小返回上限可能更低。下一个证明将确定其在首次高度下降之前会发生什么。

引理 5.5 (有限多个修正项和记录)。对于固定的类和斜率，$s(n)$和 $c(n)$ 在各自的定义域上只取有限多个值。

证明。通过平移一个首选返回前缀来比较两个种群。取 $m \leq n$ 属于 Γ，且两者的高度均大于 R，并设

$$v = n - m, \qquad \delta = s(n) - s(m) \geq 0.$$

设 $\delta < \gamma$，其中 γ 来自 (4.4)。将一个首选返回前缀从 m 平移 v。其原始端点 z 满足 $H(z) \leq H(m) - \gamma$。定理 4.9(i) 中的高度比较给出

$$H(z + v) \leq H(z) + a \cdot v \leq H(m) + a \cdot v - \gamma = H(n) + \delta - \gamma < H(n).$$

因此，平移后的路径必定离开其起始高度。路径上的每个未使用层级至多为

$$H(m) + a \cdot v = H(n) + \delta < H(n) + \gamma.$$

只要当前高度为 $H(n)$，间隙 (4.4) 就排除了严格处于$H(n)$与 $H(n) + \gamma$之间的未使用层级。因此，其未使用层级至多为 $H(n)$。根据 (4.3)，未使用层级严格低于 $H(n)$的步骤会保持高度不变。未使用层级为 $H(n)$的步骤只能保持

高度不变或使其下降。因此，第一次变化是一次零阶下降，其未使用层级恰好为 $H(n)$。

这一步不晚于原始返回前缀的最后一步，因此其原始源的高度为 $H(m)$。平移会将 $a \cdot v$ 加到未使用层级上；因此，其原始未使用层级为 $H(n) - a \cdot v$。其原始相对阶为

$$H(m) - \big(H(n) - a \cdot v\big) = \delta.$$

我们已经证明，以这种方式得到的每个差值 $\delta < \gamma$，都是从 m 出发的所选返回前缀上的有限个阶之一。
若 $\delta = 0$，则平移后的起始高度为 $H(m) + a \cdot v$。在首次下降之前，高度和未使用层级增加的量相同，因此所有相对阶均与其原始值一致。在首次下降处截断，可得到一个从n出发的竞争返回前缀，它可能比平移后的原始返回前缀更早结束。其准备步骤对应于原始准备过程的一个初始片段，因此每项计数都不大于原先的计数。由最优性，

$$s(n) = s(m) \quad \Longrightarrow \quad c(n) \le_{\text{lex}} c(m).$$

将引理 *4.8* 应用于 s。考虑一个逐坐标非递减的种群序列，其中每个种群的高度都大于 R。它们的修正量非递减且有界，因此收敛到一个有限极限。选取一项 m，使其修正量比该极限小 γ。根据上述比较，之后的每个修正量都等于 $s(m)$ 加上从 m出发的固定优选返回前缀上的有限个阶之一。取值于有限集的非递减序列最终必定为常数。引理 4.8(iii)证明，s 在下限以上具有有限值域。

在下限上，$H(n) = R$，因此 $a \cdot n = R + s(n)$ 有上界。满足 $a_i > 0$ 的每个整数坐标随后都有界，而满足 $a_i = 0$ 的坐标不会影响总和。因此，加权计数在下限上只取有限多个值，$s(n) = a \cdot n - R$ 也是如此。我们由此得出，s 在整个类上具有有限值域。特别地，可能的相对阶 $A_y - s(n)$ 构成一个有限集，因为复合物的数量有限。

将引理 *4.8* 应用于这些记录。沿着下限上方的逐坐标非递减序列，s 最终保持不变。前述比较随后使这些记录按字典序非递增。现在，它们只使用一个固定的有限相对阶列表。它们的第一个整数计数最终保持不变，接着第二个也最终保持不变，依此类推。因此，这些记录最终保持不变，而引理 4.8(iii) 表明，在下限上方的整个类中，记录只有有限多个。特别地，它们的计数之和为优选准备过程的长度提供了一个统一的界。

□

5.2 将进展转化为负漂移

现在，我们为每条记录分配一个数值修正量。更好的记录获得更小的修正量。这样，保持高度的反应过程中的进展就能降低该函数

$$e^{H(n)}(1 + D_j(n)),$$

其中，D_j 将是一个较小的非负数。为了获得负漂移，我们必须根据引起这些变化的反应速率来选择其变化。

定义 5.6. 如果下限以上没有种群，则处处取 $K = 0$ 和 $D_j(n) = 0$。否则，引理 5.5 表明，下限以上只有有限个记录，记为 $K + 1$。

零记录出现在任意首选返回前缀最后一次下降的标记源处。按字典序递增排列这些记录，

$$0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_K.$$

具有记录 c_k 的种群，其秩 为 k。对于 $c_{\ell-1}$ 和 c_ℓ之间的每个间隙，令 p_ℓ 为它们计数不同的最小相对阶。

例4.3（续）。这些记录为 (0，0)，(0，1)，(1，1)，因此第一个间隙的阶为α，第二个间隙的阶为零。

从秩为 k 的种群到秩为 m 的种群的一步跨越 间隙 ℓ，其最小值为$\{k,\ m\}$ $<\ell \leq$ 最大值$\{k,\ m\}$。单一步骤可以跨越多个间隙。例如，如果列表包含 (0，1) $<$(0，2) $<$(1，1)，那么将 (1，1) 减至 (0，1) 的一步至少跨越两个间隙。

引理5.7（竞争反应能改变什么）。 设(n, r) 是相对阶为 $p \geq 0$ 、目的地为 n'的一个保留步，并假设 $H(n) > R$。那么，记录 $c(n)$和 $c(n')$ 在低于 p的每个阶上都相同，并且该步骤所跨越的每个间隙 ℓ 都满足 $p_\ell \geq p$。

证明。 对于 $p = 0$，低于 p 阶的一致性是空泛的，并且根据定义，每个跨越间隔都满足$p_\ell \geq 0$。现在假设 $p > 0$。根据定理4.9(iv)，一个正阶 p 的保留步可以通过一条完全由同阶步骤组成的可行路径撤销。两个端点的高度都是 H（n）$> R$，因而都有记录；从任一端点都可以到达另一个端点，并沿其首选返回前缀继续，而无需添加低于 p阶的步骤。如果两个端点的记录在低于 p阶处首次出现差异，那么从较差端点沿连接路径前进，再进行较优的准备过程，就能改善其记录，这就产生了矛盾。因此，它们在低于 p 阶处的计数必须一致。有规定的低于 p 阶计数的所有记录，在有序列表中都是连续出现的。因此，每个由一个保留的 p 阶步骤跨越的间隙都满足 $p_\ell \geq p$。 □

例4.3（续）。 一个 α 阶的保留步不能将记录 (0，1) 与记录 (1，1) 连接起来。返回第一个种群的路径，再加上其 α 阶准备过程，将使第二个种群获得一个无需任何零阶步骤的准备过程。这与其第一项计数为一相矛盾。对弱可逆性的这种运用控制了哪些准备过程是必要的，而不要求链不间断地遵循所选的准备过程。

定义 5.8（间隙权重和记录修正）。为间隙 ℓ 赋予正权重 $j^{-\ell\theta-p_\ell}$。沿着间隙向秩更大的方向穿过时，修正项增加该权重；向秩更小的方向穿过时，修正项减少相同的数值。更准确地说，定义

$$\theta = \frac{\gamma}{K+1}, \qquad D_j(n) = \sum_{\ell=1}^{k} j^{-\ell\theta-p_\ell} \quad \text{when } c(n) = c_k. \tag{5.1}$$

对于 $H(n) = R$，令 $D_j(n) = 0$。

在选择 j之前，记录列表及这些权重中的指数都已固定。在所有情况下，对于 $j \geq 2$，$0 \leq D_j(n) \leq Kj^{-\theta}$。
因子 j^{-p_ℓ} 补偿了归一化名义速率为 j^{p_ℓ}时的一次交叉，因为间隙权重乘以该速率后得到 $j^{-\ell\theta}$。尽管间隙权重本身未必随 ℓ递减，但这一乘积会递减。相对阶更小的交叉所作的贡献则更小。我们先比较这些名义贡献，再考虑名义速率与实际速率之间的差异。

引理 5.9（优选返回前缀的第一步）。设 $n \in \Gamma$ 的秩为 $k > 0$，且（n, r） 是从 n出发的优选返回前缀的第一步，其相对阶为 p，目的地为n'。那么，该步骤被保留， n' 的秩为某个 $i < k$，并且对于至少一个$\ell \in \{i+1, \dots, k\}$，有 $p_\ell = p$。特别地，对于每个 $j \geq 2$，都有 $D_j(n) - D_j(n') \geq j^{-k\theta - p}$。

证明。步骤（n， r）属于准备过程，因此被保留。剩余的返回前缀在目的地必须是优选的，因为更好的延续会改进原来的返回前缀。因此，执行这一步会使阶 p 上的计数恰好减少一。两个记录在较低阶上相同，所以秩从 k 降至 $i < k$，例如如此。根据引理5.7，每个跨越间隙 $\ell \in \{i+1, \dots, k\}$ 都具有 $p_\ell \geq p$。其中至少有一个具有 $p_\ell = p$，否则记录 c_i，……，c_k 在阶 p上都会相同，但 c_i 与 c_k 在该阶不同。其权重至少为 $j^{-k\theta-p}$。

□

将引理 5.9 中的减少量乘以归一化名义速率 j^p，得到的损失至少为 $j^{-k\theta}$。

一个使秩从 k 增加到 $m > k$ 的阶为 p' 的保留步，则会加上间隙 $k+1$，……， m的权重。根据引理5.7，每个跨越间隙都具有 $p_\ell \geq p'$，因此其名义贡献满足

$$j^{p'} j^{-\ell\theta - p_\ell} \leq j^{-\ell\theta} \leq j^{-(k+1)\theta}.$$

共有 $m - k \leq K$个这样的间隙。因此，该步骤的总收益至多为 $Kj^{-(k+1)\theta}$，比保证损失小 $Kj^{-\theta}$ 倍。

我们还必须控制负阶步骤，因为它们可能会增加高度。它们的阶至多为 $-\gamma$。最弱的进展界出现在秩 K处，大小为 $j^{-K\theta}$。我们的选择$\gamma = (K+1)\theta$ 使这些指数之间留下了一个正差值 $\gamma - K\theta = \theta$。这也将使负阶步骤带来的可能收益小于保证损失。

现在修正项已经定义，令

$$W_j(n) = e^{H(n)}(1 + D_j(n)). \tag{5.2}$$

计算每个反应的漂移时，在其两端使用相同的试验尺度 j。

例4.3（续）。令 $\alpha = 1$，从（N，1）开始，并固定 $j = N$。修正项和复合物阶数都是整数，因此可以取 $\gamma = 1$。共有两个正秩，因此得到 $\theta = 1/3$。将两个间隙权重写为 g_1， g_2，将起始高度写为 h：

$$g_1 = N^{-4/3}, \qquad g_2 = N^{-2/3}, \qquad h = H(N, 1) = N - 1.$$

起始值为 $W_N(N, 1) = e^h(1 + g_1)$。对于下表中的目的地，记作 (N', b')。在这四个目的地处，(4.5) 给出 $H(N', b') = N' - \min(b', 2)$，而记录决定了额外的修正项 D_N。

反应	目的地	rate	高度	W_N(目的地)$/e^h$
$2X + Y \to X$	$(N-1,\ 0)$	$N(N-1)$	h	1
$X \to 2X + Y$	$(N+1,\ 2)$	N	h	$1 + g_1 + g_2$
$Y \to 0$	$(N, 0)$	1	$h+1$	e
$0 \to Y$	$(N,\ 2)$	1	$h-1$	$e^{-1}(1 + g_1 + g_2)$

从最后一列中减去 $1 + g_1$，乘以速率后相加。由此得到

$$\begin{aligned} \frac{QW_N(N,1)}{e^h} = & -N(N-1)g_1 + Ng_2 \\ & + [e - (1+g_1)] + [e^{-1}(1+g_1+g_2) - (1+g_1)]. \end{aligned}$$

第一个损失项的阶为 $N^{2/3}$，保留的绕行项增益为 $N^{1/3}$，最后两项保持有界。除以共同速率尺度 $j^{s(N,1)}=N$ 后，比较关系就显而易见了，

$$\frac{QW_N(N,1)}{Ne^{H(N,1)}} = -(1-1/N)N^{-1/3} + N^{-2/3} + O(N^{-1}) < 0$$

当 N 足够大时。修正项会在仅有 e^H 时具有正漂移的种群处提供负漂移。

比较名义速率与实际速率。令 $x = n + \mathbf{1}$ 和 $T = \sum_i x_i$。试验尺度 j、高度 H 和总规模 T 发挥着不同的作用：在前面的计算中，在 $(N,\ \mathbf{1})$ 处，$j = N$、$H(N,\ \mathbf{1}) = N - 1$ 和 $T = N + 3$。令 M 为源复合物中分子数量的最大值。由于该网络是弱可逆的且 Γ 是无限的，因此 $M \geq 1$。选择一个精度

$$0 < E_a < \min\{\tfrac{1}{2}\max_i a_i,\ \theta/(4M)\}.$$

对于每个斜率 a，该精度在第6节选定有限族斜率之前就已确定。它与种群和试验尺度无关。

定义 5.10。如果斜率 a 适配 尺度 j 下的种群 n，则称该斜率 $\|\log_j x - a\|_\infty < E_a$。

引理 5.11（名义速率与实际速率）。固定一个非零斜率 a。那么，存在 $j'_a \geq 2$，使得对于每个 $j \geq j'_a$ 以及每个在尺度 j 下 a 适配的 $n \in \Gamma$，我们有 $H(n) > R$，并且对于在 n 处启用的每个反应 r，

$$j^{p_r(n)-\theta/3} \leq \frac{\lambda_r(n)}{j^{s(n)}} \leq j^{p_r(n)+\theta/3}. \tag{5.3}$$

证明。取 i，使 $a_i = \text{达到}_k\, a_k > 0$最大值。每个满足 $\|\log_j x - a\|_\infty < E_a$的种群都有

$$n_i \geq j^{a_i - E_a} - 1.$$

由于 $a_i - E_a > 0$ 和 s 有界，因此对于每个充分大的 j，所有这类种群都有 $H(n) = a\cdot n - s(n) > R$。

对于一个源为 y 的可启用反应，每个因子 $n_i - u$、$0 \leq u < y_i$都介于 $x_i/(y_i+1)$ 和 x_i之间。对于下界，写成 $n_i = y_i + t$，其中 $t \geq 0$。最小的因子是 $t+1$，而$x_i/(y_i+1) = 1 + t/(y_i+1) \leq t+1$。将各因子的界相乘可得

$$\kappa_r \prod_i (y_i+1)^{-y_i} \prod_i x_i^{y_i} \leq \lambda_r(n) \leq \kappa_r \prod_i x_i^{y_i}.$$

写成 $x_i = j^{a_i+\delta_i}$，其中 $|\delta_i| < E_a$。j 在 $\prod_i x_i^{y_i}$中的指数与 A_y 相差 $\sum_i y_i\delta_i$，其绝对值至多为 $ME_a < \theta/4$。正速率常数和源复合物只有有限多个，因此取公共常数 c_λ，$C_\lambda > 0$ 可得

$$c_\lambda j^{A_y - \theta/4} \leq \lambda_r(n) \leq C_\lambda j^{A_y+\theta/4}.$$

对于较大的 j, $j^{\theta/12} \geq \max\{C_\lambda, 1/c_\lambda\}$。因此，可以通过将指数误差从 $\theta/4$ 增大到 $\theta/3$来纳入这些固定因子。除以 $j^{s(n)}$，即可得到 (5.3)。 □

两个指数误差，一个出现在下界速率界中，另一个出现在上界速率界中，总计为$2\theta/3$。间隙权重中内置的间隔 θ 足以容纳它们。

从现在起，我们将 $W_{a,\ j}$ 记作 W_j，以明确其对斜率 a 的依赖 t.

引理 5.12（固定斜率下的漂移）。固定类 Γ 和非零斜率 a。存在常数 $c > 0$、 $\nu \geq 0$ 和 $j_a \geq 2$，它们与 n 和 j无关，使得

$$QW_{a,j}(n) \leq -cj^{-\nu}W_{a,j}(n)$$

*when*曾经 $j \geq j_a$ 且 a 在尺度 j下与 n 拟合。另有 $C < \infty$，它与 n 和 j无关，*su ch that*

$$|QW_{a,j}(n)| \leq CT^M W_{a,j}(n) \qquad (n \in \Gamma,\ j \geq 2).$$

证明。写作 $W = W_{a,j}$。对于第一个结论，假设斜率拟合，且 j 足够大，使得 (5.3) 和 $H(n) > R$ 成立（引理 5.11）。将每项漂移贡献除以 $e^{H(n)}j^{s(n)}$。用这些单位表示，它是

$$\frac{\lambda_r(n)}{j^{s(n)}}\frac{W(n+y'-y)-W(n)}{e^{H(n)}}.$$

我们在这些相同单位下界定可能的增益和保证损失。

保证损失。在秩 $k > 0$处，相对阶为 p 的优先第一步保留 H，使 D_j 至少降低 $j^{-k\theta-p}$（引理 5.9），且其归一化速率至少为 $j^{p-\theta/3}$。因此，其损失至少为 $j^{-k\theta-\theta/3}$。在秩零处，$D_j(n) = 0$，并且允许进行零阶下降。其目的地 n' 的高度至多为 $H(n) - \gamma$，因此

$$\frac{W(n')}{e^{H(n)}} \leq e^{-\gamma}(1 + Kj^{-\theta}).$$

当 j足够大时，对于固定的 $0 < c_{\text{loss}} < 1$，它至多为 $1 - c_{\text{loss}}$。其相对阶为零，因此归一化速率至少为 $j^{-\theta/3}$。因此，在每个秩 $k \geq 0$ 处，损失至少为$c_{\text{loss}}j^{-k\theta-\theta/3}$。相同的高度下降估计适用于每个零阶下降，因此当 j 足够大时，每个此类步骤都会产生负漂移。

可能收益。一个使秩从 k 增加的保留步，至多跨越 K 个间隙。因此，前面的间隙权重计算给出了其名义贡献的上界 $Kj^{-(k+1)\theta}$。根据 (5.3)，其实际归一化速率至多为其归一化名义速率的 $j^{\theta/3}$ 倍。因此，其贡献至多为

$$Kj^{-(k+1)\theta+\theta/3}.$$

根据定理 4.9(iii)，每个相对阶非负的步骤要么是保留步，要么是零阶下降。我们刚刚已分别计算了这两种情形。因此，所有其余收益都来自相对阶为负的步骤，其至多为 $-\gamma$。我们还需要界定一次这样的跳变能使 W增加多少。对于从 n 到 $n' = n + y' - y$的任意步骤，

$$H(n') - H(n) = a \cdot (y' - y) + s(n) - s(n').$$

s 的有限反应集和有界性给出了该差值的常数上界 Δ。结合 $0 \leq D_j \leq K$，可得

$$W(n') \leq e^{\Delta}(1 + K)e^{H(n)}.$$

W的正向变化除以 $e^{H(n)}$后，因而有一个常数界。方程 (5.3) 给出其归一化速率的上界 $j^{-\gamma+\theta/3}$，因此可能收益至多为 $Cj^{-\gamma+\theta/3}$。

比较总收益与损失。对于保留收益，其与保证损失的比率被一个常数乘以.....所界

$$j^{-(k+1)\theta+\theta/3+k\theta+\theta/3} = j^{-\theta/3}.$$

对于负阶增益，相应的比率被一个常数乘以.....所界

$$j^{-\gamma+k\theta+2\theta/3} \le j^{-\theta/3},$$

因为 $\gamma = (K+1)\theta$ 和 $k \le K$。反应数量有限，因此总增益损失比也趋于零。提高 j 的阈值，直到该比率至多为 $1/2$。至少一半的保证损失仍然存在，从而得到

$$-QW(n) \ge \tfrac{1}{2} c_{\text{loss}} e^{H(n)} j^{s(n)-k\theta-\theta/3}.$$

令 $s_{\min}$ 为 s的下界。由于 $e^{H(n)} \ge W(n)/(1+K)$且 $k \le K$，取

$$\nu = \max\{0, K\theta + \theta/3 - s_{\min}\}.$$

最后显示的界给出 $-QW(n) \ge cj^{-\nu}W(n)$，如所断言。

对于第二个结论，在每个种群和每个 $j \ge 2$处，同样的有界变化论证都成立。它给出 $0 < W(n')/W(n) \le e^{\Delta}(1+K)$，因此 $|W(n') - W(n)| \le C_1 W(n)$。每个质量作用速率至多等于其速率常数乘以 T^M，因为它至多包含 M个因子，而每个因子都至多为 T。因此 $q(n) \le C_2 T^M$，由三角不等式得到

$$|QW(n)| \le \sum_r \lambda_r(n) |W(n + y' - y) - W(n)| \le C_1 q(n) W(n) \le C_1 C_2 T^M W(n).$$

此处所有求和均遍历可发生反应。 □

6 选择适合种群的斜率

上一节给出了负漂移：当 $j \ge j_a$ 且斜率 a 适合尺度为 j 的种群时，$W_{a,j}$ 。现在，我们选择有限个斜率，以便将其函数组合起来。我们希望，所有足以影响总和的贡献都来自适合的斜率。对于每个充分大的种群以及每个尺度 $j \in [T/2, 2T]$，包括各坐标大小差异很大的种群，这一选择都必须成立。

我们通过得分来比较斜率

$$F_{a,j}(x) = a \cdot x - B_a(j),$$

其中， $B_a(j)$ 是使用 a所需支付的惩罚项 。在整个比较过程中，平移后的总体$x = n + \mathbf{1}$ 和尺度 j 保持不变，只有斜率会改变。例如，在 $x = (j,\ j^{\rho})$ 处，将 $(\mathbf{1},\ \mathbf{0})$ 替换为 $(\mathbf{1},\ 1/2)$，加权计数会增加 $j^{\rho}/2$。如果新斜率带来惩罚项$j^{1/4}$，那么当 $\rho > 1/4$ 时，随着 j 变大，其得分会提高；而当 $\rho < 1/4$ 时，得分会降低。惩罚项使得分之间的竞争能够随着计数大小而变化。

图2展示了三个示例得分如何在指数 ρ 变化时偏好不同的斜率。

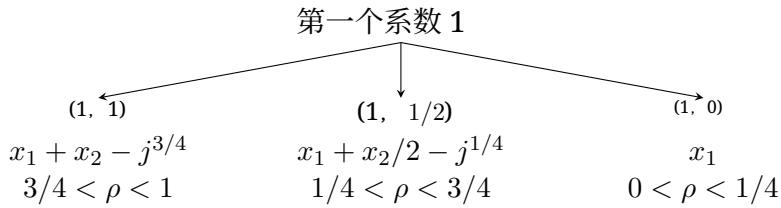


图2： 对于 $x = (j,\ j^{\rho})$，以及显示区间中的每个固定 ρ，当 j 足够大时，所示得分在三个得分中最大。

我们要求每个得分距离最大值不超过 $(\log j)^2$ 的斜率都能拟合。这个窗口有两个作用。在选择论证中，一个拟合不佳的斜率会有一个竞争者，其优势随 j 的某个正幂增长，最终超过 $(\log j)^2$。在下一节中，这样大小的分数差距会使贡献缩小一个与$e^{-(\log j)^2}$相当的因子。即使再乘以任意固定幂 j^b，这个因子仍趋于零，因为

$$j^b e^{-(\log j)^2} = \exp\bigl(b \log j - (\log j)^2\bigr) \longrightarrow 0.$$

命题 6.2 中的选取采用了 [16, 引理2.1 和推论 2.2], 的仿射近似，并给出一个自包含证明。该证明使用了下面关于区间链的引理。

引理 6.1（有限重叠区间链）。 设 $\bar{t} > 0$，并且对每个 $t \in [0, \bar{t}]$给定 $r_t > 0$ 。则存在 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \bar{t}$，使得区间$[t_q - r_{t_q}, t_q + r_{t_q}]$和 $[t_{q+1} - r_{t_{q+1}}, t_{q+1} + r_{t_{q+1}}]$对每个 $0 \le q < m$都相交。

证明。 如果存在一个从 0 到该中心的有限递增中心序列，且其连续区间重叠，则称中心 $t \in [0, \bar{t}]$ 可达 。令 σ 为可达中心的上确界，并记为 $I_\sigma = [\sigma - r_\sigma, \sigma + r_\sigma]$。首先，我们证明 σ 是可达的。假设它不可达。由于 $r_\sigma > 0$，存在一个可达中心 t，满足 $\sigma - r_\sigma < t < \sigma$。以 t 为中心的区间在 t 处与 I_σ 本身重叠。因此，我们可以将 I_σ 追加到一条可达 t的链中，这与 σ 不可达的假设相矛盾。

接下来我们证明 $\sigma = \bar{t}$。若 $\sigma < \bar{t}$，选取 $t' \in (\sigma,\ \bar{t}]$ 足够接近 σ，使得 $t' \in I_\sigma$。以 t' 为中心的区间与 I_σ 在 t' 处重叠。将其接到一条到达 σ 的链上，就会使 t' 可达，这与 σ 作为上确界的定义矛盾。因此 $\sigma = t$，且 t 可达。任意小的半径都不会造成问题，因为 σ 处的区间具有正半径。 □

命题 6.2（公共尺度上的选择）。 对于每个满足 $\max_i a_i = 1$ 的 $a \in [0,1]^d$，指定任意精度 $E_a > 0$。存在一个由此类斜率组成的有限族 A，其中包含$\mathbf{1}$，并有惩罚项使得得分为

$$F_{a,j}(x) = a \cdot x - B_a(j), \qquad B_a(j) = \sum_{\ell=1}^{m_a} j^{\xi_{a,\ell}}, \qquad 0 < \xi_{a,\ell} < 1. \tag{6.1}$$

每个和都是有限的，允许指数重复，也可以为空。对于所有充分大的$T = \sum_i x_i$、所有 $x_i \geq 1$、每个 $j \in [T/2, 2T]$ 以及每个 $a \in A$，我们有

$$\max_{b \in \mathcal{A}} F_{b,j}(x) - F_{a,j}(x) \leq (\log j)^2 \quad \Longrightarrow \quad \|\log_j x - a\|_\infty < E_a.$$

证明。 在此证明中固定整个赋值 $a \mapsto E_a$。我们先构造有限族，再证明蕴含关系。如果某个斜率的系数相对于对应的总体指数过大，那么将该系数及其后所有系数替换为零，就能获得更高的得分。如果它过小，那么将其增大，并在后续所有位置重复这个新值，就能获得更高的得分。此构造兼顾这两种情况，并控制它们的惩罚项。

构造有限的补全族。 我们从非增系数列表$1 = a_1 \geq \cdots \geq a_d \geq 0$开始，随后将它们的排列也纳入其中。部分列表的补全 是指扩展该列表得到的完整斜率。对于每个固定的部分列表，我们通过对尚待填充的位置数进行归纳，构造一个有限的补全集合。将此构造应用于只有一项的列表(1)，即可得到我们的非增斜率族。

没有剩余位置时，列表本身就是唯一的补全。假设已有一些初始系数¯固定，最后一个是 $t > 0$，且至少还剩一个位置。固定一个拟议的下一个系数 $t \in [0, \bar{t}]$ 后，剩余位置便少一个。对于每个这样的 t，归纳假设都会给出扩展后列表的一族有限补全。固定其中一个这样的族，以及构造它时所作的所有选择。当 $t = 0$时，所有后续系数都必须为零，因此只有一个补全。

为这个候选项 t 附上一个正半径 r_t，其值等于所选补全及其所有坐标排列的精度中的最小值的四分之一。对于 $t > 0$，将此半径替换为它与 $t/2$中的较小值。半径也取决于前面的系数和所附的完备族；为简洁起见，我们不在记号中体现这两者。例如，考虑部分列表 (1，0.8)，还剩一个位置。假设一个选定的补全以 0 结尾，其精度为 0.4；另一个以 0.6 结尾，其精度为 0.08。较小的精度迫使共享的第二个系数所对应的半径至多为 $0.08/4 = 0.02$。现在我们选取有限个候选项

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \bar{t}$$

其连续区间 $[t_q - r_{t_q}, t_q + r_{t_q}]$重叠（引理 6.1 和图 3）。保留选定的候选项及其固定的补全族。这些族的并集是有限的，从而完成归纳。共享同一初始列表的补全沿该列表使用相同的半径，因此也使用相同的惩罚项。

有必要明确说明构造顺序。为了考察 (1，t，u)，我们暂时固定 t，并构造其可能的末尾系数 u。随后，我们利用这些已完成向量的精度来选择 t的半径。因此，我们从左到右指定候选系数，但要等其延续构造完成后，再确定有限选择。

分配惩罚项。初始系数 1 和每个零都没有惩罚项。后续位置中每个选定的正系数 t 都会产生 j^{t-r_t}贡献。将这些贡献相加

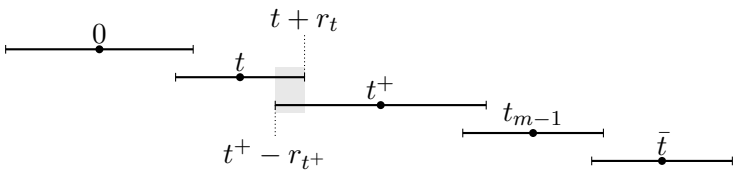


图 3： 一条从 0 到 t的链，为清晰起见，将区间绘制在不同高度。阴影重叠部分给出 $t^+ - r_{t^+} \le t + r_t$，这是系数过小时使用的估计。

定义了 $B_a(j)$。由于 $0 < r_t \le t/2$ 和 $t \le 1$，每个指数 $t - r_t$ 都严格介于零和一之间。

如果在第一个位置之后的某个位置选取正系数 t ，那么在下一个位置重复该系数不会增加其惩罚贡献。事实上，重复之后可用的补全构成重复之前可用补全的子集。这些补全及其排列中的最小精度只会提高。上限 $t/2$ 不变，因此半径只会增大，指数 $t - r_t$ 只会减小。这为在列表后续位置重复一个增大的系数所产生的成本给出了一个界。

每条有限链都包含其上端点 t。因此，从 1 开始，我们可以在每个后续位置都选择 1，所以1 会出现。纳入每个所选斜率的所有坐标排列，并为其赋予与对应非递增代表相同的惩罚项。将所得有限族记为$\mathcal{A}$。

外部矛盾与极限指数。 假设所断言的蕴含关系对于任意大的种群都不成立。那么存在序列 $(x^{(m)}, j_m, a^{(m)})$，满足 $T_m = \sum_i x_i^{(m)} \to \infty$, $T_m/2 \le j_m \le 2T_m$，使得 $a^{(m)}$ 的得分距最大值不超过 $(\log j_m)^2$ ，但其误差至少为 $E_{a^{(m)}}$。

由于$\mathcal{A}$ 是有限集，某个不合要求的斜率会无限次出现。保留该子序列，并用 a 表示其共同斜率。由于 $j_m \ge T_m/2$，我们还有 $j_m \to \infty$。这些不等式

$$0 \le \log_{j_m} x_i^{(m)} \le 1 + \frac{\log 2}{\log j_m}$$

表明指数向量有界。因此，进一步取一个子序列，使其收敛到某个 $\rho \in [0,1]^d$。从现在起省略序列下标，记 $\log^j x \to \rho$ ，因此$x_i = j^{\rho_i + o(1)}$。

我们必须说明如何将斜率 a 与这些极限指数 ρ 排序。如果 $a_i > a_k$ 但 $\rho_i < \rho_k$，交换 a_i 和 a_k 不会改变惩罚项。得分增加了

$$(a_i - a_k)(x_k - x_i).$$

这里 $x_i/x_k \to 0$ 和 $\rho_k > 0$，因此这一增益最终会超过（$\log j$）^{2}, ，这与近乎最大性矛盾。这种逆序是不可能的。将 a 按非递增顺序排序，并在系数相同的情况下，将 ρ 按非递增顺序排序。现在，两个向量在相同的坐标顺序下均为非递增。同步重排不会改变最大坐标误差，也不会改变任何得分比较，因为$\mathcal{A}$ 包含所有惩罚项相同的排列。

根据构造，我们有 $a_1 = 1$。此外，$\max_i x_i \ge T/d \ge j/(2d)$和 $x_i \le 2j$，因此$\max_i \log_j x_i \to 1$。所以 $\rho_1 = 1$。为便于后续比较，记

$$x_{\ge i} = x_i + \cdots + x_d = j^{\rho_i + o(1)}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\min\{E_{a'} : a' \text{ is a coordinate permutation of } a\} > 0.$$

对于尾和， $x_i \le x_{\ge i} \le d\max_{\ell \ge i} x_\ell$，且该尾和中的最大极限指数为$\rho_i$。这些界足以证明所显示的渐近公式。 ε 中的最小值遍历该固定斜率的坐标置换。它确保误差至多为 ε ，满足在重新排列坐标之前所要求的精度。沿所选斜率使用的每个半径都来自一个包含 a的完备族，因此 $r_t \le \varepsilon/2 < \varepsilon$。

系数过大时的内部矛盾。 设 $\rho_i < t - \varepsilon$ 对于 $t = a_i$。则必然有 $i > 1$ 和 $t > 0$。将从位置 i 开始及之后的系数替换为零。这是在相同初始列表下选出的另一种方案。它至少节省系数 t的惩罚项 j^{t-r_t} ，而加权计数的损失至多为 $tx_{\ge i}$ 。因此，其得分增益至少为

$$j^{t-r_t} - tx_{\ge i}.$$

由于 $t - r_t > t - \varepsilon > \rho_i$和 $x_{\ge i} = j^{\rho_i + o(1)}$ ，节省量以 j的正幂超过损失。该增益最终超过 $(\log j)^2$。

系数过小时的内部矛盾。 设 $\rho_i > t + \varepsilon$对于 $t = a_i$，并令 k 为系数 t所在的首个位置。由于 $a_1 = \rho_1 = 1$，我们有 $t < 1$ 和 $k > 1$。前一个系数严格大于 t，因此位置 k 处的有限链有一个更大的下一选择 t^+。图 3所示的重叠给出

$$\xi := t^+ - r_{t^+} \le t + r_t < t + \varepsilon.$$

在位置 k 选择 t^+ ，并将其重复到末尾。每次重复都可作为其下一条链的上端点，且其惩罚项至多为 j^ξ。位置 k之前的惩罚项保持不变，替换后缀的总惩罚项至多为 dj^ξ。每个被替换的系数都至多为 t，因此加权计数至少增加 $(t^+ - t)x_{\ge k}$。即使不计入所有节省的惩罚项，得分增益也至少为

$$(t^+ - t)x_{\ge k} - dj^\xi.$$

现在 $\rho_k \ge \rho_i > t + \varepsilon > \xi$，因此这一增益最终也会超过 $(\log j)^2$。

消除这两处矛盾。无论哪种情况，竞争者的得分提升都超过 $(\log j)^2$, ，这与其得分接近最大值的假设相矛盾。因此，对每个 i，都有 $|\rho_i - a_i| \le \varepsilon$。沿着我们的子序列，误差趋于 $\|\rho - a\|_\infty \le \varepsilon$，而原斜率规定的精度至少为 2ε。因此，所有足够靠后的种群都满足该精度要求。这与反例序列的定义性质相矛盾，并完成了外层论证。

□

7 每个种群对应一个函数

当一个斜率适用于该种群时，局部漂移估计便适用。现在，我们将第6节中的有限个斜率结合起来，并将最大的贡献赋予那些适用的斜率。我们首先保持尺度 j 不变。然后，为每个种群选择一个尺度，使漂移不等式在每次跳变时都得以保持。

7.1 在同一尺度下结合斜率

对于每个满足最大值为 $_i a_i = 1$ 的斜率 a ，第 5.2 节的构造给出精度 E_a 和取决于该斜率的漂移常数。应用命题 6.2 及这些精度，可得到一个有限族 $\mathcal{A}$ 和惩罚项 $B_a(j)$。该族包含 $\mathbf{1}$。我们取常数

仅在完成这次有限选择后，才使其关于 a 是一致的。这些常数可能取决于所选有限族和互通类，但与种群和尺度无关。为显示其对斜率的依赖，记 H_a、 s_a 和 $D_{a,j}$ 分别为高度、种群修正项和记录修正。设

$$Z_{a,j}(n) = C_0 e^{B_{\mathbf{1}}(j) - B_a(j)} W_{a,j}(n), \qquad U_j(n) = \sum_{a \in \mathcal{A}} Z_{a,j}(n).$$

这里$Z_{a,\ j}$ 是斜率 a的贡献。在固定的 j下，随着种群变化，它的乘子保持不变，因此它的漂移与$W_{a,\ j}$的漂移符号相同。我们稍后将选取正常数 C_0 。

得分如何控制贡献。回想一下， $x = n + \mathbf{1}$， $T = \sum_i x_i$ 以及$F_{a,\ j}(x)$ $= a \cdot x - B_a(j)$。恒等式

$$H_a(n) = a \cdot x - \sum_i a_i - s_a(n)$$

给出

$$Z_{a,j}(n) = C_0 e^{B_{\mathbf{1}}(j)} e^{F_{a,j}(x)} e^{-\sum_i a_i - s_a(n)} (1 + D_{a,j}(n)).$$

最后两个因子始终介于两个正常数之间，且对 n 和 $j \geq 2$是一致的。事实上， s_a有界，且$1 \leq 1 + D_{a,\ j} \leq 1 + K_a$，其中 K_a 是该斜率对应的正记录秩的数量。斜率有限，因此存在一个常数 $C_1 \geq 1$ ，使得

$$C_1^{-1} e^{F_{a,j}(x) - F_{b,j}(x)} \leq \frac{Z_{a,j}(n)}{Z_{b,j}(n)} \leq C_1 e^{F_{a,j}(x) - F_{b,j}(x)} \qquad (a, b \in \mathcal{A}). \tag{7.1}$$

因此，得分差决定了各贡献的相对大小，误差至多相差固定的乘法因子。

对于 $a = \mathbf{1}$，惩罚乘数会抵消，且 $H_{\mathbf{1}}(n)$ $= T - d - s_{\mathbf{1}}(n)$。取 $C_0 \geq e^{d + \sup_\Gamma s_{\mathbf{1}}}$。由于$D_{\mathbf{1},\ j} \geq 0$，这确保了

$$Z_{\mathbf{1},j}(n) = C_0 W_{\mathbf{1},j}(n) \geq e^T, \qquad U_j(n) \geq e^T \qquad (n \in \Gamma,\ j \geq 2). \tag{7.2}$$

引理 7.1（固定尺度下的漂移）。存在常数 $c' > 0$ 和 $\nu \geq 0$，使得对于每个 $n \in \Gamma$（其中 T 足够大）以及每个 $j \in [T/2, 2T]$，我们都有

$$QU_j(n) \leq -c' j^{-\nu} U_j(n). \tag{7.3}$$

证明。令 j_0 $=$ 为 $_{a \in \mathcal{A}} j_a$ 的最大值，其中 j_a 是引理 5.12 中的阈值。假设 $j_0 \leq T/2 \leq j \leq 2T$，于是每个局部尺度阈值都得到满足。下文需要时增大 T 的这个下界。对于固定的种群 n 和尺度 j，根据得分对斜率进行划分。令 $\mathcal{A}_{\text{near}}$ 由得分与最大值得分相差不超过 $(\log j)^2$ 的斜率组成，并令$\mathcal{A}_{\text{far}} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{\text{near}}$。写作 $S_{\text{near}} = \sum_{a \in \mathcal{A}_{\text{near}}} Z_{a,j}(n)$ 和 $S_{\text{far}} = \sum_{a \in \mathcal{A}_{\text{far}}} Z_{a,j}(n)$。两个和均在当前种群和尺度下求值，并且 $U_j(n) = S_{\text{near}} + S_{\text{far}}$。

A.$\mathcal{A}_{\text{near}}$ 中的每个斜率都符合命题 6.2 中的计数。因此，引理 5.12 给出 s

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_{\text{near}}} QZ_{a,j}(n) \leq -cj^{-\nu} S_{\text{near}}, \qquad \sum_{a \in \mathcal{A}_{\text{far}}} QZ_{a,j}(n) \leq CT^M S_{\text{far}}.$$

我们通过对整个族 $\mathcal{A}$取最小值或最大值，采用通用常数 $c > 0$、 $\nu \geq 0$ 和 C。第二个估计允许不符合条件的斜率中存在正漂移。

每个最大得分项都出现在 S_{near} 中。根据（7.1）， S_{far} 的每一项至多是任意此类项的 $C_1 e^{-(\log j)^2}$ 倍。对$\mathcal{A}_{\text{far}}$ 求和可得

$$S_{\text{far}} \le C_2 e^{-(\log j)^2} S_{\text{near}}.$$

将远端斜率可能带来的收益上界除以近端斜率造成的损失下界，得到

$$\frac{C T^M S_{\text{far}}}{c j^{-\nu} S_{\text{near}}} \le C_3 j^{M+\nu} e^{-(\log j)^2} = C_3 e^{(M+\nu)\log j - (\log j)^2} \longrightarrow 0.$$

这里我们使用了 $T \le 2j$。当 T 足够大时，该比率至多为 $1/2$，且根据此前对 S_{far} 的界，有 $S_{\text{far}} \le S_{\text{near}}$。由于每一项中都有相同的固定 j， Q 的线性性便给出

$$Q U_j(n) \le -\frac{c}{2} j^{-\nu} S_{\text{near}} \le -\frac{c}{4} j^{-\nu} U_j(n).$$

重新命名常数后，我们证明了 (7.3)。 □

7.2 选择尺度而不损失漂移估计

上述估计在同一尺度 j 下评估每个反应的两端。我们希望得到一个关于种群的单一函数，同时保留跳变处的这种比较。我们通过对尺度取最小值来实现这一点。在第 5.2 节的例子中，我们使用了 $j = N$。下面的最小化为所有斜率贡献之和选择一个尺度。我们将证明，每个最小化尺度与总规模 T 相差 $o(T)$。

在 $j = T$ 处，修正项的有界性、 $a_i \le 1$ 和 $B_a(T) \ge 0$ 给出

$$U_T(n) \le C_4 e^{T + B_1(T)}.$$

我们取 $C_4 \ge 1$。每个惩罚项都是形如 T^ξ 且带有 $\xi < 1$ 的幂的有限和，因此 $B_1(T) = o(T)$。结合 (7.2)，这使得 $U_T(n)$ 始终介于 e^T 和 $e^{T+o(T)}$ 之间，并且对总规模为 T 的种群一致成立。

如果 $U_j(n)$ 恰好等于 e^T，那么 $e^{j/2}$ 和 $e^{T-j/2}$ 两项将在 $j = T$ 处达到平衡。这启发我们得到

$$V(n) = \min_{j \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\, j \ge 2} \Phi_j(n), \qquad \Phi_j(n) = e^{j/2} + e^{-j/2} U_j(n). \tag{7.4}$$

对于固定的 n， $\Phi_j(n) \ge e^{j/2} \to \infty$。只有有限多个整数尺度能够优于 $j = 2$ 处的试探值，因此最小值可以达到，并且 $V(n)$ 是有限的。

命题 7.2（全局权重的漂移）。在 （7.4） 中定义的函数 V 具有有限次水平集，并且在 Γ 的某个有限子集之外满足 $QV(n) \le -q(n)$。因此，它满足目标 （3.1）。

证明。最小化尺度与总规模相匹配。固定 n 并选择一个最小化尺度 $j(n)$。在整个计算中，令此种群处的 $j = j(n)$ 表示相应量。根据 (7.2)，

$$V(n) \ge \max\{e^{j/2}, e^{T-j/2}\} = e^{T/2 + |j-T|/2}.$$

对于 $T \ge 2$，整数尺度 T 是一个可容许竞争者。它给出

$$V(n) \le \Phi_T(n) \le (1 + C_4) e^{T/2 + B_1(T)}.$$

对这两个界取对数可得

$$|j - T| \le 2B_{\mathbf{1}}(T) + 2\log(1 + C_4) = o(T).$$

特别地，对于充分大的 T，每个最小化尺度都属于 $[T/2, 2T]$。此外，$V(n) \ge e^{T/2}$，因此对 $V(n)$ 的界也会给出对 T 的界，从而只剩下有限多个整数种群。这就证明了次水平集的结论。

在下一个种群处使用旧尺度。 假设一个反应将 n 变为 n'。尺度 j在 n处取得最小值，并且在 n'处仍是一个可接受的试探尺度。因此

$$V(n') \le \Phi_j(n'), \qquad V(n) = \Phi_j(n),$$

相减后常数 $e^{j/2}$相消，

$$V(n') - V(n) \le e^{-j/2}(U_j(n') - U_j(n)).$$

乘以 n 处每个非负反应速率并求和。在 $QU_j(n)$ 中，参数 $j = j(n)$ 在评估每个相邻种群时保持不变。在这个最小化尺度处应用（7.3）可得

$$QV(n) \le e^{-j/2} QU_j(n) \le -c' j^{-\nu} e^{-j/2} U_j(n) \le -c' j^{-\nu} e^{T - j/2}.$$

最后，$j = T + o(T)$ 意味着对于较大的 T，$j \le 3T/2$，因此这个负界的绝对值至少为

$$c'(2T)^{-\nu} e^{T/4}.$$

总反应速率满足 $q(n) \le CT^M$。指数函数除以任意固定幂后都趋于无穷大，因此前述绝对值最终会超过 $q(n)$。因此，在一个有限集之外，$QV(n) \le -q(n)$。

□

现在我们可以证明定理 3.1。

定理 *3.1* 的证明。 只需考虑一个无限互通类 Γ，它是闭合的。限制在 Γ 上的链是不可约的，并且由于反应的数量有限，每个种群都有有限个出向跃迁。根据命题 7.2，在 (7.4) 中定义的函数 V 至少为一，具有有限次水平集，并且在有限集$\mathcal{K}$之外满足 $QV \le -q$。我们的无限类中的每个种群都能启用一个反应，并且每个已启用的质量作用因子都是正整数。因此，对于每个 $n \in \Gamma \setminus \mathcal{K}$，有 $q(n) \ge \kappa_{\min} := \min_r \kappa_r > 0$，以及$QV(n) \le -\kappa_{\min}$。命题 3.2 遂得证。 □

致谢

我们感谢 OpenRefinery STEM ResearchProgram 提供人工智能工具资助，支付了本研究所使用的 ChatGPT 订阅费用。

A 记号和术语

网络、速率、类 Γ 和参考态 $n_\star$ 均已固定。对于每个斜率 a，选择R、 H、 s、 c、 γ、 K、 θ先于 j；在第 4–5 节中省略了它们对 a 的依赖。函数 D_j 和 $W_{a,\,j}$ 还依赖于 n 和 j。斜率族 $\mathcal{A}$ 及其惩罚函数B_a 在规定精度 E_a后、 n 和 j 变化之前固定。常数可以增大，并且仅依赖于这些固定选择，而不依赖于 n 或 j。只有在有限选择斜率之后，才考虑斜率上的一致性。第一张表总结了记号，第二张表则按照出现顺序列出主要术语，并附有其定义的参考文献。

记号	含义
n、 Γ、 Q	种群、固定通信类和生成元。
$r\colon\ y \to y'$、 κ_r	反应（源 y，产物 y'）和正速率常数。
$(n)_y$， $q(n)$	质量作用阶乘乘积和总离开速率。
M, $\kappa_{\min}$	源的最大分子总数；最小速率常数。
$(N,\ b)$	运行示例中的 X，Y 的计数。
a, $A_y = a\cdot\ y$	与种群无关的斜率和复合物阶数。
$w = n - y$, $\eta = a\cdot\ w$	启用步骤的未使用库存和未使用层级。
$n_\star$， R	参考种群以及返回上限的下限。
$H(n)$	未使用层级的最小上限，至少为 R，允许从 n 返回到 $n_\star$。
$s(n)\ = a\cdot n - H(n)$	有界总体校正。
$p_r(n)$	步骤 (n, r) 相对于 r 的相对阶：$y \to y'$，由 $H(n)\ - \eta =$给出 $A_y - s(n)$。
$\gamma > 0$	负相对阶至多为 $-\gamma$；零阶下降使高度降低至少降低 γ。
$c(n)$， c_k， K	按相对阶排列的最优预备计数；递增序列中的第 k 条记录阶；正秩的数量。
p_ℓ	$c_{\ell-1}$ 和 c_ℓ 出现差异的第一个相对阶。
$\theta = \gamma/\ (K+1)$	将间隙 ℓ 的权重乘以其对应的速率因子 j^{p_ℓ}，得到 $j^{-\ell\theta}$。
$D_j\ (n)$	记录修正项：截至当前秩的间隙权重之和。
$x = n + \mathbf{1}$， $T = \sum_i x_i$	平移后的总体和总规模。
j, E_a	试验尺度；斜率处局部漂移估计所需的正精度 a.
c, ν, j_a	$c > 0$, $\nu \geq 0$, $j_a \geq 2$：漂移常数、幂和尺度阈值，位于引理 5.12；对每个斜率和类均固定。
$\mathcal{A}$	有限斜率族，包含$\mathbf{1}$ 并对坐标置换闭合。
$B_a(j)$， $F_{a,\ j}(x)$	惩罚项和得分 $a\cdot x - B_a(j)$。
t; t, r_t	最后一个固定系数；对于固定的前置列表和完备族。
ρ	沿子序列的指数向量 $\log_j x$ 的极限。
ε、 $x_{\geq i}$	固定斜率的所有排列中最小精度的一半；尾和 $x_i + \cdots + x_d$。
$W_{a,j}$, $Z_{a,j}$, U_j	局部权重、重缩放斜率贡献和斜率总和。
C_0	确保 $Z_{\mathbf{1},\ j} \geq e^T$ 的乘子。
S_{near}, S_{far}	得分位于距最大值 $(\log j)^2$ 以内的贡献项之和，以及在该窗口之外、固定 n，j 时的贡献项之和。
Φ_j， V	试探全局权重及其在整数 $j \geq 2$ 上的最小值。

Term	含义	定义于
种群、复合物、反应	$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d}$ 中的向量和对 r：复合物的 $y \to y'$	定义2.1
弱可逆	每个连锁类都是强连通的。	定义2.1
可启用反应	r： $y \to y'$，其中 $y \leq n$。	定义2.2
互通类	彼此可达的种群等价类。	定义 2.3
斜率，加权计数，复合物阶数	$a \in [0,1]^d \setminus \{0\}$，$a \cdot n$，以及 $A_y = a^{\cdot} y$。	定义 4.1
Step	在 n启用的配对（n，r），其中 r。	定义 4.2
未使用库存、未使用层级	$w = n - y$ 和 $\eta = a \cdot w$。	定义 4.2
返回路径、成本	以 $n_\star$ 结尾的连续步骤序列；最大值-mum R 及其未使用层级的。	定义 4.4
高度，下限，种群-修正项	$H(n)$，返回路径的最小成本；R；$s(n) = a \cdot n - H(n)$。	定义 4.4
相对阶	$p_r(n) = H(n) - \eta = A_y - s(n)$。	定义 4.6
保留步	$p_r(n) \geq 0$ 和 $H(n') = H(n)$。	定义 4.7
零阶下降	$p_r(n) = 0$ 和 $H(n') < H(n)$。	定义 4.7
标记种群	$H(n) > R$ 并且零阶下降已启用。	定义 5.2
返回前缀，准备-tion	通往标记种群的保留步骤，后接零阶下降；仅保留步。	定义 5.2
字典序	从最小阶开始比较计数 $c_p(\pi)$ 阶。	定义 5.3
记录，首选返回前缀	$c(n)$，从 n开始的返回前缀中的最小计数；达到该计数的前缀。	定义 5.4
秩，间隙	有序列表中记录 c_k 的位置 k；对 $c_{\ell-1} < c_\ell$，阶为 p_ℓ。	定义 5.6
间隙权重、记录校-正	$j^{-\ell\theta - p_\ell}$ 和 $D_j(n)$。	定义 5.8
斜率拟合	$\|\log_j x - a\|_\infty < E_a$。	定义 5.10

B 命题 3.2 的证明

证明。 我们可以假设 $\mathcal{K}$ 非空。函数 V 处处有限，且每个状态都有有限个出向跃迁，因此 $QV(n)$在每个状态处都是有限的。在 $\mathcal{K}$ 之外，其漂移为负。因此，在 $\mathcal{K}$ 上取最大值可得：对某个有限的 $b > 0$，处处都有 $QV \leq bV$。

对于生成元条件，令 $O_m = \{n \in \Gamma : V(n) \leq m\}$，并在链首次离开 O_m 时将其停止。这些有限集递增至 Γ。从 O_m 开始，停止链只能访问 O_m 及其有限个一步离开目的地，并在到达这些目的地后保持不变。因此，V 在其可能的状态上有界，属于其生成元的定义域，并且该生成元在离开之前与 Q 一致。这验证了停止链的生成元假设。结合有限次水平集和 $QV \leq bV$，由 [14,定理 2.1] 可得非爆炸性。

对于常返性，关于 V 的假设给出

$$QV(n) \leq -c + b'\mathbf{1}_{\mathcal{K}}(n)$$

对某个有限的 $b' > 0$ 成立。同样的停止构造验证了这一不等式的生成元条件。

接下来需要检验常返判据中的有限集条件。固定 $z \in \Gamma$ 和 $t > 0$，并记 $P_t(n, z) = \mathbb{P}_n(X_t = z)$。不可约性意味着，从每个$n \in \mathcal{K}$ 到 z都存在一条有限跃迁路径。先在时间 t 之前沿该路径前进，随后一直停留在 z 直到时间 t，这一事件具有正概率。因此

$$\min_{n \in \mathcal{K}} P_t(n, z) > 0.$$

固定采样时刻 t 处的共同下界表明，$\mathcal{K}$ 满足 [14, 定理 4.2]中的小集条件。集合$\mathcal{K}$ 在离散状态空间中是闭合的，并且 V 在其上有界。因此，该判据可推出正 Harris 常返。对于含有多个状态的不可约类，在首次离开某个状态后，该状态的平均返回时间有限。根据我们的约定，吸收单点集是正常返的（见定义 2.3）。证明至此完成。

□

参考文献

[1] A. Agazzi、D. F. Anderson、D. Cappelletti、L. Laurence 和 J. C. Mattingly。二维情形下化学反应常返猜想的证明。arXiv:2611.31221v1，2026年11月23日。[2] A. Agazzi、A. Dembo 和 J.-P. Eckmann。化学反应网络马尔可夫跳跃模型的大偏差理论。《应用概率年刊》**28**(3)，1821–1855，2018年。doi:10.1214/17-AAP1344。[3] A. Agazzi、A. Dembo 和 J.-P. Eckmann。化学反应网络的几何：李雅普诺夫函数与大偏差。《统计物理学杂志》**172**(2)，321–352，2018年。doi:10.1007/s10955-018-2035-8；arXiv:1710.07240v2。[4] A. Agazzi 和 L. Laurence。双分子随机化学反应网络的整体稳定性。arXiv:2610.31550v1，2026年10月22日。[5] D. F. Anderson、D. Cappelletti、M. Koyama 和 T. G. Kurtz。复平衡随机反应网络模型的非爆炸性。《数学生物学通报》**80**，2561–2579，2018年。doi:10.1007/s11538-018-0473-8。[6] D. F. Anderson、D. Cappelletti 和 J. Kim。具有单一连锁类的随机模型弱可逆反应网络。《应用概率杂志》**57**(3)，792–810，2020年。doi:10.1017/jpr.2020.28。[7] D. F. Anderson、D. Cappelletti、J. Kim 和 T. D. Nguyen。强内趋性反应网络的层级结构。《随机过程及其应用》**130**(12)，7218–7259，2020年。doi:10.1016/j.spa.2020.07.012。[8] D. F. Anderson、G. Craciun 和 T. G. Kurtz。零缺陷化学反应网络的乘积形式平稳分布。《数学生物学通报》**72**，1947–1970，2010年。doi:10.1007/s11538-010-9517-4。[9] D. F. Anderson 和 J. Kim。随机模型反应网络正常返的一些网络条件。*SIAM*应用数学杂志**78**(5)，2692–2713，2018年。doi:10.1137/17M1161427。

[10] D. F. Anderson 和 T. G. Kurtz。《生化系统随机分析》。《数学与生物科学研究所讲座系列：生物系统中的随机过程》，第1.2卷。施普林格，2015年。doi:10.1007/978-3-319-16895-1。[11] G. Craciun、F. Nazarov 和 C. Pantea。质量作用和幂律动力系统的持续性与永久性。*SIAM*应用数学杂志**73**(1)，305–329，2013年。doi:10.1137/100812355。[12] L. E. Dickson。具有n 不同素因子的奇完全数和本原丰数的有限性。《美国数学杂志》**35**(4)，413–422，1913年。doi:10.2307/2370405。[13] A. Kriebel。单链路双分子弱可逆随机反应网络的正常返。预印本，第1.2.4版，2026年。doi:10.5281/zenodo.22089551。[14] S. P. Meyn 和 R. L. Tweedie。马尔可夫过程的稳定性 III：连续时间过程的 Foster–Lyapunov判据。《应用概率进展》**25**(3)，518–548，1993年。doi:10.2307/1427522。[15] J. R. Norris。《马尔可夫链》。《统计与概率数学剑桥系列》。剑桥大学出版社，1997年。[16] OpenAI。弱可逆质量作用系统的有界性与持续性。预印本，2026年9月25日，引理2.1和推论2.2，带有预设容差的仿射标签。源代码仓库位于 `https://github.com/openai/math`，访问日期为2026年11月23日。[17] OpenAI。弱可逆质量作用系统中的一致永久性。预印本，2026年10月5日。源代码仓库位于 `https://github.com/openai/math`，访问日期为2026年11月10日。[18] L. Paulevé、G. Craciun 和 H. Koeppl。离散反应网络的动力学性质。《数学生物学杂志》**69**(1)，55–72，2014年。doi:10.1007/s00285-013-0686-2。[19] J. Tóth、A. L. Nagy 和 D. Papp。《反应动力学：练习、程序与定理。确定性与随机动力学的*Mathematica*》。施普林格，纽约，2018年。doi:10.1007/978-1-4939-8643-9。[20] C. Wiuf 和 C. Xu。随机反应网络的分类与阈值动力学。arXiv:2012.07954v3，修订于2023年1月24日。[21] C. Xu。关于反应系统的正则性。arXiv:2409.05340v3，修订于2026年10月12日。[22] C. Xu。一阶内趋性随机反应系统的指数遍历性。arXiv:2601.00176v1，2026年1月1日。