arXiv:2611.32834v1 [math.GN] 24 Nov 2026

通过名称格研究拓扑

MARTˊIN TORRES-VALVERDE

摘要。合成拓扑学涵盖了 Hausdorff 对拓扑空间的经典定义的多种替代方案。特别是，抽象 Stone 对偶性（ASD）直接从逻辑出发发展局部紧空间理论。本研究介绍了一种半形式化的合成拓扑学理论，采用直觉主义模态逻辑 iS4 的一阶版本，其灵感来自对特化序的唯名论式动态诠释。它与 ASD 有着显著的相似之处，包括对开闭对偶性的构造性诠释、直线的可显性、单位区间的紧致性，以及定义闭子空间和开子空间的核。

1. 引言

几十年来，人们早已知道，点集拓扑只是众多拓扑研究方法之一，其他方法还包括 locale 理论的各种变体 [8], 形式拓扑 [11], 合成拓扑学 [4], 等等。本文尤其关注抽象 Stone 对偶性（ASD），这是一种 [1, 14], 在某些方面表现得类似于经典系统（即开闭对偶性），同时又保留了计算能力的系统。ASD 能够很好地对（可计算基）局部紧空间的范畴建模。然而，ASD 的逻辑有意设计得较弱，因为显而易见，强逻辑会丧失其强构造性诠释。这使得在 ASD 中进行非正式推理变得困难。

本文提出了一种富有表现力的半形式化一阶理论，称为 TN，[1] 它与 ASD 密切相关，希望借此更容易在独立于集合论的情况下对拓扑学进行非正式推理。TN 的基础源于计算机语言语义学领域的一个著名思想：特化序 [12, 9]。虽然特化序可以定义在任意拓扑空间中，但对于经典 Hausdorff 空间而言，它是离散的，这也解释了为什么它在分析学等领域一直没有得到广泛应用。

特化序也可以被视为名称之间的序关系。例如，“一个行星”这一名称比“地球”这一名称更一般；或者等价地说，“地球”这一名称比“一个行星”这一名称更具体。我们可以看到，更一般的名称是指代更多对象的名称。TN 中的每个变量都代表一个名称，而名称之间的特化序是最基本的原语。然而，一个名称所指代的对象可能会随时间发生变化。这是 TN 中一个重要的事实：一个

常量是一个名称，一旦绑定，就始终指向同一个对象；而滤子 是一个已绑定的名称，指向越来越具体的对象。重要的是，每个时刻只有有限多个

2020 数学主题分类。 主要分类号 54A05、03B45、03F65、00A30、06D50。关键词和短语。 拓扑学、模态逻辑、iS4、基础、局部紧空间、抽象 Stone 对偶性、特化序。研究部分由 Conselleria de Educaci´o、Cultura、Universitats i Ocupaci´o-Generalitat Valenciana 资助的项目 CIACIF/2026/88，以及海梅一世大学博士前项目 PREDOC/2025/80 资助。[1]TN 是拓扑模态唯名论的缩写，该名称源于其另一灵感来源：模态唯名论of[20]。

常元，即使从某种意义上说变量可能有无限多个，其中也只有有限多个被绑定。本文的第一部分旨在将唯名论哲学调整为 [20] 适合我们的目的。

我们需要的另一个要素是空间。空间是可变但有限的对象集。一个空间何时比另一个空间更具体？对此有几种合理的回答。当更具体的空间是更大的空间时（也就是说，特化序与包含序相反），由此得到的滤子称为开空间。默认情况下，对象不属于开空间。另一方面，当更具体的空间是更小的空间时（也就是说，特化序与包含序相同），由此得到的滤子称为闭空间。默认情况下，对象属于闭空间。因此，开空间与闭空间互为补集。

变量的特化序并非时间的线性序，而是在更一般的预序（$W \leq$）上演变；这个预序被称为可能世界之间的可及关系。我们还有一种“成立”关系（通常称为满足关系）$w \Vdash \phi$，定义在世界$w \in W$与句子 ϕ之间，使得$w \Vdash \phi$当且仅当 ϕ在w处成立。引入两个模态很方便：‘$\Box$’表示必然，‘$\Diamond$’表示可能，并规定$w \Vdash \Box\phi$当且仅当，对于所有$v \geq w$，$w \Vdash \phi$，而 $\Diamond\phi$当且仅当存在$v \geq w$使得$v \Vdash \phi$.TN 的模态遵循 iS4 的规则。iS4 是一种直觉主义模态逻辑，已被指出能够准确地建模拓扑问题： [3] 表明，iS4 是“拓扑空间的逻辑，其满足关系相对于特化序具有持久性”。

预计能在 TN 中得到良好建模的空间是局部紧空间，因为它们与 ASD 有相似之处。事实上，TN 中的每个基本开集都可以对偶地视为一个部分，它具有经典拓扑学中紧子空间的某些性质。目前，TN 对局部紧空间进行建模的具体含义尚未明确，因为该理论还没有被转化为一个具有最小公理集的形式系统。从形式角度看，其中一个障碍是向 iS4 添加一阶量词，而这里采用的是非形式化处理。

大纲

- 第 2 节专门回顾 [20]中阐述的哲学。文中展示了，当认真对待唯名论和建构主义哲学时，iS4 的模态、特化序和判断如何自然地产生。
- 第3 节进一步阐述特化序。
- 第 4 节介绍 TN 所使用的逻辑 iS4 的一阶版本。
- 第 5 节介绍不同种类的变量。
- 第 6 节介绍不同类型的空间。
- 第7 节介绍格和拓扑空间。
- 第 8 节阐述 TN 中的函数理论。
- 第9 节探讨 TN 与 ASD 的关系。
- 第10节定义有理数。
- 第 11 节构造实数直线，并将有理数加法扩展到实数。
- 第12 节介绍归纳法和序数，尝试公理化有限性。
- 第 13 节简要展示了如何在 TN 中发展局部紧数学。

2. 唯名论

数、集合或函数等抽象对象的本质是什么？这个问题数百年来一直引发争论，毫无疑问，争论还将继续。本文不考察两种主要的竞争性哲学（柏拉图主义、唯名论）及其诸多变体，而只聚焦于唯名论。唯名论认为，抽象对象并无独立存在；有时，人们并不认真看待它，认为它无法作为一种哲学成功地解释数学实践。

最近，Weaver 的书 [20, 第二部分] 已经证明，可数主义唯名论基础足以发展数学的大部分内容，同时排除某些可能（或许有争议地）被视为集合论病态现象的事物，例如自然数的斯通-切赫紧化或某些不可分巴拿赫空间的对偶。虽然集合论的较弱替代理论并不新鲜，[20, 第一部分] 基于真理建构主义哲学，对经典悖论进行了新颖的处理。然而，由此产生的理论建构性可数主义为恢复主流数学的大部分内容而作出了妥协。在此，我们希望通过揭示新的方法来描述更弱但仍具表达力的基础，其中隐藏的模态和特化序存在于 [20, 第一部分]之中。

2.1. 部分论总和。首先，[20, 第 2] 章回答了这个问题：什么是集合？Weaver 以具体对象（宏观且界限分明的物理对象）为基本对象，首先将集合与部分论总和区分开来：

> 让我们先注意到，识别新的具体对象的一种基本方式，是将其视为先前已有的具体对象的合并体。哲学上对此类事物的术语是“部分论总和”。例如，一副纸牌是各张纸牌的部分论总和，而每张纸牌又是构成它的原子的部分论总和。 [20,第 20]

让我们为部分论总和确定一些记号。给定一个名称 x 和一个名称 y，，且二者各自代表一个物理对象，我们可以构造一个名称 $x \sqcup y$（读作“x 并 y”），用来指称 x 和 y的部分论总和。例如，如果 $x =$ 是“左脑半球”，而$y =$是“右脑半球”，那么 $x \sqcup y =$就是“大脑”。又如，如果 $x =$是“苹果 1”，而 $y =$是“苹果 2”，那么 $x \sqcup y =$就是“苹果 1 和 2”。我们还可以将许多名称取上确界，以指称许多对象的部分论总和：

$$\text{“deck”} = \bigsqcup_{x \text{ card}} x.$$

2.2. 同一性判准。Weaver 继续追问，两个对象是<style id='3'>同一个究竟意味着什么：

> 同一个对象不可能同时存在于不同地点，这一点真的很清楚吗？如果<style id='1'>《彩虹的重力》在各地的优秀书店都能找到，那么显然它<style id='3'>可以同时存在于不止一个地方。这里的问题在于，我们所说的“同一个”究竟是什么意思，也就是，为什么要说《彩虹的重力》的那些不同版本都是同一本书。十年前的你，还是同一个人吗？结茧的毛毛虫与后来破茧而出的蝴蝶，是同一种生物吗？ [20,页。 21]

他通过引入<style id='1'>同一性判准来解决这个问题。如果我们采用毛毛虫与其羽化而成的蝴蝶是同一个的判准，那么毛毛虫就与这只蝴蝶是同一个；如果我们采用二者不是同一个的判准，那么它们就不是同一个。从这一角度看，忒修斯悖论并不是一个问题：

> 忒修斯之船问题——它在何时不再是同一艘船？——归根结底是一个关于应采用何种同一性判据的问题。事实上，一旦我们认识到可以自由选择自己喜欢的任何同一性判据，这几乎就根本不成其为问题了。或者更确切地说，它只是变成了一个关于在特定情境下哪种同一性判据最恰当或最有用的问题。 [20, 第 22]

在这里，我们将两个名称称为等价：$x \equiv y$，当且仅当x和y都指称“同一个”对象时。我们可以这样表达“同一性判准会发生变化”这一事实：名称的等价性取决于所采用的同一性判据，因此是偶然的。因此，即使$x \equiv y$，也完全可能出现$x \neq y$。这可以用模态“$\Diamond$”（可能）来表达。如果$x =$是“蝴蝶”，而$y =$是“毛毛虫”，那么我们有：

$$\Diamond(x \equiv y) \wedge \Diamond(x \neq y).$$

Weaver本人选择了另一种同一性判据的形式化方式：让变量x、y、z……遍历对象本身，而非名称。不过，我更倾向于再增加一层间接性，让变量遍历对象的名称。这样一来，我们也可以为那些并非宏观、边界清晰的物理对象的对象命名。将对象与指称它的常量名称等同起来是合理的。

2.3. **判断**。 采用某种特定的同一性判据，就是构造一个类（按 Weaver 的术语）或一个空间（按我们的术语）的方式。构造空间就是一种判断 [10]。对我们而言，判断不过是一种行为，可以用句子“这个判断已经作出”来表示。例如，在类型论中，变量x具有类型X是一种判断，我们记作$x :X$。只要x尚未绑定，我们就可以随时作出判断$x :X$，但句子“$x :X$”只有在我们作出相应判断后才为真。在作出判断之前，句子“$x :X$”是假的。判断行为独立于我们用来描述它的语言而发生，但我们通常会把判断与其语言表述混为一谈。

这里我们更愿意把行为本身称为 基本判断。相应句子“基本判断 J 已经作出”的布尔组合称为判断。这样，判断的合取、析取或否定也是判断。不过，我们约定：如果某个基本判断已经作出，那么它必然已经作出；因此我们说基本判断是开集。所以，当且仅当一个世界中作出了更多基本判断时，该世界才是可及的。虽然基本判断可以撤销，但按照定义，沿着可及关系向上移动时，它们不能被撤销（见第4节）。

如果我们在某个论证中途取一个变量‘x’来表示一个实数，那么在接下来的步骤中，我们会继续把变量 x 视为实数；这是一个开放判断的例子。不过，让我们采用以下同一性判据：两个判断相同，当且仅当它们要么都已作出，要么都尚未作出。（这是 *Sierpiński* 空间 的一种形式；在第 9 节中，我们将构造一个更简单的形式。）这是一个可判定的同一性判据，然而在论证过程中，两个基本判断可能起初“相同”（二者都尚未作出），随后变得“不同”（其中一个已作出），接着又“重新相同”（第二个也已作出）。因此，这个同一性判据既不是开集，也不是闭集；尽管如此，它仍是一个判断，因为它是基本判断的布尔组合。

2.4. **作为判断的构造性真理**。 在 [20, 第 4 章 – 第 6], Weaver 介绍了多种概念，包括构造性真理（或可断言性）、有意义性、经典

真理、概念、类，等等。他主张，真理是在各个阶段中构造出来的，并为包括说谎者悖论在内的若干经典悖论提供了解决方案。

这是对真理经过深思熟虑的看法；我唯一想指出的是，模态“◇”、“□”其实早已隐含其中，甚至体现在“可断言性”这个词的选择上。断言某事是一种判断，而如果某事有可能被断言，它就是可断言的。（请注意，本文中我们以强意义使用“可能”一词：如果我们受迫做出某个判断，那么做出该判断就是可能的，而不仅仅是我们可以设想自己做出该判断。）因此，模态逻辑能更细致地阐明可断言性是什么。同样，认为一个句子有意义本身也是一种判断。

2.5. **有限主义与无限主义。** Weaver 谈到，数学所关注的是“在任何世界中都为真的事物” [20, 第 27]页。[2] 接着，他区分了关于可能世界中实无限之可能性的三种观点；这里我们将可数主义和康托尔主义（以及诸如 序列主义 这样的中间立场）归为无限主义 [20, 第 29]页：

- 根据有限主义，无限按定义是潜在的：所有可能世界中的所有集合都是有限的。
- 根据可数主义（他所主张的立场），有些可能世界中存在实际无限集合，但不存在包含不可数集的可能世界。尤其是，自然数有一个典范模型。
- 根据康托尔主义，存在包含不可数集的可能世界；事实上，对于某个世界中实际存在的每个集合，都有另一个世界包含它的幂集。

接着，Weaver 为各种抽象对象引入了具体的替代物；尤其是，有界名称列表是集合的替代物，其同一性判据是：如果两个列表包含相同对象的名称（即使元素的顺序和重数不同），就将它们视为相同 [20, 页 34]。这是一个有效的集合唯名论定义，也许它应该成为标准，正如他对纯集合 的概念一样 [20,页 37]。

Weaver 直到 [20, 第 7]章才为可数主义进行论证。他承认“没有能够彻底证明可数主义的论证”，但尽管如此，可数主义仍是有限主义与康托尔主义之间合理的折中立场 [20, 第 111]页。他的基本论点是：实际无限总体（以及无限长计算）是可以设想的；因此，无限主义应当是健全的，而有限主义则过于严格。我不会反驳实际无限集合存在的可能性。[3]

我对可数主义的反对，以及对有限主义的支持（这里对有限主义作广义理解，包括直觉主义学派和其他构造主义学派），与Weaver的模态唯名论略有不同，也并非源于某种极端的怀疑主义。在我看来，即使实际无限集合确实存在于某个可能世界中（无论这究竟意味着什么），这也不意味着实际无限集合应在数学实践中扮演主导角色。数学实践应主要关注于对我们的世界进行建模，而我们的世界在大多数情况下是局部有限的。

请注意，拓扑学通常关注的是我们只掌握有限信息的系统。例如，通过实验获得的实数x

[2]Weaver 明确描述的模态唯名论中的模态语言更接近 S5，而我们的模态语言更接近 S4（或者更准确地说，是其直觉主义版本 iS4）。事实上，这些模态被用于不同的目的。[3]我对 $\mathbb{N}$ 与自身的某个真部分“处于双射对应关系”是它能够实际无限的唯一可设想方式这一点略持怀疑态度。在我看来，无限性必然是一种相对的概念同样很有可能，因此，对我们而言是无限的事物，对于一个“局部无限”全集中的居民来说可能是有限的。

我们可以获得一些开集信息，例如 $0.2 < x < 0.3$，但我们永远不会知道x 的全部数字（如果这种说法本身有意义的话）。如果数学主要关注研究在任何世界中都成立的性质，那么我们对实数直线上的这种拓扑学不会特别感兴趣。事实上，我认为我们会对某个其他的类比空间更感兴趣：局部无限宇宙中的居民会通过经验研究这种空间；它可能类似于超现实数的完备化。

尽管无限主义系统通常更易于处理，这使得创建能够更好地解释数学家实际所做工作的无限主义系统成为一项值得开展的任务，但有限主义系统中也仍有尚未探索的领域。例如，在抽象 *Stone* 对偶性（ASD） [14, 1] 中，人们发现开闭对偶性并非本质上不可构造，也不要求任何预先存在的集合论（甚至不要求预先存在直觉主义的集合论，即使 ASD 的模型包含算术宇宙，而算术宇宙是可数集的构造性理论的模型 [16]）。因此，本文的其余部分致力于发展理论 TN，使得拓扑学（至少希望是局部紧空间理论）能够以构造性的方式发展，而无需承受直觉主义逻辑通常带来的一些不便。

3. 特化序

虽然非豪斯多夫拓扑空间在数学学位的标准课程中几乎不存在，但它们恰好位于数学与语言学的交汇处。例如，请参见 [9], ，该文通过与 TN 相关的特化序创建了拓扑的代数化（例如，态射相对于特化序是协变的）。当两个点无法被开集分离时，我们可能会发现其中一个点比另一个点更特殊或更具体（更特殊的点包含于更多开集中）。[4] 这种特化序同样直接出现在语言本身中：如果一个名称x所指的每个对象也都是另一个名称更特殊的名称y所指的对象，那么就称名称或y 比x更一般，形式化地说，若x $\sqsubseteq y$，如果x 所指的每个对象也都是y所指的对象。例如：

“螺丝刀” $\sqsubseteq$ “工具” $\sqsubseteq$“对象”。

当我们有 $x \sqsubseteq y$ 且 $y \sqsubseteq x$，时，我们称 x 和 y 是等价的，形式上 $x \equiv y$，这与之前给出的定义一致。特化序一点也不新；然而，它的主要应用是在研究计算机语言时发展起来的，而不是自然语言，甚至也不是数学语言。在经典拓扑和综合拓扑中，这些思想的一个重要应用是*Sierpiński* 空间：一种具有两个名称的空间，其中一个比另一个更具体，用于刻画开集（或闭集）子空间。

特化序尤其与部分论和有关：如果$x \sqcup y$是名称x 和y的并（其定义为：指称x和y所指称对象的部分论总和的名称），那么我们有$x \sqcup y$实际上是特化序中x 和y 的最小上界。换句话说，一个名称比$x \sqcup y$更一般，当且仅当它比x和y都更一般。

我们也可以将两个名称在特化序中的最大下界定义为它们的交 $x \sqcap y$。例如，

“粉色的东西” $\sqcap$ “黑豹” $=$“粉红豹”。

我们可以定义一个不指代任何对象的名称“无”（形式上为 $\bot$），因此它比任何其他名称都更特殊；还可以定义一个指代任意对象的名称“有”（形式上为 $\top$），因此它是最一般的名称。不过，就我们的目的而言，这样做

[4]这里不讨论特化序的多种约定。

不如将特化序作为唯一的基本原始概念。极小元和极大元，以及格结构（上确界和下确界），只会出现在某些空间中。

这一切与拓扑学有何关系？我实际上认为，拓扑学与名称的特化序相差无几。即使对于 Hausdorff 空间，特化序也会出现在它的开集格中。尤其是对于局部紧空间，它的开集格本身还带有一种自然的拓扑，称为斯科特拓扑 [5]，其特化序由（反向的）包含映射给出。如果一个空间有可数基，那么每个基本开集都可以赋予一个名称。

我们已经证明，在特化序下，名称构成一个（分配）格。显然，任何时刻被绑定的名称数量也只能是有限的。因此，有限分配格理论将成为本文所述理论 TN 的基础。然而，语言并非一成不变：新的名称不断被定义，而那些已经绑定的名称，其含义也可能随时间变化。一个名称是否指称某个对象，是一种判断，因为它首先是一种行为，其次才是一个句子。正如我们所说，判断是可判定的，但我们需要恰当的理论来研究判断形成的顺序，以及它们随“时间”变化的方式。下一节将对此加以阐述。

4. 逻辑 iS4

这里介绍的逻辑与数学实践中最常用的经典逻辑有两点不同：

- 首先，系统 TN 以直觉主义逻辑为基础，它不接受排中律 $\phi \vee \neg\phi$，或等价地说，双重否定消去$\neg\neg\phi \to \phi$，为有效原则。这并不意味着可以将其否定的任何特定实例视为有效（事实上，$\neg(\phi \vee \neg\phi) = \neg\phi \wedge \neg\neg\phi$ 是一个矛盾，这一点与经典逻辑并无二致）。不过，TN 与其他构造性系统的区别在于，TN 中最基本的句子是判断，因此是可判定的（也就是说，排中律对判断成立）。

- 其次，系统 TN 以模态逻辑为基础，它通过两个模态‘$\Diamond$’（可能）和‘$\Box$’（必然）扩展逻辑语言。满足必然条件 ϕ的句子称为开集，满足必然条件 $\Diamond\phi \to \phi$的句子称为闭句子。闭句子的否定是开句子，反之亦然；但同样，双重否定 $\neg\neg\phi$ 并不等价于 ϕ，除非ϕ 是可判定的。介绍公理之后，我们会进一步讨论这两个符号。

严格来说，向模态理论中加入量词通常并非易事。这里我们不试图解决这一问题；相反，我们以非正式的方式处理量词，试图清晰地描述量词所满足的最重要性质。

公理1（IS4，一阶版本）。一阶直觉主义逻辑的公理和规则在 TN 中有效，同时还包括以下模态公理（有关命题版本的类似表述，参见 [3]）：

- $\phi \to \Diamond\phi$ 和 $\Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi$;
- $\Box\phi \to \phi$ 和 $\Box\phi \to \Box\Box\phi$;
- $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$；
- $\Box(\phi \to \psi) \to (\Diamond\phi \to \Diamond\psi)$；
- $\neg\Diamond(\phi \wedge \neg\phi)$;
- $\Diamond(\phi \vee \psi) \to \Diamond\phi \vee \Diamond\psi$;

- $(\Diamond\phi \to \Box\psi) \to \Box(\phi \to \psi)$;
- $(\exists x)\Diamond\phi(x) \leftrightarrow \Diamond(\exists x)\phi(x)$;
- $(\exists x)\Box\phi(x) \to \Box(\exists x)\phi(x)$;
- $\Diamond(\forall x)\phi(x) \to (\forall x)\Diamond\phi(x)$;
- $(\forall x)\Box\phi(x) \leftrightarrow \Box(\forall x)\phi(x)$;
- $(\forall x)(\phi(x) \vee \neg\phi(x)) \to ((\forall x)\phi(x) \vee (\exists x)\neg\phi(x))$(全知原则).

如果已推出 $\Box\phi$（且中间没有使用假设），则用于推导 ϕ 的必然化规则同样有效。

作为对模态的术语解释，我们设想一个固定的克里普克模型。这是一个可能世界之间可及关系的预序（$W \leq$） [2, p。 34], 以及一种世界 $w \Vdash \phi$ 与句子 ϕ 之间的“成立”（或“满足”）关系：对于 $w \in W$，$w_0 \Vdash \Box\phi$，当且仅当必然地，对于所有 $w_1 \geq w_0$，$w_1 \Vdash \phi$，以及 $w_0 \Vdash \Diamond\phi$；当且仅当可能存在 $w_1 \geq w_0$，使得 $w_0 \Vdash \phi$. 。当我们研究某个世界 w_0,时，如果某件事发生在某个世界 $w_1 \geq w_0$. 中，我们就说它发生在稍后的时间。其他时间类比也应根据可能世界来解释，即使世界之间的顺序并非线性。我们允许存在一些我们无法完全了解的世界，只要某个主体有可能做到这一点。

TN 的基本原则之一是，这种解释应按字面理解，每个世界都由已经作出的所有判断组成。事实上，我们可以设想自己生活在某个世界中，而我们只掌握关于它的部分信息。理论在另一个世界 w_c 中展开，我们掌握关于该世界的全部信息。证明一个定理 ϕ 就是证明$w_c \Vdash \Box\phi$。

形如 $\Diamond\Box\phi$ 的定理称为一种构造。当我们证明了 $\Diamond\Box\phi$之后，就存在一个世界 $w_1 \geq w_c$，在该世界中 ϕ 是一个定理。我们的一个重要假设是，对于我们而言，w_1 仍然是有限的；也就是说，我们可以掌握关于它的全部信息。因此，通过作出适当的判断，使得 $w_c \geq w_1$，我们便可以直接“跳转”到一个 ϕ 为定理的世界。跳转之后，只有必要的（也称为开集）真理仍然成立。[5]

最后，我们回顾 iS4 的一些有效和无效原则。注意，原则$\Diamond\phi \wedge \Diamond\psi \to \Diamond(\phi \wedge \psi)$通常是无效的：一个句子可以在一个世界中为真、在另一个世界中为假，但不可能在同一个世界中同时为真又为假。然而，原则 $\Diamond(\phi \wedge \psi) \to (\Diamond\phi \wedge \Diamond\psi)$ 和 $\Diamond(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$ 是有效的。类似地，我们有 $\Box(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi)$，但只有 $(\Box\phi \vee \Box\psi) \to \Box(\phi \vee \psi)$ 成立，反之则不成立。

我们不接受为有效的另一个原理是 $\neg\Box\phi \to \Diamond\neg\phi$。请注意，原理$\Diamond\neg\phi \to \neg\Box\phi$ 和 $\Box\neg\phi \leftrightarrow \neg\Diamond\phi$ 是有效的；直觉主义逻辑中的德摩根律也有类似情况，其中只有 $\neg(\phi \wedge \psi) \to (\neg\phi \vee \neg\psi)$ 不成立；直觉主义量词也有类似情况，其中只有 $\neg(\forall x)\phi(x) \to (\exists x)\neg\phi(x)$ 不成立。

5. 变量

在 TN 中，论域由变量组成，它们是指称对象的名称，但它们所指称的对象可能取决于世界。当我们沿着可及性序向上移动时，变量仍然存在；事实上，即使其中只有有限多个被约束，也可以假定它们始终存在。让我们仔细考察一些涉及变量的公理。其中两条公理表明，所有变量的全集是开集；也就是说，一个变量必然是一个变量。这些公理是

$$(\exists x)\Box\phi(x) \to \Box(\exists x)\phi(x)$$

[5]非必然真理也称为偶然 真理。形式上，偶然为真的句子 ϕ 满足 $\phi \wedge \Diamond(\neg\phi)$。

and

$$\Diamond(\forall x)\phi(x) \to (\forall x)\Diamond\phi(x).$$

另外两条公理保证所有变量的全集是闭集；也就是说，可以假定任何变量始终存在，即使它最初并未指称任何对象。这些公理是

$$(\forall x)\Box\phi(x) \to \Box(\forall x)\phi(x)$$

and

$$\Diamond(\exists x)\phi(x) \to (\exists x)\Diamond\phi(x).$$

从构造性观点来看，也许最令人惊讶的公理是全知原则

$$(\forall x)(\phi(x) \vee \neg\phi(x)) \to ((\forall x)\phi(x) \vee (\exists x)\neg\phi(x)).$$

它在 TN 中成立的原因是，尚未绑定的变量无法区分，也就是说，它们具有相同的性质。与此同时，已绑定的变量只有有限多个，而有限集合的全知原则在构造性观点下是成立的。

变量 '$\sqsubseteq$' 之间的特化序是 TN 中唯一的原始关系，因此未定义。有时，对变量取'上确界'和'下确界'是有意义的，正如我们前面所做的那样。不过，我们只会针对每个空间分别进行，而不会在全局范围内进行。

公理2。特化序的性质如下：

- 自反性：$x \sqsubseteq x$；
- 传递性：$(x \sqsubseteq y) \wedge (y \sqsubseteq z) \to (x \sqsubseteq z)$；
- 反对称性：$(x \equiv y) \iff (x \sqsubseteq y) \wedge (y \sqsubseteq x)$。（事实上，这就是等价"$\equiv$"的定义。之所以在这里说明这一点，是因为其他性质用等价而不是相等来表达也更好。）
- 可判定性：$(x \sqsubseteq y) \vee \neg(x \sqsubseteq y)$。（不要将其与线性性混淆。）

一类重要的变量是常元。一旦某个常元指称一个对象，它必然指称该对象。变量可以变成常元。常元之间的特化序具有稳定性，其含义是：如果a、b 是常元，那么：[6]

$$\Diamond(a \sqsubseteq b) \to \Box(a \sqsubseteq b).$$

如果两个常元等价$a \equiv b$，那么我们实际上判定它们相等$a = b$。这一原则的解释是：常元直接表示一个对象，而不是一个名称。请注意，对于两个变量，我们通常不能这样做；这里使用内涵相等（也就是说，两个变量只有在按定义相等时才相同），不过必要的等价也是一种有效的选择。

常元的重要性在于，我们假设存在一个（唯一的）常元，它等价于任意给定的变量；此外，界定常量是 TN 中最基本的判断。当常元与某个变量等价时，我们称该常元<strong style='id='1'>刻画 该变量。由于刻画给定变量的常元可能随时间而变化，因此无法用函数记号来表示。

公理3。$(\forall x)(\exists c \text{ 常量})(x \equiv c)$。

[6]最重要的条件是特化序为开集：$(a \sqsubseteq b) \to \Box(a \sqsubseteq b)$。为简化起见，这里我们假设更强的稳定性条件，尽管它可能会妨碍商等构造。我们在此不必担心这一点。

指定未绑定变量的常量是什么？由于所有未绑定变量都无法区分，因此假定存在一个指定所有未绑定变量的单一常量并无妨碍。这里我们不需要它。

另一种重要的变量是滤子。一旦滤子指向某个对象，它必然 指向同一个对象或其某个部分。我们将滤子解释为一种变量，随着时间推移，我们会逐渐获得关于它的信息。因此，若x 是一个滤子，c 是一个常量，则有：

$$(x \sqsubseteq c) \to \Box(x \sqsubseteq c).$$

我们也可以假设，存在任意多个滤子，使其与任何给定常量等价。还有一个对偶概念，即理想 x，它满足对任意常量c：

$$(c \sqsubseteq x) \to \Box(c \sqsubseteq x).$$

不过，我们更倾向于将理想视为滤子，只需将常量“上下颠倒”，如下所示。给定一个常量a，就有一个对偶常量a^*，使得对所有a，b：

$$a^* \sqsubseteq b^* \iff b \sqsubseteq a,$$

以及$a^{**} = a$。重要的是，我们并未假设a 与a^* 可比较，甚至未假设它们存在上界。

6. 空间

一个空间 X 由变量“$x \in X$”上的隶属谓词定义，该谓词是可判定且外延的：[7]

$$(\forall x, y)(x \in X \wedge x \equiv y \to y \in X).$$

直观地说，一个对象属于某个空间是一种判断；当变量所指的对象属于某个空间时，就称该变量“属于”这个空间。空间带有若干自然的偏序，其中最广为人知的是包含序：

$$X \subseteq Y \iff (\forall x \in X)(x \in Y).$$

根据全知原则，包含序是可判定的。我们可以假设能够构造空间$X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ 以及$X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$，它们关于包含序自然构成一个分配格结构。此外，还有一个空空间 $\varnothing$ 和全集 $\mathscr{U}$，后者由所有变量组成。

空间也是变量。由于特化序有几个候选，滤子取决于我们采用哪一个。我们将“空间”一词保留给按照某个指定特化序构成滤子的变量空间。特别地，我们定义以下内在概念：

- 开空间 是按逆包含排序的向下封闭空间：

  $$X \sqsubseteq Y \iff X \supseteq Y.$$

  X 的向下闭性意味着：如果$x \in X$，那么对于所有$y \sqsubseteq x$，都有$y \in X$。开空间 X 满足：如果$x \in X$ 是开空间中的一个滤子，那么*necessarily* $x \in X$，因此开空间是增长的。更一般地，我们可以构造空间X的向下闭包：

  $$X{\downarrow} = \{x \mid (\exists y \in X)(x \sqsubseteq y)\}.$$

[7]若倾向于极小性，则可以将隶属关系视为特化序的一个特定实例：对于每个变量x，我们可以为其赋予另一个变量 $\{x\}$，使得$x \in X \iff \{x\} \subseteq X$。随后，通过在本节所述的对象中进行选择，用特化序替代包含序。

于是，开序就是这些向下闭包上的逆包含序，

$$X{\downarrow} \supseteq Y{\downarrow} \iff (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y \sqsubseteq x).$$

- 闭空间 是按直接包含 （$X \sqsubset Y \iff X \subset Y$）排序的上闭空间。如果$F$是一个闭空间，那么对于任意滤子$x \notin F$ necessarily $x \notin F$，它都满足该条件，因此闭空间会收缩。更一般地，我们可以构造一个空间X的上闭包$X{\uparrow}$，并考虑闭序，即以上闭包的包含映射为序的序关系，

$$X{\uparrow} \subseteq Y{\uparrow} \iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)(y \sqsubseteq x).$$

- 部分 是按直接包含排序的下闭空间。稍后我们将引入一种不同的记号来表示部分，而不是将其视为空间。更一般地，部分 序是下闭包的直接包含序：

$$X{\downarrow} \subseteq Y{\downarrow} \iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \sqsubseteq y).$$

部分与经典拓扑学中的紧子空间有一些相似之处。

- 稳定空间 是通过外延性“排序”的空间，$X \sqsubseteq Y \iff$ （$X \subset Y$）$\wedge$（$Y \subset X$）。因此，稳定空间总是具有相同的常元。

一个类型是由空间构成的空间，并带有一种特化序的选择。我们可以定义非良基的类型，例如开空间的类型。虽然这本身不应在 TN 中导致悖论，但某些构造（如积空间和函数空间）如果在非良基空间上操作时不够谨慎，就会导致实际无穷。实际无穷与 TN 不相容。因此，每当我们在任意空间上进行构造时，都假定该空间在强意义下是良基的，即它是在有限步数内从基础逐步构造出来的（实数直线以及我们将要引入的其他特定空间都属于这种情况）。这样，给定两个空间 X, Y，我们可以假定所有有序对，甚至所有 X 与Y之间的（外延的）关系（包括所有函数）都已经构造完成。

给定一个空间X，我们可以构造两个与之相关的类型。首先是它的开子空间格

$$\tau(X) = \{U \subseteq X \mid U \text{ downward-closed in } X\},$$

其特化序由逆包含映射给出。注意，作为X 子空间的开空间是开子空间，而开空间的开子空间是开空间。其次，我们定义它的部分格

$$\kappa(X) = \{K \subseteq X \mid K \text{ downward-closed in } X\},$$

其特化序由直接包含给出。因此， $\tau(X)$与 $\kappa(X)$互为对偶，从而其中一个的理想就是另一个的滤子；我们甚至可以写成 $\tau(X) = \kappa(X)^*$。注意，如果K 是X 的一个部分，且U 是一个开子空间，那么$K \subseteq U$ 是一个开关系。

由于下闭子空间的补集恰好是上闭子空间，我们可以将X 的闭子空间与对偶空间$X^* = \{x^* \mid x \in X\}$的部分对应起来：

$$\kappa(X^*) = \{F \subseteq X \mid F \text{ upward-closed in } X\},$$

按包含映射排序。注意， $\kappa(X^*) \cong \tau(X)$。（此记号保留用于特化序的同构，即使其他结构（如包含序）有所不同。）

7. 拓扑空间

拓扑空间的类型定义为具有特化序的空间X的类型，其中$X \sqsubseteq Y \iff \kappa(X) \supseteq \kappa(Y)$。拓扑空间的滤子称为其点。特别地，如果$X$是一个拓扑空间，那么$\kappa(X)$是一个开空间；由于它具有相同的元素，$\tau(X)$也是开空间。当然，$\tau(X)$是$X$的拓扑。如果$X$是一个开空间，那么$X$也是一个拓扑空间。另一方面，有时在$X$本身不是开集时，先构造$\kappa(X)$会更容易。

设L关于特化序构成半格，并且并为“$\sqcup$”、最小元为$\varnothing$。L的一个素元是元素$p \neq \varnothing$，满足

$$(p \sqsubseteq a \sqcup b) \to ((p \sqsubseteq a) \vee (p \sqsubseteq b)).$$

现在可以定义L的素元空间X，并赋予相同的特化序。于是有：

定理 1（伯克霍夫表示定理；参见 [13, 第 290]页）。如果L是分配格，且X是其素元空间，那么$\kappa(X) \cong L$。特别地，如果L是开集，那么X是一个拓扑空间。

经典地，这定义了以下范畴之间的一个等价关系：

- 有限偏序集的范畴；
- 有限$T0$拓扑空间的范畴；[8]
- 对偶地，有限分配格的范畴。

L中的任一元素都可以写成素元的并。因此，我们将$\kappa(X)$中的元素表示为X中元素的并，并且我们更倾向于写作$x \sqsubseteq K$而非$x \in K$，以及$K \sqsubseteq K'$而非$K \subseteq K'$。注意，$x \sqcup y \in \kappa(X)$与x和y在X中的最小上界并不相同，除非$x \sqsubseteq y$或$y \sqsubseteq x$。

我们有包含映射$X \subseteq \kappa(X)$，有时我们将其视为空间之间的字面包含映射，有时则视为嵌入（即嵌入到(X)的某个子空间中的同构）。

与点集拓扑相比，一个表面上的差异是，我们将点视为素元，而非完全素元。[9] 然而，由于全集是有限的，所有素元$p \in L$都立即是完全素元：

$$p \sqsubseteq \bigsqcup_{i \in I} a_i \to (\exists i \in I)(p \sqsubseteq a_i),$$

这将在引入函数后变得有意义。

这里需要指出一个微妙的观察。虽然我们将底元素$\varnothing \in \tau(X)$视为一个常量，并将两个常量的并视为一个常量（因为并的向下闭包就是向下闭包的并），但顶元素$X \in \tau(X)$不是一个常量，而是X的一个开子空间。两个常量的交也仅仅是一个开子空间（因为交的向下闭包<style id='13'>严格包含于向下闭包的交中），但在我们在此构造的空间中，两个常量的交是一个常量。这类似于经典事实：有限个紧空间的并是紧的，但一般而言，有限个紧空间的交并不紧。

---

[8] 一个T_0空间是指其中的点在拓扑上可区分的空间；也就是说，不存在两个点恰好属于相同的开集。

[9] 在点集拓扑中，一个点以非常相似的方式定义一个完全素滤子。若一个空间中的每个完全素滤子都定义唯一的点，则称该空间是饱和的。大多数熟悉的拓扑空间都是饱和的。

我们认为 $\kappa(X)$既是上闭的也是下闭的。一般而言， $\kappa(X)$的开特化序称为显见序，即X （关于 [1] 可显性的解释见此处）：

$$X \sqsubseteq Y \iff \kappa(X) \supseteq \kappa(Y) \iff \kappa(X) \supseteq Y.$$

我们还有co $mpact$ X的特化序，它是 pa $\kappa(X)$ 的偏序：

$$X \sqsubseteq Y \iff \kappa(X)\downarrow \subseteq \kappa(Y)\downarrow \iff X \subseteq \kappa(Y)\downarrow .$$

（在多个世界之间比较空间时，需要使用显式的下闭包。）这里我们只考虑显见的拓扑空间（即相对于显性序为滤子的空间）；其中一些空间同时具备显见性和紧性。每当我们定义一个拓扑空间的闭子空间时，都必须证明它是显见的，但我们有：

定理 2。 设 $O \in \tau(X)$ 是一个（显见的）拓扑空间的开子空间。那么O 是一个拓扑空间（也就是说，O是显见的）。

证明。 设 $a \in \kappa(O) \subseteq \kappa(X)$ 是一个常量。那么必然有 $a \sqsubseteq O$。 由于 X 是显见的，我们有 $\Box(a \in \kappa(X))$。 因此， $\Box(a \in \kappa(O))$， 也就是说， O 是一个（显见的）拓扑空间。□

8. 函数

一个定义域为 $\mathrm{dom} f = X$ 的函数 f 以协变 的方式为每个变量 $x \in X$ 指定一个新变量 $f(x)$；也就是说，对所有的 $x,\ x' \in X$：

$$x \sqsubseteq x' \to f(x) \sqsubseteq f(x').$$

函数的特化序定义如下：

$$f \sqsubseteq g \iff (\mathrm{dom} f \supseteq \mathrm{dom} g) \wedge (\forall x \in \mathrm{dom} g)(f(x) \sqsubseteq g(x)),$$

根据全知性，这是可判定的。如果f 是一个函数（即一个滤子），那么 dom$f$ 是一个开空间（下文将证明这一点）。因此，一旦$f(x)$有定义，它就必然 有定义，这为函数记号提供了依据。（如果我们研究函数之间的其他特化序，就会将上述特化序称为开集 序。）

定理 3。 函数f 是滤子，当且仅当 $\mathrm{dom} f$ 是开集，并且对于每个滤子$x \in \mathrm{dom} f$，$f(x)$ 是滤子。

证明。 下面展示可能世界如何帮助我们在 TN 中进行推理；与直接使用模态相比，这能提供更简洁的证明。我们始终约定，在变量后添加下标，就得到在具有相同下标的世界中指明该变量的常量。也就是说，$w_i \Vdash x \equiv x_i$.

设 w_0 是我们要证明定理的世界，因此函数 f 在 w_0，处有定义，并设 w_1 是任意一个后续世界。首先，假设 f 是一个滤子，即 $f_1 \sqsubseteq f_0$。于是 $\mathrm{dom} f_1 \supseteq \mathrm{dom} f_0$，，因此 $\mathrm{dom} f$ 是开集；对于所有常量 $a \in \mathrm{dom} f_0$，，都有 $f_1(a) \sqsubseteq f_0(a)$。更一般地，如果 $x \in \mathrm{dom} f_0$ 是一个滤子（因此 $x_1 \sqsubseteq x_0$），那么根据 f_1 的协变性：

$$f_1(x_1) \sqsubseteq f_1(x_0) \sqsubseteq f_0(x_0).$$

这表明 $f(x)$ 是一个滤子。

现在假设$X = \mathrm{dom}(f)$是一个开空间，并且对于每个滤子$x \in X.$，$f(x)$都是一个滤子。我们有 $X_1 \supseteq X_0$。令$c \in X_0$ 为任意一个常量。那么$f(c)$是一个滤子，也就是说，$f_1(c) \sqsubseteq f_0(c)$.这说明

$$f_1 \sqsubseteq f_0,$$

使得f 是一个函数。注意，只需将常元映射到滤子即可。 □

现在我们可以考察偏序与格之间的对偶性对函数的作用。给定空间 X、Y，一个函数 $f : X \to Y$ 产生一个逆像函数 $f^* : \tau(Y) \to \tau(X)$，以及一个正像函数 $f_* : \kappa(X) \to \kappa(Y)$（正如我们将看到的，为了使滤子映射到滤子，需要选择 κ 和 τ）。正像是逆像的左伴随，其含义是 $\alpha_*(K) \subseteq U \iff K \subseteq \alpha^*(U)$。正像的构造满足：对于 $x \in X$，有 $f_*(x) = f(x)$，并且保持有限并：$f_*(K \sqcup K') = f_*(K) \sqcup f_*(K')$，且 $f_*(\varnothing) = \varnothing$. 逆像是一个有界格态射；也就是说，$f^*(Y) = X$，$f^*(\varnothing) = \varnothing$，$f^*(U \cup V) = f^*(U) \cup f^*(V)$，以及 $f^*(U \cap V) = f^*(U) \cap f^*(V)$。

拓扑空间之间的连续函数 $f : X \to Y$，只是一个将素元映射为素元的函数 $f_* : \kappa(X) \to \kappa(Y)$。注意，$f$ 并不是上述意义下的函数，因为其定义域不是开集。

正如我们之前所说，可以将 X 嵌入其部分格中：

$$\iota^X : X \to \kappa(X)$$
$$\iota^X(x) = x\downarrow .$$

不存在类似的（协变）嵌入到 $\tau(X)$。

定理4。 嵌入 $\iota^X : X \to \kappa(X)$ 是一个连续函数。

证明。我们知道 ι 是协变的。因此可以将其扩展为 $\iota_* : \kappa(X) \to \kappa(\kappa(X)))$.[10] 。 ι_* 的定义域是一个开空间，但我们必须证明 ι_* 将滤子映射为滤子。设 $K \in \kappa(X)$ 是一个滤子（一个部分）。设 w_0 是一个初始世界，并设 w_1 是任意一个后续世界。我们必须证明 $\iota_*(K)$ 是一个滤子，即 $\iota_{*1}(K_1) \sqsubseteq \iota_{*0}(K_0)$。由于 ι 按定义将常元映射为常元（常值部分被视为下闭的，而不是稳定的），因此 ι_* 也将常元映射为常元。

我们可以写成 $w_1 \Vdash K_0 \equiv a_0^1 \sqcup \cdots \sqcup a_0^r$ 和 $w_1 \Vdash K_1 \equiv a_1^1 \sqcup \cdots \sqcup a_1^s$，其中 $a\,j\,i$ 是 w_1 处的素常量。由于对于每个 a_1^i，我们都有 $K_1 \sqsubseteq K_0$, ，因此存在一个 $a_0^{\sigma(i)}$，使得 $a_1^i \sqsubseteq a_0^{\sigma(i)}$. 。根据协变性，我们有 $\iota_1(a_1^i) \sqsubseteq \iota_1(a_0^{\sigma(i)})$；又因为 ι_{*1} 保持上确界，所以这意味着 $\iota_{*1}(K_1) \sqsubseteq \iota_{*1}(K_0) \equiv \iota_{*0}(K_0)$，由此可见 $\iota_*(K)$ 是一个滤子。□

定理 5. 令 $f : X \to Y$ 为一个连续函数。那么 $f^* : \tau(Y) \to \tau(X)$ 是一个函数。

证明。 设 U 是 Y 的开子空间。 我们必须证明 $f^*(U)$ 是 X 的开子空间，但我们已经知道 $f^*(U) \in \tau X$，因此只需证明 $f^*(U)$ 是一个滤子。设 w_0 是初始世界，并设 w_1 是任意的后续世界。假设 $w_0 \Vdash a \subseteq f^*(U)$， 其中 a 是一个常量。我们有

$$w_0 \Vdash f_*(a) \subseteq U,$$

这是一个开条件。因此我们有 $w_1 \Vdash f_*(a) \subseteq U$，或者等价地，$w_1 \Vdash a \subseteq f^*(U)$，这表明 $f^*(U)$ 是一个滤子。□

9. 与 ASD 的关系

在 ASD 中，拓扑空间 X 的开子空间对应于连续函数 $X \to \Sigma$，其中 Σ 是 Sierpiński 空间。这里，Sierpiński 空间最容易定义为一个具有两个常元的空间，其中一个比另一个更特殊：

$$\Sigma = \{\mathbb{O} \sqsubseteq \mathbb{F}\}.$$

[10] 由于 κ 是 τ 的对偶，它们的平方重合，即 $\kappa(\kappa(X)) \cong \tau(\tau(X))$。 还要注意， ι_*^X 与 $\iota^{\kappa(X)}$ 并不相同，因为 $\kappa(X)$ 和 $\kappa(\kappa(X))$ 具有不同的并运算。

因此， Σ 是一个常空间，同时也是一个分配格。 $\mathbb{O}$是开点，而 $\mathbb{F}$ 是闭点。之所以这样称呼它们，是因为 Σ 的开子空间格为：

$$\tau(\Sigma) = \{\varnothing \subseteq \{\mathbb{O}\} \subseteq \Sigma\},$$

其闭子空间格为：

$$\tau(\Sigma^*) = \{\varnothing \subseteq \{\mathbb{F}\} \subseteq \Sigma^*\}.$$

给定一个函数$f : X \to \Sigma$，其中X是任意拓扑空间，逆像$f^*(\mathbb{O}) \in \tau(X)$根据定理X5定义了一个开子空间。反过来：

定理6。 设$U \in \tau(X)$是一个开子空间。那么$f : X \to \Sigma$由下式给出

$$f(x) \equiv \mathbb{O} \iff x \in U$$

是一个连续函数。

证明。 注意，f 是协变的，因为U 是向下闭的。我们必须证明正像$f_* : \kappa(X) \to \kappa(\Sigma)$是一个函数（即一个滤子）。由于定义域是一个开空间，我们只需证明f_* 将滤子映射为滤子。设$K \in \kappa(X)$是一个滤子，并假设$f_*(K) \sqsubseteq O$ 对某个常量$O \in \kappa(X) = \{\varnothing \sqsubseteq \mathbb{O} \sqsubseteq \mathbb{F}\}$. 有以下三种情况：

- 如果$O \equiv \varnothing$，那么$K = \varnothing$，从而 $\Box(f_*(K) \subseteq O)$。
- 如果$O \equiv \mathbb{F}$，那么显然 $\Box(f_*(K) \sqsubseteq O)$。
- 如果$O = \mathbb{O}$，那么$K \subseteq U$，从而 $\Box(K \subseteq U)$，也就是说， $\Box(f_*(K) \subseteq O)$。

证明到此结束。 □

ASD 和 TN 中都成立的另一个原理是*Phoa* 原理。这里表述如下：

定理7。 任意函数f： $\Sigma \to \Sigma$都满足方程$f(x) \equiv f(\mathbb{F}) \sqcap (x \sqcup f(\mathbb{O}))$。

证明。 证明与经典证明相同。由于f必须是协变的，因此只有三种可能：

- f ≡恒等函数；
- $f(x) \equiv \mathbb{O}$ 对所有x均成立；
- $f(x) \equiv \mathbb{F}$ 对所有x均成立。

这些函数都满足该方程。 □

在 ASD 中，X 的一个子空间由 [1] 一个核 E 构造： $\Sigma^X \to \Sigma^X$它是一个保持格结构的幂等函数（但不同于 locale 理论，它不必与恒等函数可比较）。给定一个函数 υ： $X \to \Sigma$，它定义了两个核：一个是 $E^O(\phi) = \phi \cap \upsilon$（这定义了一个开子空间），另一个是 $E^F(\phi) = \phi \cup \upsilon$（这定义了一个闭子空间）。在 TN 中，开闭对偶性由补运算给出，但我们仍然有：

定理 8。 设X 是一个拓扑空间，且$O \in \tau(X)$， $F \in \tau(X^*)$ 是一个开闭互补对（即$F = X \setminus O$）。则有以下幂等函数$\tau(X) \to \tau(X)$：

- $E_O(U) = U \cap O$，其像与 $\tau(O)$ 同构；
- $E_F(U) = U \cup O$，其像与 $\tau(F)$ 同构。

证明。 协变性和幂等性是显然的，且两个开子空间的并／交也是开子空间。我们只需证明 E^O、E^F 将滤子映射为滤子。若$U \in \tau(X)$ 是一个开子空间，则$U \cap O \in \tau(O)$ 是O的开子空间；反之，若$U \in \tau(O)$ 是一个开子空间，则$U = U \cap O \in \tau(X)$ 也是一个开子空间，这

说明了第一点。对于另一点，设$U \in \tau(X)$ 是一个开子空间。那么$F \cap U = F \cap (U \cup O) \in \tau(F)$ 是一个开子空间。反过来，若$U \in \tau(F)$ 是一个开子空间，则$U \cup O \in \tau(X)$ 是一个开子空间，因为它包含U的向下闭包。□

最后，开子空间的开并是开集，而开子空间的"部分交"也是开集 [6]。

定理 9。设$U : I \to \tau(X)$是一个函数$i \mapsto U^i$。

- 若I 是一个开空间，则$\bigcup_{i\in U} U_i \in \tau(X)$是一个开子空间。
- 若I 是一个部分，则$\bigcap_{i\in U} U_i \in \tau(X)$是一个开子空间。

证明。我们知道，有限多个开子空间的并与交是开集。设w_0 是一个初始世界，并设w_1 是任意一个后续世界。对于第一个点，由于I 是开集，我们有$I_1 \supseteq I_0,$，并且对于每个$i \in I_0,$，都有$U^i_1 \supseteq U^i_0$。这证明了$\bigcup_{i\in I_1} U^i_1 \supseteq \bigcup_{i\in I_0} U^i_0,$也就是说，$\bigcup_{i\in I} U^i$ 是一个开子空间。

对于第二点，由于 I 是一个部分，我们有 $I_1 \subseteq I_0{\downarrow}$；但交的元素越少，结果就越大，因此 $\bigcap_{i\in I_1} U^i_1 \supseteq \bigcap_{i\in I_0{\downarrow}} U^i_0 \equiv \bigcap_{i\in I_0} U^i_0,$ 也就是说，$\bigcap_{i\in I} U^i$ 是一个开子空间。（向下闭包可以去掉，因为如果 $i \sqsubseteq j$，那么 $U_i \supseteq U_j$。）□

与 ASD 中一样，理论 TN 预计将刻画局部紧空间，因为拓扑中的任意常量都可以对偶地视为一个开子空间或一个部分；这让人联想到 [15] 中的"使用紧子空间的基"。虽然可以定义更一般的函数空间，但似乎此处定义的拓扑空间并不适合作为定义域/陪域，因为函数可能无法持续存在；一旦我们讨论到具体函数，这一点就会变得明显。ASD 与 TN 之间的一个区别是，TN 中尚未引入商。

10. 有理数

我们已经定义了空间和函数是什么，但它们是如何构造出来的，可能还不清楚。事实上，人们可能会疑惑：有限分配格的理论是否真的足以定义连续统基数的空间以及它们之间的函数。在本节和下一节中，我们提出将实数直线构造成"一个有限线性图，任意两个顶点之间都有越来越多的顶点"。然后，我们展示如何通过有理数加法来构造实数加法。必须谨慎选择定义域和陪域，使结果确实是一个函数。

稠密线性序类型由带有（可判定）线性序'$<$'的空间Q 组成，并满足：

- Q 是离散的：其特化序是$a \sqsubseteq b \iff a \equiv b$。因此，其拓扑是其经典幂集，并且每个滤子都是常量。
- Q带有线性序'$\leq$'。这是一个传递、自反且反对称（相对于'$\equiv$'）的关系，对所有a,b都满足$(a \leq b) \vee (b \leq a)$。
- 有理数集 是无界的：存在两个常量 $-\infty \notin$有理数集 $+\infty \notin$ 有理数集，使得 $-\infty < a < +\infty$ 对于每个$a \in$ 有理数集都成立。
- 稠密线性序之间的特化序由有理数集 的开序与'$<$'的开序共同给出。也就是说，当且仅当有理数集$' \sqsubseteq$有理数集 时，有理数集$' \supseteq$有理数集，且包含映射保持序。因此，稠密线性序（即滤子）在潜在意义下是稠密的：

$$a < c \in Q \cup \{-\infty, +\infty\} \to \Diamond(\exists b \in Q)(a < b < c),$$

其序是稳定的：若a、b ∈ 有理数集，则 $\Diamond(a < b) \to \Box(a < b)$。

在构造有理数时，会出现一个问题。如果 $1 \in \mathbb{Q}$ 那么我们应当有 $1+1 \in \mathbb{Q}$，依此类推，从而导致一个实无限，而这在 TN 中是不可能的。因此，只有当陪域是不同的空间时，才能定义加法：

$$\text{plus} : \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3.$$

这正是函数空间难以定义的原因，尽管单个函数并不存在问题。无论如何，$\mathbb{Q}$的有理数类型由稠密线性序 $\mathbb{Q}^i$组成，其元素是分数 m/n，其中 m、$n \in \mathbb{Z}$，$n > 0$，并采用通常的比较序（我们将整数 $\mathbb{Z}$ 作为已知条件）。类型为 $\mathbb{Q}$ 的空间 $\mathbb{Q}^i$ 称为 $\mathbb{Q}$.的实例。我们将假设，无论定义域是什么，都可以构造出有理数加法和减法的陪域。我们称这两个运算的类型为

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},$$

即使该运算只在某些实例之间定义也是如此。我们可以假设，任意两个实例在包含序中都有一个上界。

因此可以假定加法运算的类型为 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. 这意味着，对于任意实例 $\mathbb{Q}^1$，$\mathbb{Q}^2$，$\mathbb{Q}^3$，都可以构造出更大的实例 $\hat{\mathbb{Q}}^i \supseteq \mathbb{Q}^i$ 使得

$$\text{plus} : \hat{\mathbb{Q}}^1 \times \hat{\mathbb{Q}}^2 \to \hat{\mathbb{Q}}^3.$$

事实上，此处 $\hat{\mathbb{Q}}^i = \mathbb{Q}^i$ 对于$i = 1, 2$，因此无需调整定义域。另一方面，$\hat{\mathbb{Q}}^3$ 应由 $\mathbb{Q}^3$ 与从 $\mathbb{Q}^1$ 和 $\mathbb{Q}^3$.中各取一个数的所有可能加法结果的并组成

交换律可以表述为：对于任意三个有意义的实例选择，$a+b = b+a$。结合律可以表述为：对于任意六个有意义的实例选择，$(a+b)+c = a+(b+c)$。

如何从有理数构造直线？建议先构造另外两个空间，尽管它们无处不在，却并不广为人知： 上升直线 和对称的 下降直线 [1]。

给定一个稠密线性序有理数集，递增直线有理数集↗ 是一个开空间，其构造方式是：对每个常元$a_\nearrow$ ∈有理数集↗，声明一个常量a ∈ 有理数集，其特化序由算术比较的反向关系给出：

$$a_\nearrow \sqsubseteq b_\nearrow \iff a \geq b.$$

递增直线上的点 δ 称为上升元素。上升元素可以随时间保持不变，也可以上升到更大的有理数。由线性序诱导的拓扑非常简单： $\kappa(R\nearrow) = R_\nearrow \cup \{\varnothing\}$。我们定义递增数$c\nearrow$ 与有理数a 之间的序如下：

$$c_\nearrow \geq a \iff (c \geq a).$$

这样，递增数 δ 大于某个a ∈有理数集便是一个开条件；形式上，$(a < \delta) \to \Box(a < \delta)$（这里，对于非严格序也成立）。下降直线 有理数集↙ 由形如$a\swarrow$ 的常元对每个a ∈有理数集。对称地定义。其特化序如下：

$$a_\swarrow \sqsubseteq b_\swarrow \iff a \leq b.$$

由于下降直线与上升直线的次序相反（有理数集$^*_\swarrow$ =有理数集↗）。我们可以作如下对应：

$$\tau(Q_\swarrow) = \kappa(Q_\swarrow)^* = \kappa(Q^*_\swarrow) = \kappa(Q_\nearrow) = (Q \cup \{-\infty\})_\nearrow.$$

也就是说，下降直线的开子空间就是递增元素，但需注意，下降直线的空子空间对应于上升元素 $-\infty_{\nearrow} \notin$有理数集$\nearrow$。

11. 实数直线

直线 R 是通过Q 构造的图，其顶点是Q中的元素。令 $\min Q = A \in Q_{\swarrow}$，$\max Q = B \in Q_{\nearrow}$. R 中的元素有两种可能的形式：[11]

- 开顶点 b 对于$\hat{A} < b < B$。
- 边 (a,b) 对于$A < a \prec b < B \in Q$（此记号表示$a < b$是相邻的）。

特化序由 $(a,b) \sqsubseteq \hat{a}$和 $(a,b) \sqsubseteq \hat{b}$给出。因此，开顶点 $\hat{a}$应被视为顶点a 与关联边的并。

请注意，有理数集 的连续元素会随着在它们之间加入新的元素而不再连续（关系 $a \prec b$ 是闭的，但不是开集）。然而，随着新的顶点出现，旧的边仍作为 $\kappa(R)$中的足迹保留下来。实际上，开顶点也会收缩。这是因为我们将“形式开区间”视为常元；b 于是是一个滤子：

$$\hat{b} \equiv (a,c) \text{ if } a \prec b \prec c,$$

我们最感兴趣的是极大元，也就是开顶点，因为它们构成了R的子基。这意味着R 的其他元素（即其边）都是开顶点的交。一个实数总是由一个开顶点所确定的滤子。

如果$a \prec b$，那么$a \prec \hat{b} = (a,b) \neq \varnothing$。我们将这一事实记作 $a \prec b$。

b a和b是不可区分的。直线可以由开顶点和$\hat{}$（闭的）不可区分关系生成。然而，可能会有一个顶点被添加到a 和b之间，于是 $\hat{a}$、b彼此分离（$\hat{a} \neq \hat{b}$，也就是说，$\neg(\hat{a} \sim \hat{b})$）永远如此。从这个意义上说，这条直线是 Hausdorff 的，但目前还不清楚这是否是一般定义豪斯多夫条件的最佳途径。

或许更容易将 $\kappa(R)$ 想象为由互不相交的形式区间 (a,b) 的所有上确界构成的分配格，其中 $a < b \in$有理数集；排除边 (A,a)（当 $A \prec a$时）以及 (b,B)（当 $b \prec B$时）。$\kappa(R)$ 的特化序（或等价地，$\tau(R)$ 的包含序）定义如下：

$$(a',b') \sqsubseteq (a,b) \iff a \leq a' < b' \leq b.$$

由于它们是不断缩小的区间，R中的点也可以看作形如 (δ,υ) 的有序对，其中 $\delta \in$有理数集$\nearrow$, $\upsilon \in$有理数集$\swarrow$。如果这些有序对由常量 $\delta \equiv a_{\nearrow}$ 和 $\upsilon \equiv c_{\swarrow}$ 给出，并且对于某个 b. 满足 $a \prec b \prec c$，则它们定义一个实数。

直线还带有一个由 $\hat{a} < \hat{c} \iff (\exists b)(a < b < c)$. 定义的开序。给定$x,y \in R$, 以下三种情况中恰有一种成立：

$$(x < y) \vee (x \sim y) \vee (x > y).$$

此外，令 $x \lesssim y \iff (x < y) \vee (x \sim y)$，我们可以定义闭区间

$$[x,y] = \{z \in R \mid x \lesssim z \lesssim y\},$$

它是R的闭子空间。更一般地，通过取x 的左端点和y的右端点，我们可以考虑形如 $[\delta,\upsilon]$ 的闭区间，其中 δ是递增的，υ是递减的。于是，$\min[\delta,\upsilon] = \delta \in$有理数集$\nearrow$，且 $\max[\delta,\upsilon] = \upsilon \in$有理数集$\swarrow$.

[11]这是几种可能构造中的一种。以下是两个有趣的替代方案：将 R 构造为 区间域 的子空间，如 [1], 所示；或者采用与此处给出的构造类似的构造，但使左端点和右端点分别属于不同的稠密线性序。

定理 10。 闭区间 $[\delta, \upsilon]$ 是紧的。[12]

证明。 设w_0为初始世界，设w_1为任意一个后续世界。设$x = (\alpha, \beta)$是一个实数，且$x_1 \in [\delta_1, \upsilon_1]$，也就是说，

$$(\delta_1 < \beta_1) \wedge (\alpha_1 < \upsilon_1).$$

由于 α 递增且 υ 递减，我们有：

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 < \upsilon_1 \leq \upsilon_0,$$

类似地，由于 δ 递增且 β 递减：

$$\delta_0 \leq \delta_1 < \beta_1 \leq \beta_0.$$

这表明$x_0 \in [\delta_0, \upsilon_0]$，因此 $[\delta, \upsilon]$ 是紧的。 □

作为该构造的一个特例，对于有理数 $\mathbb{Q}^i$,的每个实例，我们都构造一个与之对应的实数实例 $\mathbb{R}^i$ 。这定义了一个类型 $\mathbb{R}.$ 。如果定义了 $\mathrm{plus} : \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$，那么我们可以将其扩展为

$$\kappa(\mathbb{R}^1) \times \kappa(\mathbb{R}^2) \to \kappa(\mathbb{R}^3)$$
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

然而，这样的加法通常并不连续（即无法将素元映射为素元）。同样，对于任意选择的三个实例 $\mathbb{R}^i$ （它们分别由三个相应的实例$\mathbb{Q}^i$给出），我们需要找到三个“更具体”的实例 $\hat{}\mathbb{R}^i$ （由相应的实例 $\hat{}\mathbb{Q}^i$给出），使得可以定义加法。所谓“更具体”，是指 $\kappa(\hat{}\mathbb{R}^i) \supseteq \kappa(\mathbb{R}^i)$。实现这一点的最简单方法，是为每个实例指定四个数，用来衡量该实例的“具体程度”：

- 前两个数是界 $\min \mathbb{Q}_i$和 $\max \mathbb{Q}_i$，它们分别是从 $\mathbb{Q}_{i\swarrow}$ 得到的递减数和从 $\mathbb{Q}_{i\nearrow}$得到的递增数。
- 第三个数是勒贝格数 ε，它是 $\mathbb{R}_i$ 的边的最小长度，或者等价地

$$\varepsilon(\mathbb{R}^i) = \min_{a<b\in\mathbb{Q}^i}(b-a).$$

一个实例的勒贝格数是一个递减的正数（来自 $\mathbb{Q}$的某个其他实例）。如果a、$b \in \mathbb{Q}$满足$b - a \leq \varepsilon(\mathbb{R}^i)$，且$a \geq \min \mathbb{Q}^i$、$b \leq \max \mathbb{Q}^i$，那么（$a$、$b$）包含于 $\mathbb{R}$.的某个素元中

- 最后一个数是精度 δ，即开顶点的最大宽度：

$$\delta(\mathbb{R}^i) = \max_{a\prec b\prec c\in\mathbb{Q}^i}(c-a).$$

精度是一个变量数。不过，只要 $\min \mathbb{Q}^i$ 和 $\max \mathbb{Q}^i$ 保持常量，它就会下降。

设给定 $\mathbb{Q}^1$、 $\mathbb{Q}^2$、 $\mathbb{Q}^3$。作为陪域 $\hat{}\mathbb{Q}^3$，我们取任何比$\mathbb{Q}^3$ 更具体且满足以下条件的实例：

$$\min \hat{\mathbb{Q}}^3 \leq \min \mathbb{Q}^1 + \min \mathbb{Q}^2,$$

以及最大值的反向不等式。现在，困难在于找到合适的定义域。令 ε 为 $\hat{}\mathbb{Q}^3$ 的勒贝格数。然后， $\delta = \varepsilon/2$ 可以在另一个实例上定义，并且我们可以找到一个比 $\mathbb{Q}^1$ 更具体的实例 $\hat{}\mathbb{Q}^1$，使得 $\min \hat{}\mathbb{Q}^1 = \min \mathbb{Q}^1$,

[12]当一个闭区间的端点是实数时，它是显见的。遗憾的是，在此处所述的 TN 中，至多只能证明它与一个显见空间同构。这是因为空间的正确特化序应当是结构性的，例如可通过一个嵌入来证明。

$\max\hat{}\mathbb{Q}^1 = \max\mathbb{Q}^1$，且精度小于或等于 δ.。我们以相同的方式构造 $\hat{}\mathbb{Q}^2$。然后我们可以定义

$$\hat{\mathbb{R}}^1 \times \hat{\mathbb{R}}^2 \to \hat{\mathbb{R}}^3$$
$$(a,b)+(a',b') = (c,d),$$

其中（c，d）是满足以下条件的最小区间：$c \le a + a' < b + b' \le d$，由于（$b + b'$）−（$a + a'$）=（$b - a$）+（$b' - a'$）$\le \delta + \delta = \varepsilon$，所以它是一个素元。事实证明，连续性的证明与传统证明并没有太大不同。我们将实数之间加法运算的构造总结如下，并认为类型之间一般函数的构造也应遵循类似的路径：

- 只要有三个满足 $\min\mathbb{R}^3 \le \min\mathbb{R}^2 + \min\ \mathbb{R}^3$，$\max\ \mathbb{R}^3 \ge \max\ \mathbb{R}^2 + \max\mathbb{R}^1$ 以及 $\delta(\mathbb{R}^1) + \delta(\mathbb{R}^2) \le \varepsilon(\mathbb{R}^3)$ 的实数实例 $\mathbb{R}^1$，$\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$，加法就被唯一确定。

- 对于任意三个实数实例 $\mathbb{R}^1$，$\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$，我们都可以构造出更具体的实例 $\hat{}\mathbb{R}^1$，$\hat{}\mathbb{R}^2$，$\hat{}\mathbb{R}^3$，使其满足上述三个条件。具体做法是让陪域足够长（延伸直线），并通过缩小其点来充分提高定义域的精度（细化 直线）。

12. 归纳法

为了理解 TN 中全集的有限性，我们需要讨论归纳法。线性序 是一个离散空间N，它配有一个关系‘$\preceq$’$\subseteq N \times N$，满足：

- 自反：$x \preceq y$;
- 传递：$x \preceq y \preceq z \to x \preceq z$;
- 反对称：$(x \preceq y) \wedge (y \preceq x) \to x \equiv y$;
- 可判定且线性：$(x \preceq y) \vee (y \preceq x)$。

我们接受关于后继关系的归纳法 $m \prec n \iff (m < n) \wedge \neg(\exists k \in N)(m < k < n)$：

公理4（归纳法）。设 N 是一个最小元素为 0 的线性序，并令 $X \subseteq N$ 为其子集。

$$(0 \in X \wedge (\forall m \prec n \in N)(m \in X \to n \in X)) \to X \equiv N.$$

这一原理旨在排除经典无限序数。我们的归纳法形式允许我们在至少有一个元素具有某种可判定性质时，定义具有该性质的“最小元素”。线性序的一个特例是序数 $\mathbb{N}$，它是一类开离散线性序，满足：

$$\mathbb{N}^i \sqsubseteq \mathbb{N}^j \iff \mathbb{N}^j \text{ is a lower set of } \mathbb{N}^i.$$

我们假设存在一个也记作 $\mathbb{N}$ 的实例，它满足下一个公理：

公理5（良序原理）。设 A 是一个含元素的稳定空间（即 $A \neq \varnothing$）。那么：

$$\Diamond(\exists f : \mathbb{N} \to A)(\forall a \in A)(\exists n \in \mathbb{N})(a \equiv f(n)).$$

良序原理使我们能够枚举一个空间中的所有元素，但这只能从外部世界进行。请注意，$\mathbb{N}$ 可能是无限的，但新元素必须始终大于所有现有元素。如果希望构造一个包含实际无限集合的 TN 变体，就必须将归纳法限制在序数的一个实际无限实例 Ω上，并接受较弱形式的归纳法，而不是基于后继关系的归纳法。然而，内蕴拓扑将不再类似于点集拓扑。本节以一个简单的观察结束：

定理 11。 必然存在一个最大序数 $\max \mathbb{N}$.（它是一个递增数。）

证明。 假设对于每个序数 m，在初始世界 w 中都存在一个更大的序数 $n > m$ 。根据全知性，我们只需导出矛盾。令 w_1 为一个后续世界，在那里存在一个序数 $\omega \in \mathbb{N}_1$ 大于 $\mathbb{N}_0$. 中的所有序数。注意，$0 \in \mathbb{N}_0$ 并且，对于每个 $m \in \mathbb{N}_0$，如果 $m \prec n$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}_1$成立，那么 $n \in \mathbb{N}_0$. 。通过归纳法，我们得到 $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N}_1$，这与 ω的定义相矛盾。□

13. 应用

为了了解 TN 及相关领域（综合拓扑学、ASD）中的推理方式，本节将概述如何对普通数学中的内容进行编码。由于目前尚未完成具体细节，本文的目的只是提供启发 TN 的直觉。

首先，让我们回顾一下递增数在普通数学中出现的一些场合。虽然这些例子在合成拓扑学的传统知识中或许已为人所知，但我认为它们值得引起更广泛数学界的关注：

- 一个$n \times n$矩阵的秩是介于 0 和n之间的递增自然数。这是因为实矩阵的行列式非零是一个开条件。人们有时会说，实际上秩的定义并不明确；但更准确的说法是（至少在进行精确实数运算而非浮点运算时），秩是递增的。一个已知秩大于 1 的 2×2矩阵，等价于一个具有如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

  其中x 目前无法与 0区分，但之后可能会发现它实际上非零。不过请注意，系数取自离散域（例如 $\mathbb{Q}$ ）的矩阵，其秩是一个自然数。

- 实数直线的一个开子空间的上确界，以及实数直线的一个闭部分的下确界，都是递增数。这是因为开子空间可能扩大，而闭部分可能缩小。

- 给定黎曼流形上的一个点 p 和一个切向量 v，穿过p 且速度为v的测地线的定义域是一个开区间。随着点缩小、方向变得更加具体，定义域可能会扩大，因为更精细的测地线可能不再碰到阻碍其延伸的“障碍物”。因此，测地线的最大长度是一个递增实数。

- 开子空间 $\mathbb{R}^n$ 的勒贝格测度是一个递增数。
- 最大的自然数（或已定义的最大数）是递增的。

- 理论得以发展的“当前世界”w_c ，从理论自身的角度来看是递增的（即使w_c 只能被部分定义）；而w_c 通常也会从元理论的角度递增，但并非总是如此。

现在来看看基本的同伦论如何在 TN 中实现。我们可以用与直线类似的方式构造圆S： 将其视为一种图，其中每条边都可以细分为两条边。这次，图形成的是一个环，而不是一条直线。S中至少有 3 个顶点。对于圆的任意一个实例，都可以找到一个所需长度的直线实例，并带有一个覆盖映射 $\pi : R \to S$。 然后我们将证明：

定理12。 连续映射 $\gamma\colon R\to S$，其中R 是一条直线，可以提升为连续映射 $\hat{}\gamma\colon R\to R'$，其中 $\pi\colon R'\to S$ 是一个覆盖映射，并且 $\pi\hat{}\gamma=\gamma.\hat{\gamma}$ 的一个端点决定了另一个端点，即使 γ 经历了固定端点同伦也是如此。

考虑到基础分析与 ASD 的关系，在 TN 中进行基础分析也不足为奇。什么是可微（或 $\mathscr{C}^1$）映射 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$？它应该只是一个连续映射，并且存在另一个类型为 $F\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的连续映射，使得 $F|_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus\Delta}(x,y)=((f(y)-f(x))/(y-x)$，其中 $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x\sim y\}$ 是（闭）对角线。

连续函数 $f\colon\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$ 也可以积分：

$$\int f=\sum_{a\prec b\in\mathbb{Q}^1}(b-a)f(a,b),$$

如有必要，也可以为顶点添加权重。一个缺点是，这里的端点是有理数（或某种其他离散稠密线性序中的元素）。除此之外，就积分而言，使用定义域上的更细拓扑 似乎更合理：定义 $\kappa(\mathscr{L}(R))$ 为由 R 生成的布尔代数；更准确地说， $\mathscr{L}(R)$ 是顶点集合 $a\in$ 有理数集以及边 (a,b)（其中 $a\prec b$）上的离散拓扑空间。

本节中的定义在实践中是否可行，仍有待观察。无论如何，TN 可能面临的最大障碍，是将其扩展到并非局部紧的空间。

致谢。 作者谨向 Nik Weaver 致谢，感谢他就早期摘要进行了一次简短交流，并建议我让行文更加易于理解。

人工智能致谢。 本文的编辑或其中任何思想的生成均未借助人工智能。

参考文献

[1] A. Bauer 和 P. Taylor。《抽象 Stone 对偶性中的戴德金实数》。《计算机科学中的数学结构》，19 757 838，2009 10 1017 0960129509007695 https://paultaylor.eu/ASD/：–。dedras/ doi：。/S。URL。[2] P. Blackburn 和 J. van Benthem。《模态逻辑手册》，《逻辑与实践推理研究》第 3 卷。爱思唯尔，2007 年。[3] J. de Groot 和 I. Shillito。《作为拓扑空间逻辑的直觉主义 S4》。《逻辑与计算杂志》，35 7 030，10 2025 0955 792 10 1093 030 https://doi.org/ ( ):exae。10.1093/logcom/exae030 ISSN - X。doi：。/logcom/exae。URL。[4] M. Escard´ 2004 https://martinescardo. o。《数据类型与经典空间的合成拓扑学》，。URL。[5] M. Escard´o 和 R. Heckmann。《连续函数空间上的拓扑》。《拓扑学论文集》，26(2)，2001 年。[6] M. H. Escard´ 2001 https://arxiv.org/ o。《紧多开集的交是开集》，。URL。[7] F. Hausdorff。《集合论基础》。Chelsea Publishing Co，1949 年。[8] P. T. Johnstone。《无点拓扑的要义》。《美国数学会通报》，8(1)，1983 年。[9] P. Lipparini。《拓扑学的模型论》。《Stud Logica》，113：225–229，2025 年。doi：https://doi.org/10.1007/s11225-024-10107-3。[10] P. Martin-L¨of。《逻辑常项的含义与逻辑定律的正当化》。《北欧哲学逻辑杂志》，1(1)：11–60，1996 年。[11] G. Sambin。《形式拓扑中的若干观点》。《理论计算机科学》，305：347–408，2003 年。[12] D. S. Scott。《指称语义的定义域》。载于 M. Nielsen 和 E. M. Schmidt 编，《自动机、语言与程序设计》，第 577–610 页，柏林、海德堡，1982 年。Springer Berlin Heidelberg。ISBN 978-3-540-39308-5。

[13] R. P. Stanley。《枚举组合学》，2011 年。[14] P. Taylor。《实分析的 λ 演算》。《逻辑与分析杂志》，2(5):1–115，2010 年 8 月。doi：10.4115/jla.2010.2.5。URL https://paultaylor.eu/ASD/lamcra。[15] P. Taylor。《若干拓扑学表述中的局部紧性与基》。未发表，2018 年。URL https://www.paultaylor.eu/ASD/loccbv/。[16] 每个 ASD 模型中都蕴含一个算术宇宙 《理论计算机科学电子笔记》，122 247 296, 2005 https://paultaylor.eu/ASD/insema：–。URL S. Vickers。通过逻辑研究拓扑学。剑桥大学出版社，。[18] N. Weaver。《关于可断言性、真理与有意义性推理的形式系统》，2025a。URL https://arxiv.org/abs/2510.07641。[19] N. Weaver。《真理与有意义性》，2025b。URL https://arxiv.org/abs/2507.08289。[20] N. Weaver。《建构性可数主义》，访问于 2025 年 9 月 3 日。[17] 1989

数学系，海梅一世大学-IMAC，E-12071，卡斯特利翁，西班牙电子邮件地址：
valverdm@uji.es