段路由中的量化导致的性能退化：集中不等式分析

KaiWang和 Chee Wei Tan

arXiv:2611.32838v1 [cs.NI] 24 Nov 2026

摘要——**在段路由（SR）中，必须对分流比例进行量化，以满足实际的硬件精度约束。然而，现有工作尚未针对这种量化所导致的性能退化建立上界。本文提出源无关系统舍入方法，该方法允许共享同一目的地的流共享同一策略，从而减少内存消耗；同时，该方法通过一组二的幂次项近似目标分流比例，以满足硬件精度上限。我们基于集中不等式，通过概率论论证明确分析了将分流比例量化为**1/64 **的整数倍所产生的影响，并推导出由此导致的性能退化上界。我们在真实网络拓扑和流量统计上开展了大量实验，验证了我们的分析。**

索引词——**伯恩斯坦不等式、量化、段路由（SR）、段路由域（SRD）、分流比例、系统舍入。**

I. 引言

SEGMENT 源路由（SR） [4] 是一种源路由架构，它在分组头中编码有序段列表（SL），以预先确定特定粒度下的路由。SR方案只需入口节点维护SR策略并构建SL，从而简化流量工程（TE）、提升网络可扩展性和鲁棒性，并减轻控制平面的负担。

SR架构专为适应硬件基础设施的灵活性而设计：既可以利用现有的多协议标签交换（MPLS）网络（SR-MPLS），通过IGP扩展提供向后兼容性，以实现更平稳的迁移；也可以原生构建于无处不在的IPv6 网络（SRv6）之上，从而释放高级网络编程能力 [5]。SR-MPLS与SRv6在数据平面上存在核心差异：SR-MPLS使用MPLS标签作为段标识符（SID），并将路由编码为标签栈；而SRv6则使用128位IPv6地址作为段标识符，并通过段路由头部（SRH）携带SL。控制平面也存在类似差异，SR-MPLS仍需协调一个全局一致的段路由全局块（SRGB）来分配段标识符，而 SRv6 通过使用 IPv6 地址前缀作为段标识符，彻底消除了标签协调，并且能够像常规 IPv6 路由一样汇总段标识符。在本研究中，我们采用更先进的 SRv6，并基于其开展分析；SRv6 天然具备更强的灵活性和可扩展性。

稿件于2026年11月xx日收到；于202x年xxxx月xx日修订；于202x年xxxx月xx日接受；经 IEEE Communications Letter 副编辑 xxxx. xxxx 批准。出版日期：202x年xxxx月xx日；当前版本日期：202x年xxxxxx。该研究部分获得新加坡教育部学术研究基金第二级 MOE-T2EP20224-0009 和南洋理工大学启动经费的支持。（通讯作者：*Chee Wei Tan*。）Kai Wang 和 Chee Wei Tan 任职于新加坡南洋理工大学（NTU）计算与数据科学学院（CCDS），邮编639798（wang1899@e.ntu.edu.sg，cheewei.tan@ntu.edu.sg）。

随着互联网不断发展，段路由域（SRD） [6] 应运而生，主要用于提升可扩展性、加强管理控制并实现安全隔离。一般而言，一个 SRD 由多个支持段路由的节点组成，其内部路由细节可对外隐藏。为此，例如，SRD 使用绑定段标识符（BSID），使边界节点能够处理域内路由，并将 BSID 扩展为完整路径，以适应内部变化。在硬件逐步迁移的过程中，混合型 SR/IP 网络由此出现，支持段路由的节点与传统 IP 节点互通，但这对 SRD 拓扑有重要影响：SR-MPLS 要求每个 SRD 构成一个连通子网，因为 IP 节点会丢弃数据包；而 SRv6 则通过允许 IP 节点忽略 SRH 并按照传统内部网关协议规则转发数据包，解除这一限制 [7]。因此，支持段路由的节点可以分散部署于 SRv6 [7]，，尽管在管理上仍不希望 SRD 彼此分割 [4]。图 1 展示了混合 IPv6 网络中的一条典型路径，其中 SRD 2001 内的支持段路由的节点为 2001:1–2001:3。

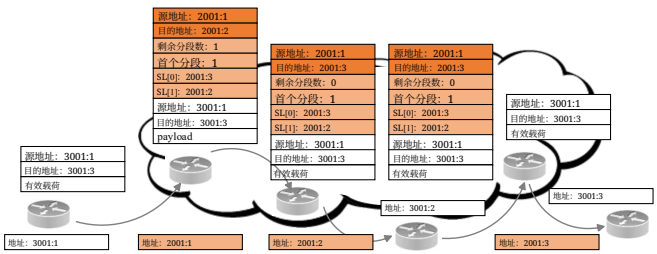


图 1. SRD 2001由 SRv6 节点 2001:1–2001:3 组成，IP 域由 IP 节点 3001:1–3001:3 组成。每个分组示意图表示数据包经出口边缘发出时的分组头，其中字段分别包括外层/封装头部（深橙色）、SRH（橙色）和有效载荷（包括内层头部等），且活动段始终出现在外层头部中。

在支持多 SRD 分区的 SR/IP 混合网络中，每个 SR 节点都可以在转发信息库（FIB）中编程配置段标识符（SIDs）。此外，SRD 边界节点（即入口/出口节点）比内部节点承担更大的职责，例如将流量流映射到 SR 策略，以及执行 SRH 移除和数据包解封装 [8]。转发信息库使用三态内容寻址存储器（TCAM），这是一种特别适合对目的地址执行快速最长前缀匹配（LPM）查找的设备。尽管 TCAM 能够实现快速的 SID 查找，但其成本相对较高、功耗较大且容量有限，因此节省空间始终是工程上的挑战。此外，

硬件能够支持的等价路径数量存在严格上限。例如，某些 Extreme Networks 交换机最多支持 64 个 ECMP 网关 [2], , 而英伟达的专用集成电路支持大量 ECMP下一跳，但哈希桶数量只能配置为从 64 到 4096 [1] 的二的幂次项；这些数值上限直接决定了分流比例所能达到的最细粒度。

在这项工作中，我们考虑结合两种简单方案来缓解TCAM限制：允许目的地相同的流共享同一FIB表项，这是思科等商业厂商采用的一种常见做法 [3]；此外，采用二的幂次项集合来近似目标分流比例，在遵循硬件精度上限的同时降低TCAM开销 [10]。我们通过概率论论证，运用集中不等式对分流比例量化为二的幂分数（如1/64）的整数倍所造成的后果进行明确分析，并为性能下降给出上界；同时开展了大量实验，以验证我们的分析。据作者所知，目前尚无类似工作给出过这样的界。

II. 系统模型

我们假设采用SRv6渐进部署过程中的常见设置。一个SR/IP混合网络 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$由SR/IP节点 $\mathcal{V}$ 和有向边 $\mathcal{E}$组成。SR节点支持SRv6，并被划分为 $K \geq 1$ 个互不相交的自治SRD；而IP节点仅支持原生IPv6。给定一个SR策略，其中逐流分流比例已通过线性规划（LP）等任意技术预先计算，以改进流量工程（TE），入口节点 r 可以在本地计算与源无关的分流比例，并将所有目的地相同的流引导至相同的与源无关策略中。为方便起见，我们在表I中列出常见的符号和记法。

表 I 常用符号

符号	描述
SRD(n)	SR 节点 n 所属的 SRD
s, d, r	源节点 s、目的地节点 d、边界节点 r
e	边 $e = (e_1, e_2)$
t^{sd}	从 s 到 d的流量强度
t_r^{sd}	通过入口节点 r进入 SRD(r) 的 t^{sd} 部分
t_{re}^{sd}	经过边 e的t_r^{sd}部分
t_r^d, t_{re}^d	$\sum_s t_r^{sd}$、$\sum_s t_{re}^{sd}$
路径$_{r,n}^d$	流量 t_r^d 的第 n 条路径，直到到达下一个入口节点或 d
路径$_{s,n}^{sd}$	流量t_s^{sd}的第 n 条路径（即 t^{sd}），直到到达下一个入口节点或 d
$t_{r,n}^d$ $p_{r,n}^d$	部分，流量 t_r^d 经过路径$_r^d$的比例 ,n
$\hat{f}$	由量化引起的 f 对应的随机变量

By c惯例中，强度/比例表示通信流量和分流比例 m ean比率。

为此，与 SRD(r) 关联的入口节点 r 会检查数据包的目的地，收集相应的流强度统计信息，并计算分流比例，如下所示

$$p_{r,n}^d = \frac{\sum_s t_{r,n}^{sd}}{\sum_n \sum_s t_{r,n}^{sd}}, \tag{1}$$

其中，(r, n)索引经由入口节点 r进入 SRD(r) 的不同路径（按字典序排序），并且 $t_{r,n}^{sd}$ 表示经由 r进入 SRD(r)，并沿路径 (r, n)转发的流量强度 t^{sd} 占比（例如，以比特每秒或数据包每秒为单位）。显然，源无关的分流比有可能将所需 SR 策略的数量最多减少 afactorof $O(|\mathcal{V}|)$。

量化步骤应确保所有生成的 $\hat{p}_{r,n}^d$ 都是 $1/64$ 的整数倍，同时满足非负约束 $\hat{p}_{r,n}^d \geq 0$和归一化约束 $\sum_n \hat{p}_{r,n}^d = 1$。简单的单独舍入与调整方案会引入偏差；多项伯努利抽样虽然是无偏的，但无法保证舍入误差 $|\hat{p}_{r,n}^d - p_{r,n}^d|$ 严格有界，因此容易产生较高方差。核心思想是系统舍入（亦称依赖舍入或系统抽样），我们在引理 1 和算法 1 中对此进行了概述。

算法1 和约束下的系统舍入 **要求**：多项伯努利分布 $p = (p_{r,1}^d, \ldots, p_{r,N}^d)$，其中 $p_{r,n}^d \geq 0$ 以及 $\sum_{n=1}^N p_{r,n}^d = 1$。**确保**：整数 $(q_1, \ldots, q_N)$ 和 $\hat{p}_{r,n}^d = q_n/64$，使得 $\sum_{n=1}^N \hat{p}_{r,n}^d = 1$, $\mathbb{E}[\hat{p}_{r,n}^d] = p_{r,n}^d$，以及 $|\hat{p}_{r,n}^d - p_{r,n}^d| < 1/64$。**1:** 对于所有 $n = 1, \ldots, N$， $x_n \leftarrow 64\, p_{r,n}^d$ **2:** $s_0 \leftarrow 0$ **3:** 对于 $n = 1$ 到 N，执行 **4:** $s_n \leftarrow s_{n-1} + x_n$ **5:** 结束循环 **6:** 抽取 $U \sim \mathrm{Unif}[0, 1)$ **7:** 对于 $n = 1$ 到 N，执行 **8:** $q_n \leftarrow \lfloor s_n + U \rfloor - \lfloor s_{n-1} + U \rfloor$ **9:** $\hat{p}_{r,n}^d \leftarrow q_n/64$ **10:** 结束循环 **11:** 返回 $(\hat{p}_{r,1}^d, \ldots, \hat{p}_{r,N}^d)$

引理 *1*（带和约束的系统舍入）。系统舍入算法生成的 ($\hat{p}_{r,1}^d$, ..., $\hat{p}_{r,N}^d$) 均为非负、归一化、无偏，且具有有界误差。**证明。** $s_n \geq s_{n-1}$ 蕴含 $q_n \geq 0$，并且

$$\sum_{n=1}^N q_n = \sum_{n=1}^N (\lfloor s_n + U \rfloor - \lfloor s_{n-1} + U \rfloor) = 64,$$

由于各项向下取整后形成望远镜求和，对于所有 $U \in [0, 1)$ 均成立。对于任意实数 $t \geq 0$ 和 $U \sim \mathrm{Unif}[0, 1)$，很容易验证 $\mathbb{E}[\lfloor t + U \rfloor] = t$，因此根据期望的线性性，$\mathbb{E}[q_n] = s_n - s_{n-1} = x_n$。注意，如果 $q_n \in \{\lfloor x_n \rfloor, \lceil x_n \rceil\}$，则 $|\hat{p}_{r,n}^d - p_{r,n}^d| = |q_n - x_n|/64 < 1/64$。□

每个入口节点 r 都可以使用式 (1) 在本地计算与源无关的分流比，并针对每个目的地址 d 使用算法 1 对其进行量化。建立与源无关的策略后，入口节点 r 会在其 SR 策略表中查找目的 IP 地址，并使用相应的 $\hat{p}_{r,n}^d$ 转发流。

III. 性能退化界分析

在正式分析之前，我们重申几项实务约定。首先，在包含多个 SRD 的 SR/IP 混合网络 G 中，源自 IP 节点的数据包无法参与 SR，而源自 SR 节点的数据包可能有多个入口节点（即源/域入口）和多个

出口节点（即目的地/域出口）。其次，SR 允许多次经过同一个 SRD，以利用外部路径提升 TE 性能 [6], ，如图 1 中的 IP 节点 3001:2 所示；然而，为避免路由环路和违反段列表深度（SLD）限制，不允许策略嵌套 [8], ，并且我们假设在数据包于出口节点解封装之前，当前 SRD 之外采用默认IP路由。这项要求限制了级联误差并保证了性能，因为在包含 K 个 SRD 的网络中，任意 SR 路由最多会发生 K 次量化。第三，虽然允许多次经过，但我们严格禁止路由环路。第四，我们采用算法 1 中的系统抽样方法，将分流比舍入为 1/64 的整数倍，以符合硬件精度上限。

设 t_r^{sd}为 t^{sd} （以流量强度计）中经由入口节点 r进入SRD（r）的部分，并设 t_{re}^{sd} 为 t_r^{sd}中经过边 e的部分。只有当分流比率 t_{re}^{sd}/t_r^{sd}在入口节点 r处计算时，才能明确定义 t_{re}^{sd}，此时可写为 $e \in$ SRD（r）；从这个意义上说，对于流 t^{sd}，任意一条边 e 都可能属于多个SRD。给定通信流量 t^{sd} 和入口节点 r，任意一条边 e 所承载的通信流量可能来自两类源：源自SRD（r）内部的通信流量（即 $r = s$）和源自SRD（r）外部的通信流量（即 $r \neq s$）。对于任意部分ˆ或分数 f，令 f 表示其由量化所诱导的版本。

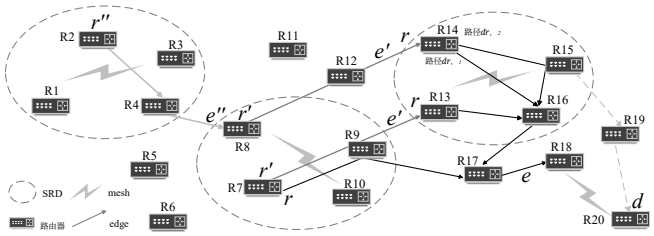


图2. SR/IP混合网络中SRD的示意图。我们主要关注的边 e可能位于SRD内部或外部；然而，所有经过 e 到 d 的SR流都必须对应入口节点 r ，并且可能还对应 r'等。

对于入口节点 r，我们分别在式（2）中提出 t_{re}^d 的前向分解，以及在式（3）中提出 t_r^d 的后向分解；这两种分解对原始版本和量化版本均成立，具体如图 2 所示：

$$t_{re}^d = \sum_n \mathbb{I}[e \in \mathrm{path}_{r,n}^d] t_r^d p_{r,n}^d, \tag{2}$$

$$t_r^d = \sum_{r',e':e'_2=r,e' \in \mathrm{SRD}(r')} t_{r'e'}^d, \tag{3}$$

其中，我们使用 r'，e' 分别表示所有可能的直接前驱 SRD 的入口节点和边。我们在引理 2 中证明，逐边流量仍然保持无偏。

引理 *2*（量化产生的无偏逐边流量）。对于任意边 e，使用量化后的 $\hat{}p_{r,\ n}^d$时，逐边流量 $\hat{}\ t_e$ 仍然是无偏的。

证明。利用条件期望 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}_X[X|Y]]$，令 Y 为 $\hat{}t_r^d$，并注意到 $\hat{}p_{r,\ n}^d$ 与 $\hat{}t_r^d$相互独立，

$$\mathbb{E}[\hat{t}_{re}^d] = \sum_n \mathbb{I}[e \in \mathrm{path}_{r,n}^d] \mathbb{E}[\hat{t}_r^d] p_{r,n}^d.$$

对式 (3) 取期望，

$$\mathbb{E}[\hat{t}_r^d] = \sum_{r',e':e'_2=r,e' \in \mathrm{SRD}(r')} \mathbb{E}[\hat{t}_{r'e'}^d].$$

利用式 (2) 和式 (3) 递归展开各项求和，可知 $\mathbb{E}[\hat{}t_{re}^d] = t_{re}^d$。于是 $\mathbb{E}[\hat{}t_e] = \mathbb{E}[\sum_{d,r} \hat{}t_{re}^d] = \sum_{d,\ r} t_{re}^d = t_e$对任意 e。□

在刻画性能下降之前，我们提出引理 3 这一有用事实，并引入伯恩斯坦不等式，以利用方差得到相当紧的尾界。

引理 *3*（概率部分和的方差上界）。对于由算法 1 生成的 $\{\hat{} p_{r,n}^d\}$，以及任意 $\mathcal{S} \subset \{1, \ldots, N\}$，$\mathrm{Var}(\sum_{n \in \mathcal{S}} \hat{}p_{r,n}^d)$ 的上界为 $(1/4)(1/64)^2$。证明。对于一个连续区块 $\mathcal{S} = \{N_1, \ldots, N_2\}$，利用算法 1 第 6–9 行进行望远镜求和可得

$$\sum_{n \in \mathcal{S}} \hat{p}_{r,n}^d = \big(\lfloor \sum_{n=1}^{N_2} x_n + U \rfloor - \lfloor \sum_{n=1}^{N_1-1} x_n + U \rfloor\big)/64.$$

因此，$\mathrm{Var}(\sum_{n \in \mathcal{S}} \hat{}p_{r,n}^d)$ 等价于对单个概率 $\sum_{n=N_1}^{N_2} p_{r,n}^d$ 进行量化所得的方差，即

$$\mathrm{Var}\big(\textstyle\sum_{n=N_1}^{N_2} \hat{p}_{r,n}^d\big) = \{\sum_{n=N_1}^{N_2} p_{r,n}^d\}\big(1 - \{\sum_{n=N_1}^{N_2} p_{r,n}^d\}\big)/(64)^2,$$

其中，$\{\cdot\}$ 表示小数部分，上界为 $(1/4)(1/64)^2$。对于由 R 个连续区块组成的一般 $\mathcal{S}$，其方差不会超过 $R^2(1/4)(1/64)^2$。由于 $\mathcal{S}$ 最多由 $\lceil N/2 \rceil$ 个连续区块组成，因此可得方差上界 $\mathrm{Var}(\sum_{n \in \mathcal{S}} \hat{}p_{r,n}^d) \leq (\lceil N/2 \rceil^2/4)(1/64)^2$。此外，波波维丘不等式已证明，对于随机变量 $X \in [a, b]$，$\mathrm{Var}[X] \leq (b-a)^2/4$。综上所述，我们有 $\mathrm{Var}(\sum_{n \in \mathcal{S}} \hat{}p_{r,n}^d) \leq \min\{(\lceil N/2 \rceil^2/4)(1/64)^2, 1/4\}$。 □备注。相比之下，64 次多项伯努利抽样的均值产生的方差为 $\sum_{n \in \mathcal{S}} \hat{}p_{r,n}^d(1 - \sum_{n \in \mathcal{S}} \hat{}p_{r,n}^d)/64 \leq 1/256$；只要满足 $N \leq 16$，该值就会超过引理 3 给出的上界。然而在实践中，我们只选择少量路径 $^d_{r,n}$，其数量远小于该阈值。

接下来，我们在引理 4 中证明，逐边流量偏离其均值的概率呈指数级小。

引理 *4*（量化导致逐边流量偏差的指数级小概率）。对于任意边 e，逐边流量 t_e 偏离 t_e 超过 $t > 0$ 的概率呈指数级小。也就是说，

$$\Pr\big(\big|\textstyle\sum_d (\hat{t}_e^d - t_e^d)\big| \geq t\big) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2A\sum_d (t^d)^2 + 2t \max_d t^d/3}\right),$$

其中 $\Delta = \min\{(\lceil N/2 \rceil^2/4)(1/64)^2,\ 1/4\}$ 根据引理 3，$A = (1+\Delta)^K - 1$ 遍历所有满足 $t_e^d > 0$ 的可能目的地，且 $t^d = \sum_s t^{sd}$。

证明。对于任意一条边 e，我们尝试获得 $\mathrm{Var}(\hat{}t_e)$ 的上界。为此，我们利用条件方差 $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}_Y[\mathrm{Var}_X(X|Y)] + \mathrm{Var}_Y(\mathbb{E}_X[X|Y])$ 对 $\mathrm{Var}(\hat{}t_r^d)$ 进行分解，并将 Y 与 $\{\hat{}t_{r'}^d\}$ 对应起来，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{t}_r^d) &\overset{a}{=} \mathbb{E}_Y[\mathrm{Var}(\textstyle\sum_{r',e':e'_2=r,e' \in \mathrm{SRD}(r')} \hat{t}_{r'e'}^d | Y)] \\
&\quad + \mathrm{Var}_Y(\mathbb{E}_Y[\textstyle\sum_{r',e':e'_2=r,e' \in \mathrm{SRD}(r')} \hat{t}_{r'e'}^d | Y]) \\
&\overset{b}{=} \textstyle\sum_{r'} \mathbb{E}_Y[\mathrm{Var}(\sum_{e':e'_2=r,e' \in \mathrm{SRD}(r')} \hat{t}_{r'e'}^d | Y)] \\
&\quad + \textstyle\sum_{r'} \mathrm{Var}_Y(\mathbb{E}_Y[\sum_{e':e'_2=r,e' \in \mathrm{SRD}(r')} \hat{t}_{r'e'}^d | Y]), \quad (4)
\end{aligned}$$

其中，步骤 (a) 根据公式 (3) 得出，步骤 (b) 则源于在给定 Y 的条件下所有 r' 之间的独立性。考虑公式 (4) 右侧第一项中的被加项，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Y[\mathrm{Var}(\textstyle\sum_{e':e'_2=r,e'\in\mathrm{SRD}(r')}\hat{t}^d_{r'e'}|Y)]\\
&\overset{c}{=}\mathbb{E}_Y[\mathrm{Var}(\textstyle\sum_{e':e'_2=r,e'\in\mathrm{SRD}(r')}\sum_n\mathbb{I}[e'\in\mathrm{path}^d_{r',n}]\hat{t}^d_{r'}\hat{p}^d_{r',n}|Y)]\\
&\overset{d}{=}\mathbb{E}_Y[\mathrm{Var}(\textstyle\sum_n\mathbb{I}[e'_2=r,e'\in\mathrm{SRD}(r'),e'\in\mathrm{path}^d_{r',n}]\hat{t}^d_{r'}\hat{p}^d_{r',n}|Y)]\\
&\overset{e}{\le}\Delta\mathbb{E}[(\hat{t}^d_{r'})^2],
\end{aligned}\tag{5}$$

其中，步骤 (c) 通过代入式 (2) 得出；步骤 (d) 化简为单重求和，这是因为给定 r'，对于大多数 n，至多只有一个 $e'\in\mathrm{path}^d_{r',n}$ 可以成立；步骤 (e) 则由引理 3 得出。考虑式 (4) 右侧第二项中的被加项，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}_Y(\mathbb{E}[\textstyle\sum_{e':e'_2=r,e'\in\mathrm{SRD}(r')}\hat{t}^d_{r'e'}|Y)]\\
&=\mathrm{Var}_Y(\mathbb{E}[\textstyle\sum_{e':e'_2=r,e'\in\mathrm{SRD}(r')}\sum_n\mathbb{I}[e'\in\mathrm{path}^d_{r',n}]\hat{t}^d_{r'}\hat{p}^d_{r',n}|Y)]\\
&=\mathrm{Var}_Y(\mathbb{E}[\textstyle\sum_n\mathbb{I}[e'_2=r,e'\in\mathrm{SRD}(r'),e'\in\mathrm{path}^d_{r',n}]\hat{t}^d_{r'}\hat{p}^d_{r',n}|Y)]\\
&=\mathrm{Var}_Y(\textstyle\sum_n\mathbb{I}[e'_2=r,e'\in\mathrm{SRD}(r'),e'\in\mathrm{path}^d_{r',n}]\hat{t}^d_{r'}p^d_{r',n})]\\
&\le\mathrm{Var}[(\hat{t}^d_{r'})^2],
\end{aligned}\tag{6}$$

其中，最后一步利用了 $0\le\sum_n\mathbb{I}[e'_2=r,e'\in\mathrm{SRD}(r')\ e'\in\mathrm{path}^d_{r',\ n}]p^d_{r',\ n}\le 1$。由于 $\mathbb{E}[(\hat{}t^d_r)^2]=(\mathbb{E}[\hat{}t^d_r])^2+\mathrm{Var}(\hat{}t^d_r)$ 且 $\mathbb{E}[\hat{}t^d_r]=t^d_r$，我们通过将式 (5) 和式 (6) 代入式 (4)，递归地分解 $\mathrm{Var}(\hat{}t^d_r)$ 这一项，

$$\mathrm{Var}(\hat{t}^d_r)\le\textstyle\sum_{r'\in p(r)}(1+\Delta)\mathrm{Var}(\hat{t}^d_{r'})+\sum_{r'\in p(r)}\Delta(t^d_{r'})^2.\tag{7}$$

对于每个 r'，类似地，我们可以定义 r''，使其满足

$$\mathrm{Var}(\hat{t}^d_{r'})\le\textstyle\sum_{r''\in p(r')}(1+\Delta)\mathrm{Var}(\hat{t}^d_{r''})+\sum_{r''\in p(r')}\Delta(t^d_{r''})^2,\tag{8}$$

将式（8）代入式（7），可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{t}^d_r)\le&\textstyle\sum_{r'\in p(r)}(1+\Delta)\sum_{r''\in p(r')}(1+\Delta)\mathrm{Var}(\hat{t}^d_{r''})\\
&+\textstyle\sum_{r'\in p(r)}(1+\Delta)\sum_{r''\in p(r')}\Delta(t^d_{r''})^2+\sum_{r'\in p(r)}\Delta(t^d_{r'})^2\\
=&\textstyle\sum_{r''\in pp(r)}(1+\Delta)^2\mathrm{Var}(\hat{t}^d_{r''})\\
&+\textstyle\sum_{r''\in pp(r)}\Delta(1+\Delta)(t^d_{r''})^2+\sum_{r'\in p(r)}\Delta(t^d_{r'})^2,
\end{aligned}\tag{9}$$

其中，$p(r)$ 表示 r之前的紧邻前驱 SRD 中所有可能的入口节点，显然，双重求和$\sum_{r'\in p\ (r)}\ \sum_{r''\in p\ (r')}$ 可合并为单重求和 $\sum_{r''\in pp\ (r)}$。我们可以将递归完全展开，回溯至源 SRD，得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{t}^d_r)\le&\textstyle\sum_{r^{K-1}\in p^{K-1}(r)}(1+\Delta)^{K-1}\mathrm{Var}(\hat{t}^d_{r^{K-1}})\\
&+\textstyle\sum_{r^{K-1}\in p^{K-1}(r)}\Delta(1+\Delta)^{K-2}(t^d_{r^{K-1}})^2\\
&+\textstyle\sum_{r''\in pp(r)}\Delta(1+\Delta)(t^d_{r''})^2+\sum_{r'\in p(r)}\Delta(t^d_{r'})^2,
\end{aligned}\tag{10}$$

其中，上标 $K-1$ 表示 $(K-1)$ 重撇号。通过对 $\{\hat{}t^d_r\}$进行条件化，我们可以验证

$$\mathrm{Var}(\hat{t}^d_e)=\mathrm{Var}(\textstyle\sum_r\hat{t}^d_{re})\le\sum_r\big((1+\Delta)\mathrm{Var}(\hat{t}^d_r)+\Delta(t^d_r)^2\big).\tag{11}$$

由于 $t^d_{r^{K-1}}$ 是入口节点在第一个 SRD 中为 r^{K-1} 的、流向 d 的流的总和，因此 r^{K-1} 必须是源节点 $s_\circ$ 因此，$t^d_{r^{K-1}}=t^{sd}$ 保持不变且不受量化影响，所以 $\mathrm{Var}(\hat{}t^d_{r^{K-1}})=0$。将公式 (10) 代入公式 (11)，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{t}^d_e)\le&\textstyle\sum_{r^{K-1}\in p^{K-1}(r)}\Delta(1+\Delta)^{K-1}(t^d_{r^{K-1}})^2+\dots\\
&+\textstyle\sum_{r'\in p(r)}\Delta(1+\Delta)(t^d_{r'})^2+\sum_r\Delta(t^d_r)^2.
\end{aligned}\tag{12}$$

对于给定的边 e，t^d_r 表示所有流向 d、经过入口节点 r 和 $e\in$ SRD(r) 的流，因此 $\sum_r t^d_r\le t^d$。

我们的分析依赖于以下事实：对于任意 $1\le k\le K-1$，$\sum_r\sum_{r^k\in p^k(r)}\ t^d_{r^k}\le\sum_r t^d_r$。为理解这一点，考虑所有 $r'\in p(r)$。求和 $\sum_r\sum_{r'\in p(r)}\ t^d_{r'}$ 表示到达 d 且紧接着经过入口节点 r'、位于入口节点 r之前的所有流量。当每个此类流量都具有 r' 先前的 r时，等式成立；而当其中一些流量不包含 r'，即它们源自 r 时，严格不等式成立。然后，根据式（12）可直接得到 $\mathrm{Var}(\hat{}t^d_e)\le\big((1+\Delta)^K-1\big)(t^d)^2$。采用相同的论证，对于任意 $1\le k\le K-2$，$\sum_r\sum_{r^{k+1}\in p^{k+1}(r)}\ t^d_{r^{k+1}}\le\sum_r\sum_{r^k\in p^k(r)}\ t^d_{r^k}$，我们也有这一关系，不过目前尚未使用。在伯恩斯坦不等式（见附录 A）中，将 n 视为 d，将 N 视为满足 $t^d_e>0$的 d 集合，并将X_n 视为 $\hat{}t^d_e-t^d_e$；注意，根据引理 2，对于不同的 d，所有 $\hat{}t^d_e$ 都被独立量化，$\mathbb{E}[\hat{}t^d_e-t^d_e]=0$，且 $|\hat{}t^d_e-t^d_e|\le t^d$，由此即可得到结论。□

IV. 仿真结果

我们在 ta2 实例上进行实验，它是可生存网络设计库（SNDlib）中最大的标准基准 [9]，包含 65 个节点、108 条链路和 1869 个需求。其规模和稠密的需求矩阵使其成为研究路由和量化选择如何大规模影响逐链路流量的合适测试平台。我们改变两个超参数：SRD 的数量 $K\in\{5,10\}$，它控制 SRD 划分的拓扑粒度；以及每个需求的路由数 $N\in\{4,8\}$，它通过将需求分散到多条路径上来影响量化误差。量化网格固定为 $1/64$，与实现中的硬编码设置一致，以便单独考察 K 和 N 的影响。

实验结果如图所示。x轴表示每条网络边的整数索引，每个整数刻度对应 ta2 网络的一条物理边。该索引不是物理量，而是对边进行固定编号，因此同一条边对应的两个采样序列和伯恩斯坦标记会落在相同的水平位置。y轴表示百分比。对于两个采样序列，它表示量化后与未量化流量强度之差的绝对值，占未量化流量强度的百分比；对于三个伯恩斯坦序列，它表示相应阈值 t除以未量化流量强度后所得的百分比。同一分母使这两个量可直接在同一y轴上进行比较。三个伯恩斯坦序列分别对应概率值 0.05、0.1 和 0.5。

通过比较这些图，我们可以得出以下结论。

- 首先，源感知拆分比率可得到更紧的伯恩斯坦界。这是因为，在伯恩斯坦不等式的求和项中，将针对固定目的地 d 的所有源的聚合s 替换为特定（s，d）对上的相应求和。尽管提高了界的紧致性，但这也牺牲了源无关拆分的主要优势，即只需在三态内容寻址存储器中缓存更少的分流比例。

- 其次，系统量化比多伯努利量化具有更有利的误差分布，后者

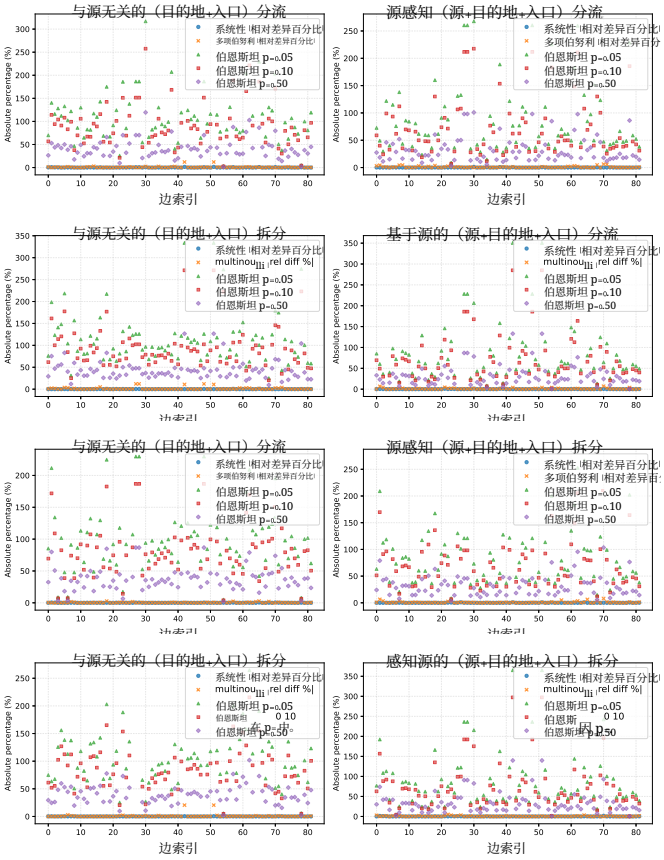


图3. 不同组合下相对于边索引的相对误差（百分比）：纵向为 K，N，横向为系统性/多项伯努利抽样。

表现出更大的方差。多项伯努利抽样抽取固定数量的独立样本，而对于真实分流比例与量化分流比例之间的绝对差，目前没有可用的紧确界；缺乏紧确界可能导致显著的方差。

- 第三，几乎所有数据点都落在与 0.5 概率界相对应的范围内，这表明该界并不紧。如果该界接近紧界，那么大约一半的数据点应位于 0.5 概率范围内，另一半则在其范围之外。因此，观察到的集中现象表明，对于本实例而言，伯恩斯坦阈值较为保守，至少在此处考虑的超参数设置下是如此。

V. 结论与未来工作

在本研究中，我们分析了为遵循实际硬件精度约束而对 SR 分段比例进行量化给三态内容寻址存储器（TCAM）带来的影响，同时应对容量限制和能耗方面的挑战。随着 SR 的应用范围从互联网和数据中心扩展到天地一体化网络及电力通信网络，本研究的研究方法和成果将惠及更广泛的受众，并产生更大的影响。随着高维概率不等式的发展，上界与实证结果之间的差距可以进一步缩小。

致谢

本研究部分获新加坡教育部学术研究基金第二级 MOE-T2EP20224-0009 及南洋理工大学启动基金资助。

附录 A：伯恩斯坦不等式

定理 *1*（伯恩斯坦不等式）。对于独立随机变量 $\{X_n\}_{n=1}^{N}$，满足 $\mathbb{E}[X_n]=0$，且对所有 n 均几乎处处有 $|X_n|\le M$，令 $\sigma^2=\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Var}(X_n)$，则对于任意 $t>0$，

$$\Pr\left(\left|\sum_{n=1}^{N} X_n\right|\ge t\right)\le 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2+2Mt/3}\right).$$

参考文献

[1] 英伟达文档，“等成本多路径负载共享——硬件等价多路径”，*Cumulus Linux* 文档，2024年。 [在线]。网址：https://docs.nvidia.com/networking-ethernet-software/cumulus-linux-41/Layer-3/Equal-Cost-Multipath-Load-Sharing-Hardware-ECMP/ [2] Extreme Networks，“配置 iproute 共享最大网关数”，*Switch Engine v33.4.1* 命令参考，2025年。 [在线]。网址：https://documentation.extremenetworks.com/ [3]思科文档，“实施 Cisco 快速转发”，*Cisco NCS 540* 系列路由器 *IP* 地址与服务配置指南，*IOS XR* 版本 *7.2.x*，2020年。 [在线]。网址：https://www.cisco.com/c/en/us/td/docs/iosxr/ncs5xx/ipaddress/72x/b-ip-addresses-cg-72x-ncs540.pdf [4] C. Filsfils、N. K. Nainar、C. Pignataro、J. C. Cardona、P. Francois，“分段路由架构”，载于*GLOBECOM*，2015年12月，第1–6页。[5] Z. N. Abdullah、I. Ahmad 和 I. Hussain，“软件定义网络中的段路由：综述”，*IEEE* 通信调查与教程，第21卷第1期，第464–486页，2019年。[6] A. Cianfrani、M. Listanti 和 M. Polverini，“从流量工程视角看在 ISP 网络中增量部署段路由”，*IEEE/ACM* 网络汇刊，第25卷第5期，第3146–3160页，2017年10月。[7] Y. Tian、Z. Wang、X. Yin、X. Shi、Y. Guo、H. Geng 和 J. Yang，“利用深度强化学习，在部分部署段路由的 IPv6 网络中进行流量工程”，*IEEE/ACM* 网络汇刊，第28卷第4期，第1573–1586页，2020年8月。[8] A. Brundiers、T. Sch¨uller 和 N. Aschenbruck，“深入探讨段路由的中点优化”，*IEEE* 通信学会开放期刊，第5卷，第1447–1468页，2024年2月。[9] S. Orlowski、R. Wess¨aly、M. Pi´oro 和 A. Tomaszewski，“SNDlib 1.0——可生存网络设计库”，*Networks*，第55卷第3期，第276–286页，2010年。 [在线]。网址：https://sndlib.put.poznan.pl [10] N. Kang、M. Ghobadi、J. Reumann、A. Shraer 和 J. Rexford，“商用交换机上的高效流量分割”，载于第*11*届 *ACM* 新兴网络实验与技术会议（*CoNEXT '15*），2015年12月，第6:1–6:13页。