arXiv:2611.32827v1 [math.CA] 24 Nov 2026

高维薛定谔方程的尖锐变差估计

YANPING CHEN* 和 YONGRUI TANG

摘要。我们研究了 $\mathbb{R}^n$上自由薛定谔方程的强 r-变差估计，其中 $n \geq 3$。结合分形限制估计、加权限制估计与混合时空估计，我们在空间指数 p 和变差指数 r的若干范围内确定了尖锐的 Sobolev 正则性（除端点外）。特别地，我们的结果给出了 Du and Zhang 的薛定谔极大估计 [数学年刊，**189**，837–861（2019）]的一个尖锐的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 变差推广。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. 薛定谔方程的局部变差估计 10 4. 定理 1.1 和 1.2 中充分性部分的证明 19 5. 定理 1.1 必要性部分的证明 23 5.1. 变差范数的下界 23 5.2. 范围 $s < A_n$ (p) 内的反例 24 5.3. 范围 $s < 1/p + 1/r$ 255.4. 范围 $s < 2/r + 1/p - 1/2$ 内的反例 26 5.5. 范围 $s < A_n(p) + 2/r - 1$ 275.6. $p = 2$ 28处的下界参考文献 29

1. 引言

对于初始数据 f，自由薛定谔方程为

$$u(x,t) = e^{it\Delta} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi - t|\xi|^2)} \mathcal{F}_x(f)(\xi)\, d\xi.$$

它满足

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) + \Delta u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

对于有限区间 $I = [a,b]$ 和 $1 \leq r < \infty$，定义

$$V_I^r\{F(x,t)\}_t = \sup_{a\leq t_0<\cdots<t_J\leq b} \left(\sum_{j=1}^{J} |F(x,t_j) - F(x,t_{j-1})|^r \right)^{1/r}.$$

2020 数学学科分类。 35Q41, 42B20, 42B37.关键词和短语。 薛定谔方程；变分算子；最大估计；分形限制。
通讯作者：Yanping Chen。电子邮箱：yanpingch@126.com。本研究部分得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12525105 和 12371092）及辽宁省“兴辽英才计划”（项目编号：XLYC2502044）的资助。

对于 $r=\infty$，令 $V_I^{\infty}\{F(x,\ t)\}_t = 2\sup_{t\in I}|F(x,\ t)|$。当这一族已明确时，我们记作 $V_I^r\{F\}$。对于任意 $t_0\in I$，

$$\sup_{t\in I}|F(x,t)| \le |F(x,t_0)| + V_I^r\{F(x,t)\}_t.$$

在本文中，我们研究

$$\|V_{[0,1]}^r\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \qquad n\ge 3. \tag{1.1}$$

我们首先给出所考虑范围的记号，在这些范围内我们确定最小的 Sobolev 正则性。令

$$A_n(p) = \frac{n}{2}-\frac{n}{p}, \qquad q_n = \frac{2(n+1)}{n-1}, \qquad b_n = \frac{n}{n+1}.$$

对于 $3\le m\le n+1$，定义

$$p_{w,m} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m(m-1)(m-2)}\right)^{-1}, \qquad \gamma_{w,m} = \frac{m-1}{2m}-\frac{n+m-1}{2m(m-1)(m-2)}.$$

令 $\gamma_3 = (2-n)/12$，并且对于 $4\le m\le n+1$，定义

$$\alpha_m = \frac{m^2-3m}{m^2-2m-2}, \qquad \gamma_m = \alpha_m\gamma_{m-1}+(1-\alpha_m)\gamma_{w,m}.$$

Let

$$M = \max\{m\in\{3,\dots,n\}:\gamma_j<0 \text{ for } 3\le j\le m\}, \qquad a = \frac{\gamma_{w,M+1}}{\gamma_{w,M+1}-\gamma_M},$$

并定义

$$d_n = \left(\frac{a(M-1)}{2M}+\frac{1-a}{p_{w,M+1}}\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

这是 Du–Li 加权限制估计中的阈值 [14]。例如，$d_3 = 96/35$，$d_4 = 636/245$，以及 $d_5 = 3648/1459$。令

$$G_n = \frac{2(n+1)((n+2)d_n-2(n+3))}{n(n+1)d_n-2(n^2+2n-1)}, \qquad \frac{1}{Q_n} = \frac{n}{2}-\frac{n+1}{G_n}. \tag{1.3}$$

对于 $2\le p\le G_n$，令

$$\theta_p = \frac{1/2-1/p}{1/2-1/G_n}, \qquad \frac{1}{\rho_n(p)} = \frac{1-\theta_p}{q_n}+\frac{\theta_p}{Q_n}. \tag{1.4}$$

对于 $d_n\le p\le G_n$，令

$$\frac{1}{\eta_n(p)} = \frac{1/d_n-1/p}{1/d_n-1/G_n}\frac{1}{Q_n}, \tag{1.5}$$

其中 $\eta_n(d_n)=\infty$。我们将在下文证明 $2<d_n<G_n<q_n<Q_n$。

定理 1.1。设 $n\ge 3$ 和 $2\le p\le\infty$。若 $s>s(p,r)$，则

$$\|V_{[0,1]}^r\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

成立；若 $s<s(p,r)$，则不成立，其中 $s(p,r)$ 定义如下：

(*i*) 如果 $1\le r\le 2$，则

$$s(p,r) = \max\left\{\frac{2}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2},\ A_n(p)+\frac{2}{r}-1\right\}.$$

(*ii*) 如果 $2\le r\le\infty$ 且 $p\ge G_n$，则

$$s(p,r) = \max\left\{A_n(p),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right\}.$$

(*iii*) 如果 $2\le p\le G_n$ 且 $2\le r\le\rho_n(p)$，则 $s(p,r) = 1/p+1/r$。

(*iv*) 如果 $d_n\le p\le G_n$ 且 $\eta_n(p)\le r\le\infty$，则 $s(p,r) = A_n(p)$。(*v*) 如果 $p=2$ 且 $q_n\le r\le\infty$，则 $s(2,\ r) = b_n$。

对于其余指数，我们有以下上界。

定理 1.2。 设 $n \geq 3$、 $2 \leq p \leq G_n$ 和 $\rho_n(p) \leq r \leq \infty$。设

$$\sigma_n(p,r) = A_n(p) + b_n \max\left\{0, \frac{1/p - 1/d_n}{1/2 - 1/d_n}, \frac{1/p - 1/d_n + (Q_n/r)(1/d_n - 1/G_n)}{1/2 - 1/d_n + (Q_n/q_n)(1/d_n - 1/G_n)}\right\}. \tag{1.6}$$

若 $s > \sigma_n(p,r)$，则

$$\left\| V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f\} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim_{p,r,s} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

该指数在边界上与定理 1.1 一致：

$$\sigma_n(p, \rho_n(p)) = \frac{1}{p} + \frac{1}{\rho_n(p)}, \qquad 2 \leq p \leq G_n,$$

并且当 $d_n \leq p \leq G_n$ 且 $r \geq \eta_n(p)$ 时， $\sigma_n(p,r) = A_n(p)$。

注 1.3。 根据 V^∞ 的定义，在定理 $r = \infty$ 中取 $r = \infty$ 1.1 可得

$$\left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} |e^{it\Delta} f| \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{2} \left\| V^\infty_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f\} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

条件是

$$\begin{cases} s > \dfrac{n}{n+1}, & p = 2, \\ s > \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{p}, & d_n \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

在这些空间范围内，估计在相应的 Sobolev 阈值以下失效。

对于 $p = 2$， Rogers 的局部–整体等价性 [29] 表明，对于每个$s > n/(n+1)$，整体估计等价于局部估计

$$\left\| \sup_{0 < t \leq 1} |e^{it\Delta} f| \right\|_{L^2(B^n(0,1))} \lesssim_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \qquad s > \frac{n}{2(n+1)}.$$

这恢复了 Du and Zhang [15, 定理 1.2], 的尖锐局部 L^2 最大估计，直到端点为止。因此，指标 $b_n = n/(n+1)$ 是局部指标 $n/(2(n+1))$ 的整体对应项。

注 1.4。 定理 1.1 中尖锐估计未覆盖的范围为

$$\begin{cases} 2 < p < d_n, & \rho_n(p) < r \leq \infty, \\ d_n \leq p < G_n, & \rho_n(p) < r < \eta_n(p). \end{cases}$$

定理 1.2 在这些范围内均给出了上界。对于 $2 < p < G_n$ 和 $r > \rho_n$（ p），

$$\sigma_n(p,r) < \frac{1}{p} + \frac{1}{\rho_n(p)},$$

这改进了直接由 （3.16）和定理 4.1得到的界。在所显示范围内所得上界的尖锐性仍有待解决。

在三维中， $d_3 = 96/35$， $G_3 = 120/43$， $q_3 = 4$，以及 $Q_3 = 15$。图1 展示了定理1.1中 $n = 3$时的范围。

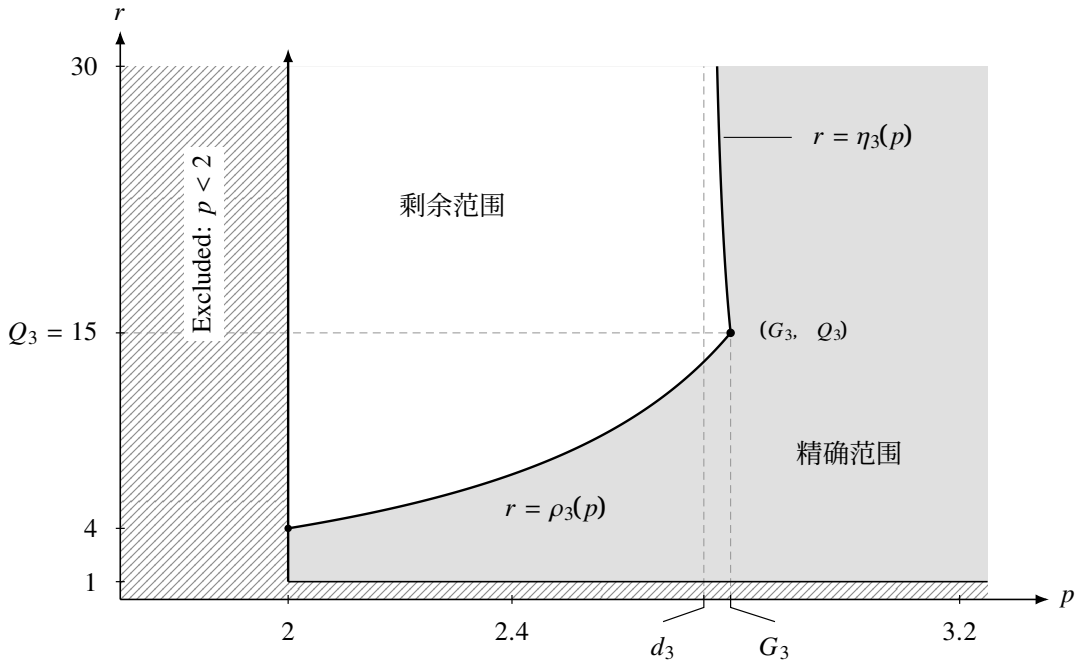

图1。 定理 1.1 在 $n = 3$中的范围，显示于 $(p,\ r)$平面上。白色区域是剩余范围，其上界由定理 1.2给出。

薛定谔变差的正则性问题与 Carleson 关于逐点收敛的问题密切相关 [8]: 对于哪些 s ,

$$\lim_{t\to 0} e^{it\Delta} f(x) = f(x) \quad \text{for almost every } x \in \mathbb{R}^n$$

对每个 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 都成立吗? 在一维情形中，Carleson 证明了当 $s \geq 1/4$ 时的收敛性，而 Dahlberg 和 Kenig 的例子 [10] 排除了 $s < 1/4$。对于 $n \geq 2$，Sjölin [32] 和 Vega [38] 独立地证明了当 $s > 1/2$ 时的收敛性。后续改进将该问题与傅里叶限制联系起来；参见 Bourgain [2], Moyua、Vargas 和 Vega [25], , 以及 Tao 和 Vargas [36]。Lee[19] 在二维中利用双线性限制获得了 $s > 3/8$。Bourgain [3] 通过多线性方法证明了当 $s > 1/2 - 1/(4n)$ 时的收敛性，并且还表明阈值 1/4 不可能在所有维数中成立。

Lucà 和 Rogers [24]以及 Demeter 和 Guo[11], 进一步研究了所需的正则性，后者的论证使用了伪共形变换。Bourgain 的反例 [4] 给出了条件 $s \geq n/(2(n+1))$。Du、Guth 和 Li [12] 在二维中得到了相应的充分条件$s > 1/3$。他们的证明结合了多项式分割与 Bourgain 和 Demeter 的解耦定理 [5]。在高维中，Du 和 Zhang [15] 通过分形限制定理，为 $s > n/(2(n+1))$建立了局部 L^2最大估计。Rogers 的局部—整体等价性 [29] 将这一局部阈值与全局阈值 $b_n = n/(n+1)$联系起来，如上文所述。

对于空间指数 $p > 2$，最大问题对维数的依赖有所不同。Rogers 和 Villarroya [31]研究了整个空间区域上的估计。Du、Kim、Wang 和 Zhang [13]利用 Bourgain 例子的低维版本得到了进一步的必要条件。Cao、Miao 和 Wang [7] 以及 Du 和 Li [14] 拓展了高维 L^p最大估计的适用范围。Du 和 Li 的加权限制估计给出了本文所用的指数 d_n 。

变差不等式也刻画了算子族的反复振荡。特别是，在 $(0, 1]$, 对于 $1 \leq r < \infty$）上具有有限r-变差，可保证极限在 0 处存在。Lépingle [22] 以及 Pisier 和 Xu [28], 的鞅不等式，还有 Bourgain 关于算术遍历平均的工作,

[1], 都是基本例子。在调和分析中，Campbell、Jones、Reinhold 和 Wierdl [6]证明了希尔伯特变换的振荡界和变差界，而 Jones、Seeger 和 Wright [17]则为若干算子族发展了变差估计和跳跃估计。Oberlin、Seeger、Tao、Thiele 和 Wright [26] 得到了变差范数 Carleson 定理。对于振荡奇异积分，Guo、Roos 和 Yung [16] 证明了 Stein 和 Wainger [34]所研究的算子族关于调制参数的尖锐变差估计。

对于薛定谔方程，Chen 和 Tang [9]确定了二维情形下时间变差的精确 Sobolev 阈值。在高维问题中，局部估计必须追踪解变大的频率。若 K 个局部贡献的大小均与 λ相当，则其 l^r 范数的大小与 $\lambda K^{1/r}$相当。因此，在从最大估计过渡到变差估计时，对 K 的依赖至关重要。

混合时空估计提供了控制时间变量的另一种方式。Rogers[29] 证明了局部平滑估计和局部—整体等价性，而 Rogers 和 Seeger [30]获得了端点最大估计和平滑估计。Lee、Rogers 和 Vargas [20]以及 Lee、Rogers 和 Seeger [21] 的工作将混合范数界与双线性估计和伴随限制估计联系起来。Li、Miao 和 Yu [23] 在临界线 $(n+1)/P + 1/Q = n/2$ 上发展了这一方法。我们将他们的论证与 Du 和 Li 的加权估计相结合，从而获得高维变差问题所需的混合范数输入。

定理1.1 和1.2 的证明使用以下步骤。在整个说明中，局部$\widehat{}$估计涉及满足$\operatorname{supp} f \subset \{1/2 \le |\xi| \le 2\}$的数据。

（1）我们首先建立局部 L^2 变差估计

$$\left\| V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\} \right\|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_2.$$

正如 [9], 单位时空立方体的局部化论证所示，将变差范数归约为局部 L^2 量的离散混合范数$f_{j,\ m}$ 其定义见(3.1)。立方体按照其振幅以及每个空间立方体上方所选取的 K 数量进行分组。对其平方贡献求和会产生因子 $K^{1/2}$，而 Du–Zhang 估计中的密度项贡献 $K^{1/(n+1)}$。两者之差

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{q_n}$$

决定了变差指数。通过递减重排和分布函数论证，可得到强离散l^{q_n} 界，其中对数因子被吸收到 R^ε中。这给出了 $p = 2$处 $q_n \le r \le \infty$的估计。

(2) 第二个输入是一个空间范围得到改进的临界混合范数估计。伽利略变换将 Du 和 Li 的加权限制估计 [14]转化为引理 2.5中的移频极大估计。随后，我们沿用 Li–Miao–Yu [23, 第5], 节的方法，将这一界与 Tao 的双线性限制估计 [35]、 ε去除以及双线性到线性论证相结合。引理2.6 给出

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^P_x L^{Q(P)}_t(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim_P \|f\|_2, \qquad G_n < P \le q_n, \qquad \frac{n+1}{P} + \frac{1}{Q(P)} = \frac{n}{2}.$$

因此，加权最大估计通过临界混合范数中的空间阈值G_n 进入变差论证。

(3) 对于 $1 \le r \le 2$，有限序列不等式将局部变差界化为平方函数估计。在 Plancherel恒等式与 Vega的混合范数估计 [38],之间进行插值，再结合 Bernstein不等式，可得到所需的空间界。对于 $r > 2$，我们结合临界混合范数估计、 L^2 变差估计和局部极大估计。

分别对 $1/p$ 和 $1/r$进行插值，会得到曲线 $r=\rho_n(p)$和 $r=\eta_n(p)$，它们出现在定理 1.1中。

（4）抛物缩放、空间局部化和 Littlewood–Paley 求和将局部估计推广为全局 Sobolev 界。局部化采用了 [29, 20, 21], 中的方法，并始终保留变差范数。定理 4.1 表明，局部因子 $R^{\beta+\varepsilon}$ 给出了全局条件

$$s>A_n(p)+2\beta.$$

对于定理 1.2，我们对 $(2,r_0)$、 $q_n\le r_0\le\infty$ 处的局部界，以及 (G_n,Q_n) 和 (d_n,∞) 处的局部界进行插值。所得阈值为 $\sigma_n(p,r)$。当 $2<p<G_n$且 $r>\rho_n(p)$ 时，该阈值严格小于固定空间指数并延拓 $r=\rho_n(p)$ 处的界所得到的阈值。

（5）必要条件通过频率局部化例子加以证明。我们调整 [21] 中的时空构造以及 [16]中的变差论证，从而得到下界

$$A_n(p),\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{r},\qquad \frac{2}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2},\qquad A_n(p)+\frac{2}{r}-1.$$

对于 $p=2$，对 Bourgain 的极大函数例子进行缩放 [4, 27] 可得到附加条件$s\ge b_n$。这些例子在定理1.1的范围内与上界相匹配。定理1.2 在这些范围之外的上界尖锐性仍未解决。

第2 节汇总限制估计和插值工具，并推导移频极大估计及临界混合范数界。第3 节建立局部变差估计。第4 节证明局部到全局原理以及定理1.1和1.2的充分性部分。反例见第5节。

2. 预备知识

常数项可能依赖于 n 及固定指数。若依赖于其他参数，则会在必要时注明。记作 $f=\mathcal{F}x(f)$。记号 $A\lesssim_\varepsilon B$ 表示$A\le C_\varepsilon B$。所有估计首先对 Schwartz 函数证明。在第3节中， R 表示单位频率局部问题的半径和时间长度。在第4节中，数据 g_R 的频率与 R可比；抛物缩放随后采用半径为 R^2的局部估计。

引理 2.1。 设 $0\le\theta\le1$且

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\qquad \frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{r_0}+\frac{\theta}{r_1},\qquad 1\le p_i,r_i\le\infty.$$

对于 $r<\infty$,

$$\|V_I^rF\|_p\le\|V_I^{r_0}F\|_{p_0}^{1-\theta}\|V_I^{r_1}F\|_{p_1}^{\theta},\tag{2.1}$$

采用引言中对 V^∞ 所作的约定。对于 $1\le r_0\le r<\infty$，也有 $V_I^rF\le V_I^{r_0}F$。

证明。 固定一个分割，对其增量应用有限序列的插值不等式。这里 最大值 $_j|F(x,\ t_j)-F(x,\ t_{j-1})|\le2$上确界$_{t\in I}|F(x,\ t)|$。对分割取上确界，再应用 Hölder 不等式，即可证明（2.1）。最后一个断言由序列范数的相应包含关系得出。□

引理 2.2 (Du–Zhang [15, 推论 1。7])。 设 $R\ge1$ 且设 X 是$B^{n+1}(0,\ CR)$中的格点单位立方体之并。设

$$\gamma(X)=\sup_{\substack{z\in\mathbb{R}^{n+1}\\1\le\rho\le CR}}\frac{\#\{B:B\ is\ a\ unit\ cube\ of\ X,\ B\subset B^{n+1}(z,\rho)\}}{\rho^n}.$$

^若支集 $f \subset B^n(0,\ 2)$，则

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^2(X)} \lesssim_{\varepsilon, C} \gamma(X)^{1/(n+1)} R^{n/(2(n+1))+\varepsilon} \|f\|_2. \tag{2.2}$$

引理 2.3。 [14, 定理 1.1 和 1。2]设 $R \geq 1$ 并设 μ 是满足以下条件的正博雷尔测度

$$\operatorname{supp} \mu \subset B^{n+1}(0, CR), \qquad \mu(B^{n+1}(z, \rho)) \leq C\rho^n \quad (z \in \mathbb{R}^{n+1},\ \rho > 0).$$

若 支集 $\widehat{g} \subset B^n(0,\ 2)$，则

$$\|e^{it\Delta} g\|_{L^{d_n}(d\mu)} \lesssim_{\varepsilon, C} R^{\varepsilon} \|g\|_2, \tag{2.3}$$

其中 d_n 定义见 (1.2)。对于 $d_n \leq p \leq \infty$，还可得到

$$\|V^{\infty}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} g\}\|_{L^p(B^n(0,R))} = 2 \left\| \sup_{0 \leq t \leq R} |e^{it\Delta} g| \right\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_{\varepsilon, p} R^{\varepsilon} \|g\|_2.$$

对于 N，$R \geq 1$ 以及 $z_0 = (x_0,\ t_0)$，令

$$\mathcal{P}^N_R(z_0) = \{(x,t) : |t - t_0| \leq R,\ x - x_0 - 2N(t - t_0)e_1 \in Q_R\}, \qquad \mathcal{P}^N_R = \mathcal{P}^N_R(0),$$

其中 $Q_R = [-R/2,\ R/2]^n$。下一个引理由 [23, 命题 A。1] 以及 [20] 中陈述的双线性到线性判据导出，该判据见 [23, 命题 5。1]我们将明确给出插值和重缩放论证。

引理 2.4。设

$$\frac{2(n+1)}{n} < p_0 < \frac{2(n+3)}{n+1}, \qquad \frac{n+1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{n}{2}.$$

假设对于每个 $\varepsilon > 0$，

$$\left\| |e^{it\Delta} f_1\, e^{it\Delta} f_2|^{1/2} \right\|_{L^{p_0}_x L^{q_0}_t (\mathcal{P}^N_R(z_0))} \lesssim_{\varepsilon} N^{1/p_0 - 1/q_0} R^{\varepsilon} \|f_1\|_2^{1/2} \|f_2\|_2^{1/2} \tag{2.4}$$

当 N、$R \geq 1$ 和 $z_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ 时一致地

$$\operatorname{supp} \widehat{f_i} \subset B^n(Ne_1, 1), \qquad \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \widehat{f_1}, \operatorname{supp} \widehat{f_2}) \geq \tfrac{1}{2}.$$

那么，对于

$$p_0 < P < \frac{2(n+2)}{n}, \qquad \frac{n+1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{n}{2},$$

有

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^P_x L^Q_t (\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_2 \tag{2.5}$$

^对 $\operatorname{supp}\ f \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$。

证明。 对于所述范围内的每个临界指数对 $(P,\ Q)$，我们还使用了 [23, 第 5 节中的抛物缩放和插值方法 (5.2)–(5.4)], ，从而在 [23, (5.5)]给出的双线性估计在 $(P,\ Q)$ 的某个邻域内处处成立。对于 $2 < P < Q < \infty$，根据 [23, 命题 5，1], 我们可以得到

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^P_x L^Q_t (\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{n/2 - n/P - 2/Q}} \lesssim \|f\|_2.$$

□

我们首先应用 Du 和 Li 的加权限制估计 [14, 定理 1。2], 在引理2.3中回顾的内容。伽利略变换和时间上确界的加权表述给出了以下最大估计，该估计适用于傅里叶支撑在 $B^n(Ne_1,\ 1)$中的初始数据。与 [23,定理 1。4]相比，这将空间指数从 $2 + 4/(n + 1 + \sum_{j=2}^{n} j^{-1})$ 提高到 d_n，同时保留因子 $N^{1/d_n} R^{\varepsilon}$。

引理 2.5。 令 N、$R \geq 1$ 和 $f \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_x(f) \subset B^n(Ne_1, 1).$$

那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^{d_n}_x L^{\infty}_t (\mathcal{P}^N_R(z_0))} \lesssim_{\varepsilon} N^{1/d_n} R^{\varepsilon} \|f\|_2 \tag{2.6}$$

关于 $z_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ 一致地。

证明。 设 $g(x) = e^{-iNx_1} f(x)$。于是我们得到

$$|e^{it\Delta} f(x)| = |(e^{it\Delta} g)(x - 2Nte_1)|, \qquad \operatorname{supp} \widehat{g} \subset B^n(0,1).$$

令 $w \geq 0$满足

$$\operatorname{supp} w \subset \mathcal{P}_R^N, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} w(x,t)\, dt \leq 1, \qquad d\mu(y,t) = N^{-1} w(y + 2Nte_1, t)\, dy\, dt.$$

则 支集 $\mu \subset B^{n+1}(0,\ CR)$且 $\mu(B(z,\ \rho)) \lesssim \rho^n$。引理 2.3给出

$$\int_{\mathcal{P}_R^N} |e^{it\Delta} f(x)|^{d_n} w(x,t)\, dx\, dt = N \int |e^{it\Delta} g(y)|^{d_n}\, d\mu(y,t) \lesssim_\varepsilon N R^{\varepsilon d_n} \|f\|_2^{d_n}.$$

对 w 取上确界即可通过 (2.6)混合范数对偶性得到。 □

接下来，我们将引理 2.5与 Tao 的双线性限制估计 [35, 推论 1。3] 并遵循 Li、Miao 和 Yu 的插值论证 [23, 第 5]节。 ε-消去以及从双线性到线性步骤汇总于引理 2.4中。由此得到以下临界混合范数估计，其中 L^2 初始数据支集包含于单位频率环带中。引理 2.5 将空间阈值降低至 G_n，从而扩展了 [23, 定理 1.6(ii)]单位频率版本中的范围。

引理 2.6. 设 $G_n < P \leq q_n$，并定义 $Q(P)$ 如下

$$\frac{n+1}{P} + \frac{1}{Q(P)} = \frac{n}{2}.$$

假设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_x(f) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \right\}.$$

Then

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L_x^P L_t^{Q(P)}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim_P \|f\|_2. \tag{2.7}$$

证明。 设 $a_n = \frac{2}{(n+3)\,n+1}$ 且 $\mathrm{P} = \mathrm{P}_R^N(z_0)$，其中

$$\operatorname{supp} \widehat{f_i} \subset B^n(Ne_1, 1), \qquad \operatorname{dist}\big(\operatorname{supp} \widehat{f_1}, \operatorname{supp} \widehat{f_2}\big) \geq \frac{1}{2}.$$

由霍尔德不等式和引理2.5,

$$\begin{aligned} \||e^{it\Delta} f_1\, e^{it\Delta} f_2|^{1/2}\|_{L_x^{d_n} L_t^\infty(\mathcal{P})} &\leq \|e^{it\Delta} f_1\|^{1/2}_{L_x^{d_n} L_t^\infty(\mathcal{P})} \|e^{it\Delta} f_2\|^{1/2}_{L_x^{d_n} L_t^\infty(\mathcal{P})} \\ &\lesssim \big(N^{1/d_n} R^\varepsilon \|f_1\|_2\big)^{1/2} \big(N^{1/d_n} R^\varepsilon \|f_2\|_2\big)^{1/2} \\ &= N^{1/d_n} R^\varepsilon \|f_1\|_2^{1/2} \|f_2\|_2^{1/2}. \end{aligned}$$

设 $g_i(x) = e^{-iNx_1} f_i(x),\ \ i = 1,\ 2$。则

$$\widehat{g_i}(\xi) = \widehat{f_i}(\xi + Ne_1), \qquad \operatorname{supp} \widehat{g_i} \subset B^n(0,1), \qquad \|g_i\|_2 = \|f_i\|_2, \qquad \operatorname{dist}\big(\operatorname{supp} \widehat{g_1}, \operatorname{supp} \widehat{g_2}\big) \geq \frac{1}{2}.$$

此外,

$$e^{it\Delta} f_i(x) = e^{iNx_1 - itN^2} (e^{it\Delta} g_i)(x - 2Nte_1).$$

固定 $\varepsilon > 0$，并选择 $b > a_n$，使其充分接近 a_n，从而

$$(n+1)\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b}\right) < \varepsilon.$$

由于 $b/2 > (n+3)/(n+1)$，Tao 的双线性限制估计 [35, 推论 1。3] 给出

$$\|e^{it\Delta} g_1\, e^{it\Delta} g_2\|_{L^{b/2}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim_b \|g_1\|_2 \|g_2\|_2.$$

通过变量变换 $y = x - 2Nte_1$,

$$\begin{aligned}\||e^{it\Delta}g_1\, e^{it\Delta}g_2|^{1/2}\|_{L^b(\mathbb{R}^{n+1})} &= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} |e^{it\Delta}g_1(y)\, e^{it\Delta}g_2(y)|^{b/2}\, dy\, dt\right)^{1/b}\\ &= \|e^{it\Delta}g_1\, e^{it\Delta}g_2\|^{1/2}_{L^{b/2}(\mathbb{R}^{n+1})}\\ &\lesssim \|f_1\|_2^{1/2}\|f_2\|_2^{1/2}.\end{aligned}$$

记 $z_0 = (x_0, t_0)$，则有

$$|\mathcal{P}| = \int_{t_0-R}^{t_0+R} |x_0 + 2N(t-t_0)e_1 + Q_R|\, dt = 2R^{n+1}.$$

因此，由霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}\||e^{it\Delta}f_1\, e^{it\Delta}f_2|^{1/2}\|_{L^{a_n}(\mathcal{P})} &\le |\mathcal{P}|^{1/a_n-1/b}\||e^{it\Delta}f_1\, e^{it\Delta}f_2|^{1/2}\|_{L^b(\mathcal{P})}\\ &\le (2R^{n+1})^{1/a_n-1/b}\|F\|_{L^b(\mathbb{R}^{n+1})}\\ &\lesssim R^{(n+1)(1/a_n-1/b)}\|f_1\|_2^{1/2}\|f_2\|_2^{1/2}\\ &\lesssim R^{\varepsilon}\|f_1\|_2^{1/2}\|f_2\|_2^{1/2}.\end{aligned}$$

选取 θ，使得

$$\frac{(n+1)(1-\theta)}{d_n} + \frac{(n+2)\theta}{a_n} = \frac{n}{2},$$

这意味着

$$\theta = \frac{(n+3)\big(nd_n - 2(n+1)\big)}{(n+1)\big((n+2)d_n - 2(n+3)\big)}, \qquad 1-\theta = \frac{2d_n}{(n+1)\big((n+2)d_n - 2(n+3)\big)}.$$

由于 $2(n+1)/n < d_n < a_n$，我们有 $0 < \theta < 1$。此外，

$$\frac{1-\theta}{d_n} + \frac{\theta}{a_n} = \frac{n(n+1)d_n - 2(n^2+2n-1)}{2(n+1)\big((n+2)d_n - 2(n+3)\big)} = \frac{1}{G_n},$$

and

$$\frac{\theta}{a_n} = \frac{nd_n - 2(n+1)}{2\big((n+2)d_n - 2(n+3)\big)} = \frac{n}{2} - \frac{n+1}{G_n} = \frac{1}{Q_n}.$$

特别地,

$$\frac{1-\theta}{d_n} = \frac{1}{G_n} - \frac{1}{Q_n}.$$

因此我们可以得到

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x,\cdot)|e^{it\Delta}f_1\, e^{it\Delta}f_2|^{1/2}\|_{L_t^{Q_n}} \le \|\mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x,\cdot)|e^{it\Delta}f_1\, e^{it\Delta}f_2|^{1/2}\|_{L_t^{\infty}}^{1-\theta}\|\mathbf{1}_{\mathcal{P}}(x,\cdot)|e^{it\Delta}f_1\, e^{it\Delta}f_2|^{1/2}\|_{L_t^{a_n}}^{\theta}.$$

根据霍尔德不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\||e^{it\Delta}f_1\, e^{it\Delta}f_2|^{1/2}\|_{L_x^{G_n}L_t^{Q_n}(\mathcal{P})} &\le \||e^{it\Delta}f_1\, e^{it\Delta}f_2|^{1/2}\|^{1-\theta}_{L_x^{d_n}L_t^{\infty}(\mathcal{P})}\||e^{it\Delta}f_1\, e^{it\Delta}f_2|^{1/2}\|^{\theta}_{L^{a_n}(\mathcal{P})}\\ &\lesssim N^{(1-\theta)/d_n}R^{\varepsilon}\|f_1\|_2^{1/2}\|f_2\|_2^{1/2}\\ &= N^{1/G_n-1/Q_n}R^{\varepsilon}\|f_1\|_2^{1/2}\|f_2\|_2^{1/2}. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{G_n} = \frac{1-\theta}{d_n} + \frac{\theta}{a_n}$ 且有 $0 < \theta < 1$，我们得到

$$\frac{2(n+1)}{n} < d_n < G_n < a_n, \qquad \frac{n+1}{G_n} + \frac{1}{Q_n} = \frac{n}{2}.$$

由引理 2.4 至 (2.8) 取 $(p_0,\ q_0) = (G_n,\ Q_n)$ 可得 (2.7) 对于

$$G_n < P < \frac{2(n+2)}{n}.$$

对于 $\frac{2(n+2)}{n} \le P \le q_n$，取 $\lambda \in [0,1]$ 使得

$$\frac{1}{P} = (1-\lambda)\frac{n}{2(n+2)} + \lambda\frac{n-1}{2(n+1)}.$$

Then

$$\frac{1}{Q(P)} = \frac{n}{2} - \frac{n+1}{P} = (1-\lambda)\frac{n}{2(n+2)} + \frac{\lambda}{2}.$$

由 [18, 定理 1.2, (5)], 和 (3.12)，我们得到

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^{2(n+2)/n}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_2, \qquad \|e^{it\Delta}f\|_{L_x^{q_n}L_t^2(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|f\|_2.$$

因此，通过混合范数插值，

$$\begin{aligned}\|e^{it\Delta}f\|_{L_x^P L_t^{Q(P)}(\mathbb{R}^{n+1})} &\le \|e^{it\Delta}f\|^{1-\lambda}_{L^{2(n+2)/n}(\mathbb{R}^{n+1})}\|e^{it\Delta}f\|^{\lambda}_{L_x^{q_n}L_t^2(\mathbb{R}^{n+1})}\\ &\lesssim \|f\|_2.\end{aligned}$$

这证明了 (2.7)。 □

3. 薛定谔方程的局部变分估计

我们首先证明 $(p,r)=(2,q_n)$处的局部估计，其中 $1 \le r \le 2$，以及曲线 $(n+1)/p+1/r=n/2$上的估计。然后我们在 $B^n(0,R)\times[0,R]$上对这些估计进行插值。全局 Sobolev估计的推导在第 4节中给出。

令 Q_j为以 $j \in \mathbb{Z}^n$ 为中心的空间单位立方体，并令 $I_m = [m, m+1)$ 对于 $m \in \mathbb{Z}$。令 $B_{j,\ m} = Q_j \times I_m$并定义

$$f_{j,m} := \left(\int_{B_{j,m}} |e^{it\Delta}f(x)|^2\,dx\,dt\right)^{1/2}. \tag{3.1}$$

引理 3.1. 令 $1 \le p \le \infty$、 $1 \le r < \infty$和 $R \ge 1$。假设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_x(f) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\right\}.$$

Then

$$\begin{aligned}&\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))}\\ &\lesssim \left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,4R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing} f^r_{j,m}\right)^{p/r}\right)^{1/p} + O(R^{-1000})\|f\|_2.\end{aligned} \tag{3.2}$$

对于 $p=\infty$，将外层求和替换为上确界。

证明。 根据 [9,(3.2)], 我们可以得到

$$V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f(x)\} \lesssim \left(\sum_{I_m\cap[0,R]\neq\varnothing}\left[\sup_{t\in I_m}\left(|e^{it\Delta}f(x)| + |\partial_t e^{it\Delta}f(x)|\right)\right]^r\right)^{1/r}. \tag{3.3}$$

由 (3.3)和 $|Q_j|=1$，我们得到

$$\begin{aligned}&\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))}\\ &\lesssim \left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,R)\neq\varnothing}\int_{Q_j}\left[\sum_{I_m\cap[0,R]\neq\varnothing}\left(\sup_{t\in I_m}\left(|e^{it\Delta}f(x)| + |\partial_t e^{it\Delta}f(x)|\right)\right)^r\right]^{p/r}dx\right)^{1/p}\\ &\le \left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[0,R]\neq\varnothing}\left[\sup_{(x,t)\in B_{j,m}}\left(|e^{it\Delta}f(x)| + |\partial_t e^{it\Delta}f(x)|\right)\right]^r\right)^{p/r}\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

由于 $e^{it\Delta}f$的时空傅里叶变换支集位于抛物面 $\tau=-|\xi|^2$上，且$\widehat{\text{supp}}\ f\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n:1/2\le|\xi|\le 2\}$，因此有

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_{x,t}(e^{it\Delta}f)\subset S:=\left\{(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}:1/2\le|\xi|\le 2,\ \tau=-|\xi|^2\right\}.$$

Let $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$，使得在 S的某个开邻域上 $\psi\equiv 1$，并令 $\eta=\mathrm{F}_{x,t}^{-1}\psi$。这给出 es

$$\begin{aligned}\sup_{(x,t)\in B_{j,m}}|e^{it\Delta}f(x)| &\le \sum_{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}}\sup_{(x,t)\in B_{j,m}}\left|\int_{B_{j',m'}}e^{is\Delta}f(w)\eta(x-w,t-s)\,dw\,ds\right|\\ &\le \sum_{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}}\sup_{(x,t)\in B_{j,m}}\|\eta(x-\cdot,t-\cdot)\|_{L^2(B_{j',m'})}f_{j',m'}. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

定义

$$\widetilde{f}_{j,m}=\begin{cases}f_{j,m}, & B_{j,m}\cap\left(B^n(0,4R)\times[-4R,4R]\right)\neq\varnothing,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

根据(3.5) 以及 η的快速衰减，对于任意 $M>0$，我们得到

$$\begin{aligned}\sup_{(x,t)\in B_{j,m}}|e^{it\Delta}f(x)| &\lesssim \sum_{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}}(1+|(j-j',m-m')|)^{-M}f_{j',m'}\\ &= \sum_{Q_{j'}\cap B^n(0,4R)\neq\varnothing}\ \sum_{I_{m'}\cap[-4R,4R]\neq\varnothing}(1+|(j-j',m-m')|)^{-M}\widetilde{f}_{j',m'}+A_{j,m},\end{aligned}$$

其中$A_{j,\ m}$ 是余项，其定义为

$$A_{j,m}=\sum_{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}}(1+|(j-j',m-m')|)^{-M}\left(f_{j',m'}-\widetilde{f}_{j',m'}\right).$$

对于主项，我们有

$$\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[0,R]\neq\varnothing}\left[\sum_{Q_{j'}\cap B^n(0,4R)\neq\varnothing}\ \sum_{I_{m'}\cap[-4R,4R]\neq\varnothing}(1+|(j-j',m-m')|)^{-M}\widetilde{f}_{j',m'}\right]^r\right)^{p/r}\right)^{1/p}$$

$$=\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[0,R]\neq\varnothing}\left[\sum_{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}}(1+|(j',m')|)^{-M}\widetilde{f}_{j-j',m-m'}\right]^r\right)^{p/r}\right)^{1/p}$$

$$\le\sum_{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}}(1+|(j',m')|)^{-M}\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[0,R]\neq\varnothing}|\widetilde{f}_{j-j',m-m'}|^r\right)^{p/r}\right)^{1/p}$$

$$\le\left(\sum_{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}}(1+|(j',m')|)^{-M}\right)\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,4R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing}|\widetilde{f}_{j,m}|^r\right)^{p/r}\right)^{1/p}$$

$$\lesssim\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,4R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing}f_{j,m}^r\right)^{p/r}\right)^{1/p},$$

若 $M>n+1$成立。

对于余项 $A_{j,\ m}$，假设 $Q_j\cap B^n(0,\ R)\neq\varnothing$且 $I_m\cap[0,R]\neq\varnothing$。那么

$$B_{j',m'}\cap\left(B^n(0,4R)\times[-4R,4R]\right)=\varnothing\quad\Longrightarrow\quad|(j-j',m-m')|\gtrsim R.$$

由于 $f_{j',\,m'} \le \|f\|_2$，我们得到

$$\begin{aligned} A_{j,m} &\le \sum_{\substack{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}\\ |(j-j',m-m')|\gtrsim R}} (1+|(j-j',m-m')|)^{-M} f_{j',m'} \\ &\le \|f\|_2 \sum_{\substack{(j',m')\in\mathbb{Z}^{n+1}\\ |(j-j',m-m')|\gtrsim R}} (1+|(j-j',m-m')|)^{-M} \\ &\lesssim R^{n+1-M}\|f\|_2. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{cases} \#\{j : Q_j \cap B^n(0,R) \neq \varnothing\} \lesssim R^n \\ \#\{m : I_m \cap [0,R] \neq \varnothing\} \lesssim R, \end{cases}$$

取 $M = 1000 + (n/p + 1/r + n + 1)$，我们可以推得

$$\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,R)\neq\varnothing} \left(\sum_{I_m\cap[0,R]\neq\varnothing} A_{j,m}^r \right)^{p/r} \right)^{1/p} \lesssim R^{n/p+1/r+n+1-M}\|f\|_2 \lesssim R^{-1000}\|f\|_2.$$

对于 $\partial_t e^{it\Delta} f(x)$，我们还有 $\partial_t e^{it\Delta} f(x) = (\partial_t \eta) * e^{it\Delta} f(x)$，其中卷积取遍空间和时间，并且 $\partial_t \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$。同样的论证适用于 $\partial_t e^{it\Delta} f(x)$。将这些估计与(3.4) 结合即可证明该引理。 □

引理 3.2。 令 $q_n \le r < \infty$、$R \ge 1$，并令 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_x(f) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2 \right\}.$$

那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，

$$\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,4R)\neq\varnothing} \left(\sum_{I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing} f_{j,m}^r \right)^{2/r} \right)^{1/2} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_2. \tag{3.6}$$

证明。设

$$\mathcal{Q}_R = \{Q_j : Q_j \cap B^n(0,4R) \neq \varnothing\}, \qquad \mathcal{I}_R = \{m \in \mathbb{Z} : I_m \cap [-4R,4R] \neq \varnothing\}.$$

将 I_R 分为 $m \ge 0$ 和 $m \le -1$，令 M_R 表示其中任一部分。记 $N_R = \#\mathrm{M}_R \lesssim R$。对于二进制的 $\lambda > 0$ 和二进制整数 $K \ge 1$，设

$$\begin{cases} M(\lambda, Q_j) = \{m \in \mathcal{M}_R : f_{j,m} \ge \lambda\}, \\ N(\lambda, Q_j) = \#M(\lambda, Q_j), \\ E_{\lambda,K} = \{Q_j \in \mathcal{Q}_R : K \le N(\lambda, Q_j) < 2K\}, \\ X_{\lambda,K} = \bigcup_{Q_j\in E_{\lambda,K}} \bigcup_{m\in M(\lambda,Q_j)} B_{j,m}. \end{cases}$$

由于 $r \ge q_n$，我们有

$$\left(\sum_{m\in\mathcal{M}_R} f_{j,m}^r \right)^{1/r} \le \left(\sum_{m\in\mathcal{M}_R} f_{j,m}^{q_n} \right)^{1/q_n}.$$

对于每个 $Q_j \in \mathrm{Q}_R$，将 $\{f_{j,m} : m \in \mathrm{M}_R\}$ 按递减顺序重新排列为 $f_{Q_j}(1) \ge \cdots \ge f_{Q_j}(N_R)$，并设

$$F(Q_j) = \max_{\substack{1\le K\le N_R\\ K \text{ dyadic}}} K^{1/q_n} f_{Q_j}(K). \tag{3.7}$$

对于 $1 \le l \le N_R$，选择一个满足 $K \le l < 2K$ 的二进制的 K。于是

$$f_{Q_j}(l) \le f_{Q_j}(K) \le F(Q_j)K^{-1/q_n} \le 2^{1/q_n} F(Q_j) l^{-1/q_n}.$$

对 l 求和得到

$$\left(\sum_{m\in\mathcal{M}_R} f_{j,m}^{q_n}\right)^{1/q_n} \le 2^{1/q_n} F(Q_j) \left(\sum_{l=1}^{N_R} \frac{1}{l}\right)^{1/q_n} \lesssim (\log(2+R))^{1/q_n} F(Q_j). \tag{3.8}$$

对于 $\mu > 0$，令 $Q_\mu = \{Q_j \in \mathsf{Q}_R : F(Q_j) \ge \mu\}$。由幺正性可得 $f_{j,m} \le \|f\|_2$，因此 $F(Q_j) \le A_R := N_R^{1/q_n}\|f\|_2$。令 $\eta = \min\{\varepsilon/2, 1/4\}$ 并取

$$\mu_0 = R^{-n^2/(2(n+1))+\eta}\|f\|_2.$$

由于 $\#\mathsf{Q}_R \lesssim R^n$，由层析公式可得

$$\sum_{Q_j\in\mathsf{Q}_R} F(Q_j)^2 = 2\int_0^{A_R} \mu\, \#Q_\mu \, d\mu \lesssim R^n\mu_0^2 + \int_{\mu_0}^{A_R} \mu\, \#Q_\mu \, d\mu.$$

第一项为 $R^{n/(n+1)+2\eta}\|f\|_2^2$。

固定 $\mu_0 < \mu \le A_R$。对于每个二进制的 $1 \le K \le N_R$，选取 λ_K 二进制的，使得

$$\lambda_K \le K^{-1/q_n}\mu < 2\lambda_K.$$

若 $Q_j \in Q_\mu$，则存在这样的某个 K满足 $f_{Q_j}(K) \ge K^{-1/q_n}\mu \ge \lambda_K$。因此该列中至少有 K 个元素不小于 λ_K。由此可得

$$Q_\mu \subset \bigcup_{\substack{1\le K\le N_R \\ K \text{ dyadic}}} \widetilde{E}_{\lambda_K,K}, \qquad \widetilde{E}_{\lambda,K} = \{Q_j \in \mathsf{Q}_R : N(\lambda, Q_j) \ge K\}.$$

对于 $Q_j \in E_{\lambda,K}$，集合 $X_{\lambda,K}$ 在 Q_j 上方包含介于 K 和 $2K$ 之间的单位立方体。由于它们的内部不相交，

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^2(X_{\lambda,K})}^2 = \sum_{Q_j\in E_{\lambda,K}} \sum_{m\in M(\lambda,Q_j)} f_{j,m}^2 \ge \lambda^2 K\, \#E_{\lambda,K}.$$

半径为 $\rho \ge 1$ 的球的空间投影与 $O(\rho^n)$ 个空间单位立方体相交。因此，半径为 ρ 的球包含 $O(K\rho^n)$ 个属于 $X_{\lambda,K}$ 和 $\gamma(X_{\lambda,K}) \lesssim K$ 的单位立方体。引理 2.2 中以 η 替代 ε，可得

$$\lambda K^{1/2}(\#E_{\lambda,K})^{1/2} \le \|e^{it\Delta}f\|_{L^2(X_{\lambda,K})} \lesssim_\eta K^{1/(n+1)} R^{n/(2(n+1))+\eta}\|f\|_2.$$

由于 $1/2 - 1/(n+1) = 1/q_n$，因此得到

$$\lambda K^{1/q_n}(\#E_{\lambda,K})^{1/2} \lesssim_\eta R^{n/(2(n+1))+\eta}\|f\|_2. \tag{3.9}$$

~对于二进制的 K，集合 $E_{\lambda,2^lK}$ 在 $l \ge 0$ 下构成 E_λ 的划分 K。由 (3.9)，

$$\begin{aligned}\#\widetilde{E}_{\lambda,K} &\lesssim_\eta \sum_{l\ge 0} \left(\frac{R^{n/(2(n+1))+\eta}\|f\|_2}{\lambda(2^lK)^{1/q_n}}\right)^2 \\ &\lesssim_\eta \left(\frac{R^{n/(2(n+1))+\eta}\|f\|_2}{\lambda K^{1/q_n}}\right)^2.\end{aligned}$$

该级数收敛，因为 $q_n < \infty$。O个(log(2+R))二进制尺度选择包括 K 和 $\lambda_K K^{1/q_n} > \mu/2$。因此，

$$\#Q_\mu \lesssim_\eta \log(2+R)\left(\frac{R^{n/(2(n+1))+\eta}\|f\|_2}{\mu}\right)^2.$$

将此界代入层析积分可得

$$\sum_{Q_j\in\mathsf{Q}_R} F(Q_j)^2 \lesssim_\eta R^{n/(n+1)+2\eta}\|f\|_2^2 \left(1 + \log(2+R)\int_{\mu_0}^{A_R} \frac{d\mu}{\mu}\right).$$

这里 $A_R/\mu_0 = N_R^{1/q_n} R^{n^2/(2(n+1))-\eta}$，因此积分为 $O(\log(2+R))$。取平方根并利用 (3.8) 可得关于 $\mathcal{M}_R$的混合范数界，带有因子 $(\log(2+R))^{1+1/q_n}$ 乘以$R^{n/(2(n+1))+\eta}\|f\|_2$。将此界应用于两个时间区间并利用三角不等式，可得

$$\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,4R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing} f_{j,m}^r\right)^{2/r}\right)^{1/2} \lesssim_\varepsilon R^{n/(2(n+1))+\varepsilon}\|f\|_2,$$

其中，对数因子被吸收到 $R^{\varepsilon-\eta}$ 中。 □

对于 $R\geq 1$ 和 f如引理 3.2，结合引理 3.1 和 3.2 于 $r=q_n$ 可得

$$\|V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2. \tag{3.10}$$

对于 $q_n\leq r<\infty$，利用 r 的单调性可得

$$\|V^{r}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} \leq \|V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2.$$

对于 $r=\infty$，使用

$$\sup_{0\leq t\leq R}|e^{it\Delta}f(x)| \leq |f(x)| + V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}(x).$$

结合 (3.10)，可得在 $p=2$处的最大估计。

引理 3.3。 设 $2\leq p\leq\infty$、 $1\leq r\leq 2$ 和 $R\geq 1$。假设 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_x(f)\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}^n:\frac{1}{2}\leq|\xi|\leq 2\right\}.$$

Then

$$\|V^{r}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim R^{1/r-1/2+\max\{\frac{n+1}{2p}-\frac{n-1}{4},0\}}\|f\|_2. \tag{3.11}$$

证明。由于

$$\#\{m\in\mathbb{Z}: I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing\}\lesssim R,$$

有限序列不等式给出

$$\left(\sum_{I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing} f_{j,m}^r\right)^{1/r} \lesssim R^{1/r-1/2}\left(\sum_{I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing} f_{j,m}^2\right)^{1/2}.$$

由 Vega 的端点混合范数估计， [38] 以及 的傅里叶支撑， f，我们有

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_x^{q_n}(\mathbb{R}^n;L_t^2(\mathbb{R}))} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{-1/(n+1)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_2. \tag{3.12}$$

设 $J_R=[-4R-1,4R+1]$。根据 Plancherel 定理，

$$\|e^{it\Delta}f\|^2_{L_x^2(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))} = |J_R|\|f\|_2^2 = O(R)\|f\|_2^2 \lesssim R\|f\|_2^2.$$

情形 1： $2<p<q_n$。取 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\frac{1}{p}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{q_n}.$$

由于 $q_n=2(n+1)/(n-1)$，可得

$$\theta=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_n}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_n}}=\frac{n+1}{p}-\frac{n-1}{2},\frac{\theta}{2}=\frac{n+1}{2p}-\frac{n-1}{4}.$$

根据霍尔德不等式，有

$$\frac{2}{\theta p}\quad\text{and}\quad\frac{q_n}{(1-\theta)p},\qquad\frac{\theta p}{2}+\frac{(1-\theta)p}{q_n}=1,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\|e^{it\Delta}f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))} &\le \|e^{it\Delta}f\|^{\theta}_{L_x^2(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))}\|e^{it\Delta}f\|^{1-\theta}_{L_x^{q_n}(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))}\\ &\le \|e^{it\Delta}f\|^{\theta}_{L_x^2(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))}\|e^{it\Delta}f\|^{1-\theta}_{L_x^{q_n}(\mathbb{R}^n;L_t^2(\mathbb{R}))}\\ &\lesssim \left(R^{1/2}\|f\|_2\right)^{\theta}\|f\|_2^{1-\theta} = R^{\frac{n+1}{2p}-\frac{n-1}{4}}\|f\|_2.\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))} \lesssim R^{\frac{n+1}{2p}-\frac{n-1}{4}}\|f\|_2, \qquad 2\le p\le q_n. \tag{3.13}$$

情形 2：$q_n \le p \le \infty$。选取一个固定的 $K\in \mathrm{S}(\mathbb{R}^n)$，使得 $K(\xi)=1$ 对于 $|\xi|\le 2$。由于

$$\mathcal{F}_x(e^{it\Delta}f)(\xi) = e^{-it|\xi|^2}\widehat{f}(\xi), \qquad \operatorname{supp}\widehat{f}\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n : |\xi|\le 2\},$$

对于每个 $t\in\mathbb{R}$，我们有

$$e^{it\Delta}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)e^{it\Delta}f(y)\,dy.$$

由闵可夫斯基不等式，我们可以推出

$$\begin{aligned}\left(\int_{J_R}|e^{it\Delta}f(x)|^2\,dt\right)^{1/2} &= \left(\int_{J_R}\left|\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y)e^{it\Delta}f(y)\,dy\right|^2 dt\right)^{1/2}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}|K(x-y)|\left(\int_{J_R}|e^{it\Delta}f(y)|^2\,dt\right)^{1/2}dy.\end{aligned}$$

选取 δ 使得

$$\frac{1}{\delta} = 1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_n}, \qquad 1\le\delta\le\frac{q_n}{q_n-1}.$$

于是我们得到不等式 ld

$$\begin{aligned}\left\|\left(\int_{J_R}|e^{it\Delta}f(x)|^2\,dt\right)^{1/2}\right\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n)} &\le \left\|\int_{\mathbb{R}^n}|K(x-y)|\left(\int_{J_R}|e^{it\Delta}f(y)|^2\,dt\right)^{1/2}dy\right\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le \|K\|_{L^{\delta}(\mathbb{R}^n)}\left\|\left(\int_{J_R}|e^{it\Delta}f(x)|^2\,dt\right)^{1/2}\right\|_{L_x^{q_n}(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \left\|\left(\int_{J_R}|e^{it\Delta}f(x)|^2\,dt\right)^{1/2}\right\|_{L_x^{q_n}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned}\|e^{it\Delta}f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))} &\lesssim \|e^{it\Delta}f\|_{L_x^{q_n}(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))}\\ &\le \|e^{it\Delta}f\|_{L_x^{q_n}(\mathbb{R}^n;L_t^2(\mathbb{R}))}\\ &\lesssim \|f\|_2\end{aligned}$$

对于 $q_n\le p\le\infty$。将其与（3.13）结合，可得

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))} \lesssim R^{\max\{\frac{n+1}{2p}-\frac{n-1}{4},\,0\}}\|f\|_2, \qquad 2\le p\le\infty.$$

最后，由于 $|Q_j|=1$ 和 $p\ge 2$，我们得到

$$\left(\sum_{Q_j\cap B^n(0,4R)\neq\varnothing}\left(\sum_{I_m\cap[-4R,4R]\neq\varnothing}f_{j,m}^2\right)^{p/2}\right)^{1/p} \le \|e^{it\Delta}f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n;L_t^2(J_R))}.$$

将这些估计与引理3.1结合起来，我们得出

$$\begin{aligned}\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} &\lesssim R^{1/r-1/2}\|e^{it\Delta}f\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n;L^2_t(J_R))}\\ &\lesssim R^{1/r-1/2+\max\{\frac{n+1}{2p}-\frac{n-1}{4},0\}}\|f\|_2.\end{aligned}$$

这就证明了 (3.11)。 □

引理 3.4. 设 $G_n < p \le q_n$， $R \ge 1$，并令 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_x(f) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\right\}.$$

Let

$$q'_p = \frac{2p}{np-2(n+1)}, \qquad \frac{n+1}{p}+\frac{1}{q'_p}=\frac{n}{2}.$$

Then

$$\|V^{q'_p}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_p \|f\|_2. \tag{3.14}$$

证明。令

$$\mathscr{S} = \{1 \le j \le J : t_{j-1}, t_j \in I_m \text{ for some } m \in \mathbb{Z}\}, \qquad \mathscr{H} = \{1,\dots,J\} \setminus \mathscr{S}.$$

于是我们有

$$\sum_{j\in\mathscr{S}}|e^{it_j\Delta}f(x)-e^{it_{j-1}\Delta}f(x)|^{q'_p} \le \sum_m\left(\int_{I_m}|\partial_t e^{it\Delta}f(x)|\,dt\right)^{q'_p} \le \int_{\mathbb{R}}|\partial_t e^{it\Delta}f(x)|^{q'_p}\,dt.$$

对于 $\mathscr{H}$，我们得到

$$\sum_{j\in\mathscr{H}}|e^{it_j\Delta}f(x)-e^{it_{j-1}\Delta}f(x)|^{q'_p} \lesssim_r \sum_m \sup_{t\in I_m}|e^{it\Delta}f(x)|^{q'_p} \lesssim_r \int_{\mathbb{R}}|e^{it\Delta}f(x)|^r + |\partial_t e^{it\Delta}f(x)|^{q'_p}\,dt,$$

这意味着

$$\begin{aligned}V^{q'_p}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f(x)\} &\lesssim \left(\sum_{j\in\mathscr{S}}|e^{it_j\Delta}f(x)-e^{it_{j-1}\Delta}f(x)|^{q'_p}\right)^{1/q'_p} + \left(\sum_{j\in\mathscr{H}}|e^{it_j\Delta}f(x)-e^{it_{j-1}\Delta}f(x)|^{q'_p}\right)^{1/q'_p}\\ &\lesssim \|e^{it\Delta}f(x)\|_{L^{q'_p}_t(\mathbb{R})} + \|\partial_t e^{it\Delta}f(x)\|_{L^{q'_p}_t(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

根据引理2.6，我们可以推得

$$\|V^{q'_p}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim \|e^{it\Delta}f(x)\|_{L^p_xL^{q'_p}_t(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} + \|\partial_t e^{it\Delta}f(x)\|_{L^p_xL^{q'_p}_t(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_2.$$

□

在过渡到全局估计之前，我们对 $B^n(0,\ R)\times[0,R]$ 应用引理 2.1 中的插值不等式。

引理 3.5。 设 $p > G_n$、$2 \le r \le \infty$ 和 $R \ge 1$。假设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_x(f) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\right\}.$$

那么，对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_{p,r,\varepsilon} R^{\max\{0,\,(n+1)/(2p)+1/(2r)-n/4\}+\varepsilon}\|f\|_2. \tag{3.15}$$

证明。 先假设 $G_n < p < q_n$ 并使用引理 q_p' 中的指数 3.4。

情形 1： $2 \le r < q_p'$。 取 $0 < \theta \le 1$使得

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{q_p'}.$$

由引理3.3和3.4,

$$\begin{aligned} \|V_{[0,R]}^r e^{it\Delta} f\|_{L^p(B^n(0,R))} &\le \|V_{[0,R]}^2 e^{it\Delta} f\|_{L^p(B^n(0,R))}^{\theta} \|V_{[0,R]}^{q_p'} e^{it\Delta} f\|_{L^p(B^n(0,R))}^{1-\theta} \\ &\lesssim R^{\theta((n+1)/(2p)-(n-1)/4)} \|f\|_2. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{n+1}{2p} - \frac{n-1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_p'}\right),$$

指数为

$$\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_p'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q_p'}\right) = \frac{n+1}{2p} + \frac{1}{2r} - \frac{n}{4}.$$

情形 2： $q_p' \le r < \infty$。 由(3.14),

$$\|V_{[0,R]}^r \{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \le \|V_{[0,R]}^{q_p'} \{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim \|f\|_2.$$

对于 $r = \infty$，引理 2.3 给出

$$\|V_{[0,R]}^{\infty} \{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_{\varepsilon,p} R^{\varepsilon} \|f\|_2 = R^{\max\{0,\,(n+1)/(2p)-n/4\}+\varepsilon} \|f\|_2,$$

因为 $p > G_n > 2(n+1)/n$。对于 $p \ge q_n$ 和 $2 \le r < \infty$，(3.11) 给出

$$\|V_{[0,R]}^r \{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \le \|V_{[0,R]}^2 \{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim \|f\|_2.$$

情形 $r = \infty$ 由引理 2.3得到。 □

引理 3.6。 设 $2 \le p \le G_n$、$R \ge 1$，并设 $f \in S(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_x(f) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\right\}.$$

Let

$$\beta_n(p) = \frac{1-\theta_p}{2} b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\rho_n(p)} - A_n(p)\right).$$

那么，对于 $2 \le r < \infty$ 以及任意 $\varepsilon > 0$,

$$\|V_{[0,R]}^r \{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_{\varepsilon} R^{\max\{\beta_n(p),\,(n+1)/(2p)+1/(2r)-n/4\}+\varepsilon} \|f\|_2. \tag{3.16}$$

特别地，对于 $2 \le r \le \rho_n(p)$，指数为 $(n+1)/(2p) + 1/(2r) - n/4$。在 $p = G_n$ 处同样成立该公式，其中 $\beta_n(G_n) = 0$。

证明。 设 $2 < p \le G_n$ 并选取 $P > G_n$ 接近于 G_n。将 (3.10) 与 (3.14) 在 $(P, Q(P))$ 处进行插值。选取 θ 使得

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{P}, \qquad \frac{1}{r_P} = \frac{1-\theta}{q_n} + \frac{\theta}{Q(P)}.$$

根据引理2.1、(3.10) 和(3.14)

$$\|V_{[0,R]}^{r_P} \{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_{\varepsilon,P} R^{(1-\theta)b_n/2+\varepsilon} \|f\|_2. \tag{3.17}$$

局部指数为 $(1-\theta)b_n/2$。对于 $P \downarrow G_n$，我们有

$$r_P \longrightarrow \rho_n(p), \qquad (1-\theta)b_n/2 \longrightarrow \beta_n(p).$$

对于 $\beta_n(p)$，由插值可得

$$b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{q_n}, \qquad A_n(G_n) = \frac{1}{G_n} + \frac{1}{Q_n},$$

并利用 $A_n(p)$ 关于 $1/p$ 是仿射的。由于 $P > G_n$,

$$\theta = \frac{1/2 - 1/p}{1/2 - 1/P} < \frac{1/2 - 1/p}{1/2 - 1/G_n} = \theta_p.$$

r_P和 ρ_n（p）的定义给出

$$\frac{1}{r_P} - \frac{1}{\rho_n(p)} = b_n(\theta_p - \theta) > 0,$$

因此 $r_P < \rho_n$（p）。固定 $\varepsilon > 0$，并选择充分接近 G_n的 $P > G_n$，使得

$$0 < \frac{(1-\theta)b_n}{2} - \beta_n(p) = \frac{b_n}{2}(\theta_p - \theta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由(3.17)，取 $\varepsilon/2$,

$$\begin{aligned} \|V^{\rho_n(p)}_{[0,R]} e^{it\Delta} f\|_{L^p(B^n(0,R))} &\le \|V^{r_P}_{[0,R]} e^{it\Delta} f\|_{L^p(B^n(0,R))} \\ &\lesssim R^{(1-\theta)b_n/2+\varepsilon/2}\|f\|_2 \\ &\le R^{\beta_n(p)+\varepsilon}\|f\|_2. \end{aligned}$$

对于 $2 \le r < \rho_n$（p），将此估计与引理3.3在 $r = 2$处进行插值。于是有

$$\frac{n+1}{2p} + \frac{1}{2r} - \frac{n}{4}.$$

对于 ρ_n（p） $< r < \infty$,

$$\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \le \|V^{\rho_n(p)}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim R^{\beta_n(p)+\varepsilon}\|f\|_2.$$

对于 $p = 2$和 $2 \le r \le q_n$，选择 $0 \le \vartheta \le 1$ 使得

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{q_n}, \qquad \vartheta = \frac{1/2 - 1/r}{1/2 - 1/q_n}.$$

引理2.1、(3.10) 和(3.11)给出

$$\begin{aligned} \|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} &\le \|V^2_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|^{1-\vartheta}_{L^2(B^n(0,R))}\|V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|^{\vartheta}_{L^2(B^n(0,R))} \\ &\lesssim R^{(1-\vartheta)/2+\vartheta b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2 \\ &= R^{1/4+1/(2r)+\varepsilon}\|f\|_2. \end{aligned}$$

对于 $p = 2$ 和 $q_n < r < \infty$，(3.10) 给出

$$\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} \le \|V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2.$$

由于

$$\rho_n(2) = q_n, \qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{2q_n} = \frac{b_n}{2} = \beta_n(2),$$

这些估计证明了(3.16)。 □

对于 $d_n \le p \le G_n$，定义 $\eta_n(p)$为

$$\frac{1}{\eta_n(p)} = \frac{1/d_n - 1/p}{1/d_n - 1/G_n}\frac{1}{Q_n},$$

其中 $\eta_n(d_n) = \infty$。特别地，$\eta_n(G_n) = Q_n$。

引理 3.7. 设 $R \ge 1$，并设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_x(f) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\right\}.$$

那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，以下估计成立：

(i) If $d_n \le p \le G_n$ and $\eta_n(p) \le r \le \infty$, then

$$\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{\varepsilon}\|f\|_2.$$

(*ii*) 如果 $p=2$且 $q_n \le r \le \infty$，那么

$$\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2.$$

证明。对于 (i)，引理 2.3给出

$$\|V^\infty_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{\varepsilon}\|f\|_2, \qquad p \ge d_n.$$

当 $p=d_n$ 时，这也证明了该结论，因为 $\eta_n(d_n)=\infty$。由 $\rho_n(G_n)=Q_n$，$\beta_n(G_n)=0$，以及引理 $\frac{n+1}{2G_n}+\frac{1}{2Q_n}-\frac{n}{4}=0$，引理 3.6得到

$$\|V^{Q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^{G_n}(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{\varepsilon}\|f\|_2.$$

Let

$$\vartheta = \frac{1/d_n - 1/p}{1/d_n - 1/G_n}$$

对于 $d_n < p \le G_n$。这表明 $0<\vartheta\le 1$，$\frac{1}{p}=\frac{1-\vartheta}{d_n}+\frac{\vartheta}{G_n}$，以及 $\eta_n(p)=Q_n$。变差插值不等式给出

$$V^{\eta_n(p)}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f(x)\} \le \big(V^\infty_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f(x)\}\big)^{1-\vartheta}\big(V^{Q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f(x)\}\big)^{\vartheta}.$$

由霍尔德不等式，对于 $\eta_n(p) \le r < \infty$,

$$\begin{aligned}
\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} &\le \|V^{\eta_n(p)}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))}\\
&\le \|V^\infty_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|^{1-\vartheta}_{L^{d_n}(B^n(0,R))}\|V^{Q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|^{\vartheta}_{L^{G_n}(B^n(0,R))}\\
&\lesssim R^{(1-\vartheta)\varepsilon+\vartheta\varepsilon}\|f\|_2\\
&= R^{\varepsilon}\|f\|_2.
\end{aligned}$$

这就证明了 (i)。

对于 (ii)，(3.10) 给出，对于 $q_n \le r < \infty$,

$$\begin{aligned}
\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} &\le \|V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^2(B^n(0,R))}\\
&\lesssim R^{b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2.
\end{aligned}$$

对于 $r=\infty$，我们有

$$\sup_{0\le t\le R}|e^{it\Delta}f(x)| \le |f(x)| + V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f(x)\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\|V^\infty_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} &\le 2\|f\|_{L^2(B^n(0,R))} + 2\|V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^2(B^n(0,R))}\\
&\lesssim R^{b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2.
\end{aligned}$$

这就证明了（ii）。 □

4. 定理 1.1 和 1.2 中充分性部分的证明

本节首先证明变差估计的局部到全局原理，然后将其应用于第 3 节的局部结果。空间局部化使用了 [21, 20, 29] 中的近远分解；我们给出关于变差范数的论证。

定理 4.1。设 $2\le p\le\infty$、$1\le r\le\infty$ 和 $\beta\ge 0$。假设对于每个 $\varepsilon>0$、每个 $R\ge 1$ 以及每个带有 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的 $g\in$，都有

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_x(g) \subset \{\xi\in\mathbb{R}^n : 1/2\le|\xi|\le 2\},$$

有

$$\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}g\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{\beta+\varepsilon}\|g\|_2. \tag{4.1}$$

那么，对于每个 $s > A_n(p)+2\beta$,

$$\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。 我们首先进行频率局部化，并应用抛物缩放。设 g_R 满足 $\operatorname{supp}\widehat{g_R}\subset\{R/2\le|\xi|\le 2R$, 并定义

$$g(x)=R^{-n/2}g_R(x/R).$$

那么 $\|g\|_2=\|g_R\|_2$，$\operatorname{supp}\mathrm{F}_x(g)\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n\colon 1/2\le|\xi|\le 2\}$，且

$$e^{it\Delta}g_R(x)=R^{n/2}(e^{iR^2t\Delta}g)(Rx).$$

通过变量变换,

$$\begin{aligned}\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}g_R\}\|_{L^p(B^n(0,R))} &= R^{n/2-n/p}\|V^r_{[0,R^2]}\{e^{it\Delta}g\}\|_{L^p(B^n(0,R^2))}\\ &\lesssim R^{A_n(p)+2\beta+\varepsilon}\|g_R\|_2,\end{aligned}$$

由 (4.1) 在半径 R^2处给出。同一估计对平移后的球以及频率环带的固定膨胀同样成立。

选取 $a\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得 $a=1$ 在 $\{1/2\le|\xi|\le 2\}$ 上，且 $\operatorname{supp}\ a\subset\{1/4\le|\xi|\le 4\}$。定义 T_a 为

$$\widehat{T_af}(\xi)=a\,(\xi/R)\,\widehat{f}(\xi).$$

将 $\mathbb{R}^n$ 划分为立方体

$$Q_j=R(j+[0,1)^n),\qquad j\in\mathbb{Z}^n,$$

并选取一个适配这些立方体的光滑单位分解 $\{\chi_j\}_j$，使其具有一致的有界重叠。定义

$$g_{R,j}:=T_a(\chi_jg_R)=\mathcal{F}_x^{-1}\big(a(\xi/R)\mathcal{F}_x(\chi_jg_R)\big).$$

由于 $T_ag_R=g_R$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}g_{R,j}=g_R,\qquad \operatorname{supp}\widehat{g}_{R,j}\subset\{\xi:R/4\le|\xi|\le 4R\}.$$

由帕塞瓦尔定理和有界重叠可得

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\|g_{R,j}\|_2^2\lesssim\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\|\chi_jg_R\|_2^2\lesssim\|g_R\|_2^2. \tag{4.2}$$

固定一个充分大的维数常数 C_0。对于 $x\in Q_\ell$，分解

$$g_R=\sum_{\|j-\ell\|_\infty\le C_0}g_{R,j}+\sum_{\|j-\ell\|_\infty>C_0}g_{R,j}.$$

对于近项，用 Q_ℓ 个半径为 R 的球覆盖，并应用平移后的局部估计。由于 $p\ge 2$，有界重叠以及 (4.2) 给出

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}\left\|V^r_{[0,1]}\left\{e^{it\Delta}\sum_{\|j-\ell\|_\infty\le C_0}g_{R,j}\right\}\right\|^p_{L^p(Q_\ell)}\right)^{1/p} &\lesssim_\varepsilon R^{A_n(p)+2\beta+\varepsilon}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}\left\|\sum_{\|j-\ell\|_\infty\le C_0}g_{R,j}\right\|_2^2\right)^{1/2}\\ &\lesssim_\varepsilon R^{A_n(p)+2\beta+\varepsilon}\|g_R\|_2.\end{aligned}$$

对于远项以及 $\nu=0,1$，有

$$\partial_t^\nu e^{it\Delta}g_{R,j}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(-i|\xi|^2)^\nu e^{i((x-y)\cdot\xi-t|\xi|^2)}a(\xi/R)\chi_j(y)g_R(y)\,dy\,d\xi.$$

如果 $x\in Q_\ell$, $y\in\operatorname{supp}\chi_j$, $\|j-l\|_\infty>C_0$，且 $0\le t\le 1$，则相位是非驻定的。通过变量变换 $\xi=R\zeta$ 和分部积分，对于每个 M,

$$\sup_{\substack{x\in Q_\ell\\0\le t\le 1}}|\partial_t^\nu e^{it\Delta}g_{R,j}(x)|\lesssim_{M,\nu}R^{3n/2+2\nu-2M}(1+\|j-\ell\|_\infty)^{-M}\|\chi_jg_R\|_2.$$

这里我们使用了 $\|\chi_jg_R\|_1\lesssim R^{n/2}\|\chi_jg_R\|_2$。对于有限的 r,

$$V^r_{[0,1]}e^{it\Delta}g_{R,j}(x)\le\int_0^1|\partial_te^{it\Delta}g_{R,j}(x)|\,dt.$$

对于 $r=\infty$，添加 $2|g_{R,\ j}(x)|$ 并使用相同的导数界。因此，在这两种情况下，

$$\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}g_{R,j}\}\|_{L^p(Q_\ell)} \lesssim_M R^{3n/2+2+n/p-2M}(1+\|j-\ell\|_\infty)^{-M}\|\chi_j g_R\|_2.$$

离散杨氏不等式，再结合 $l^2 \subset l^{\ p}$，可将远端项之和估计为 $O(R^{-100})\|g_R\|_2$，其中先取 M 充分大。合并两部分可得

$$\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}g_R\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim_\varepsilon R^{A_n(p)+2\beta+\varepsilon}\|g_R\|_2. \tag{4.3}$$

剩下的工作是对频率求和。利用光滑的非齐次 Littlewood–Paley分解，将 $f=g_0+\sum_{k\geq 1}g_k$ 写成该分解，其中 $\operatorname{supp}\widehat{g_k}\subset\{|\xi|\approx 2^k\}$。令 $s_0=A_n(\ p)\ +2\beta$。对于 $s>s_0$，取 $0<\varepsilon<s-s_0$。由次可加性和柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\|V^r_{[0,1]}e^{it\Delta}f\|_p &\lesssim \|g_0\|_2+\sum_{k\geq 1}2^{k(s_0+\varepsilon)}\|g_k\|_2\\ &\lesssim \left(\|g_0\|_2^2+\sum_{k\geq 1}2^{2ks}\|g_k\|_2^2\right)^{1/2}\lesssim_s \|f\|_{H^s}.\end{aligned}$$

对于低频项，使用 $V^r_{[0,1]}e^{it\Delta}g_0\leq\int_0^1|\Delta e^{it\Delta}g_0|\,dt$ 和Bernstein不等式；对于 $r=\infty$，还需包含 $2|g_0|$。通过 Schwartz 函数逼近即可完成证明。□

定理4.2。对于 （p，r） 定理 *1.1* 中的每一对 $s>s$（p，r），

$$\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\lesssim_{p,r,s}\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。我们将第 3 节的局部估计与定理 4.1结合起来。局部幂 $R^{\beta+\varepsilon}$ 给出全局阈值

$$s_0=A_n(p)+2\beta.$$

情形 1： $1\ \leq r\leq 2$。引理 3.3给出 $\beta=1/r-1/2+$最大值$\{(n+1)/(2p)\ -\ （n-1）/4,\ 0\}$。因此 ，

$$s_0=\max\left\{\frac{2}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2},\,A_n(p)+\frac{2}{r}-1\right\},$$

这就证明了第（一）部分。

情形 2： $p\geq G_n$ **和** $2\leq r\leq\infty$。对于 $p>G_n$，使用引理 3.5；对于 $p=G_n$ 和有限 r，使用引理 3.6。最大边界由引理2.3得到。在每种情形下，我们可以取

$$\beta=\max\left\{0,\frac{n+1}{2p}+\frac{1}{2r}-\frac{n}{4}\right\}.$$

因此

$$s_0=\max\left\{A_n(p),\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right\},$$

证明了第（二）部分。

情形 3： $2\leq p\leq G_n$**和** $2\leq r\leq\rho_n(\ p)$。引理 3.6给出

$$\beta=\frac{n+1}{2p}+\frac{1}{2r}-\frac{n}{4}.$$

因此 $s_0=1/p+1/r$，如第（三）部分所述。

情形 4： $d_n\leq p\leq G_n$**和** $\eta_n(p)\leq r\leq\infty$。引理 3.7的第（一）部分给出 $\beta=0$。因此 $s_0=A_n(\ p)$，证明了第（四）部分。

情形 5： $p=2$ **以及** $q_n\leq r\leq\infty$。引理 3.7 的第（二）部分 $\beta=b_n/2$。由于 $A_n(2)\ =0$，我们得到$s_0=b_n$，从而证明了第（五）部分。至此，充分性的证明完成。□

定理 4.3。 令 $n \geq 3$、 $2 \leq p \leq G_n$ 和 $\rho_n(p) \leq r \leq \infty$。令

$$\sigma_n(p,r) = A_n(p) + b_n \max\left\{0, \frac{1/p - 1/d_n}{1/2 - 1/d_n}, \frac{1/p - 1/d_n + (Q_n/r)(1/d_n - 1/G_n)}{1/2 - 1/d_n + (Q_n/q_n)(1/d_n - 1/G_n)}\right\}. \tag{4.4}$$

若 $s > \sigma_n(p,r)$, 则

$$\left\| V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f\} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim_{p,r,s} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

证明。 令 $R \geq 1$ 且 $\operatorname{supp} f \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$。引理 3.6在 $(p,r) = (G_n, Q_n)$和引理 3.7给出

$$\begin{cases} \|V^{r_0}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^2(B^n(0,R))} & \lesssim_\varepsilon \quad R^{b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2, \quad q_n \leq r_0 \leq \infty, \\ \|V^{Q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^{G_n}(B^n(0,R))} & \lesssim_\varepsilon \quad R^{\varepsilon}\|f\|_2, \\ \|V^{\infty}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^{d_n}(B^n(0,R))} & \lesssim_\varepsilon \quad R^{\varepsilon}\|f\|_2. \end{cases} \tag{4.5}$$

情形 1： $2 \leq p < d_n$ **和** $1/r \leq (1/p - 1/d_n)/(q_n(1/2 - 1/d_n))$。令

$$\vartheta = \frac{1/p - 1/d_n}{1/2 - 1/d_n}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{\vartheta}{2} + \frac{1-\vartheta}{d_n}.$$

对于有限的 r, 令 $r_0 = \vartheta r$; 对于 $r = \infty$, 令 $r_0 = \infty$。于是

$$0 < \vartheta \leq 1, \qquad r_0 \geq q_n, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{r_0}.$$

引理2.1 和(4.5) 推出

$$\begin{aligned} \|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} &\leq \|V^{r_0}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|^{\vartheta}_{L^2(B^n(0,R))} \|V^{\infty}_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|^{1-\vartheta}_{L^{d_n}(B^n(0,R))} \\ &\lesssim R^{\vartheta b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2. \end{aligned}$$

条件 $1/r \leq \vartheta/q_n$ 给出

$$\frac{1/p - 1/d_n + (Q_n/r)(1/d_n - 1/G_n)}{1/2 - 1/d_n + (Q_n/q_n)(1/d_n - 1/G_n)} \leq \vartheta.$$

因此 $\sigma_n(p, r) = A_n(p) + \vartheta b_n$在此情形下。

情形 2： $d_n \leq p \leq G_n$**和** $\eta_n(p) \leq r \leq \infty$。 $\eta_n(p)$ 的定义给出

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{d_n} \leq 0, \qquad \frac{1}{p} - \frac{1}{d_n} + \frac{Q_n}{r}\left(\frac{1}{d_n} - \frac{1}{G_n}\right) \leq 0.$$

因此 $\sigma_n(p, r) = A_n(p)$, 且引理 3.7(i) 推出

$$\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta} f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_\varepsilon R^{\varepsilon}\|f\|_2.$$

情形 3:

$$\begin{cases} 2 < p < d_n, & \rho_n(p) \leq r < \dfrac{q_n(1/2 - 1/d_n)}{1/p - 1/d_n}; \\ d_n \leq p < G_n, & \rho_n(p) \leq r < \eta_n(p). \end{cases}$$

定义

$$\lambda = \frac{1/p - 1/d_n + (Q_n/r)(1/d_n - 1/G_n)}{1/2 - 1/d_n + (Q_n/q_n)(1/d_n - 1/G_n)}, \qquad \mu = Q_n\left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda}{q_n}\right), \qquad \nu = 1 - \lambda - \mu.$$

排除情况1和情况2意味着 $\lambda > 0$ 和

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1/p - 1/d_n}{q_n(1/2 - 1/d_n)}.$$

由于 $r \geq \rho_n(p)$，我们有

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{Q_n\big((1/2-1/d_n)/r - (1/p-1/d_n)/q_n\big)}{1/2-1/d_n+(Q_n/q_n)(1/d_n-1/G_n)} \geq 0, \\ \nu = \dfrac{Q_n(1/2-1/G_n)\big(1/\rho_n(p)-1/r\big)}{1/2-1/d_n+(Q_n/q_n)(1/d_n-1/G_n)} \geq 0. \end{cases}$$

此外，我们有

$$\lambda+\mu+\nu = 1, \frac{1}{p} = \frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{G_n}+\frac{\nu}{d_n}, \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{q_n}+\frac{\mu}{Q_n}.$$

应用引理 2.1tw ce an t ėn 。 ɖ h (4 5)

$$\begin{aligned} \|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} &\leq \|V^{q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|^{\lambda}_{L^2(B^n(0,R))}\|V^{Q_n}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|^{\mu}_{L^{G_n}(B^n(0,R))} \\ &\quad \times\|V^{\infty}_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|^{\nu}_{L^{d_n}(B^n(0,R))} \\ &\lesssim R^{\lambda b_n/2+\varepsilon}\|f\|_2. \end{aligned}$$

在此情形下，

$$\lambda \geq \max\left\{0, \frac{1/p-1/d_n}{1/2-1/d_n}\right\}, \qquad \sigma_n(p,r) = A_n(p)+\lambda b_n,$$

这意味着

$$\|V^r_{[0,R]}\{e^{it\Delta}f\}\|_{L^p(B^n(0,R))} \lesssim_{\varepsilon} R^{(\sigma_n(p,r)-A_n(p))/2+\varepsilon}\|f\|_2. \tag{4.6}$$

将定理 4.1 应用于 (4.6) 即可证明对所有 $s > \sigma_n(p,\ r)$的估计。 □

5. 定理 1.1 必要性部分的证明

5.1. 变差范数的下界。

定理 5.1. 设 $n \geq 3$、$2 \leq p \leq \infty$、$1 \leq r \leq \infty$ 和 $R \geq 1$。令 $f_R \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_x(f_R) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : R/2 \leq |\xi| \leq 2R\}.$$

Then

$$R^{2/r}\|e^{it\Delta}f_R\|_{L^p_xL^r_t([0,1])} \lesssim \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.1}$$

若(1.1)成立，则

$$\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim R^s\|f_R\|_2.$$

证明。 对于 $1 \leq r < \infty$，取 $0 < c < 1/64$ 并令

$$N = \lceil R^2/c\rceil, \qquad h = N^{-1}, \qquad \frac{c}{1+c} \leq hR^2 \leq c.$$

对于 $0 \leq \tau < h$，时间序列 $\tau, \tau+h, \ldots, \tau+(N-1)h$ 属于 $[0,1]$。因此

$$\begin{aligned} \int_0^{1-h}|e^{i(t+h)\Delta}f_R(x)-e^{it\Delta}f_R(x)|^r\,dt &= \int_0^h\sum_{j=0}^{N-2}|e^{i(\tau+(j+1)h)\Delta}f_R(x)-e^{i(\tau+jh)\Delta}f_R(x)|^r\,d\tau \\ &\leq h\big(V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R(x)\}\big)^r. \end{aligned}$$

取空间范数，并对后向差分作变量代换，得到

$$\begin{aligned} &\|e^{i(t+h)\Delta}f_R-e^{it\Delta}f_R\|_{L^p_xL^r_t([0,1-h])}+\|e^{i(t-h)\Delta}f_R-e^{it\Delta}f_R\|_{L^p_xL^r_t([h,1])} \\ &\lesssim h^{1/r}\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

取 $\chi \in C^{\infty}_c(\{\zeta :\ 1/4 < |\zeta| < 4\})$，其中 $\chi \equiv 1$ 在 $\{\zeta :\ 1/2 \leq |\zeta| \leq 2\}$ 上。在 χ 的支集上，

$$0 < \frac{c}{16(1+c)} \leq hR^2|\zeta|^2 \leq 16c < \pi, \qquad |e^{\pm ihR^2|\zeta|^2}-1| \gtrsim hR^2|\zeta|^2 \gtrsim c.$$

对于整数 $M > n/2$，可得

$$\sum_{|\alpha|\le 2M} \left\| \partial_\zeta^\alpha \left(\frac{\chi(\zeta)}{e^{\pm ihR^2|\zeta|^2} - 1} \right) \right\|_{L^1_\zeta} \lesssim_{M,c} 1.$$

通过变量变换 $\xi = R\zeta$ 和分部积分，我们有

$$\left| \mathcal{F}_x^{-1} \left(\frac{\chi(\xi/R)}{e^{\pm ih|\xi|^2} - 1} \right)(y) \right| \lesssim_{M,c} R^n (1 + R^2|y|^2)^{-M}$$

这表明

$$\left\| \mathcal{F}_x^{-1} \left(\frac{\chi(\xi/R)}{e^{\pm ih|\xi|^2} - 1} \right) \right\|_{L^1} \lesssim_{M,c} R^n \int_{\mathbb{R}^n} (1 + R^2|y|^2)^{-M} \, dy \lesssim_{M,c} 1.$$

由于

$$\mathcal{F}_x\big(e^{i(t\pm h)\Delta} f_R - e^{it\Delta} f_R\big)(\xi) = \big(e^{\mp ih|\xi|^2} - 1\big) e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}_x(f_R)(\xi),$$

由闵可夫斯基不等式和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta} f_R\|_{L_x^p L_t^r([0,1-h])} &\le \left\| \mathcal{F}_x^{-1} \left(\frac{\chi(\xi/R)}{e^{-ih|\xi|^2} - 1} \right) \right\|_{L^1} \|e^{i(t+h)\Delta} f_R - e^{it\Delta} f_R\|_{L_x^p L_t^r([0,1-h])} \\ &\lesssim h^{1/r} \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^p} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta} f_R\|_{L_x^p L_t^r([h,1])} &\le \left\| \mathcal{F}_x^{-1} \left(\frac{\chi(\xi/R)}{e^{ih|\xi|^2} - 1} \right) \right\|_{L^1} \|e^{i(t-h)\Delta} f_R - e^{it\Delta} f_R\|_{L_x^p L_t^r([h,1])} \\ &\lesssim h^{1/r} \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^p}. \end{aligned}$$

由于 $h < 1/2$ 和 $[0, 1-h] \cup [h, 1] = [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta} f_R\|_{L_x^p L_t^r([0,1])} &\le \|e^{it\Delta} f_R\|_{L_x^p L_t^r([0,1-h])} + \|e^{it\Delta} f_R\|_{L_x^p L_t^r([h,1])} \\ &\lesssim R^{-2/r} \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^p}. \end{aligned}$$

对于 $r = \infty$，(5.1) 由 V^∞的定义可得。如果(1.1) 成立，则

$$\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_R\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \lesssim R^s \|f_R\|_2.$$

□

5.2. $s < A_n(p)$**范围内的反例**。

定理 5.2. 设 $n \ge 3$、 $2 \le p \le \infty$和 $1 \le r \le \infty$。如果

$$\left\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f\}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$均成立，则必然有

$$s \ge A_n(p).$$

证明。 取 $0 \le a \in C_c^\infty(B^n(e_1, 1/8))$、 $a \not\equiv 0$，并定义

$$\mathcal{F}_x(f_R)(\xi) = R^{-n/2} a(\xi/R).$$

通过变量变换 $\xi = R\zeta$,

$$\|f_R\|_2^2 \approx \int_{\mathbb{R}^n} |a(\zeta)|^2 \, d\zeta \approx 1, \qquad \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s.$$

对于 $|x| \le cR^{-1}$、 $0 \le t \le cR^{-2}$ 和 $\xi \in \operatorname{supp} \mathrm{F}_x(f_R)$,

$$|x \cdot \xi - t|\xi|^2| \le |x||\xi| + t|\xi|^2 \le 2c + 4c \le \frac{\pi}{3},$$

在 $c>0$ 足够小时。因此

$$|e^{it\Delta}f_R(x)| \geq \mathrm{Re}\big(e^{it\Delta}f_R(x)\big) \geq \frac{R^{-n/2}}{2(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(\xi/R)\,d\xi \gtrsim R^{n/2}.$$

对于 $1\leq r<\infty$，定理 5.1给出

$$\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R\}\|_{L^p} \gtrsim R^{2/r}\|e^{it\Delta}f_R\|_{L^p_xL^r_t([0,1])} \gtrsim R^{2/r}R^{n/2}(cR^{-2})^{1/r}|B^n(0,\ cR^{-1})|^{1/p} \gtrsim R^{n/2-n/p}。$$

对于 $r=\infty$，取 $t=0$ 可得

$$\|V^\infty_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R\}\|_{L^p} \geq 2\|f_R\|_{L^p(B^n(0,cR^{-1}))} \gtrsim R^{n/2-n/p}.$$

Thus

$$R^{A_n(p)} \lesssim \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R\}\|_{L^p} \lesssim \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s,$$

这要求 $s\geq A_n(p)$ 作为 $R\to\infty$。 □

5.3. $s<1/p+1/r$**范围内的反例**。

定理 5.3。 设 $n\geq 3$、 $2\leq p\leq\infty$和 $1\leq r\leq\infty$。若

$$\big\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f\}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$ 均成立，则必然有

$$s\geq \frac{1}{p}+\frac{1}{r}.$$

证明。 取 $0\leq\phi\in C_c^\infty(B^n(0,\delta))$、 $\phi\not\equiv 0$，满足 $0<\delta<1/100$，并设

$$f_R(x)=e^{iRx_1}\phi(x).$$

Then

$$\mathrm{supp}\,\mathcal{F}_x(f_R)\subset B^n(Re_1,\delta), \qquad \|f_R\|_2=\|\phi\|_2, \qquad \|f_R\|_{H^s}\lesssim R^s\|\phi\|_2.$$

通过 $\xi=Re_1+\eta$进行变量变换,

$$e^{it\Delta}f_R(x)=e^{i(Rx_1-R^2t)}(e^{it\Delta}\phi)(x-2Rte_1).$$

Let

$$\Omega_R=\{x\in\mathbb{R}^n: R/2\leq x_1\leq R,\ |x'|\leq 1/4\}, \qquad |\Omega_R|\approx R.$$

对于 $x\in\Omega_R$，令

$$t_x=\frac{x_1}{2R}, \qquad I_x=\left[t_x-\frac{1}{8R},t_x+\frac{1}{8R}\right]\subset(0,1).$$

若 $t\in I_x$，则

$$|x_1-2Rt|\leq\frac{1}{4}, \qquad |x-2Rte_1|\leq\frac{1}{2},$$

并且，对于 $\eta\in\mathrm{supp}\,\phi$,

$$|(x-2Rte_1)\cdot\eta-t|\eta|^2|\leq\frac{\delta}{2}+\delta^2\leq\frac{\pi}{3}.$$

因此,

$$\mathrm{Re}\big((e^{it\Delta}\phi)(x-2Rte_1)\big)\geq\frac{1}{2(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\phi}(\eta)\,d\eta\gtrsim 1.$$

对于有限的 r，取

$$t_j=t_x-\frac{1}{8R}+\frac{j\pi}{R^2}, \qquad 0\leq j\leq J_R=\left\lfloor\frac{R}{4\pi}\right\rfloor.$$

对于足够大的 R,

$$t_x-\frac{1}{8R}\leq t_0<\cdots<t_{J_R}\leq t_x+\frac{1}{8R}, \qquad J_R\gtrsim R, \qquad e^{-iR^2t_{j+1}}=-e^{-iR^2t_j}.$$

由此可得，对于 $0 \le j < J_R$,

$$|e^{it_{j+1}\Delta} f_R(x) - e^{it_j\Delta} f_R(x)| \quad \ge \quad \mathrm{Re}\big((e^{it_{j+1}\Delta}\phi)(x - 2Rt_{j+1}e_1)\big) + \mathrm{Re}\big((e^{it_j\Delta}\phi)(x - 2Rt_j e_1)\big) \gtrsim 1.$$

因此，对于 $x \in \Omega_R$,

$$V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R(x)\} \ge \left(\sum_{j=0}^{J_R-1} |e^{it_{j+1}\Delta} f_R(x) - e^{it_j\Delta} f_R(x)|^r\right)^{1/r} \gtrsim J_R^{1/r} \gtrsim R^{1/r}.$$

对于 $r = \infty$，取 $t = t_x$ 可得

$$V^\infty_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R(x)\} \ge 2|(e^{it_x\Delta}\phi)(x - 2Rt_x e_1)| \gtrsim 1.$$

因此，当 $1/\infty = 0$ 时，

$$R^{1/p+1/r} \quad \lesssim \quad R^{1/r}|\Omega_R|^{1/p} \lesssim \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^p(\Omega_R)} \lesssim \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s.$$

令 $R \to \infty$，得到 $s \ge 1/p + 1/r$。 □

5.4. $s < 2/r + 1/p - 1/2$**范围内的反例**。

定理 5.4。 设 $n \ge 3$、 $2 \le p \le \infty$ 和 $1 \le r < \infty$。若

$$\big\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f\}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$均成立，则必然有

$$s \ge \frac{2}{r} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

证明。 取 $0 \le a \in C_c^\infty(B^n(0,\delta))$、 $a \not\equiv 0$，满足 $0 < \delta < 1/100$，并定义

$$\mathcal{F}_x(f_R)(\xi) = R^{1/2} a\big(R(\xi_1 - R), \xi'\big).$$

通过变量变换 $\eta_1 = R(\xi_1 - R)$， $\eta' = \xi'$,

$$\|f_R\|_2^2 \approx \int_{\mathbb{R}^n} |a(\eta)|^2\, d\eta \approx 1, \qquad \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s,$$

and

$$e^{it\Delta} f_R(x) \quad = \quad \frac{R^{-1/2} e^{i(Rx_1 - R^2 t)}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left((x_1/R - 2t)\eta_1 + x'\cdot\eta' - t(R^{-2}\eta_1^2 + |\eta'|^2)\right)} a(\eta)\, d\eta.$$

Let

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \le R/4,\ |x'| \le 1/4\}, \qquad |\Omega_R| \approx R.$$

对于 $x \in \Omega_R$、 $0 \le t \le 1$ 以及 $\eta \in \mathrm{supp}\, a$,

$$\begin{aligned} &\big|(x_1/R - 2t)\eta_1 + x'\cdot\eta' - t(R^{-2}\eta_1^2 + |\eta'|^2)\big| \\ &\le \quad \left(\frac{1}{4} + 2\right)\delta + \frac{\delta}{4} + 2\delta^2 \le \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Re}\big(e^{-i(Rx_1 - R^2 t)} e^{it\Delta} f_R(x)\big) \ge \frac{R^{-1/2}}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} a(\eta)\, d\eta \gtrsim R^{-1/2}.$$

Take

$$t_j = \frac{j\pi}{R^2}, \qquad 0 \le j \le J_R = \left\lfloor \frac{R^2}{\pi} \right\rfloor.$$

那么， $0 \le t_0 < \cdots < t_{J_R} \le 1$、 $J_R \gtrsim R^2$以及 $e^{-iR^2 t_{j+1}} = -e^{-iR^2 t_j}$。因此，
$|e^{it_{j+1}\Delta} f_R(x) - e^{it_j\Delta} f_R(x)| \ge$实部$\big(e^{-i(Rx_1 - R^2 t_{j+1})}\, e^{it_{j+1}\Delta} f_R(x)\big) +$实部$\big(e^{-i(Rx_1 - R^2 t_j)}\, e^{it_j\Delta} f_R(x)\big) \gtrsim R^{-1/2}$。

对于 $x \in \Omega_R$，我们有

$$V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R(x)\} \geq \left(\sum_{j=0}^{J_R - 1} |e^{it_{j+1}\Delta} f_R(x) - e^{it_j \Delta} f_R(x)|^r \right)^{1/r} \gtrsim R^{-1/2} J_R^{1/r} \gtrsim R^{2/r - 1/2},$$

这意味着

$$R^{2/r+1/p-1/2} \lesssim R^{2/r-1/2} |\Omega_R|^{1/p} \lesssim \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^p(\Omega_R)} \lesssim \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s.$$

令 $R \to \infty$，得到 $s \geq 2/r + 1/p - 1/2$。 □

5.5. $s < A_n(p) + 2/r - 1$**范围内的反例**。

定理 5.5。设 $n \geq 3$、$2 \leq p \leq \infty$ 和 $1 \leq r \leq \infty$。如果

$$\left\| V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f\} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 均成立，则必然有

$$s \geq A_n(p) + \frac{2}{r} - 1.$$

证明。取 $0 \leq a \in C_c^\infty((0, \delta))$、$a \not\equiv 0$，满足 $0 < \delta < 1/100$，并令

$$\mathcal{F}_x(f_R)(\xi) = R^{-(n-2)/2} a\big(R(|\xi| - R)\big).$$

Then

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}_x(f_R) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : R \leq |\xi| \leq R + \delta/R\}.$$

通过极坐标和变量变换 $v = R(\rho - R)$,

$$\|f_R\|_2^2 \approx \int_0^\delta |a(v)|^2 \left(1 + \frac{v}{R^2}\right)^{n-1} dv \approx 1, \qquad \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s.$$

在傅里叶支撑上,

$$0 \leq |\xi|^2 - R^2 \leq \frac{\delta}{R}\left(2R + \frac{\delta}{R}\right) \leq 3\delta.$$

对于 $|x| \leq cR^{-1}$ 和 $0 \leq t \leq 1$,

$$|x \cdot \xi - t(|\xi|^2 - R^2)| \leq |x||\xi| + t\big||\xi|^2 - R^2\big| \leq 2c + 3\delta \leq \frac{\pi}{3}$$

若 $c > 0$ 足够小。因此,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\big(e^{itR^2} e^{it\Delta} f_R(x)\big) &\geq \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x(f_R)(\xi)\, d\xi \\ &\gtrsim R^{-(n-2)/2} \int_R^{R+\delta/R} a\big(R(\rho - R)\big) \rho^{n-1}\, d\rho \\ &\gtrsim R^{(n-2)/2} \int_0^\delta a(v)\, dv \gtrsim R^{(n-2)/2}. \end{aligned}$$

对于有限的 r，取

$$t_j = \frac{j\pi}{R^2}, \qquad 0 \leq j \leq J_R = \left\lfloor \frac{R^2}{\pi} \right\rfloor.$$

由于 $J_R \gtrsim R^2$ 和 $e^{it_j R^2} = (-1)^j$,

$$|e^{it_{j+1}\Delta} f_R(x) - e^{it_j\Delta} f_R(x)| \geq \operatorname{Re}\big(e^{it_{j+1}R^2} e^{it_{j+1}\Delta} f_R(x)\big) + \operatorname{Re}\big(e^{it_j R^2} e^{it_j\Delta} f_R(x)\big) \gtrsim R^{(n-2)/2}.$$

因此，对于 $|x| \le cR^{-1}$,

$$\begin{aligned} V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R(x)\} &\ge \left(\sum_{j=0}^{J_R-1} |e^{it_{j+1}\Delta}f_R(x) - e^{it_j\Delta}f_R(x)|^r\right)^{1/r} \\ &\gtrsim R^{(n-2)/2}J_R^{1/r} \\ &\gtrsim R^{(n-2)/2+2/r}. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} R^{A_n(p)+2/r-1} &\lesssim R^{(n-2)/2+2/r}|B^n(0,cR^{-1})|^{1/p} \\ &\lesssim \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R\}\|_{L^p} \lesssim \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s. \end{aligned}$$

对于 $r=\infty$，取 $t=0$ 可得

$$\|V^\infty_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f_R\}\|_{L^p} \ge 2\|f_R\|_{L^p(B^n(0,cR^{-1}))} \gtrsim R^{(n-2)/2-n/p}.$$

令 $R\to\infty$即可证明 $s \ge A_n(p) + 2/r - 1$。 □

5.6. $p=2$**处的下界**。

定理 5.6. 设 $n\ge 3$ 且 $1\le r\le\infty$。若

$$\left\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta}f\}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$均成立，则必有

$$s \ge b_n.$$

证明。 固定 $0<\delta<b_n/2$。Bourgain 构造 [4], 如 [27, (2.10)–(2.11) 和第 7],节中所详述，对任意大的 L，存在非零的 $h_L\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_x(h_L) \subset \{\xi\in\mathbb{R}^n : C^{-1}L \le |\xi| \le CL\},$$

and

$$\left\|\sup_{0<t<c/L}|e^{it\Delta}h_L|\right\|_{L^1(B^n(0,1))} \gtrsim_\delta L^{n/(2(n+1))-\delta}\|h_L\|_2,$$

其中 $C\ge 1$ 和 $0<c<1$ 为固定值。由霍尔德不等式,

$$\begin{aligned} \left\|\sup_{0<t<c/L}|e^{it\Delta}h_L|\right\|_{L^2(B^n(0,1))} &\ge |B^n(0,1)|^{-1/2}\left\|\sup_{0<t<c/L}|e^{it\Delta}h_L|\right\|_{L^1(B^n(0,1))} \\ &\gtrsim_\delta L^{n/(2(n+1))-\delta}\|h_L\|_2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

令 $L=R^2$和

$$f_R(x) = R^{-n/2}h_{R^2}(x/R).$$

通过变量变换,

$$\mathcal{F}_x(f_R)(\xi) = R^{n/2}\mathcal{F}_x(h_{R^2})(R\xi), \qquad \|f_R\|_2 = \|h_{R^2}\|_2,$$

so

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}_x(f_R) \subset \{\xi\in\mathbb{R}^n : C^{-1}R \le |\xi| \le CR\}, \qquad \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s\|f_R\|_2.$$

由于

$$e^{it\Delta}f_R(x) = R^{-n/2}(e^{i(t/R^2)\Delta}h_{R^2})(x/R),$$

(5.2) 以及变量变换 $x = Ry, t = R^2\tau$ 给出

$$\begin{aligned}\left\| \sup_{0<t<c} |e^{it\Delta} f_R| \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\geq \left\| \sup_{0<t<c} |e^{it\Delta} f_R| \right\|_{L^2(B^n(0,R))} \\ &= \left\| \sup_{0<\tau<c/R^2} |e^{i\tau\Delta} h_{R^2}| \right\|_{L^2(B^n(0,1))} \\ &\gtrsim_\delta R^{b_n-2\delta} \|f_R\|_2.\end{aligned}$$

对于有限的 r,

$$\sup_{0<t<c} |e^{it\Delta} f_R(x)| \leq |f_R(x)| + V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R(x)\}.$$

因此，对于所有充分大的 R,

$$\begin{aligned}\|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^2} &\geq \left\| \sup_{0<t<c} |e^{it\Delta} f_R| \right\|_{L^2} - \|f_R\|_2 \\ &\geq (c_\delta R^{b_n-2\delta} - 1)\|f_R\|_2 \\ &\geq \frac{c_\delta}{2} R^{b_n-2\delta} \|f_R\|_2.\end{aligned}$$

对于 $r = \infty$,

$$\|V^\infty_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^2} \geq 2 \left\| \sup_{0<t<c} |e^{it\Delta} f_R| \right\|_{L^2} \gtrsim_\delta R^{b_n-2\delta} \|f_R\|_2.$$

无论哪种情况,

$$R^{b_n-2\delta} \|f_R\|_2 \lesssim_\delta \|V^r_{[0,1]}\{e^{it\Delta} f_R\}\|_{L^2} \lesssim \|f_R\|_{H^s} \lesssim R^s \|f_R\|_2.$$

由于 $\|f_R\|_2 > 0$，令 $R \to \infty$ 得到 $s \geq b_n - 2\delta$。令 $\delta \downarrow 0$ 即可证明 $s \geq b_n$。 □

前四个例子给出了定理1.1第（i）至（iv）部分中的所有下界；最后一个例子给出了第（五）部分。结合第4节，这就完成了定理的证明。

数据可用性 本文无相关数据。

利益冲突声明本文为原创，尚未正式发表，也未在其他地方投稿审议。两位作者均已批准本次投稿。作者声明不存在任何竞争性利益。

关于人工智能使用的声明。 作者提出了主要思想，撰写了证明，并确定了本工作的总体方向。我们向 GPT-6 Astra 建议，Chen 和 Tang [9] 中的二维反例可用于构造高维薛定谔变差估计的反例，并要求该模型协助完善第 5 节中这一推广的细节。我们还使用该模型润色了稿件的措辞。图 1 由 GPT-6 Astra 根据我们对其预期含义和范围的描述生成。本文第 3 节的证明由作者完成。我们对论文的数学内容承担全部责任。

参考文献

[1] J. Bourgain，算术集合的逐点遍历定理，高等科学研究所数学出版物**69** (1989)，5–45页。[2] J. Bourgain，振荡积分的一些新估计，载于《献给 *Elias M. Stein* 的傅里叶分析论文集》，普林斯顿数学丛书，第42卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），1995年，第83–112页。[3] J. Bourgain，高维薛定谔极大函数，斯捷克洛夫数学研究所学报**280** (2013)，第1期，46–60页。[4] J. Bourgain，关于薛定谔极大函数的一则注记，数学分析杂志**130** (2016)，第1期，393–396页。[5] J. Bourgain 和 C. Demeter，对l^2 解耦猜想的证明，《数学年刊》(2) **182** (2015)，第1期，351–389页。[6] J. T. Campbell、R. L. Jones、K. Reinhold 和 M. Wierdl，希尔伯特变换的振荡与变差，杜克数学杂志**105**(2000)，第1期，59–83页。[7] Z. Cao、C. Miao 和 M. Wang，L^p 高维薛定谔极大函数的 - 估计，泛函分析杂志**281**(2021)，第5期，文章编号109091。

[8] L. Carleson，若干与统计力学相关的分析问题，载于《欧几里得调和分析》（研讨会论文集，马里兰大学，大学公园市，马里兰州，1979年），数学讲义，第779卷，施普林格，柏林，1980年，第5–45页。[9] Y. Chen 和 Y. Tang，高维薛定谔方程的尖锐变差估计，arXiv:2610.31099 [math.CA], 2026。https://arxiv.org/abs/2610.31099。[10] B. E. J. Dahlberg 和 C. E. Kenig，关于薛定谔方程解几乎处处行为的一则注记，载于《调和分析》（明尼阿波利斯，明尼苏达州，1981年），数学讲义，第908卷，施普林格，柏林–纽约，1982年，第205–209页。[11]C. Demeter 和 S. Guo，通过伪共形变换估计薛定谔极大函数，arXiv:1608.07640 [math.CA], 2016。[12] X. Du、L. Guth 和 X. Li，高维的薛定谔极大估计，《数学年刊》(2) 186 (2017)，第2期，607–640页。[13] X. Du、J. Kim、H. Wang 和 R. Zhang，薛定谔极大函数估计的下界，《数学研究快报》27 (2020)，第3期，687–692页。[14] X. Du 和 J. Li，L^p 高维薛定谔极大算子的估计，泛函分析杂志288 (2025)，第3期，文章编号110737。[15] X. Du 和 R. Zhang，高维薛定谔极大函数的尖锐 L^2 估计，《数学年刊》(2) 189 (2019)，第3期，837–861页。[16] S. Guo、J. Roos 和 P.-L. Yung，与 Carleson 定理相关的振荡积分的尖锐变差范数估计，《分析与偏微分方程》13 (2020)，第5期，1457–1500页。[17] R. L. Jones、A. Seeger 和 J. Wright，调和分析中的强变差不等式与跳跃不等式，《美国数学会汇刊》360 (2008)，第12期，6711–6742页。[18] M. Keel 和 T. Tao，端点 Strichartz 估计，《美国数学杂志》120 (1998)，第5期，955–980页。[19] S. Lee，关于高维薛定谔方程解的逐点收敛，国际数学研究通知2006 (2006)，文章编号32597，共21页。[20] S. Lee、K. M. Rogers 和 A. Vargas，薛定谔方程的端点时空估计，《数学进展》226 (2011)，第5期，4266–4285页。[21] S. Lee、K. M. Rogers 和 A. Seeger，关于薛定谔算子的时空估计，《纯粹与应用数学杂志》(9) 99 (2013)，第1期，62–85页。[22] D. Lépingle，半鞅的 p 阶变差，《概率论及其相关领域》36 (1976)，第4期，295–316页。[23] J. Li、C. Miao 和 A. Yu，薛定谔方程的时空估计，arXiv:2402.13539 [math.CA], 2024。[24] R. Lucà 和 K. M. Rogers，分形上的相干性与薛定谔方程的逐点收敛，《数学物理通讯》351 (2017)，第1期，341–359页。[25] A. Moyua、A. Vargas 和 L. Vega，薛定谔极大函数与傅里叶变换的限制性质，《国际数学研究通知》1996 (1996)，第16期，793–815页。[26] R. Oberlin、A. Seeger、T. Tao、C. Thiele 和 J. Wright，变差范数 Carleson 定理，《欧洲数学会杂志》(JEMS) 14 (2012)，第2期，421–464页。[27] L. B. Pierce，关于 Bourgain 的薛定谔极大函数反例，《季刊数学杂志》71 (2020)，第4期，1309–1344页。[28] G. Pisier 和 Q. Xu，鞅和正交级数的强 p变差，《概率论及相关领域》77 (1988)，第4期，497–514页。[29] K. M. Rogers，薛定谔方程的局部平滑估计，《数学进展》219 (2008)，第6期，2105–2122页。[30] K. M. Rogers 和 A. Seeger，薛定谔方程的端点最大估计与平滑估计，《莱茵应用数学杂志》640 (2010)，47–66页。[31] K. M. Rogers 和 P. Villarroya，薛定谔极大算子的全局估计，《芬兰科学院数学论文集》32 (2007)，425–435页。[32] P. Sjölin，薛定谔方程解的正则性，杜克数学杂志55 (1987)，第3期，699–715页。[33] E. M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿数学丛书，第43卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），1993年。[34] E. M. Stein 和 S. Wainger，与 Carleson 定理相关的振荡积分，《数学研究快报》8 (2001)，第5–6期，789–800页。[35] T. Tao，抛物面的尖锐双线性限制估计，《几何与泛函分析》13 (2003)，第6期，1359–1384页。[36] T. Tao 和 A. Vargas，锥乘子的双线性方法。II. 应用，《几何与泛函分析》10 (2000)，第1期，216–258页。[37] P. A. Tomas，傅里叶变换的一个限制定理，《美国数学会通报》81 (1975)，第2期，477–478页。[38] L. Vega，薛定谔方程：解逐点收敛到初始数据，《美国数学会会刊》102 (1988)，第4期，874–878页。

东北大学数学系；流程工业综合自动化国家重点实验室，中国沈阳 110004电子邮箱地址：yanpingch@126.com

东北大学数学系，中国沈阳 110004电子邮箱地址：yongruit@163.com