arXiv:2611.32833v1 [math.CO] 24 Nov 2026

偶四元组与单纯3-余循环的最大密度

JOHN MACKEY

Abstract. 将一个含有 n 个元素的集合中的三元组染成红色或蓝色；若一个四元子集所含的红色三元组数量为偶数，就称其为偶四元集。我们证明，偶四元集的最小数量为 $\frac{5}{16}\binom{n}{4}-\Theta(n^3)$。特别地，二元域上的单纯3-余循环的最大渐近密度为 $11/16$。经典二部矩阵构造达到了极限界。我们还证明，该构造确定了任意固定顶点数下四元组奇偶性的唯一极限分布。令 m_n 表示最小密度，我们将 $n(5/16-m_n)$ 的下极限和上极限界定在 0.75 与 0.752723 之间。偶四元组的下界源自一个关于八个顶点的精确有理不等式。对该构造进行扰动，可以解释这个有限不等式中等号成立的全部 72 种情形，其中只有 22 种在极值极限中仍然成立。

1. Introduction

将有限集 V 中的每个三元组染成红色或蓝色。四元组是 V 的一个四元素子集。若其中包含零个、两个或四个红色三元组，则称其为偶四元组；否则称为奇四元组。任取五个顶点，其中奇四元组的数量为偶数，因为每个红色三元组都被计数两次。特别地，这五个四元组中至少有一个是偶四元组。能同时为偶四元组的四元组最少有多少个?

用 $G=(V,\ \chi)$ 表示一种着色，其中 $\chi\colon \binom{V}{3}\to\mathbb{F}_2$ 在红色三元组上取值 1。其奇偶函数 $q=q_\chi\colon \binom{V}{4}\to\mathbb{F}_2$ 和偶密度 $d(G)$ 为

$$q(Q)=\sum_{T\in\binom{Q}{3}}\chi(T),\qquad d(G)=\frac{\left|\{Q\in\binom{V}{4}:q(Q)=0\}\right|}{\binom{|V|}{4}}.$$

对于 $n\geq 4$，令 $TC(n)$ 表示 n 个顶点上的所有着色中偶四元组数量的最小值，并设 $m_n=TC(n)/\binom{n}{4}$。

定理 1.1. 偶四元组的最小密度趋于 $5/16$。更准确地说，存在绝对常数 c_1、$c_2>0$，使得对所有充分大的 n，

$$\frac{c_1}{n}\ \leq\ \frac{5}{16}-m_n\ \leq\ \frac{c_2}{n}.$$

因此 $TC(n)=\frac{5}{16}\binom{n}{4}-\Theta(n^3)$。

此外还有一个唯一性结论。以相等的概率将每个顶点独立分配到两个部分之一，并为每个跨部顶点对独立赋予一个公平符号。纯四元组是偶数的，而分割为三比一的四元组是奇数的。一个分割为二比二的四元组为偶数，当且仅当其矩形上的四个交叉符号的乘积为 $+1$。我们将由此得到的分布称为公平二部定律。第 2 节给出一种实现该定律的三元组着色。

定理 1.2. 设 G_n 是满足 $|V(G_n)|\to\infty$ 和 $d(G_n)\to 5/16$的三元组着色。对于每个固定的$s\geq 4$，在一个均匀有序样本上，$\binom{s}{4}$ 个四元组奇偶性的联合分布

s 不同顶点收敛到公平二部定律。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 05C65, 05C35。*Key words and phrases.* 单纯复形上同调余循环、图兰问题、旗代数、极值超图、稳定性。

1.1. 余循环与图兰′问题。五集恒等式完整描述了可能的奇偶模式。事实上，设 $q\colon \binom{V}{4} \to \mathbb{F}_2$ 满足

$$\sum_{Q\in\binom{W}{4}} q(Q) = 0 \qquad (W \in \tbinom{V}{5}). \tag{1}$$

固定 $v_0 \in V$，将所有包含 v_0 的三元组染为零，并在其他每个三元组上设定 $\chi(ijk) = q(v_0ijk)$。下文中，不同顶点组成的字符串表示它们构成的集合。方程 (1) 还给出$q_\chi = q$，对避开 v_0 的四元组也成立。用单纯形术语来说，(1) 表明 q 是完整单纯形上的一个 3-余循环，而这一构造将它写成一个余边界。因此，按照 Kalai 对此类余循环最大支撑大小的记号，

$$f(n,4) = \binom{n}{4} - TC(n).$$

定理 1.1 给出 $f(n,\,4) = (11/16)\binom{n}{4} + \Theta(n^3)$。Kalai [3, 第 7 节1] 介绍了产生密度 $11/16$ 的矩阵构造，并记录了 Peled 给出的关于最大密度的旗代数上界 $0.6916 + o(1)$。

McKay 和 Radziszowski [4] 将 $TC(n)$ 用于表示这样一个四元组族的最小规模：它与每个五元集相交的四元组数为奇数。根据 (1)，这恰好就是偶四元组族。相应的 Tur′an 数 $T(n,\,5,\,4)$ 是与每个五元集至少相交一次的四元组族的最小规模。因此，$T(n,\,5,\,4) \le TC(n)$。关于这一覆盖问题的二部构造见 de Caen、Kreher 和 Wiseman [1] 以及 Giraud [2]的研究。McKay 和 Radziszowski 记录了这一猜想：在任意阶数下，$TC(n) = T(n,\,5,\,4)$。一般覆盖能否改善渐近密度 $5/16$ 仍是一个悬而未决的问题 [9]。

奇偶性是唯一性断言所涉及的自然对象。对一对进行切换，意即反转所有包含该对的三元组的颜色。每次对切换都保持每个四元组的奇偶性不变。反过来，若两种着色诱导出相同的奇偶性，考虑它们的差异 $h\colon \binom{V}{3} \to \mathbb{F}_2$。对每一对 ij 进行切换，条件是该对不包含 v_0，且 $h(v_0ij) = 1$。这些切换在包含v_0的三元组上实现 h，而 h 的四元组和为零这一事实，迫使所有其余三元组上的颜色也一致。因此，除对切换外，奇偶性恰好能区分不同的着色。

1.2. 证明概要。 在八个顶点上，按同构计有 893，924 种四元组奇偶模式。我们为每一种模式给出一个不等式。在大型着色中取平均后，其右端是旗代数 [8]意义下若干非负条件二次型之和。该证书具有有理系数，每一项有限比较都是精确的。第 3 节解释了识别等号情形时一个表面上的障碍。对二部构造进行扰动会使其八顶点分布发生一阶变化，但其目标函数只发生二阶变化。因此，一个尖锐的逐点不等式必须在构造中出现的那些模式之外的其他模式上也取零。第 6 节证明，这些额外模式会从每个极值极限中消失，并在大样本上恢复出单一的二部表示。第 5 节给出了每个阶数下的显式下界$n \ge 8$。利用等式定律，第 7 节将第一个有限修正项 $n(5/16 - m_n)$ 置于 $0.75 - o(1)$与 $0.752723 + o(1)$之间。第 8 节证明了一个针对六顶点构型的二次稳定性不等式。

2. The two-part construction

令 $V = A \sqcup B$，并令 $Z\colon A \times B \to \{-1, +1\}$ 为一个符号矩阵。用 $+1$ 表示蓝色，用–1表示红色。纯三元组赋予符号 $+1$，三元组 abb' 赋予符号 -1，并赋予 $aa'b$ 符号 $-Z_{ab}Z_{a'b}$，其中字母取自其指定的部分。四元组上四个三元组符号的乘积决定其奇偶性。直接相乘可得

四元组上的部分大小	三元组符号乘积	公平律中的偶概率
$4+0$ 或 $0+4$	$+1$	1
$3+1$ 或 $1+3$	-1	0
$2+2$，顶点 i、j、x、y	$Z_{ix}Z_{iy}Z_{jx}Z_{jy}$	$1/2$

在采用独立公平标签和交叉符号时，这三行对应的概率分别为 $1/8$、$1/2$和$3/8$。因此，在任意阶数下，期望偶密度为 $1/8+(3/8)/2=5/16$。特别地，$m_n\le 5/16$。每个固定样本模式的密度都依概率收敛到其期望。事实上，不相交顶点集上的指示变量相互独立，因此方差为 $O(1/n)$。

命题 2.1。设 $|A|=|B|=m\ge 2$。记 $r_{ij}=\sum_{x\in B} Z_{ix}Z_{jx}$。偶四元组的数量为

$$2\binom{m}{4}+\binom{m}{2}\frac{m(m-2)}{4}+\frac{1}{4}\sum_{\{i,j\}\in\binom{A}{2}} r_{ij}^2.$$

当 Z 的各行彼此正交时，偶密度为

$$d_{2m}=\frac{(m-2)(5m-6)}{4(2m-1)(2m-3)}=\frac{5}{16}-\frac{24m-33}{16(2m-1)(2m-3)}. \tag{2}$$

证明。对于固定的一对行，在所有列对上的矩形乘积的带符号和为 $(r_{ij}^2-m)/2$。正矩形的数量等于矩形总数的一半加上该带符号和的一半。对所有行对求和并计算纯四元组的数量，即可证明这两个公式。□

对于 $m=2^j$，用 $\mathbb{F}_2^j$ 为行和列编号，并取 $Z_{ax}=(-1)^{a\cdot x}$。根据非平凡特征的求和，不同行彼此正交。若 $N=2m$ 是至少为 n的最小的此类二次幂，则限制到一个均匀的 n-子集会保留期望密度。因此 $m_n\le d_N$，其中$n\le N<2n$。公式 (2) 给出 $5/16-d_N=(3/4+o(1))/N$。这证明了定理 1.1 中有限亏损的下界。其上界由命题 5.2 得出。

3. The first-order constraints on a sharp bound

从公平的二部构造开始，独立地以概率 t反转每个纯 A三元组。将所得的偶概率记为 $d(t)$。只有两类四元组会对其变化产生贡献。A 中的四元组以概率 $(1+(1-2t)^4)/2$保持为偶。含有三个顶点位于 A、一个顶点位于 B 的四元组以概率 t变为偶。因此

$$d(t)-\tfrac{5}{16}=\tfrac{1}{16}\big(\tfrac{1+(1-2t)^4}{2}-1\big)+\tfrac{1}{4}t=\tfrac{3}{4}t^2-t^3+\tfrac{1}{2}t^4. \tag{3}$$

特别地，两个线性贡献相互抵消。

这种抵消决定了有限证书必须允许哪些等式。假设其逐点余项是八顶点模式 H 的一个固定非负函数 R，对任意极限分布取平均可得 $d-5/16\ge \mathbb{E}R(H)$。公平律中每个具有正概率的模式都必须满足 $R(H)=0$。现在固定一个特定的八顶点构造以及 A 中指定的三元组。其部分标签和交叉符号取预定值的概率是一个正常数。在这些选择的条件下，仅翻转指定三元组的概率为 $t(1-t)^{\binom{|A|}{3}-1}$。因此，对所得模式而言，正的余项将迫使式 (3) 中出现一个正的线性项。由于未扰动四元组分布的对称性，在 B 中进行翻转也会得到同样的结论。经过重新标记后，原始模式有 22 个，另有 50 个模式可通过一次同侧翻转得到。引理 4.1 中的精确枚举表明，我们的余项恰好在这一并集上为零。

4. The eight-vertex inequality

将 H 记为八个顶点上的一个无标号奇偶模式，并将 $e(H)$ 记为其中偶四元组的数量。如果 H 是在一个着色 G 中从均匀抽取的八元集所诱导的，那么 $\mathbb{E}[e(H)/70] = d(G)$。我们的下界来自如下分解

$$\frac{e(H)}{70} - \frac{5}{16} = \Phi(H) + R(H). \tag{4}$$

这两个加项具有不同的正性性质。余项 $R(H)$ 在每个八顶点模式上均非负。项 $\Phi(H)$ 是若干有根乘积的正组合，其中每个乘积在着色规模趋于无穷时的期望值均非负。

4.1. 有根乘积。 对于 $r \in \{0,2,4,6\}$，令 $k = (8-r)/2$。从 H 中均匀选取一个由 r 个不同顶点组成的有序组作为根。将其补集均匀划分为两个 k 集合 U，W。旗标是由根与两个集合之一所诱导的奇偶性模式，其中保留根的标签，而集合中的顶点不标记。将这些旗标记为 I，J。每一项指定一个带标签的根模式σ，以及一个以扩展 σ 的旗标为索引的对称矩阵 K。对于所有其他根模式，其值定义为零。令 $\kappa_0 = \kappa_2 = \kappa_4 = 1$ 和 $\kappa_6 = 6!$，其贡献在乘以有理权重之前为

$$T_{\sigma,K}(H) = \kappa_r \, \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\mathrm{root}=\sigma\}} K(I,J)\big]. \tag{5}$$

在这个八顶点模式中，期望取遍根和划分。K的对称性使 U、W 的顺序无关紧要。

对于一个普通平方，证书给出了定义在扩展旗标集合 $\mathcal{F}_\sigma$ 上的整数函数 $u\colon \mathcal{F}_\sigma \to \mathbb{Z}$，以及 $K(i,j) = u(i)u(j)$。其余矩阵由旗标子集上的无三角形图以及非负整数振幅 a_i确定。将该子集之外的部分设为 $a_i = 0$。对于邻接矩阵 A，其元素为 $K(i,j) = a_i a_j (1 - 2A_{ij})$。这是一个共正核，意味着$x^{\mathsf{T}} K x \geq 0$ 对于每个非负向量 x均成立。事实上，将振幅吸收到坐标中，并将所得向量 y 归一化为元素和为一。只需证明 $\sum_{\{i,j\}\in E(A)} y_i y_j \leq 1/4$，其中每条边计数一次。如果两个不相邻的顶点都承载权重，则当它们的总权重在两者之间分配时，边权和是仿射的。将它们的总权重移到其中一个端点不会使该和减小。反复进行这一操作后会留下一个团，而无三角形图中的团至多包含两个顶点。它们的乘积至多为 $1/4$。这就是 Motzkin–Straus定理的无三角形情形 [5]。

总和为 $\Phi(H) = \sum_\ell w_\ell T_{\sigma_\ell,\, K_\ell}(H)$，其中有 $w_\ell > 0$。表1列出了841项。最后一列给出了对指定的根排列和无序划分求和后所得的除数。在

r	k	普通平方	无三角形核	除数
0	4	1	0	35
2	3	4	0	560
4	2	116	12	5040
6	1	707	1	28

Table 1. 证书中的有根乘积及其归一化。

空根在偶四元组上函数值为 11，在奇四元组上为 -5。在双顶点根处，五元集合标记由省略任一根顶点后得到的四元组比特，以及省略一个外部顶点后得到的奇四元组数量记录而成。五元集合奇偶方程留下八种可能的记录。共有 28 个根对、两种排列和十种互补三元组划分。在四顶点根处，两种根奇偶性各有 288 个扩展旗标。共有 70 个根、24 种排列和三种补集中的顶点对划分。在六顶点根处，证书为 16 种根类型各确定一个带标记代表元。其单顶点扩展有十个自由比特。对于每个

相容的六元子集，我们将其通过所有同构映射到指定代表元所得到的乘积求和，然后除以 28 个可能的六元子集。这个关于根同构的求和计入了 (5) 中的 κ_6。

如果 G 有 n 个顶点，那么先对其八元集合取样，再取一个根和划分所得到的分布，也可以通过在 G 中取样根，然后在其外部取两个不相交的 k-集合得到。现在改为在根的外部独立均匀地取两个 k-集合。给定根，令 x_i 表示在一个扩展上出现旗标 i 的概率。对于普通项，条件乘积期望为 $(\sum_i u(i)x_i)^2$。对于一般项，它为 $x^{\mathsf{T}}Kx \geq 0$。两个独立集合相交的概率为$O(1/n)$，且核是固定且有界的。因此，关于不相交条件化会使期望改变 $O(1/n)$，并且关于 G一致。特别地，对于一个极限八顶点概率为 p_H的收敛序列，

$$\sum_{H} p_H T_{\sigma,K}(H) \geq 0 \qquad \text{for each term of } \Phi. \tag{6}$$

4.2. 逐点证书。令 $\mathcal{P}$ 为二部构造中出现的八顶点模式集合。令 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{P}$ 与以下模式的并集：从八个顶点的二部着色出发，将完全位于同一部分中的恰好一个三元组的颜色改变所得到的模式。这些集合在重新标记意义下定义。

引理 4.1 (有限证书)。对于 *certificate/proof.json* 中的有理数据，式 (4) 中的余项在 $\mathcal{T}$ 上消失，并且对每个 $H \notin \mathcal{T}$ 都满足 $R(H) \geq 10^{-5}$。共有 893,924 种八顶点奇偶类型，其中 $|\mathcal{P}| = 22$ 和 $|\mathcal{T}| = 72$。

有限引理的验证。一个八顶点模式由其 70 个奇性比特编码。它在每个 $\binom{8}{5} = 56$ 五元子集上都满足奇偶方程。固定一个顶点 0。$\binom{7}{3} = 35$ 比特$q(0ijk)$ 决定了其余比特，因为关于 $\{0, i, j, k, l\}$ 的方程将 $q(ijkl)$ 表示为另外四个比特之和。反过来，任意指定这 35 个比特，都可以通过将经过 0 的三元组比特设为零，并将 ijk 的颜色设为 $q(0ijk)$ 来实现。因此，带标记全集的大小为2^{35}。

证书为每个候选同构类提供一个奇偶字。要检查这份列表，首先测试每个字的 56 个奇偶方程。将其中的奇四元组视为边，并记d_v 和 d_{vw} 分别表示顶点度数和点对余度。为 v 赋予由 d_v 以及按序排列的 (d_w, d_{vw}) 对列表构成的签名，其中 $w \neq v$。按签名对顶点排序，并在签名相同的类内进行排列。对每种排列，记录经过其首个顶点的 35 位字，并取其中最小的字作为键。同构模式会得到相同的键。反过来，共同的键确定相同的带标号奇偶模式，因此可推出同构。达到最小值的排列数为 $|\mathrm{Aut}(H)|$，因为产生任意一个固定带标号模式的排列构成自同构群在自由作用下的一个轨道。检查器找到了 893,924 个不同的键，并验证

$$\sum_{H} \frac{8!}{|\operatorname{Aut}(H)|} = 2^{35}.$$

这既验证了穷尽性，也确认不存在重复项。

对于每个单词，(5) 中的扩展旗标由诱导奇偶模式读取。需要检查的算术运算是带符号整数点积，其系数为正有理系数，其中包括表中的除数。有向上界使得大多数比较都可以使用字长整数完成。对于整数条目 M、有理乘数 $a \geq 0$ 和缩放因子 D，有

$$DaM \leq \lfloor Da \rfloor M + \max(M, 0).$$

验证器对 $D\Phi(H)$ 的上端点求和，并将结果与 $\lfloor D(e(H)/70 - 5/16) \rfloor$ 进行比较。在此阶段得到严格不等式即可证明 $R(H) > 0$。第一种实现使用 $D = 2^{55}$，将未解决集合缩减为 72 个词。乘以公分母后，全部 72 种情况均得到精确等式。检查器还根据两部分规则独立推导出 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$

具体做法是改变部分大小和交叉符号，并针对每种着色翻转每个可能的同侧三元组。规范化将这 72 个零余项与这 22 个原始模式及 50 个新增模式精确对应起来。

第二种算术实现会重新解码各个核，检查无三角形性，并使用 $D = 2^{49}$。对于一个由 H 组成的六元集，构造一个图，其边是与奇四元组互补的点对。记 b_H 为这样的六元集所占的比例：在这些六元集上，该图由三个共用一条边的三角形和一个孤立顶点组成。第二种实现检查 $R(H) \ge \eta\,\mathbf{1}_{\{H \notin \mathcal{T}\}}(b_H + 1/20)$，其中 $\eta > 1/5000$ 是证书中严格非接触松弛量的有理数。这就得到了所断言的间隙。加强后的比较需要对 652 个奇偶字进行精确的有理数算术。各实现会在使用整数累加器之前界定其大小。有理因子列表和原始奇偶词足以完成这两项计算。$\square$

举一个归一化的小例子：假设一个八个顶点上的着色只有一个红色三元组。它的五个奇四元组都包含这个三元组。在 35 个互补四元组划分中，五个是奇偶划分，30 个是偶偶划分。因此，加权前的无根项为 $[30(11)^2 + 5(11)(-5)]/35 = 671/7$。通过将全部八个顶点放在同一部分，并翻转指定的三元组，这种模式属于 $\mathcal{T}$。因此，这种模式上的加权乘积总和为 $65/70 - 5/16 = 69/112$。在全偶模式上，相应的值为 $11/16$。

对（4）取平均并应用（6），可得对于每个极限着色律，

$$d - \frac{5}{16} \;\ge \sum_{H} p_H R(H) \;\ge\; 10^{-5} \sum_{H \notin \mathcal{T}} p_H. \tag{7}$$

取等号时，极限分布支撑于 $\mathcal{T}$ 上，并且每个具有正系数的单独有根乘积的极限期望均为零。

5. The finite-order estimate

该证书在根的两个不相交扩展上计算一个乘积。当这些扩展独立采样时，条件正性成立。为了量化普通平方的差异，保留其定义函数的方差是有益的。

引理 5.1。设 $N \ge 2k \ge 2$。令 X 为 $[N]$ 的一个均匀 k-子集，并且给定 X，令 Y 为 $[N] \setminus X$ 的一个均匀 k-子集。对于每个 $f : \binom{[N]}{k} \to \mathbb{R}$，

$$\mathbb{E}[f(X) f(Y)] \;\ge\; (\mathbb{E} f(X))^2 - \frac{k}{N-k}\,\mathrm{Var}(f(X)).$$

证明。在均匀内积下，算子 D：由 $\mathbb{R}^{\binom{[N]}{k}}$ 到 $\mathbb{R}^{\binom{[N]}{k}}$，定义为 $(Df)(X) = \mathbb{E}[f(Y) \mid X]$，是自伴的。对于 $J \subseteq [N]$，置 $f_J(X) = \mathbf{1}_{J \subseteq X}$，并令 U_j 为满足 $|J| \le j$ 的函数 f_J 的张成空间。如果 $|J| = j \le k$，则

$$D f_J(X) = \frac{(k)_j}{(N-k)_j} \mathbf{1}_{X \cap J = \varnothing} = \frac{(k)_j}{(N-k)_j} \sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} f_I(X),$$

其中 $(s)_j = s(s-1)\cdots(s-j+1)$。因此，$D$ 保留 U_j，并在 U_j / U_{j-1} 上以标量 $(-1)^j (k)_j/(N-k)_j$ 作用。由自伴性可知，它在 $U_j \cap U_{j-1}^{\perp}$ 上的作用相同。常数对应的特征值为一，而 U_k 是全空间。对于 $j \ge 1$，所显示比值的绝对值至多为 $k/(N-k)$，因为 $N \ge 2k$。将此界应用于 f 的中心化部分。$\square$

对于来自无三角形图的核 K，记 $a_i \ge 0$ 为扩展状态 i 处的振幅。其对角元为 a_i^2，且 $|K(i,\ j)| \le (a_i^2 + a_j^2)/2$。给定一个根，首先在 k-集合之外取两个相互独立且均匀的对象。它们的期望核值非负。在给定重叠的条件下，任一外部集合仍然是边际均匀的。因此，不相交对上的期望核

大于等于负的平均对角元乘以重叠概率与不相交概率之比。对于 $k=1$，该比值为 $1/(N-1)$。对于 $k=2$，它是

$$\frac{\binom{N}{2}-\binom{N-2}{2}}{\binom{N-2}{2}}=\frac{4N-6}{(N-2)(N-3)}\le\frac{5}{N-3}\qquad(N\ge4).$$

命题 5.2. 对于每个在 $n\ge8$ 个顶点上的有限染色 G，$d(G)\ge5/16-L_n$，其中

$$L_n=\frac{0.216198}{n-4}+\frac{1.662165}{n-5}+\frac{2.708593}{n-6}+\frac{1.175666}{n-7}.$$

证明。对于根大小为 $r\in\{0,2,4,6\}$ 的项，外部顶点的数量为 $N=n-r$，扩展大小为 $k=(8-r)/2$。对于表 2 中的每组项，在一个 $(r+k)$-顶点旗标上对其加权对角元求和。在固定的 $(r+k)$-顶点模式内，对根及其排列取平均，并使用证书的归一化。对于大小为 0、2、4 的普通项，这些模式上的最大值记为 M_r；对于大小为 4 的无三角形项，记为 $M_{4,\,c}$；对于大小为 6 的所有项，记为 M_6。对于 M_0，只需使用未加根对比项的系数乘以 121 即可。所有这些最大值都界定了每个有限染色中相应的平均对角元。

误差来源	分母	分子有理上界
无根平方项	$n-4$	$4M_0\le216198/10^6$
双根平方项	$n-5$	$3M_2\le1662165/10^6$
四根普通平方项	$n-6$	$2M_4\le2708593/10^6$
六根项和四根核	$n-7$	$M_6+5M_{4,\,c}\le1175666/10^6$

TABLE 2. 有限阶估计中的对角和。每个上界均由精确有理数计算向上取整得到。

对于双根项，计算取五元集的 20 个有序对的平均值。其四元组比特的权重为 0、2 或 4。对于四根项，只需检查 16 种六顶点类型。对于六根项，验证器枚举 2^{20} 个可能的带标签的七顶点奇偶字，并对外部顶点的七种选择取平均值。精确有理数和随证书一并提供。引理 5.1 给出了表中的前三个误差以及普通六根平方项的误差。上面的重叠比给出了其他误差。因此，在均匀抽取的八元集上，$\mathbb{E}\Phi(H)\ge-L_n\ H$。对逐点证书取平均即可证明该命题。□

6. The law at equality

我们首先确定八个顶点上极值分布的支撑。随后，一个全偶五元集将使我们能够根据四元组奇偶性恢复较大样本上的局部二分划分。

6.1. 移除五十种额外类型。在等号成立时，证书将极限八顶点法则置于 $\mathcal{T}$ 上。为了将其限制到 $\mathcal{P}$，我们在一个六元集上再使用一个指示函数，并区分其中的四个顶点。在该六元集上构造如下图：当两个顶点的补四元组为奇时，就将它们相连。指示函数 F 恰好在其度多重集与四个根顶点的度出现在下表同一行时取值为 1。根顶点的度是在完整的六顶点图中测得的。

六个顶点度数	四个根度数	15 个根中的可容许根
$0,0,0,2,2,2$	$0,0,2,2$	9
$0,2,2,2,4,4$	$0,2,2,4$	6
$2,2,2,4,4,4$	$2,2,2,4$ 或 $2,2,4,4$	12

三行分别描述了一个带有三个孤立点的三角形、一个带有一个孤立点的三页书图，以及一个在三个交替顶点上带有三角形的六圈。对于最后一种情况，三个四度顶点所诱导的子图必须比另外三个顶点所诱导的子图多三条边。因此，前者是一个三角形，后者构成一个独立集，而它们之间的边组成一个六圈。

根选择反映了单次纯翻转如何生成这些图中的一个。在翻转之前，按较小部分的大小 0，1，2，3 编号的可能边数分别为 0、10、8，11，12，以及 6，10，12。因此，图中显示的三个图都需要在六元集内进行一次翻转。如果六个顶点中有三个位于被翻转三元组的一侧，那么它们恰好就是该三元组。翻转后，它们张成一个三角形，另外三个顶点彼此独立，而交叉边的行和与列和均为偶数。交叉图可能为空、为一个四圈，或为一个六圈。在这三种情况下，被翻转的三元组分别由三角形、两个书中心点和一个叶节点，或三个四度顶点组成。当翻转一侧有四个顶点时，起初有八条交叉边。翻转会移除其中两条，并在另一侧增加一条边。根据每一行中两条交叉符号乘积所给出的割，四个顶点之间的附加边数为 0、3 或 4（补集中的顶点对标示该边）。在所显示的三个图中，只有书可能出现，而翻转的正是它的三个叶节点。当翻转一侧有五个顶点时，结果有十一条边。当该侧有六个顶点时，结果是一个三角形，而翻转由其中三个孤立点组成。现在检查该表可以看出，所有可容许的根都不包含可能被翻转的三元组。因此，不可能通过一次翻转生成两个有标记的副本，使它们的交集恰好是它们的公共根。

对于一种八元类型 H，令 $s(H)$表示在选择一个四元根和第一个外部点对的 $70 \cdot 6 = 420$ 种方式中满足 $F = 1$ 的比例。令 $t(H)$表示在选择一个根并将其补集划分为点对的 $70 \cdot 3 = 210$ 种方式中两个点对都给出 $F = 1$的比例。

引理 6.1。 在任意极限奇偶律中，令 $\varepsilon = \sum_{H \notin \mathcal{T}} p_H$。则

$$\sum_{H \notin \mathcal{P}} p_H \leq \varepsilon + 70\sqrt{\varepsilon}.$$

特别地，等式定律中的每个八顶点样本几乎必然属于 $\mathcal{P}$ 。

证明。 对于这个指示函数，直接枚举得到

H	$s(H)$	$t(H)$
$H \in \mathcal{P}$	0	0
$H \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{P}$	$\geq 6/420$	$0.$

计算只使用 $\mathcal{T}$的72个词。对其中每个六元子集，将15个四元组比特视为互补边，计算六个度，并在表中标记根。对每个四元根数出被标记的点对，然后检查其补集的三个划分。被标记的根–点对选择中最小的正数是六。 $72 \cdot 210 = 15{,}120$个划分中没有一个的两个点对都被标记。22个没有标记的词恰好是二部分词；直接尝试每个二部划分，并固定其交叉矩阵的一行和一列中的符号即可验证这一点。

在有限染色中，令 $m(R)$ 表示均匀四元根R下被标记的外部点对所占的比例。那么，对于均匀八元集 H， $\mathbb{E}_R m(R) = \mathbb{E} s(H)$。对于两个相互独立的外部点对，两个点对都被标记的概率为 $\mathbb{E}_R m(R)^2$。要求这两个点对互不相交，最多会使该概率改变

$$1 - \binom{n-6}{2} \Big/ \binom{n-4}{2}.$$

因此，根据詹森不等式，极限中有 $(\mathbb{E} s(H))^2 \leq \mathbb{E} t(H)$。有限计算得出 $\mathbb{E} t(H) \leq \varepsilon$，且 $\Pr[H \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{P}] \leq 70 \mathbb{E} s(H)$。两者共同证明了该界。在取等号时，根据 (7)， $\varepsilon = 0$ 。□

有限二部表示由一个划分 $A \cup B$ 和符号 Z_{ab}、 $a \in A$、 $b \in B$组成。纯四元组是偶数，按三比一拆分的四元组是奇数，而在 i、 $j \in A$、 x、 $y \in B$ 上，有 $(-1)^{q(ijxy)} = Z_{ix}Z_{iy}Z_{jx}Z_{jy}$。允许出现空部分。在公平构造中，八个顶点上的每一种此类表示出现的概率都大于零。因此， $\mathcal{P}$ 恰好是其八顶点支撑。

6.2. **恢复各部分及其交叉符号**。

引理 6.2. 如果一个充分大的有限奇偶模式中的每个八元集合的类型都是 $\mathcal{P}$，那么整个模式具有一个二部表示。

证明。 有限拉姆齐定理 [7], 应用于四元组的两种颜色，给出一个五元集P，使其上所有四元组比特都相同。五元集奇偶恒等式迫使这个公共比特为零。我们只需使用这个全偶五元集的存在性。

在每个包含 P 的表示中，其顶点都位于同一侧，因为任何同时与两部分相交的五元集都包含一个三比一分割的四元组。将 P 所在的一侧称为 A 侧。对于 $v \notin P$，根据将 q扩展为八元集合并利用其表示可知，三元组 i、 j、 $k \in P$的奇偶性 $q(ijkv)$ 都相同。令 $v \in A$ 表示这个公共比特为零，$v \in B$ 表示其他情况。在任何包含 P 的表示中，该规则都能恢复该表示中其他每个顶点所属的侧。

我们首先检查全偶规则和三对一规则。包含 P 的四元组可以在一个包含 P 和该四元组的表示中进行检查。对于一个与 P 不相交且包含某个 $v \in A$ 的四元组 S，取 P 中的四个顶点以及 S。在这个八元集合的表示中，所选的四个顶点与 v 构成一个全偶五元集，因此它们位于同一侧。刚刚确立的三锚点检验将 S 中的每个其他顶点都置于其规定的一侧。这就解决了所有此类四元组。若 $S \subseteq B$，则加入 P 中的一个顶点。包含它的四个四元组根据前面的检验都是奇的，因此第五个四元组 S 是偶的。

接下来需要为所有二对二四元组恢复一个统一的交叉矩阵。在 $\mathbb{F}_2$ 中进行。对于互不相同的 $i, j, k \in A$ 和 $x, y \in B$，五集恒等式给出

$$q(ijxy) + q(jkxy) + q(kixy) = 0,$$

因为另外两个四元组是奇的。交换两部分后，同一个恒等式仍然成立。如果两部分都非空，则固定 $a_0 \in A$ 和 $b_0 \in B$。令 $z_{a_0x} = z_{ib_0} = 0$ 和 $z_{ix} = q$（a_0ib_0x）表示其余的项。先在 A 对中、再在 B 对中应用这两个恒等式，可得

$$q(ijxy) = z_{ix} + z_{iy} + z_{jx} + z_{jy}.$$

以锚点为端点的方程，直接由另一对中的相同恒等式得到。符号 $Z_{ix} = (-1)^{z_{ix}}$ 给出了该表示。若某一部分为空，则纯规则便足够了。□

定理 *1.2* 的证明。 抽取一个子序列，使得在每个有限阶数下，带标签样本分布都收敛，并将 Q_k 记作极限 k顶点分布中的随机模式。这些分布在均匀限制下保持一致。根据引理 6.1 和并集界，Q_k 的每个八元素子集几乎必然具有 $\mathcal{P}$ 中的类型。对于所有充分大的 k，根据引理 6.2 选择一个二部表示。

令 α， β 为部分比例，令 $h = \alpha - \beta$，并令

$$t = \mathbb{E}_{a,a' \in A}\Big(\mathbb{E}_{b \in B} Z_{ab}Z_{a'b}\Big)^2$$

采用独立均匀选择，若某个部分为空则取 $t = 0$。这个非负量是有放回抽样顶点时的平均带符号矩形。有放回抽取四个顶点时，发生碰撞的概率至多为 $6/k$。因此，按部分大小计数可得，

对所选表示一致地成立，

$$\begin{aligned} d(Q_k) &= \alpha^4 + \beta^4 + 3\alpha^2\beta^2(1+t) + O(k^{-1}) \\ &= \frac{5}{16} + \frac{6h^2 + 5h^4}{16} + 3\alpha^2\beta^2 t + O(k^{-1}). \end{aligned}$$

一致性给出 $\mathbb{E} d(Q_k) = 5/16$。因此 $h \to 0$ 依概率成立。在事件 $|h| < 1/2$上， t 的系数有正的下界，因此同一恒等式给出 $t \to 0$ 依概率成立。

为了解这对交叉符号意味着什么，令 $f\colon A \to [-1,1]$，并令 $g\colon B \to [-1,1]$。两次应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$|\mathbb{E}_{a,b} f(a) Z_{ab} g(b)| \le t^{1/4}.$$

对于任意固定的非空简单二部边集，在各自的指定部分内独立抽取其顶点，并取相应交叉符号的乘积。固定除某条选定边的两个端点之外的所有顶点。所有涉及这两个端点的其他因子都分别分解为关于各自端点的函数，因此同样的 $t^{1/4}$ 可以界定该乘积绝对均值的上界。于是，每个非常数符号矩都趋于零。将特定符号赋值的指示函数展开为这些符号矩，表明抽取的交叉符号联合趋于独立公平符号。改为无放回抽样时，对于从全部k 个顶点中抽取 r个顶点，代价至多为 $\binom{r}{2}/k$ 。其部分标签同样趋于独立公平标签，因为 $h \to 0$。

根据一致性，这确定了 Q_r 本身的分布。此论证适用于每一个子序列极限，并证明了所声称的收敛。□

独立确定八顶点概率。也可以直接对 $\mathcal{T}$进行等式计算。对于一个扩展函数为 u的普通四根平方，令 $m_u(R)$表示其在一个外部点对上的条件均值；若根属于错误类型，则取 $u = 0$ 。在等号成立时，该平方的期望趋于零，因此 $\mathbb{E}_R m_u(R)^2 \to 0$。于是，乘以任意兼容扩展旗标 j 的条件概率，便得到一个趋于零的混合矩。其在 H处的系数乘以 8! 后，等于：对 H的所有顶点排列，将首次扩展上的 u 与第二次扩展上的 j 指示函数相乘后求和。前四个位置指定有序根，最后四个位置指定两个点对。

补充计算从五个权重为正的平方中选取了 70 行。另有两行记录总质量和密度，其条目分别为 1 和 $16e(H) - 350$。按给定顺序排列后，它们构成的 72×72 整数矩阵的行列式模 1000003 为 757006。因此，仅凭八阶概率便已唯一确定。作为比较，公平模型通过对大小为 a、 b的兼容有序划分求和，得到一个有标记词的概率。若某个划分满足 a、 $b > 0$ ，则其贡献为$2^{-8-(a-1)(b-1)}$，因为固定第一行和第一列后，剩下 $(a-1)(b-1)$ 个独立的矩形比特。若该词全为偶数且其中一部分为空，则该部分贡献 2^{-8} 。乘以有标记轨道的大小即可得到无标记概率。这些概率的公分母为 65536，并且严格满足该整数方程组。

7. The first finite-size correction

表 2 中的四个界适用于每一种着色。对于极小着色，我们还知道导致抽样误差的旗标的极限分布。这为 $1/n$ 的系数给出了窄得多的区间。设 $c = 5/16$。

命题7.1。 最小偶四元组密度满足

$$\frac{3}{4} \;\le\; \liminf_{n\to\infty} n(c - m_n) \;\le\; \limsup_{n\to\infty} n(c - m_n) \;\le\; 0.752723.$$

证明。 对于第一个不等式，取一个阶为 M 的阿达玛矩阵作为构造中的交叉符号矩阵，其中两部分的大小均为 M。对正交行的成对组合计数矩形可得

$$c - d(G_{2M}) = \frac{3(8M-11)}{16(2M-1)(2M-3)} = \frac{3/4 + o(1)}{2M}.$$

存在满足 $2M/n \to 1$ 的 Hadamard 阶数 $M \ge n/2$。下面给出一个初等验证。阶数 2 的情形显然成立。对于阶数 12，使用 Paley 构造 [6]。令 $Q_{xy} = \chi(y-x)$ 表示 x、$y \in \mathbb{F}_{11}$，其中 $\chi\colon \mathbb{F}_{11} \to \{-1,0,1\}$ 为二次特征，且 $\chi(0) = 0$。于是 $Q + Q^{\mathsf T} = 0$、$Q\mathbf{1} = 0$ 以及 $QQ^{\mathsf T} = 11I - J$。对于不同的 x、y，最后一个恒等式使用从 $\mathbb{F}_{11}\setminus\{y\}$ 到 $\mathbb{F}_{11}\setminus\{1\}$ 的代换 $t \mapsto (t-x)/(t-y)$。在 $Q - I$ 左侧添加一行全为 1 的首行和一列全为 1 的首列，即得到所需矩阵。张量积给出所有形如 $2^a 12^b$ 的阶数，其中 a、b 为非负数。由于 $\log_2 12$ 是无理数，对于每个 $\varepsilon > 0$，有限多个 $b\log_2 12$ 模 1 后都会与长度为 ε 的每个区间相交。因此，对于所有充分大的 x，存在 a、$b \ge 0$ 满足 $x \le a + b\log_2 12 \le x + \varepsilon$。将其应用于 $x = \log_2(n/2)$，并通过均匀删除使用 $m_n \le d(G_{2M})$。

对于上界，在每个 n处取一个极小着色。考虑 Φ 中的一项，其根大小为 r，扩展大小为 $k = (8-r)/2$。将其权重、根指示函数和因子 κ_r 计入所求平均值。按照证书中的方式对根进行抽样，并独立选取其两个外部 k-集。令 A_j 表示在交集大小为 j的条件下核值的均值，令 p_j 表示该交集的概率。证书抽样该项所得的期望为 A_0，而$\sum_j p_j A_j \ge 0$ 则由条件正性得出。所有 A_j 都可由与 n无关的常数统一界定。对于 $N = n - r$，

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{k\binom{N-k}{k-1}}{\binom{N-k}{k}} = \frac{k^2}{n-7}, \qquad \sum_{j\ge 2} \frac{p_j}{p_0} = O(n^{-2}).$$

因此，$A_0 \ge -k^2 A_1/(n-7) - O(n^{-2})$。这个估计保留了单个重叠处的值，包括其符号。

单个重叠恰好使用七个顶点。根据定理 1.2，在这些极小着色下，其极限期望等于 A_1^{*} 在平衡模型中的相应期望。将最后一个不等式对 841 项求和，并使用 $R(H) \ge 0$。于是得到

$$\limsup_{n\to\infty} n(c - m_n) \le C_{*}, \qquad C_{*} := \sum_{\text{terms}} k^2 A_1^{*}.$$

为精确起见，以下展示的数值是四个小计的有理上界，通过按指定精度向上取整得到。

r	0	2	4	6
upper bound	0	0.093837982414	0.442961486423	0.215923418603

要计算 C_{*}，对已知概率的 22 种八顶点模式分别取其 8! 种排列的平均值，并忽略最后一个顶点。取前 r 个顶点作为根，接下来的顶点作为共同的外部顶点，再用两组连续且互不相交的 $k-1$ 个剩余顶点完成扩展。使用与证书中相同的权重和归一化。因此，这些数值只需统计七个带标号顶点上原始旗标对的整数计数。精确计算过程由 collision limit checker.py 重现。另一项独立计算枚举了七个顶点上的全部 128 种带标号二分划分，在固定一行和一列后对允许的交叉矩阵求和，并得到相同的四个有理数。展示的上界之和小于 0。752723。 □

8. A quadratic bound in the six-vertex book density

在六元集 S 上构造图 $D(S)$，其中当且仅当 $q(S\setminus\{x,y\}) = 1$ 时，xy 是一条边。令 B 表示由共享一条边的三个三角形和一个孤立顶点组成的图。

其中度为四的两个顶点称为中心点，度为二的三个顶点称为叶节点。将具有 $D(S)\cong B$ 的六元子集 S 的极限密度记为 b。

命题 8.1. 对于每一对偶四元组密度和书图密度的极限对(d,b)，

$$d \;\ge\; \frac{5}{16}+\frac{144117}{1074218750}\,b^{2}.$$

证明。取定一个四元子集 $R\subset S$。若 $D(S)$ 是一个书图，且 R 由其孤立顶点、一个中心和两个叶节点组成，则称 (R,S) 为有根书图。15 个这样的根中有 $2\binom{3}{2}=6$ 个。每个这样的根都是奇数，因为 $D(S)$ 中补集中的顶点对由一个中心和一个叶节点组成。

在一个八元类型 H 上，令 $e_F(H)$ 表示满足以下条件的选择所占的比例：从 $70\cdot 3$ 种四元子集 R 和将其补集无序划分为数对的方式 P,Q 中，$(R,R\cup P)$ 与 $(R,R\cup Q)$ 均为有根书图。补充整数检验证明

$$R(H)\;\ge\;\lambda e_F(H),\qquad \lambda=\frac{144117}{250000000}.$$

这里的 $R(H)$ 是引理 4.1 中的余项。该检验利用六顶点四元组比特构造指示函数，并统计每种八元类型中成功的划分数。恰有 135,740 种类型的计数为正。在这些类型上，余项的定向整数下界足以推出所示比较。对于所有其余类型，结论由 $R(H)\ge 0$ 得出。

在 n 个顶点上的一种着色中，给定一个均匀四元根 R，并令 p_R 表示一个均匀外部点对补全为有根书图的概率。若有限密度为 d_n 和 b_n，则$\mathbb{E}p_R=2b_n/5$ 和 p_R 在偶根上趋于零。因此

$$(2b_n/5)^2\le(1-d_n)\,\mathbb{E}p_R^2.$$

两个相互独立的外部点对以概率 $O(1/n)$发生重叠，该概率在 R 中是一致的。由此可得$\mathbb{E}e_F(H)$ $=\mathbb{E}p_R^2+O(1/n)$。由于 $\mathbb{E}\Phi(H)\ge -L_n$，取具有 $d<1$ 的极限分布可得

$$d-\tfrac{5}{16}\ge\lambda\,\frac{4b^2}{25(1-d)}\ge\frac{64\lambda}{275}\,b^2.$$

最后一步使用了 $d\ge 5/16$。当 $d=1$ 时，前述柯西–施瓦茨不等式在取极限时给出 $b=0$。□

推论 8.2。命题 *8.1* 中的二次幂是最优的。对于每个 $0<p<2$ 以及每个$C>0$，都存在一个具有 $b>0$ 和 $d-5/16<Cb^{p}$ 的极限分布。

证明。使用第 3 节中的扰动。在一个固定的六元集上，考虑三个顶点分别落在每一部分中的事件，并按原始标签对每一部分中的顶点排序。指定一个只有 $Z_{a_1b_1}$ 为负项的交叉矩阵。该事件的条件概率为 2^{-9}。唯一的 A 三元组以概率 t 翻转。在补图中，三个 A 对是边，三个 B 对失去其边，而 a_ib_j 是一条边当且仅当 $i,\ j\in\{2,3\}$。这就是图 1 中的书。因此$b(t)\ge\binom{6}{3}2^{-6}2^{-9}t$。由于由 (3) 可得 $d(t)-5/16=O(t^2)$，比值 $(d(t)-5/16)/b(t)^p$趋于零。□

9. Verification and further questions

电子补充材料包含有理系数、表示八顶点类型的奇偶字、源代码，以及用于重复有限计算的入口点。从提取出的档案中运行

```
python3 verify_all.py
```

在小端序 x86-64 Linux 系统上，使用 Python 3.11 或更高版本、NumPy，以及可通过 c++ 调用的 C++17 编译器。无需优化求解器。引理 4.1 描述了轨道检验和算术比较。这些检查可验证所提供的系数，无论这些系数是如何得到的。其余程序用于检查根化六顶点指示函数、书不等式、

	b_1	b_2	b_3
a_1	$-$	$+$	$+$
a_2	$+$	$+$	$+$
a_3	$+$	$+$	$+$

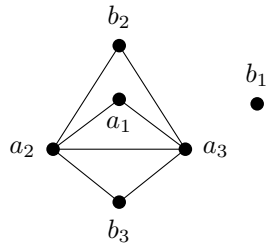

FIGURE 1. 对 $a_1a_2a_3$ 进行一次翻转，就会得到右侧的补图。其公共边为 a_2a_3 ，而 b_1 是孤立点。

有限阶常数和第一个有限修正项。补充的九顶点普查检查了 22 种类型的每一种单顶点扩展，并在每个可容许的扩展中找到了一个全偶五元集。因此，引理 6.2 的锚定证明对九个或更多顶点的情况已经适用。其中的拉姆齐论证足以证明定理 1.2。有理数见证证书 certificate/proof.json 的 SHA-256摘要为

5e6b2f8e662abbc6b22ee9202efe5860c2f98879d831586a77761b95c63e237a.

命题7.1中的界为有限修正项留下了一个很短的区间。 $m_n = 5/16\ {-}3/(4n) + o(1/n)$吗？正交符号矩阵渐近地达到所提出的修正项，而极限问题中的等号确定了每个固定样本分布。问题在于，从抽取不相交扩展所造成的损失，是否能在一阶上由这些矩阵中所观察到的损失加以界定。对于不受限制的覆盖，即使是首项系数，也必须在没有五元集奇偶恒等式的情况下得到确立。

ACKNOWLEDGMENTS

作者感谢OpenAI提供用于开发和验证计算证书以及准备本稿件的人工智能工具。

REFERENCES

[1] D. de Caen、D. L. Kreher 和 J. Wiseman，关于 Tur´án 数 $T(n,\ 2r+1,\ 2r)$ 的构造性上界，*Congr. Numer.* **65** (1988)，277–280。[2] G. R. Giraud，关于两个极值问题的评述， *Discrete Math.* **84** (1990)，319–321。[3] G. Kalai，组合几何中的一些新旧问题 I：围绕博尔苏克问题，载于 *Surveys in Combinatorics 2015* ，伦敦数学学会讲义丛书**424**，2015，147–174，剑桥大学出版社，剑桥。[4] B. D. McKay 和 S. P. Radziszowski，超图的第一个经典拉姆齐数已被计算，载于*Proceedings of the Second Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms*，工业与应用数学学会，费城，1991，304–308。[5] T. S. Motzkin 和 E. G. Straus，图的极大值及 Tur´án 定理的新证明， *Canad. J. Math.* **17** 1965 533 540 （），–。[6] R. E. A. C. Paley，关于正交矩阵， *J. Math. Phys.* **12** (1933)，311–320。[7] F. P. Ramsey，关于形式逻辑中的一个问题， *Proc. London Math. Soc.* (2) **30** (1930)，264–286。[8] A. A. Razborov，旗代数， *J. Symbolic Logic* **72** (2007)，1239–1282。[9] A. Sidorenko，关于完全4图的 Tur´án 数， *Discrete Math.* **344** (2021)，第11期，112544。

COMPUTER SCIENCE, CARNEGIE MELLON UNIVERSITY