arXiv:2611.32847v1 [math.MG] 24 Nov 2026

双曲 p重心的尖锐刚性

A. ELEZI

Abstract. 我们研究双曲平面中的双曲 p重心 C_p $0 \le p \le \infty$，其对应于 n个点 α_1，……， α_n。对于 $0 < p < \infty$， C_p使到这些点的距离的双曲余弦的 p次方之和达到极小。对于端点， C_0 使这些余弦的乘积达到极小，而 C_∞ 使其最大值达到极小。中心映射 $p \mapsto C_p$ 在每个有限参数处都是实解析的。当且仅当对于距 P的每个正距离，位于该距离处各点的单位方向之和为零时，点 P 才是每个参数对应的中心。如果该映射非恒定，则方程 $C_p = P$对于每个 P在 $[0,\infty]$ 中至多有 $n-2$ 个解；当这些点位于一条测地线上时，至多有 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 个解。有限解按重数计数；当 $C_\infty = P$时，端点贡献一个解。每个界都可以在任意小的圆盘中达到，并可指定有限参数及其重数，也可以包含或不包含端点。证明使用了关于距离壳层的指数和、径向权核的变差递减性质以及 Hobby–Rice 定理。对于全复实二元形式的上半平面根， C_0 是 Julia 零点，而 C_1 是双曲零点。当次数不超过六时，两者重合会迫使中心映射为常值；但在每个不小于八的偶数次中都存在反例。对于黎曼 L^q 中心，即 Hadamard 流形上 $\sum_i d(P,\ \alpha_i)^q$ 的极小化点，我们得到相同的不同参数数量界，其中 $1 < q < \infty$。

1. Introduction

在全文中， $\mathbb{H}^2$ 是曲率为 -1 的双曲平面， d是其距离。构型是非空有限多重集，所有求和与基数均按重数计算。对于$\mathbb{H}^2$ 中的构型 $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$和 $0 \le p < \infty$，双曲 p-中心，或 p-重心， $C_p(\mathcal{A})$是 p-势函数的唯一极小点

$$\Phi_{p,\mathcal{A}}(P) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_p\big(d(P,\alpha_i)\big), \qquad \varphi_p(t) = \begin{cases} \dfrac{\cosh^p t - 1}{p}, & p > 0, \\ \log\cosh t, & p = 0, \end{cases} \tag{1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 51M10；次要分类号 11E76、41A50、53C20、53C35。*Key words and phrases.* 二元型、Julia 约化、双曲重心、外接中心、黎曼质心、黎曼 L^q 中心、Hadamard 流形、刚性、指数和、笛卡尔符号法则、变差递减核、Hobby–Rice 定理。

而 $C_\infty(\mathcal{A})$是最小包围圆盘的中心。由于$\Phi_{0,\,\mathcal{A}} = \log \prod_i \cosh\, d(\cdot,\ \alpha_i)$以及$\Phi_{1,\,\mathcal{A}} = \sum_i \cosh d(\cdot,\ \alpha_i) - n$，又由于 $C_\infty(\mathcal{A})$使$\max_i d(\cdot,\ \alpha_i)$达到极小值，点 C_0、 C_1 和 C_∞ 分别使这些数$\cosh\, d(P,\ \alpha_i)$的几何平均、算术平均数和最大值达到最小。当构型已明确时，我们记作 C_p 和 Φ_p。

本文从全复实二元形式的平衡定律和重合结果[6] 出发。除一个常数因子外，这样的型式由其上半平面根的构型 $\mathcal{A}$ 确定。两个约化协变式——Julia 零点和双曲零点——分别由形如 $\sum_i w(t_i)\,\boldsymbol{v}_i = 0$ 的平衡定律刻画，其径向权重分别为 $w = \tanh$ 和 $w = \sinh$ [6, 命题 9 以及 4]。这里， t_i 表示候选中心到第 i 个上半平面根的双曲距离， $\boldsymbol{v}_i$表示指向该根的单位方向；位于中心的根贡献为零。对于六次形式，当其三个按重数计的上半平面根构成双曲等边三角形，或其中一个根是另外两个根的双曲中点时，两个零点恰好重合 [6, 命题 12]。在这两种情况下，距共同中心相同正距离处的根各自达到平衡，因此改变径向权重仍会在该处保持平衡。

恒等式 $\sinh r = \tanh r \cosh r$ 将两个权重置于族$w_p(r) = \tanh r \cosh^p r$中。我们证明，对于有限的 p， C_p 由平衡定律 $\sum_i w_p(t_i)\,\boldsymbol{v}_i = 0$ 刻画（命题 2.6）；因此， C_0 是 Julia 零点，而 C_1 是双曲零点（另见定理 2.8）。六次形式现象对一般构型提出了两个问题。中心映射何时为常值？如果它非常值，则对于多少个参数， C_p 可以等于给定点 P？

主要结果。 如果一个由 n 个点组成的构型的中心映射非常值，那么对于每个 P，方程 $C_p = P$在 $[0,\infty]$中至多有 $n-2$ 个解。当这些点位于一条测地线上时，该界提高为 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$。有限解按重数计数；如果$C_\infty = P$，则端点贡献一个解（定理 4.6 和 4.10）。两个界都是尖锐的：任意小的圆盘中的构型都可以达到这些界，并且有限参数及其重数可以预先指定，无论是否包含端点（定理 5.2）。

固定 $P \in \mathbb{H}^2$，并根据$r_1 < \cdots < r_s$与 P的距离，将 $\mathcal{A}$ 中除 P 之外的点分组成壳层。令壳层向量 $\boldsymbol{S}_j(P)$表示在 P 处指向第 j个壳层中各点的单位向量之和。

壳判据 （定理 4.2）。点 P 是通用中心，即对于每个 $p \in [0,\infty]$都有 $C_p = P$，当且仅当每个壳层向量 $\boldsymbol{S}_j(P)$都为零。在 s 个互不相同的有限参数处满足 $C_p = P$ 即可。在一条测地线上，这意味着反射对称性（注 4.3）。

中心重数界 （定理 4.5 和 4.6）。设中心映射非常值。中心重数 $\kappa(P)$ 是 $C_p = P$ 的有限解的重数之和。对于任意使投影 $\langle \boldsymbol{S}_j(P)\ \boldsymbol{e}\rangle$ 不全为零的单位向量 $\boldsymbol{e} \in T_P\mathbb{H}^2$， $\kappa(P)$ 至多等于其序列中

符号变化的次数。此外，如果 m 非零壳层向量张成一个 k 维子空间，那么 $\kappa(P) \le m-k$。非常值的三点中心映射在 $[0,\infty]$ 上是单射，并且在有限参数处是浸入（推论 4.7）；对于四个点，这两个性质都可能失效。

尾部界与测地线上的点（命题 4.9 和定理 4.10）。对于单位向量 $\boldsymbol{e} \in T_P\mathbb{H}^2$，令

$$N_{\boldsymbol{e}}(r) = \sum_{r_j > r} \langle \boldsymbol{S}_j(P), \boldsymbol{e} \rangle$$

表示半径 r 之外的壳层向量投影之和。若 $N_{\boldsymbol{e}} \not\equiv 0$，中心重数至多为 $N_{\boldsymbol{e}}$ 的符号变化次数，而该次数不会超过符号界。对于测地线上的点，所有中心都位于该测地线上；当 P 位于该测地线上且 $\boldsymbol{e}$ 与其相切时，$N_{\boldsymbol{e}}$ 是一个整数游走，由此得到上文的共线界 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$。

按壳层对平衡定律分组，可将 P 处的合力 $F_p(P) = \sum_i w_p(t_i)\,\boldsymbol{v}_i$ 表示为关于 p 的指数和：

$$F_p(P) = \sum_{j=1}^{s} \tanh r_j \, e^{p \log\cosh r_j} \, \boldsymbol{S}_j(P).$$

随着 p 增大，每个壳层力的方向保持不变，而距离更远的壳层权重增长得更快。因此，拉盖尔符号法则给出了 $F_p(P)$ 的每个非零标量投影的零点数上界，该上界由壳层向量的符号变化次数决定。

从外向内对壳层向量求和，可以得到更精确的界。由于 $w_p(r) = \int_0^r \varphi_p''(t)\,dt$，投影力也可以写成

$$\langle F_p(P), \boldsymbol{e} \rangle = \int_0^{\infty} \varphi_p''(r)\, N_{\boldsymbol{e}}(r)\, dr.$$

该核的变差递减定理给出了尾部界。结合 Hobby–Rice 定理，它还给出了具有指定参数与重数的构型。

二元型。 对于一个全复实二元形式 F，其上半平面根构型为 $\mathcal{A}$，记其 p-零点为 $\xi_p(F) = C_p(\mathcal{A})$。因此，$\xi_0(F)$ 是 Julia 零点，而 $\xi_1(F)$ 是双曲零点。在次数 $2n$ 下，在 $[0,\infty]$ 中的 $n-1$ 个不同参数处相等，会迫使 p-零点与 p 无关（推论 6.1 ）。对于四次型，该族始终为常值；对于六次型，在任意两个不同参数处相等就足够了。然而，在至少为 8 的每个偶数次数中，任意预设的一对不同参数都可能使非常值族具有相同的零点（第 6.1 小节）。例 6.4 给出了参数对 0，1 所对应的一个整系数八次型。定理 6.3 刻画了所有具有与参数无关的零点的八次型。

对于共线根，阈值为 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$。因此，对于共线八次形式，任意两个不同参数再次足以确定：当且仅当四个根可以配对，使每一对都具有相同的双曲中点时，该族才是常值的

（推论 6.5）。这里的证明独立于 [6]。第 6.3 小节记录了约化的两个推论：通用中心可以独立于 p确定约化矩阵；内部约化判定在 p 的微小变化下保持稳定，并且可以用中心映射的速度给出一个显式界。

黎曼 L^q 中心。在 Hadamard 流形 M 上，L^q 中心 E_q使 $\sum_i d(P,\ \alpha_i)^q$ 达到最小值（$1 < q < \infty$）；因此，E_2 是黎曼质心，而在 $q = \infty$ 处，我们取 E_∞ 为外心。该方法之所以能够推广，有两个原因：径向权重 $r^{q-1} = e^{(q-1)\log r}$ 关于参数仍呈指数形式，由此得到壳判据和符号界；积分核为 r^{q-2} 的积分变换具有变差递减性质，由此得到尾部界。因此，对于非恒定的中心路径，一般界为 $n-2$，共线界为 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$。这两个界都能在指定的不同有限参数处取到：共线界可在任意测地线上取到，而当 $\dim M \geq 2$ 时一般界可取到（定理 7.2 和 7.6，推论 7.5）。在数据点之外，还可以对 $E_q = P$ 的有限解按重数计数。在数据点处，力与中心的位移可能以不同阶数消失，因此此处的界计数的是不同参数（注 7.3）。

研究范围与相关工作。Biswas [2]为 $1 \leq p \leq \infty$ 引入了适用于完备测地 CAT(-1) 空间的双曲 p- 重心。他利用相关的重心映射延拓边界上的 M¨obius 同胚，并研究了它们在 $p \to \infty$ 时的极限。本文固定双曲平面中的一个有限构形，涵盖 $0 \leq p < 1$ 的范围，并研究中心映射取某一给定值的频次。该映射在每个有限参数处都是实解析的（定理 3.1）。计数论证和尖锐性构造也适用于 $\mathbb{H}^d$ 中的 $d \geq 2$（注记 4.11 和 5.4）。

关于黎曼质量中心和 L^q 中心的背景知识，参见 Karcher [12] 和 Afsari [1]。Da Silva Alves、Oliveira 和 Greg´orio [19]讨论了加权 L^α 中心关于指数的连续性（适用于$1 \leq \alpha \leq 2$）。续篇 [7] 研究了另一种极限情形：两个簇彼此分离，同时 p 趋于零。

第 2 节和第 3 节讨论存在性、平衡以及中心映射的正则性；第 4 节和第 5 节证明这些界及其锐性；第 6、7 和 8 节讨论二元型、黎曼 L^q 中心以及进一步的问题。

2. Hyperbolic p-barycenters and their equilibrium laws

2.1. 有限 p的存在性与唯一性。我们使用上半平面模型 $\mathbb{H}^2 = \{x + iy : x \in \mathbb{R},\ \ y > 0\}$ 其度量为 $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$。在此规范化下，

$$\cosh d(x+iy, u+iv) = \frac{(x-u)^2 + y^2 + v^2}{2yv}. \tag{2}$$

切向量的梯度、海森矩阵、内积和范数均指相对于该度量的量。令 $\exp_P\colon T_P\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ 表示在 P处的指数映射。对于$P \neq A$，令 $\boldsymbol{v}_A(P) = \exp_P^{-1}(A)/d(P, A)$ 表示在 P处指向 A的单位切向量。根据距离的一阶变分，$d(\cdot, A)$ 在 P沿单位方向 V的导数为 $-\langle V, \boldsymbol{v}_A(P)\rangle$。因此

$$\operatorname{grad} d(\cdot, A)\big|_P = -\boldsymbol{v}_A(P) \qquad (P \neq A). \tag{3}$$

对于每个 $p \geq 0$，径向导数为

$$\varphi_p'(r) = \tanh r\, \cosh^p r, \qquad \varphi_p''(r) = \cosh^{p-2} r\,(1 + p\sinh^2 r).$$

引理 2.1。对于 $A \in \mathbb{H}^2$，函数 $f_A(P) = \log\cosh d(P, A)$ 在 $\mathbb{H}^2$ 上是实解析的。对于每个 $p \geq 0$,

$$\operatorname{grad}\big(\varphi_p(d(\cdot, A))\big) = e^{pf_A} \operatorname{grad} f_A.$$

对于 $P \neq A$，我们有 梯度 $f_A(P) = -\tanh d(P, A)\, \boldsymbol{v}_A(P)$，而 梯度 $f_A(A) = 0$。此外，$\varphi_p(d(\cdot, A))$ 具有正定的海森矩阵，并且沿每条非常值测地线严格凸。

证明。根据（2），$\cosh d(P, A)$ 是坐标 P 的正有理函数，且分母处处不为零。因此 f_A 是实解析的，包括在 A 处，并且

$$\varphi_p\big(d(\cdot, A)\big) = \begin{cases} \dfrac{e^{pf_A} - 1}{p}, & p > 0, \\ f_A, & p = 0. \end{cases}$$

梯度恒等式现在由链式法则和（3）得到。在 A 处，f_A 的梯度为零，因为 f_A 在那里取得最小值。

对于海森矩阵，取一条单位速测地线 γ，满足 $\gamma(0) = P$，并令$q(t) = \cosh d(\gamma(t), A)$。若 $\rho = d(P, A) > 0$，则由双曲余弦定理可得

$$q(t) = \cosh\rho\cosh t - \sinh\rho\cos\theta\sinh t,$$

其中 θ是 $\dot\gamma(0)$ 与 $\boldsymbol{v}_A(P)$ 之间的夹角。因此，$q'' = q$和 $q^2 - (q')^2 = 1 + \sinh^2\rho\sin^2\theta \geq 1$。若 $P = A$，则 $q(t) = \cosh t$，于是同样有 $q'' = q$和$q^2 - (q')^2 = 1$。由此可得

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi_p\big(d(\gamma(t), A)\big) = q^{p-2}\big(q^2 - (q')^2 + p(q')^2\big) > 0,$$

对于 $p = 0$ 也同样成立，此时左侧为 $(\log q)''$。在 $t = 0$ 处，这个二阶导数就是作用于 $\dot\gamma(0)$ 上的海森矩阵。由于初始点和单位方向均为任意，海森矩阵处处正定，并且该函数沿每条非常值测地线都严格凸。□

定理 2.2。对于 $\mathbb{H}^2$ 中的每个非空有限构形 $\mathcal{A}$ 以及每个$0 \leq p < \infty$，势函数 $\Phi_{p,\,\mathcal{A}}$ 沿测地线是强制的且严格凸。在特别地，其极小点 $C_p(\mathcal{A})$ 存在且唯一。

证明。 将引理 2.1 求和即可得到严格凸性。当 P 离开每个紧集时， $d(P,\ \alpha_1)$ $\to \infty$ ，从而 $\varphi_p(d(P,\ \alpha_1)) \to \infty$。其余各项均非负，因此 $\Phi_{p,\ \mathcal{A}}$ 是强制的。闭有界球的连续性和紧性保证了存在性；严格凸性保证了唯一性。 □

2.2. **外接圆心与凸包**。 对于 $P \in \mathbb{H}^2$，以 P为中心且包含 $\mathcal{A}$的最小闭圆盘的半径为 $r(P) = \max_i d(P,\ \alpha_i)$。函数 r 是连续且强制的，因此能取得其最小值，即外接半径 $R(\mathcal{A})$。为证明唯一性，假设不同的点 $P,\ Q$都取得这一最小值 R。令 M 为它们的中点，并取 i 使得$d(M,\ \alpha_i) = r(M)$。引理 2.1 与 $p = 1$ 表明 $\cosh\ d(\cdot,\ \alpha_i)$ 具有严格凸性，因此

$$\cosh r(M) < \tfrac{1}{2}\big(\cosh d(P,\alpha_i) + \cosh d(Q,\alpha_i)\big) \le \cosh R.$$

这与 R的定义相矛盾。唯一的极小点是外接圆心$C_\infty(\mathcal{A})$。

命题 2.3 (凸包包含性)。 对于任意 $0 \le p \le \infty,\ \mathcal{A}$ 的闭双曲凸包 K 包含 $C_p(\mathcal{A})$ 。特别地，所有中心都位于同一个紧凸集内。

证明。 包含 $\mathcal{A}$ 的闭双曲球也包含 K，因为球是凸的。因此 K 是紧的。到 K 的最近点投影 π_K 固定每个 α_i，且是 1-利普希茨 [3, 命题 II.2.4],，所以对每个 $i,\ d(\pi_K P,\ \alpha_i) \le d(P,\ \alpha_i)$。由此可知，投影不会增大最大距离$r$；又由于 φ_p 是递增的，它也不会增大 $\Phi_{p,\ \mathcal{A}}$ 。由每种情形下极小点的唯一性可得， $\pi_K C_p = C_p$ 对于 $0 \le p \le \infty$成立。 □

注 2.4（一个点和两个点）。 对于单个点或两个重合点，每个中心都是该点。对于两个不同的点 $\alpha_1,\ \alpha_2$，令 M 为它们的中点，并记 $d(\alpha_1,\ \alpha_2) = 2h$。根据命题 2.3，每个中心都在线段 $[\alpha_1, \alpha_2]$上。该线段上距 α_1 为 a 的点，距 α_2为 $2h - a$ 。对于有限的 p，严格凸性推出

$$\varphi_p(a) + \varphi_p(2h - a) \ge 2\varphi_p(h),$$

且仅当 $a = h$ 时取等号。最大距离 $\max\{a, 2h - a\}$ 同样在 $a = h$ 处取得最小值。因此，对于每个 $p \in [0, \infty]$，都有 $C_p = M$ ，而非恒定的中心映射要求 $n \ge 3$。 ⋄

2.3. **平衡与等变性**。 固定 $P \in \mathbb{H}^2$。与引言中一样，当 $t_i > 0$ 时，记 $t_i = d(P,\ \alpha_i)$ 和 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P)$。

定义 2.5 （力）。 The p-由 α_i 在 P 处施加的力为 $w_p(t_i)\boldsymbol{v}_i$，其中$w_p(t)$ $= \varphi_p'(t) = \tanh t \cosh^p t$。其在 $p = 0$处的值 $\tanh(t_i)\boldsymbol{v}_i$，称为基力。当 $P = \alpha_i$ 时，依连续延拓，力为零。合p-力 为

$$F_p(P) = \sum_{i=1}^{n} w_p(t_i)\boldsymbol{v}_i. \tag{4}$$

命题 2.6（平衡定律）。对于 $0 \le p < \infty$，合力为F_p（P） $= -$ 梯度 Φ_p（P）。由此可得

$$P = C_p(\mathcal{A}) \quad \Longleftrightarrow \quad F_p(P) = 0.$$

对于 $p = \infty$，如果所有数据点重合，则它们的公共点就是外心。否则，令 I（P） $= \{i\colon\ t_i = r$（P）$\}$。则

$$P = C_\infty(\mathcal{A}) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \operatorname{conv}\{\boldsymbol{v}_i : i \in I(P)\}, \tag{5}$$

其中，凸包取于切平面 $T_P\mathbb{H}^2$ 中。在这种情况下，对于每个单位向量 $\boldsymbol{u} \in T_P\mathbb{H}^2$，存在一个 $i \in I$（P），使得 $\langle \boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}_i\rangle \le 0$。

证明。对于有限的 p，以及满足 $t_i > 0$ 的每个 i，引理 2.1 给出

$$\operatorname{grad}\bigl(\varphi_p(d(\cdot,\alpha_i))\bigr)(P) = -\cosh^p t_i \, \tanh t_i \, \boldsymbol{v}_i = -w_p(t_i)\, \boldsymbol{v}_i,$$

而当 $P = \alpha_i$ 时，该梯度为零。求和得到 grad Φ_p(P) $=-F_p$(P)。由定理 2.2，Φ_p 沿测地线严格凸，并在 C_p 处取得其最小值。极小点是临界点，而严格凸函数至多有一个临界点。因此，C_p 是 $\operatorname{grad}\Phi_p = -F_p$ 的唯一零点。

对于端点情形，若所有数据点都重合于 A，则对每个 $Q \ne A$，r(A) $= 0 <$ d(Q, A) $= r$(Q)。现在假设数据中包含两个不同的点。于是 r(P) > 0，因此所有最远方向都有定义。假设它们的凸包不包含零点，并令 $\boldsymbol{u}$ 为其中距离零点最近的点。对于每个$i \in I$(P)，从 $\boldsymbol{u}$ 到 $\boldsymbol{v}_i$ 的线段都位于该凸包内，因此其上的平方范数在 $\boldsymbol{u}$ 处取得最小值；于是 $\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}\rangle \ge 0$ 且 $\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}_i\rangle \ge \|\boldsymbol{u}\|^2 > 0$。根据（3），沿着 $s \mapsto \exp_P(s\boldsymbol{u})$，在 $s = 0$ 处到 α_i 的距离的导数为$\langle \boldsymbol{u},\ -\boldsymbol{v}_i\rangle < 0$，对所有 $i \in I$(P)均成立。所有其他距离都已经严格小于r(P)。由于点的数量有限，沿此方向作足够小的移动会使 r减小，因此 P 不是外心。

反之，设零向量是最远方向的一个凸组合。给定 $Q \ne P$，写作 $Q = \exp_P(s\boldsymbol{e})$，其中 $s > 0$ 且 $\boldsymbol{e}$ 是一个单位向量。将该凸组合与 $\boldsymbol{e}$ 取内积可知，存在某个 $i \in I$(P) 满足 $\langle \boldsymbol{e},\ \boldsymbol{v}_i\rangle \le 0$；由于 $\boldsymbol{e}$ 是任意的，这就证明了最后一个断言。对于这个 i，由双曲余弦定理可得

$$\cosh d(Q,\alpha_i) \ge \cosh s \, \cosh r(P) > \cosh r(P).$$

因此，对每个 $Q \ne P$都有 r(Q) $> r$(P)，所以 P 是外心。 □

命题 2.7 (等距变换等变性)。对于 $\mathbb{H}^2$ 的任意等距变换 g 以及任意 $0 \le p \le \infty$, $C_p(g\mathcal{A}) = gC_p(\mathcal{A})$。

证明。对于有限的 p，距离不变性给出 $\Phi_{p,\ g\mathcal{A}}(gP) = \Phi_{p,\ \mathcal{A}}(P)$。最大距离也满足相同的不变性。由极小化点的唯一性即可得出结论。 □

2.4. 二元型与 p-零映射。 设 F 是一个次数为 $2n \geq 2$的全复实二元形式：它是齐次的，且在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 中没有根。特别地， $F(1,\ 0) \neq 0$，并且

$$F(X,Z) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i Z)(X - \overline{\alpha_i} Z), \qquad a_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha_i \in \mathbb{H}^2. \tag{6}$$

我们将 p-零点 定义为 F的 $\xi_p(F) = C_p(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$；对于 $p = \infty$，我们也称其为外接圆心零点。这仅取决于 F，因为上半平面根的多重集不受标记方式或 a_0的影响。根据命题 2.7，这些点是协变式。事实上，若 $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 且 $F^g(X,\ Z) = F(aX + bZ,\ cX + dZ)$，则 F^g 的根是 F 的根在 g 的逆映射下的像： $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$。因此，对每个 p，包括 $p = \infty$，都有 $\xi_p(F^g) = g^{-1}\xi_p(F)$。

回顾促成这一族对象的两个经典中心。次数为 $2n$ 的型式若每个根的重数都小于 n，则称为稳定形式。对于全复实型式，这恰好意味着上半平面根并非全部重合。对于稳定形式，Julia 零点 $[11,\ 4,\ 20]$ 是 $t \in \mathbb{R}$ 和 $u > 0$上的唯一极小点，使 $\widetilde{F}(t,\ u)/u^{2n}$ [20, 命题 5.1], 其中

$$\widetilde{F}(t,u) = |a_0|^2 \prod_{i=1}^{n} (|t - \alpha_i|^2 + u^2)(|t - \overline{\alpha_i}|^2 + u^2).$$

如果所有上半平面根都重合， F 是正定实二次型的某个幂的标量倍。在这种情况下，我们取 Julia 零点为共同的上半平面根，正如 [20]命题 5.2之后的扩展中所述。双曲零点是上半平面根的双曲质心，等价地，是 $\sum_i \cosh d(P, \alpha_i)$ $[9,\ 8]$的极小点。

定理 2.8。 对于具有上述约定的全复实二元形式 F， $\xi_0(F)$ 是 *Julia* 零点，而 $\xi_1(F)$ 是双曲零点。

~证明。 记 $P = t + iu$ 和 $\alpha_i = x_i + iy_i$。来自一个共轭对的 F的两个因子相等，并且根据(2)，每个因子都是 $2uy_i \cosh d(P, \alpha_i)$。因此

$$\frac{\widetilde{F}(t,u)}{u^{2n}} = |a_0|^2 \left(\prod_{i=1}^{n} (2y_i)^2 \right) \exp\bigl(2\Phi_{0,\mathcal{A}}(P)\bigr), \qquad \mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

前因子为正且与 P无关，因此对于稳定形式，Julia 零点为 $C_0(\mathcal{A})$。如果所有上半平面根都在 A处重合，则按照约定，Julia 零点为 A ，并且 $C_0(\mathcal{A}) = A$ 也成立。最后， $\Phi_{1,\mathcal{A}}(P) = \sum_i \cosh d(P, \alpha_i) - n$，因此 $C_1(\mathcal{A})$是双曲零点。□

3. Regularity of the center map

固定构型 $\mathcal{A}$。根据引理 2.1，对于每个有限的 $p \geq 0$， Φ_p 的海森矩阵都是正定的。我们利用这一事实和解析隐函数定理证明，中心映射 $p \mapsto C_p$ 在每个这样的参数处都是实解析的。我们还证明， C_p 收敛于外心

C_∞ 当 $p \to \infty$ 时，通过为 $d(C_p, C_\infty)$ 建立一个显式上界。Biswas 已证明了渐近双曲 p-重心的类似收敛性，参见定义 3.3、命题 3.7]。

我们使用正规坐标在局部描述中心映射。固定 $P \in \mathbb{H}^2$以及 $T_P\mathbb{H}^2$的一组正交归一基$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$。$Q \in \mathbb{H}^2$ 的正规坐标为 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，其中 $\exp_P^{-1}(Q) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$；我们将 x与该切向量等同。由于 $\exp_P$ 是实解析微分同胚，因此这是以 P为中心的全局解析坐标图。在下面的证明中，P 将是一个中心 C_{p0}。令

$$f_i(x) = f_{\alpha_i}(\exp_P x) = \log\cosh d(\exp_P x, \alpha_i)$$

其中 f_{α_i} 如引理 2.1 所述，并且

$$\widetilde{\Phi}(p,x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{p f_i(x)} - 1}{p}, \qquad G(p,x) = \partial_x \widetilde{\Phi}(p,x) = \sum_{i=1}^{n} e^{p f_i(x)}\, \partial_x f_i(x), \tag{7}$$

第一个在 $p = 0$处读作 $\sum_i f_i(x)$，而 ∂_x 表示偏导数列。这两个函数关于$(p, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 均为实解析。注意 $\widetilde{\ }$，对于 $p \geq 0$，$\Phi(p, x) = \Phi_p(\exp_P x)$。与第2节中一样，令 $t_i = d(P, \alpha_i)$以及$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P)$。

(G1) 对于 $p \geq 0$、$G(p, x) = 0$ 当且仅当 $\exp_P x = C_p$，因为极小点是严格凸函数 Φ_p 的唯一临界点。(G2) 由于 $f_i = f_{\alpha_i} \circ \exp_P$，且 $\exp_P$ 在 0 处的微分是恒等映射，链式法则表明，$\partial_x f_i(0)$ 是 $\operatorname{grad} f_{\alpha_i}(P) = -\tanh(t_i)\ \boldsymbol{v}_i$ 的坐标列（引理 2.1）。此外，由于 $e^{p f_i(0)} = \cosh^p t_i$，根据定义 (4)，作为 P 处的切向量，

$$G(p,0) = -\sum_{i=1}^{n} w_p(t_i)\, \boldsymbol{v}_i = -F_p(P),$$

$$\partial_p G(p,0) = -\sum_{i=1}^{n} w_p(t_i) \log\cosh(t_i)\, \boldsymbol{v}_i,$$

其中一项的 $\alpha_i = P$ 为零。这些恒等式对每个实数 p 都成立，其中对于 $p < 0$，我们令 $F_p(P)$ 表示和式 (4)。

(G3) 曲线 $t \mapsto \exp_P(tV)$ 是经过 P 的测地线，因此对于 $p \geq 0$ 和 $V \in T_P\mathbb{H}^2$，

$$V^{\mathsf{T}} D_x G(p,0)\, V = \frac{d^2}{dt^2} \Phi_p\big(\exp_P(tV)\big)\Big|_{t=0} = \operatorname{Hess}_P \Phi_p(V, V).$$

因此，$D_x G(p, 0)$ 是 Φ_p 在所选基底下于 P 处的海森矩阵，并且根据引理 2.1，它是正定的。

仅在 $x = 0$ 处将 G 视为力；在其他位置，$G(p, x)\widetilde{\ }$ 是 $\Phi(p, \cdot)$ 的偏导数列。

定理 3.1（中心映射的正则性）。固定一个构型 $\mathcal{A} \subset \mathbb{H}^2$并令 $n = |\mathcal{A}|$。

（i）中心映射 $p \mapsto C_p$（$\mathcal{A}$）在 $[0,\infty)$上是实解析的，并且在 $p=0$处可解析延拓到 0的某个邻域。特别地， C_p（$\mathcal{A}$） $\to C_0$（$\mathcal{A}$）当 $p \downarrow 0$时。（ii）对于每个 $p>0$,

$$d(C_p, C_\infty) \le \operatorname{arcosh}(n^{1/p}), \tag{8}$$

hence $C_p(\mathcal{A}) \to C_\infty(\mathcal{A})$ *as* $p \to \infty$.

由此可知，中心映射 $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\colon\ [0,\infty] \to \mathbb{H}^2$, $p \mapsto C_p$（$\mathcal{A}$） 是连续的。

证明 (i)。 固定 $p_0 \ge 0$ ，并令 $P = C_{p_0}$。我们使用以 P 为中心的正规坐标，以及公式 (7) 中的映射 G 。根据 (G1)， $G(p_0,\ 0) = 0$ ；根据 (G3)， $D_x G(p_0,\ 0)$ 为正定的，因而是可逆的。解析隐函数定理给出了一个实解析映射 $x(p)$, 其定义在 p_0 附近的某个区间上，并满足 $x(p_0) = 0$ ，且

$$G(p, x(p)) = 0.$$

对于该区间内的 $p \ge 0$ ，(G1) 给出 $C_p = \exp_P x(p)$，因此中心映射在 p_0 附近是实解析的。对于 $p_0 = 0$ ，映射 $x(p)$ 在足够小的 $p < 0$ 下也有定义。在那里， Φ_p 和 C_p 没有定义；$\exp_P x(p)$ 是 $\sum_i (\cosh^p d(\cdot,\ \alpha_i) - 1)/p$ 的临界点，但不宣称其具有极小化性质。该延拓仅用于使 $p=0$ 处的重数成为双侧的（引理 3.4）。

□

证明 (ii)。 令 $R = r(C_\infty) = R(\mathcal{A})$。如果 $R=0$， $\mathcal{A}$ 的所有点都在C_∞处重合，因此对每个 p 都有 $C_p = C_\infty$ ，无需证明。

假设 $R>0$。 C_p 的极小性给出

$$\cosh^p r(C_p) \le \sum_i \cosh^p d(C_p, \alpha_i) \le \sum_i \cosh^p d(C_\infty, \alpha_i) \le n \cosh^p R. \tag{9}$$

对于 $Q \ne C_\infty$, 令 $\boldsymbol{u}$ 为 C_∞ 处指向 Q的单位切向量。根据命题 2.6，存在一个距 C_∞ 具有最大距离的 $\alpha_i \in \mathcal{A}$ ，满足 $\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}_{\alpha_i}(C_\infty)\rangle \le 0$，也就是说， $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}_{\alpha_i}(C_\infty)$之间的角 θ 至少为 $\pi/2$。由双曲余弦定理可得

$$\cosh r(Q) \ge \cosh d(Q, \alpha_i) \ge \cosh R \cosh d(C_\infty, Q).$$

当 $Q = C_\infty$时，同样的不等式也成立。取 $Q = C_p$ 并利用可得 (9)

$$\cosh d(C_\infty, C_p) \le n^{1/p},$$

这就证明了 (8)。 □

推论 3.2 (中心映射的速度)**.** 固定 $0 \le p < \infty$ 并令 $P = C_p$。令 H_p 为 Φ_p 在 P处的海森矩阵，并通过双曲度量将其视为 $T_P\mathbb{H}^2$ 上的自同态。取 $t_i = d(P, \alpha_i)$ 和 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P)$，中心的速度由下式给出

$$\dot{C}_p = H_p^{-1} \sum_{i:\, t_i > 0} w_p(t_i) \log\cosh(t_i)\, \boldsymbol{v}_i. \tag{10}$$

特别地，当且仅当右侧的和为零时，中心在 p 处静止。

证明。我们在任意 $p_0 \geq 0$ 处证明该公式。令 $P = C_{p_0}$，并令 $x(p)$ 为以 P 为中心、关于 C_p 的正规坐标，因此 $x(p_0) = 0$。根据定理 3.1(i)，x 在 p_0 附近是实解析的，并且由 (G1) 得 $G(p,\ x(p)) = 0$。在 p_0 处求微分可得

$$D_x G(p_0, 0)\, \dot{x}(p_0) = -\partial_p G(p_0, 0).$$

由 (G3)，矩阵 $D_x G(p_0,\ 0)$ 表示 H_{p_0}；由于 $\exp_P$ 在 0 处的微分 $\dot{}$ 是恒等映射，$\dot{x}(p_0)$ 在同一基下表示 C_{p_0}。在右侧，偏导数保持 P 不变，由 (G2) 得

$$-\partial_p G(p_0, 0) = \sum_{i:\, t_i > 0} w_{p_0}(t_i) \log\cosh(t_i)\, \boldsymbol{v}_i.$$

由于 H_{p_0} 是正定的，因此它是可逆的，于是得到 (10)。 □

定义 3.3（重数）。令 $p_0 \geq 0$ 和 $P = C_{p_0}$。令 $x(p)$ 为定理 3.1(i) 的证明中得到的实解析映射，在以 P 为中心、关于 $T_P\mathbb{H}^2$ 的正交归一基下取正规坐标。因此 $x(p_0) = 0$，$G(p,\ x(p)) = 0$，并且对于 p_0 附近的 $p \geq 0$，$C_p = \exp_P x(p)$。当 $p_0 = 0$ 时，映射 x 对足够小的 $p < 0$ 也有定义。p_0 的重数作为 $C_p = P$的解，记为 $\mathrm{ord}_{p_0}(P)$，是 x 在 p_0 处的消失阶，即使得

$$\frac{d^k x}{dp^k}(p_0) \neq 0.$$

如果不存在这样的 k，我们令 $\mathrm{ord}_{p_0}(P) = \infty$。对于点 $Q \neq C_{p_0}$，我们令 $\mathrm{ord}_{p_0}(Q) = 0$。

重数与基底无关。当且仅当$C_{p_0} \neq 0$时，它等于 1；在重数更高时，中心映射暂时保持不变。由于 x 是实解析的，只有当对每个有限 p都有 $C_p = P$ 时，$\mathrm{ord}_{p_0}(P) = \infty$。

引理 3.4。令 $P \in \mathbb{H}^2$。对于满足 $C_{p_0} = P$的每个有限参数 p_0，*(4)* 中的映射 $p \mapsto F_p(P)$ 恰好以阶 $\mathrm{ord}_{p_0}(P)$消失。

证明。令 G 和 $x(p)$ 如定义 3.3 所述，并取以 $P = C_{p_0}$为中心的正规坐标。则当 p_0附近有 p 时，$G(p, x(p)) = 0$；对于 $p_0 = 0$，这包括较小的 $p < 0$。由 (G2)，$G(p, 0) = -F_p(P)$，对 $p < 0$也成立。固定 p_0附近的 p。由链式法则，

$$\frac{d}{ds} G(p, sx(p)) = D_x G(p, sx(p))\, x(p).$$

对 $0 \leq s \leq 1$ 积分可得

$$F_p(P) = G(p, x(p)) - G(p, 0) = K(p)\, x(p), \quad K(p) = \int_0^1 D_x G\big(p, s\, x(p)\big)\, ds.$$

由于 $x(p_0) = 0$, $K(p_0) = D_x G(p_0, 0)$ 是 Φ_{p_0} 在 P 处的海森矩阵，由 (G3) 可知。矩阵 $K(p)$ 是实解析的，而 $K(p_0)$ 是正定的。因此， $K(p)^{-1}$ 在 p_0 附近是实解析的，且乘以 $K(p)$ 会保留消失阶： $F_p(P) = K(p)x(p)$ 和 $x(p) = K(p)^{-1}F_p(P)$ 在 p_0 处的消失阶相同，即 $\operatorname{ord}_{p_0}(P)$。□

4. Universal centers and center multiplicity

本节讨论点 P 何时是对每个参数而言的 $\mathcal{A}$ 中心；如果不是，则它对多少个参数 $C_p = P$ 是中心。第一个问题有一个几何答案： P 是通用中心，当且仅当，对于与 P 的每个正距离，从 P 指向位于该距离处的 $\mathcal{A}$ 中各点的单位方向之和均为零。对于非常值的中心映射，我们随后证明，方程 $C_p = P$ 在 $[0, \infty]$ 中至多有 $n - 2$ 个解；当构型位于一条测地线上时，至多有 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 个解。

4.1. **通用中心**。固定 $P \in \mathbb{H}^2$，并令

$$0 < r_1 < \cdots < r_s$$

设 $t_i = d(P, \alpha_i)$ 中距离的不同正值为，并令 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P)$ 如第2节所述。它们将 $\mathcal{A}$ 中与 P 距离为正的各点划分为 s 个类；我们将第 j 类称为关于 P的第 j 个壳层 。壳层向量、壳层基力和壳层指数 分别定义为

$$\boldsymbol{S}_j(P) := \sum_{\{i : t_i = r_j\}} \boldsymbol{v}_i, \qquad \boldsymbol{b}_j := \tanh(r_j)\, \boldsymbol{S}_j(P), \qquad \lambda_j := \log\cosh r_j.$$

向量 $\boldsymbol{b}_j$ 是第 j 个壳层中的各点在 P 处施加的基力之和。由于 $w_p(r) = \tanh\, r\, e^{p \log\cosh r}$，这些点在 P处施加的 p力之和为 $e^{p\lambda_j}\boldsymbol{b}_j$。因此，按壳层分组，定义 2.5 中的净 p力为

$$F_p(P) = \sum_{j=1}^{s} e^{p\lambda_j}\, \boldsymbol{b}_j. \tag{11}$$

我们称第 j 个壳层为平衡壳层 ，当 $\boldsymbol{S}_j(P) = 0$ ；否则称其为不平衡壳层 。对于任意 p，平衡壳层对（11）没有贡献。改变 p 会重新缩放壳层力，但不会改变其方向。由于 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$，随着 p增加，距离更远的壳层的权重增长得更快。

引理 4.1（指数和的零点）。 设 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$ 为实数，并设

$$f(p) = \sum_{j=1}^{s} a_j e^{\lambda_j p}, \qquad a_j \in \mathbb{R}.$$

如果系数不全为零，那么 f 的实零点数（按重数计）至多为删除零项后 $(a_1, \ldots, a_s)$中的符号变化次数 V。

特别是，如果 f 在 s 个互异的实参数处为零，那么 $a_1 = \cdots = a_s = 0$。

这是拉盖尔对笛卡尔符号法则的推广 [18, 《第五部分》，第 1 章，第 6 节，问题 77]。我们给出证明，因为其中基于罗尔定理的论证通过计数重数来计算零点，这一方法还会在引理 4.12 和 7.4 的证明中再次用到。

证明。删去零系数；指数仍然递增。我们对 V 进行归纳。若 $V = 0$，则 f 的所有项符号相同，且 f 没有零点。若 $V \geq 1$，取满足 $a_k a_{k+1} < 0$ 且 $\mu \in$（λ_k，λ_{k+1}）的 k。函数g（p）$= e^{-\mu p} f$（p）与 f 有相同的零点，并且

$$g'(p) = \sum_j a_j(\lambda_j - \mu)e^{(\lambda_j - \mu)p}.$$

因子 $\lambda_j - \mu$ 在 $j \leq k$ 时为负，在 $j > k$ 时为正。因此，g' 的系数均非零；它们保留了 (a_j) 在$\{1, \ldots, k\}$ 内以及在 $\{k+1, \ldots, s\}$ 内的符号变化，并且消去了 k 与$k+1$之间的一次符号变化。由归纳假设，g' 至多有 $V - 1$ 个零点（按重数计）。若g 有互不相同的零点 $z_1 < \cdots < z_r$，其重数分别为 μ_1，.....，μ_r，那么 g' 在每个 z_i 处都有一个重数为 $\mu_i - 1$ 的零点，并且根据罗尔定理，在每个区间（z_i，z_{i+1}）内还有一个零点。因此，$\sum_i \mu_i - 1 \leq V - 1$，且 g，从而 f 至多有 V 个零点（按重数计）。□

定理 4.2 (壳平衡判据**)**。设 $P \in \mathbb{H}^2$，其壳层和壳层向量如上所述。以下条件等价：

(i) $P = C_p(\mathcal{A})$ 对每个 $p \in [0, \infty]$都成立；(ii) $P = C_{p_\ell}(\mathcal{A})$ 对 s 个互不相同的有限参数 $p_1, \ldots, p_s \geq 0$成立；(iii) 关于 P的每个壳层都平衡：$\boldsymbol{S}_j(P) = 0$ 对 $j = 1, \ldots, s$成立。

满足这些条件的点称为通用中心。当 $s = 0$时，条件 *(ii)* 和 *(iii)* 自动成立。

证明。若 $\mathcal{A}$ 中的每个点都等于 P，则对每个$p \in [0, \infty]$都有 $s = 0$ 和 $C_p = P$，因此 (i) 成立，而 (ii) 和 (iii) 自动成立。假设 $s \geq 1$，也就是说，$\mathcal{A}$ 中的某个点不同于 P。

(i)⇒(ii) 显然成立。

(ii)⇒(iii)：对于每个单位向量 $\boldsymbol{e} \in T_P\mathbb{H}^2$，标量指数和$\langle F_p(P)\, \boldsymbol{e}\rangle = \sum_j e^{\lambda_j p}\langle \boldsymbol{b}_j,\ \boldsymbol{e}\rangle$ 具有 s 个不同的零点，因此根据引理 4.1，其所有系数均为零。于是，每个 $\boldsymbol{b}_j$ 都与每个 $\boldsymbol{e}$正交，并且 $\boldsymbol{S}_j(P) = 0$，因为 $\tanh r_j > 0$。

(iii)⇒(i)：每个壳层力都消失，因此对于每个有限的 p，$F_p(P) = 0$ 且 $C_p = P$。最外层壳距离为 $r_s = \max_i d(P,\ \alpha_i)$，处于平衡状态，$\sum_{i:\ t_i = r_s} \boldsymbol{v}_i = 0$，所以零点位于指向最远点的方向的凸包中，并且根据命题 2.6，$P = C_\infty$。□

注 4.3：等于 P 的点不会出现在壳层平衡条件中，因为对于每个 p，它们的径向权重都为零。该定理表明

通用中心恰好是这样一个点：每个壳层都在自身范围内实现方向平衡。特别地，任何关于 P 非平凡旋转保持不变、并且在每个半径壳层上分解为完整轨道的构型，都具有一个通用中心。对于位于一条测地线 ℓ上的构型，$P \in \ell$ 处的壳层平衡意味着，在每个距离上， P 两侧的点具有相同的重数。因此，当且仅当该构型关于固定 P的 ℓ 反射保持不变时， P 才是通用中心。例如，距 P 的有向距离为 ±1和 ±2的四个点构成两个壳层，且每个壳层都各自达到平衡。$\diamond$

注 4.4（幂平均与等距构型）。 对于 $p > 0$ 令

$$M_{p,\mathcal{A}}(P) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cosh^p d(P,\alpha_i)\Big)^{1/p} = \Big(1 + \frac{p}{n}\Phi_{p,\mathcal{A}}(P)\Big)^{1/p}$$

为数 $\cosh d(P, \alpha_i)$ 的幂平均，其极限为

$$M_{0,\mathcal{A}} = \Big(\prod_i \cosh d(\cdot,\alpha_i)\Big)^{1/n}, \qquad M_{\infty,\mathcal{A}} = \cosh \max_i d(\cdot,\alpha_i).$$

则 $M_{p, \mathcal{A}}$ 对每个 $p \in [0,\infty]$均在 C_p 处取得最小值。最小幂平均与 p 无关，当且仅当所有数据点重合，或全部位于以某个点 P为中心的单一平衡壳层上；此时 P 是通用中心。事实上，令 $O = C_\infty$。若最小值与 p无关，则在 O 处应用幂平均不等式可得

$$\min M_{0,\mathcal{A}} \le M_{0,\mathcal{A}}(O) \le M_{\infty,\mathcal{A}}(O) = \min M_{\infty,\mathcal{A}} = \min M_{0,\mathcal{A}}.$$

因此 $O = C_0$，数 $\cosh d(O, \alpha_i)$ 的几何平均等于其最大值，所以从 O 到各点的距离均相等。若这些距离为正，则这些点以 O为中心形成单一壳层；根据定理 4.2，该壳层是平衡的，因为$C_0 = O$。反之，若这些点位于以 P为中心、半径为 r的单一平衡壳层上，则 P是通用中心，并且 $M_{p, \mathcal{A}}(P) = \cosh r$ 对每个 p 均成立；若这些点重合，则对于每个 p，最小值均为 1。$\diamond$

4.2. **中心重数**。 根据定理 4.2，具有 s 个壳层的点 P 要么是通用中心，要么至多对 $s-1$ 个不同的有限参数满足 $C_p = P$。现在，我们按重数计算每个有限解，并利用壳层向量的方向来进一步收紧界。

在本小节中，中心映射非常数，因此 $n \ge 3$（注 2.4）。固定 $P \in \mathbb{H}^2$，其壳层半径为 $r_1 < \cdots < r_s$，壳层向量为 $\boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{S}_j(P)$，且 $\lambda_j = \log \cosh r_j$。对于单位向量 $\boldsymbol{e} \in T_P\mathbb{H}^2$，令 $V_{\boldsymbol{e}}(P)$ 表示序列 $\langle \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{e}\rangle, \ldots\ldots, \langle \boldsymbol{S}_s, \boldsymbol{e}\rangle$ 中符号变化的次数，其中忽略零项。由于平衡壳层对 $F_p(P)$ 没有贡献，不平衡壳层决定了 $C_p = P$ 的有限解（命题 2.6），并且根据引理 3.4 决定了它们的重数。令 $m \ge 1$ 表示不平衡壳层的数量，令 $k \in \{1, 2\}$ 表示其壳层向量在 $T_P\mathbb{H}^2$ 中所张成空间的维数。

中心映射非常数，因此每个重数 $\mathrm{ord}_p(P)$（定义 3.3）都是有限的，并且 P 不是通用中心，所以根据定理 4.2，它至多是 $s-1$ 个有限参数的中心。P 的中心重数是有限和

$$\kappa(P)=\sum_{0\le p<\infty,\ C_p=P}\mathrm{ord}_p(P).$$

对于非常值中心映射，其在 P 上的纤维多重集由有限参数 p 组成，其中 $C_p=P$，每个参数按其重数 $\mathrm{ord}_p(P)$计数；此外，当 $C_\infty=P$时，还包含 ∞ 的一次出现。其有限部分的基数为$\kappa(P)$，总基数为 $\kappa(P)+\mathbf{1}_{\{C_\infty=P\}}$。

定理 4.5（符号与壳层张成界）。（i）若数值 $\langle \boldsymbol{S}_j,\ \boldsymbol{e}\rangle$不全为零，则 $\kappa(P)\le V_{\boldsymbol{e}}(P)$，即该序列中的符号变化次数。特别地，若它们符号全相同，则对于任意有限 p，P 都不是 p-中心。（ii）（壳层张成界。）若 m 个不平衡壳层的壳层向量张成一个 k维子空间，则 $\kappa(P)\le m-k$。（iii）若 $m\ge 2$ 和 $\kappa(P)=m-1$，则不平衡壳向量彼此平行，并且按半径递增排序时方向交替变化。更明确地说，若 $j_1<\cdots<j_m$ 标记这些不平衡壳层，则

$$\boldsymbol{S}_{j_\ell}=(-1)^{\ell-1}c_\ell\,\boldsymbol{u},\qquad c_\ell>0,$$

对于单位向量 $\boldsymbol{u}$。

证明。(i) 标量函数 $\langle F_p(P)\ \boldsymbol{e}\rangle$ 是一个非零指数和，其系数 $\tanh(r_j)\langle \boldsymbol{S}_j,\ \boldsymbol{e}\rangle$ 的符号与数值 $\langle \boldsymbol{S}_j,\ \boldsymbol{e}\rangle$的符号相同。由引理 3.4 可知，它在纤维的每个有限参数处的零点阶数至少为其重数，而引理 4.1 给出 $\kappa(P)\le V_{\boldsymbol{e}}(P)$。

(ii) 由于平衡壳层的贡献为零，我们可以将其省略，并按距离顺序将不平衡壳层编号为 1、.....、m。若 $k=1$，则其壳层向量平行于单位向量 $\boldsymbol{u}$。序列 $\langle \boldsymbol{S}_j,\ \boldsymbol{u}\rangle$ 恰有m 个非零项，因此 $V_{\boldsymbol{u}}(P)\le m-1$，由 (i) 得 $\kappa(P)\le m-1$。若 $k=2$，取单位向量 $\boldsymbol{e}\perp \boldsymbol{S}_m$。由于壳层向量张成 $T_P\mathbb{H}^2$，数值$\langle \boldsymbol{S}_j,\ \boldsymbol{e}\rangle$、$1\le j\le m-1$并非全为零。因为 $\langle \boldsymbol{S}_m,\ \boldsymbol{e}\rangle=0$，这些 m 个数中至多有 $m-1$ 个非零，因此 $V_{\boldsymbol{e}}(P)\le m-2$，由 (i) 得 $\kappa(P)\le m-2$。因此，第二个独立方向允许选取一个投影以去除一个壳层，并将界降低一。

(iii) 根据 (ii)，$m-1=\kappa(P)\le m-k$，因此 $k=1$。选取一个与不平衡壳向量 $\boldsymbol{u}$平行的单位向量，并规定其方向使第一个向量的正投影为正。根据 (i)，它们的 m 非零投影 $\langle \boldsymbol{S}_{j_\ell},\ \boldsymbol{u}\rangle$ 至少有 $m-1$ 次符号变化，因此符号交替出现；平衡壳层贡献为零的项予以省略。□

如果 $m=n$，那么没有任何点等于 P，且每个壳层都只包含一个点。因此，如果 $\kappa(P)=n-1$，则第 (iii) 部分迫使这些点位于一条经过 P 的测地线上，并按照距离大小规律交替分布在两侧。接下来的证明将排除这一特殊构型中的平衡。

定理 4.6 (中心重数界)。 设 $\mathcal{A}$ 由 $n \geq 3$ 个点组成，并按重数计数，且假设中心映射 $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ 非常值。那么对于任意 $P \in \mathbb{H}^2$,

$$\kappa(P) + \mathbf{1}_{\{C_\infty = P\}} \leq n - 2.$$

这里， $\mathbf{1}_{\{C_\infty = P\}}$ 在 $P = C_\infty$ 时等于1 ，否则等于0 ；端点参数只计一次。特别地，非恒定中心映射的每个纤维的总重数至多为 $n-2$ （在 $[0,\infty]$上）；若 $C_p(\mathcal{A})$ 在 $[0,\infty]$中的 $n-1$ 个不同参数处取相同值，则中心映射为常数。

证明。 取上述的 m 和 k ，由定理 4.5(ii)可得 $\kappa(P) \leq m-k$ 。

先假设 $C_\infty \neq P$。由于 $m \leq n$和 $k \geq 1$，除非 $k=1$、 $m=n$且 $\kappa(P) = n-1$，否则有 $\kappa(P) \leq n-2$。在这种情况下，没有点等于 P，每个壳层都只有一个点， $s=n$，且这些点位于经过 P的一条测地线上。由定理 4.5(iii)，将这些点标记为使得 $0 < r_1 < \cdots < r_n$后，我们有$\boldsymbol{v}_j = (-1)^{j-1}\boldsymbol{u}$，也就是说，这些点按距离顺序交替位于 P 两侧。对于满足 $C_{p_1} = P$的参数 p_1 ，平衡定律为 $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}c_j = 0$，其中$c_j = \tanh(r_j)\cosh^{p_1}(r_j)$。由于 $p_1 \geq 0$，径向权重随距离增大而增大， $0 < c_1 < \cdots < c_n$，将各项从外向内两两分组后，我们得到

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}c_j = (-1)^{n-1}\left[(c_n - c_{n-1}) + (c_{n-2} - c_{n-3}) + \cdots\right],$$

当 n 为奇数时，最后一项为 c_1 。括号内为正数，因此总和非零。由此矛盾可得 $\kappa(P) \leq n-2$。

现在假设 $C_\infty = P$，并设距离为 $r_s = \max_i d(P,\alpha_i)$ 的最外层壳层包含 b 个点，按重数计。由命题 2.6 可知，零点位于这些点的方向所张成的凸包中，因此 $b \geq 2$。若 $b=2$，则这两个方向相反，因此 $\boldsymbol{S}_s = 0$；又由于 $s \leq n-b+1 = n-1$ ，我们得到$m \leq s-1 \leq n-2$。若 $b \geq 3$，则 $m \leq s \leq n-b+1 \leq n-2$。两种情况下均有$\kappa(P) \leq m-k \leq n-3$；再加上端点 $p=\infty$ ，得到界$n-2$。□

这个界在以下意义下是锐的：在 $[0,\infty]$ 中，任意一个基数为 $n-2$ 的多重集，其中 ∞ 至多出现一次，都是某个由 n 个点组成的构型在 P 上方的纤维多重集；这些点可位于 P 的任意预先指定的邻域内（定理 5.2(ii)）。

推论 4.7 （三个点）。 对于三个点（按重数计），中心映射要么是常值映射，要么在 $[0,\infty]$ 上是单射，并且在 $[0,\infty)$ 上是浸入。

证明。假设中心映射不是常值映射。对于 $n=3$，定理 4.6 表明，对每个 P，$C_p = P$在 $[0,\infty]$ 中至多有一个解，因此该映射是单射。每个有限解的重数均为一，因此对每个有限 p 都有 $C_p \neq 0$ 。□

对于每个 $n \geq 4$，这两个结论都不成立：根据定理 5.2(ii)，中心映射可能在两个指定参数处取相同的值，也可能在一个指定的有限参数处具有零速度。

4.3. 尾部计数与共线构型。符号界分别处理各个壳层向量。由于对于 $p \geq 0$，$w_p(r)$ 随 r 增大而增大，我们也可以通过连续的正增量来组装合力：第一个增量作用于所有壳层，之后每个增量只作用于更外侧的壳层。这启发我们考虑超过每个半径的壳层向量之和。

对于 $r \geq 0$，定义尾向量

$$\boldsymbol{T}_P(r) := \sum_{j:\, r_j > r} \boldsymbol{S}_j(P) = \sum_{i:\, t_i > r} \boldsymbol{v}_i \in T_P\mathbb{H}^2,$$

为距离 P 超过 r 的壳层的壳层向量之和，等价地说，就是指向距离超过 r 的各点的单位方向之和。平衡壳层对其没有贡献。令 $r_0 = 0$。尾向量在每个区间 $[r_{j-1}, r_j)$ 上保持不变，并在 $[r_s, \infty)$ 上为零。当 r 递减并越过某个壳层半径 r_j 时，尾向量跳跃了壳层向量 $\boldsymbol{S}_j(P)$。其连续取值

$$0, \quad \boldsymbol{S}_s, \quad \boldsymbol{S}_s + \boldsymbol{S}_{s-1}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{S}_s + \cdots + \boldsymbol{S}_1$$

是 $T_P\mathbb{H}^2$ 中一条多边形路径的顶点，即尾路径：它从原点开始，从外层壳层向内遍历，其边就是壳层向量。

利用 $\boldsymbol{S}_j(P) = \boldsymbol{T}_P(r_{j-1}) - \boldsymbol{T}_P(r_j)$、$w_p(0) = 0$ 以及 $\boldsymbol{T}_P(r_s) = 0$，通过分部求和可得

$$F_p(P) = \sum_{j=1}^{s} w_p(r_j)\, \boldsymbol{S}_j(P) = \sum_{j=0}^{s-1} \big(w_p(r_{j+1}) - w_p(r_j)\big)\, \boldsymbol{T}_P(r_j). \tag{12}$$

权重 w_p 随 r增加，因此 $F_p(P)$ 是尾路径各顶点的正组合。由于 $w_p(r_{j+1}) - w_p(r_j) = \int_{r_j}^{r_{j+1}} \varphi_p''(r)\, dr$，我们在 $T_P\mathbb{H}^2$ 中得到尾部恒等式：

$$F_p(P) = \int_0^{\infty} \varphi_p''(r)\, \boldsymbol{T}_P(r)\, dr. \tag{13}$$

在此表示中，对 p 的依赖完全包含在核 φ_p'' 中，而构型和基点 P 决定了尾向量函数。对于单位向量 $\boldsymbol{e} \in T_P\mathbb{H}^2$，尾部计数

$$N_{\boldsymbol{e}}(r) = \langle \boldsymbol{T}_P(r), \boldsymbol{e} \rangle = \sum_{j:\, r_j > r} \langle \boldsymbol{S}_j(P), \boldsymbol{e} \rangle$$

是尾向量的投影，并且 $\langle F_p(P),\ \boldsymbol{e} \rangle = \int_0^{\infty} \varphi_p''(r)\ N_{\boldsymbol{e}}(r)\ dr$。尾部计数 $N_{\boldsymbol{e}}$ 为实值。与 $\boldsymbol{T}_P$ 一样，它在每个区间 $[r_{j-1}, r_j)$ 上为常数，并在 $[r_s, \infty)$ 上消失。

更一般地，$(0, \infty)$ 上的一个有限阶梯函数 是一个取实值的函数，它在覆盖 $(0, \infty)$ 的有限个开区间中的每一个区间上均为常数，这些开区间至多由有限个断点分隔。

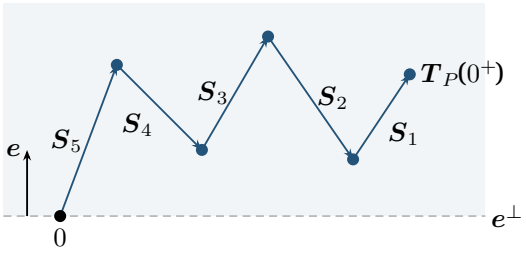

FIGURE 1. 一条具有 $s = 5$ 个壳层的尾路径。其顶点是 $\boldsymbol{T}_P(r)$ 的取值：从最远点之外的 r 处的 0 开始，然后从外向内依次加上壳层向量 $\boldsymbol{S}_5, \dots, \boldsymbol{S}_1$。边在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影符号交替四次，因此 $V_{\boldsymbol{e}}(P) = 4$；而第一个顶点之后的所有顶点都位于同一个开半平面内，因此 $S^-(N_{\boldsymbol{e}}) = 0$。示意图。

对于这样的 h，令 $S^-(h)$ 表示按顺序排列这些开区间上的函数值序列中符号变化的次数，省略 $h = 0$ 所在的区间，并忽略断点处的函数值。这是将全正性中的 Karlin记号 S^- 应用于 h 在其各区间上的函数值序列。

$N_{\boldsymbol{e}}$ 的取值是尾路径各顶点在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影，因此 $S^-(N_{\boldsymbol{e}})$ 统计这些顶点在由 $\boldsymbol{e}^\perp$ 界定的两个开半平面之间交替的次数，位于 $\boldsymbol{e}^\perp$ 上的顶点不计。另一方面，$V_{\boldsymbol{e}}(P)$ 统计尾路径的边跨越 $\boldsymbol{e}^\perp$ 时方向交替的次数。由于路径从原点出发，每当非零顶点投影交替时，投影边的符号就必然相应地交替。因此，顶点所在半平面的交替次数不会超过边方向交替次数，即 $S^-(N_{\boldsymbol{e}}) \le V_{\boldsymbol{e}}(P)$（命题 4.9）。这个不等式可以是严格的，因为边可能呈锯齿状，而顶点仍停留在同一侧（图 1）。

本小节的主要结果是，对于 $p \ge 0$，核 φ_p'' 具有变差递减性质：对于一个支撑有界且不几乎处处为零的有限阶梯函数 h，其变换

$$p \longmapsto \int_0^\infty \varphi_p''(r) h(r)\, dr$$

其零点数（按重数计）不超过 h 的符号变化数。这是引理 4.1 的连续类比。在那里，离散核 $e^{p\lambda_j}$ 通过求和作用于系数序列 (a_j)；而在这里，径向核 $\varphi_p''(r)$ 通过积分作用于阶梯函数 h。在这两种情况下，按重数计的零点数都受输入的符号变化数限制。关于变差递减与全正性之间的联系，参见 Karlin [13]。一般结果的证明见第 4.4 小节，初次阅读时可以略过。

定理 4.8 (该核 φ_p''具有变差递减性)。 设 $h\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$是一个有限阶梯函数，对于某个 $R>0$，当 $r>R$时该函数为零，并且并非几乎处处为零。那么

$$f(p)=\int_0^\infty \varphi_p''(r)\,h(r)\,dr$$

在 $[0,\infty)$ 中至多有 $S^-(h)$ 个零点，按重数计算。

对 $p\geq 0$ 的限制是必要的。对于 $p<0$，函数 $\varphi_p'=\tanh r\cosh^p r$ 先增后减，因此对于适当的 $0<a<b$，有 $\varphi_p'(a)=\varphi_p'(b)$，且 $h=\mathbf{1}_{(a,b)}$ 有 $S^-(h)=0$，而 $\int_0^\infty \varphi_p'' h\,dr=\varphi_p'(b)-\varphi_p'(a)=0$。

命题 4.9 (尾部界)。 假设中心映射非常数。令$P\in\mathbb{H}^2$，并设 $\boldsymbol{e}\in T_P\mathbb{H}^2$ 为满足 $N_{\boldsymbol{e}}\neq 0$ 的单位向量。则

$$\kappa(P)\leq S^-(N_{\boldsymbol{e}})\leq V_{\boldsymbol{e}}(P).$$

证明。 由引理 3.4，在每个满足 $C_{p_0}=P$ 的有限参数 p_0 处，投影后的力 $\langle F_p(P)\ \boldsymbol{e}\rangle$ 的消失阶至少为 $\operatorname{ord}_{p_0}(P)$。根据尾部恒等式 (13)，该投影是 $N_{\boldsymbol{e}}$ 的变换。由于 $N_{\boldsymbol{e}}\neq 0$，定理 4.8 给出 $\kappa(P)\leq S^-(N_{\boldsymbol{e}})$。

对于第二个不等式，从最外层壳向内读取 $N_{\boldsymbol{e}}$ 的值。它们是从 0 开始，依次对数值 $\langle \boldsymbol{S}_j(P)\ \boldsymbol{e}\rangle$ 求得的部分和，顺序为 $j=s$、$s-1$、.....、1。构成第一个非零部分和的项中，至少有一项具有该部分和的符号。每当非零部分和改变符号时，自上一个具有旧符号的部分和以来所加的项中，至少有一项具有新符号：这些项的和就是两个部分和之差。这样得到的项按顺序出现，且符号交替。因此，部分和的符号变化次数不会多于各项本身的符号变化次数。将各项顺序反转不会改变其符号变化次数，所以$S^-(N_{\boldsymbol{e}})\leq V_{\boldsymbol{e}}(P)$。□

对于经过 P 的测地线上的点，若其在 P 处的单位切向量为 $\boldsymbol{u}$，则每个方向 $\boldsymbol{v}_i$ 均为 $\pm\boldsymbol{u}$，因此尾路径沿直线 $\mathbb{R}\boldsymbol{u}$ 按整数步移动，且 $N_{\boldsymbol{u}}$是整数游走。这已经表明，尾部界可以比符号界小得多。若没有点位于 P，且每个壳层都包含一个点，这些点按距离递增的顺序交替位于 P 两侧（如定理 4.6 的证明所示），那么壳层向量 $\pm\boldsymbol{u}$ 交替变化，并且 $V_{\boldsymbol{u}}(P)=n-1$，达到可能的最大值。然而，若 $\boldsymbol{u}$ 指向最远的点，则 $N_{\boldsymbol{u}}$只取 0 和 1 这两个值，所以 $S^-(N_{\boldsymbol{u}})=0$；命题 4.9 再次表明， P 永远不是中心，定理 4.6 证明中的配对论证也得出了这一结论（参见图 1，其中尾路径不在一条直线上时也会出现相同情况）。一般而言，离开 0 会使游走至少产生一个单位的变差，而之后每次符号变化至少产生两个单位的变差，由此得到下一定理中的共线界。

定理 4.10 (测地线上的点)。 设 $\mathcal{A}$ 由测地线 γ上的 $n\geq 3$ 个点组成，并按重数计数，且假设中心映射是

非恒定的。那么，对于每个 $p \in [0,\infty]$，都有 $C_p \in \gamma$，并且对于每个 $P \in \mathbb{H}^2$

$$\kappa(P) + \mathbf{1}_{\{C_\infty = P\}} \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

证明。该测地线是闭且凸的，因此由命题 2.3 得到 $C_p \in \gamma$。对于 $P \notin \gamma$，左侧为零，所以不妨设 $P \in \gamma$。令 $\boldsymbol{u}$ 为 γ 在 P 处的单位切向量，并令 n' 为不同于 P 的点的数量。它们各自都有 $\boldsymbol{v}_i = \pm\boldsymbol{u}$，因此 $N_{\boldsymbol{u}}$ 是一个阶梯函数，取值为整数，并在最大距离 R 之外为零；它在 r_j 处有向内跳跃 $\langle \boldsymbol{S}_j(P)\ \boldsymbol{u}\rangle$，且全变差为 $\sum_j |\langle \boldsymbol{S}_j(P)\ \boldsymbol{u}\rangle| \leq n'$。由于中心映射非常值，$P$ 不是通用中心。因此，某个壳层向量是 $\boldsymbol{u}$ 的非零倍数，所以 $N_{\boldsymbol{u}} \not\equiv 0$。假设 $N_{\boldsymbol{u}}$ 改变符号 V 次，并令 $\rho_0 > \rho_1 > \cdots > \rho_V$ 为其取交替符号的非零整数值时所对应的半径。全变差满足$n' \geq \sum_j |\langle \boldsymbol{S}_j(P)\ \boldsymbol{u}\rangle| \geq |N_{\boldsymbol{u}}(\rho_0)| + \sum_l |N_{\boldsymbol{u}}(\rho_l) - N_{\boldsymbol{u}}(\rho_{l-1})| \geq 1 + 2V$。因此$V \leq \lfloor (n'-1)/2 \rfloor$，由命题 4.9 可得该界。若 $C_\infty = P$，则命题 2.6 表明，0 位于指向最远点的方向 $\pm\boldsymbol{u}$ 的凸包中，因此两个方向都必须出现。令 $a \geq 1$ 为最外层壳中沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的点数，$c \geq 1$ 为沿方向$-\boldsymbol{u}$的点数。该壳层的跳跃 $a-c$ 满足 $|a-c| \leq a+c-2$。这样，全变差至多为 $n'-2$，其余部分与之前相同：$n'-2 \geq 1+2V$，因此 $\kappa(P) \leq V \leq \lfloor (n'-3)/2 \rfloor$ 且 $\kappa(P) + 1 \leq \lfloor (n'-1)/2 \rfloor \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$。□

注记 4.11（高维情形）。本节结果可推广到$\mathbb{H}^d$ 的每个 $d \geq 2$。几何预备知识、中心映射的解析性以及重数论证在任意维数下仍然成立。壳层张成界仍为

$$\kappa(P) \leq m - k,$$

其中，m 是非零壳向量的数量，k 是它们在 $T_P\mathbb{H}^d$ 中张成的空间的维数，而不是构型的测地线包的维数，因为壳层可能相互抵消。选取一个单位向量 $\boldsymbol{e}$，使其正交于 $k-1$ 个线性无关的壳层向量，但不正交于所有 m 不平衡壳向量所张成的空间。投影序列 $\langle \boldsymbol{S}_j,\ \boldsymbol{e}\rangle$ 于是至多含有 $m-k+1$ 个非零项，因此定理 4.5(i)给出 $\kappa(P) \leq m-k$。对于 $k \geq 3$，这改进了仅使用$k \geq 2$时可得到的估计 $m-2$。定理 4.6 的证明不变：例外情形 $k=1$，$m=n$ 再次归结为测地线上的点。尾部恒等式在每个切空间中都成立，标量核 φ_p'' 也保持不变，因此尾部界和共线界同样可以推广。第 6 节中的二元型应用则是 $d=2$ 所特有的。◇

4.4. 定理 4.8 的证明。 证明基于两个引理。第一个给出了径向权重 $\varphi_p' = w_p$ 及其在 p中的导数的线性组合的零点界；第二个是波利亚的朗斯基行列式判据。

引理 4.12。 设 $0 \le p_1 < \cdots < p_t$ 和 $d_1, \dots, d_t \ge 0$ 为整数，并令 $J = \sum_{\ell}(d_\ell + 1)$。这些 $J+1$ 个函数

$$1 \quad and \quad \partial_p^k \varphi_p'(r)\big|_{p=p_\ell} \qquad (1 \le \ell \le t,\ 0 \le k \le d_\ell)$$

在$(0,\infty)$上线性无关，且它们的每一个非平凡线性组合在$(0,\infty)$中至多有 J 个零点（按重数计）。

证明。 设 $\lambda = \log\cosh r$，并记 $v(\lambda) = \tanh\, r = (1-e^{-2\lambda})^{1/2}$。在此变量下，径向权重为 $\varphi_p'(r) = v(\lambda) e^{p\lambda}$，因此对 p的每一次微分都会贡献一个因子 λ:

$$\partial_p^k \varphi_p'(r)\Big|_{p=p_\ell} = \lambda^k v(\lambda) e^{p_\ell \lambda}.$$

因此，除以 $v(\lambda)$后，陈述中这些函数的线性组合取如下型式

$$f(\lambda) = \frac{c_0}{v(\lambda)} + \sum_{\ell=1}^{t} P_\ell(\lambda) e^{p_\ell \lambda}, \qquad \deg P_\ell \le d_\ell.$$

该变量替换是$(0,\infty)$到其自身的解析微分同胚，且 v 在该处为正，因此这两种运算都不会改变零点或其重数。

记 $D = d/d\lambda$。对任意实数 a,

$$(D-a)g = e^{a\lambda}\big(e^{-a\lambda} g\big)'.$$

由此可知，如果 g 具有按重数计数的 $N \ge 1$ 个零点，那么 $(D-a)g$ 至少具有 $N-1$: 求导会保留每个零点除一个阶数外的所有阶数，而罗尔定理则保证相邻两个不同零点之间还存在一个零点。特别地，如果对 g 应用 K 个这样的因子后得到一个处处不为零的函数，那么 g 至多具有按重数计数的 K 个零点。

先假设 $c_0 \neq 0$。考虑算子

$$L = \prod_{\ell=1}^{t} (D - p_\ell)^{d_\ell + 1},$$

其阶数为 J。由于 $(D-p_\ell)(P e^{p_\ell\lambda}) = P' e^{p_\ell\lambda}$， L 会消去 f 中的每一个多项式—指数项。为计算剩余项，使用二项式展开

$$\frac{1}{v(\lambda)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-2m\lambda}, \qquad a_m = 4^{-m}\binom{2m}{m} > 0.$$

在每个区间 $\lambda \ge \delta > 0$ 上，都可以逐项对级数求导，因为指数衰减快于 m 的任意幂。因此

$$Lf(\lambda) = (-1)^J c_0 \sum_{m=0}^{\infty} a_m \prod_{\ell=1}^{t} (2m + p_\ell)^{d_\ell+1} e^{-2m\lambda}.$$

和中的所有项都非负，因为 $p_\ell \geq 0$，且所有满足$m \geq 1$ 的项都为正。因此， Lf 处处不为零，所以 f 至多有 J 个零点。

现在假设 $c_0 = 0$，且某个 P_j 非零。对所有 $\ell \neq j$ 应用因子 $(D - p_\ell)^{d_\ell+1}$。它们消去含有 $\ell \neq j$ 的项，并留下一个 $Q(\lambda)e^{p_j\lambda}$ 项，其中 $\deg Q = \deg P_j$。事实上，

$$(D - p_\ell)(Pe^{p_j\lambda}) = \big(P' + (p_j - p_\ell)P\big)e^{p_j\lambda},$$

且 $p_j - p_\ell \neq 0$，因此多项式次数保持不变。再应用 $\deg P_j$ 次 $D - p_j$ 后，得到 $e^{p_j\lambda}$ 的一个非零常数倍。所应用的微分算子中因子的总数为

$$\sum_{\ell\neq j}(d_\ell + 1) + \deg P_j \leq J - 1,$$

因此在此情形下， f 至多有 $J - 1$ 个零点。

在这两种情形中，系数不全为零的线性组合都不可能恒等于零，这就证明了线性无关性。这两种情形还给出了 J 个零点的断言上界，其中零点按重数计数。□

引理 4.13 (P´olya 的朗斯基行列式判据)。设 u_1、...、u_M 是开区间 I 上的光滑实值函数。若对于每个 $j = 1$、...、M， $W(u_1$、...、$u_j)$ 在 I 上处处非零，则 u_1、...、u_M 的每个非平凡线性组合在 I 中至多有 $M - 1$ 个零点，其中零点按重数计数。

参见 P´olya [17]；关于这一表述，参见 Novikov 和 Yakovenko 的 [14, 定理 5，第 180] 页。

定理 *4.8* 的证明。 设 $V = S^-(h)$ 且 $M = V + 1$。由于 h 具有有界支撑，且

$$\varphi_p''(r) = e^{(p-2)\log\cosh r}(1 + p\sinh^2 r),$$

定义 f 的积分在 $\mathbb{R}$ 上关于 p 是实解析的，并且可以在积分号下求导。特别地， $p = 0$ 处的零点按其通常重数计数。若所断言的界不成立，则存在参数$0 \leq p_1 < \cdots < p_t$和正整数 $\mu_1, \ldots, \mu_t$，使得 $\sum_{\ell=1}^{t} \mu_\ell = M$，从而

$$f^{(k)}(p_\ell) = 0 \qquad (1 \leq \ell \leq t,\ 0 \leq k < \mu_\ell).$$

对于每个这样的配对 (ℓ, k)，令

$$U_{\ell,k}(r) = \partial_p^k \varphi_p'(r)\Big|_{p=p_\ell}, \qquad u_{\ell,k}(r) = U_{\ell,k}'(r) = \partial_p^k \varphi_p''(r)\Big|_{p=p_\ell},$$

其中撇号表示对 r求导。按递增的 ℓ 排列 $U_{\ell,k}$，并在每个组内按递增的 k 排列。将所得列表记为$U_1, \ldots, U_M$，并令 $u_i = U_i'$。对于 $1 \leq j \leq M$，沿常函数 1 所在的列展开可得

$$W(u_1, \ldots, u_j) = W(1, U_1, \ldots, U_j).$$

如果这个行列式在某个 $r > 0$ 处为零，那么 $1, U_1, \ldots, U_j$的一个非平凡线性组合会在该处与其前 j 阶导数同时为零。这

与引理 4.12 在 $J = j$ 下的结论矛盾：在初始列表 $U_1, \dots, U_j$中，每个出现的参数都由从零开始的连续导数阶数表示。因此，每个初始朗斯基行列式处处非零。根据引理 4.13，$u_1, \dots, u_M$的每个非平凡线性组合在 $(0, \infty)$ 中至多有 $M - 1 = V$ 个零点，按重数计。

在 h 的每一对相邻的非零异号值之间各取一个 $\rho_1 < \cdots < \rho_V$。在由这些点确定的 $(0, \infty)$ 区间上，h几乎处处交替地非负和非正。条件$\psi(\rho_i) = 0$，$1 \le i \le V$对 $V + 1$的系数施加了 V个齐次线性方程，

$$\psi = \sum_{\ell,k} a_{\ell,k} u_{\ell,k}.$$

取一个系数不全为零的解。由于 ψ 至多有 V 个按重数计的零点，ρ_i 就是它的全部零点，且每个零点都是单零点。因此，ψ 在每个 ρ_i 处变号，除此之外不再变号。必要时将 ψ 替换为 $-\psi$ 后，我们几乎处处有 $\psi h \ge 0$ 。由于 h 并非几乎处处为零，且 ψ 只有有限个零点，

$$\int_0^\infty \psi(r) h(r)\, dr > 0.$$

另一方面，利用积分号下求导可得

$$\int_0^\infty \psi(r) h(r)\, dr = \sum_{\ell=1}^{t} \sum_{k=0}^{\mu_\ell - 1} a_{\ell,k} f^{(k)}(p_\ell) = 0.$$

这一矛盾证明了该定理。 □

5. Sharpness at prescribed parameters

本节证明，定理 4.6 的界 $n - 2$ 以及定理 4.10 的共线界 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 均为锐界。在给定点 P的任意邻域内，我们构造一些构型，使得 $C_p = P$ 的有限解恰好是指定参数，且重数也如指定。端点也可以指定，并计入总数；该总数等于相应的界。

我们反向使用尾部恒等式。首先选取一个尾部计数，使其变换具有指定的有限零点，然后在其跳跃点处放置点，从而实现该尾部计数。这一选择依赖于 Hobby–Rice 定理 [10, 15]：对于 $(0,\ R)$ 上的可积函数 $k_1,\ \dots\dots,\ k_m$，存在一个取值为 ± 1 的阶梯函数 ε，其符号变化至多为 m 次，并且对每个 i，都有 $\int_0^R k_i(r)\varepsilon(r)\, dr = 0$。

引理 5.1。设 $R > 0$和 $m \ge 1$，并设 k_1、…、k_m 是定义在 $(0,\ R)$ 上的可积函数，满足以下性质：如果定义在 $(0,\ R)$上的有限阶梯函数 h 满足

$$\int_0^R k_i(r) h(r)\, dr = 0 \qquad (i = 1, \dots, m),$$

那么 $h=0$ 几乎处处成立，或 $S^-(h)\geq m$。那么存在唯一的点

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=R$$

使阶梯函数

$$\varepsilon(r)=(-1)^{m-j},\qquad t_j<r<t_{j+1},\quad j=0,\dots,m,$$

满足

$$\int_0^R k_i(r)\varepsilon(r)\,dr=0\qquad (i=1,\dots,m).$$

ε 在切割点处的取值无关紧要。

证明。 Hobby–Rice 定理给出了一个阶梯函数 η，其取值为 ±1，且至多有 m 次符号变化，并且对所有 i都有 $\int_0^R k_i\eta\,dr=0$。根据假设，η恰好有 m 次符号变化，发生在各点 $0<t_1<\cdots<t_m<R$处。于是，取符号使得在 (t_m,R) 上有 $\varepsilon=1$，则 $\varepsilon=\pm\eta$具有所述型式。

为证明唯一性，设 ε 和 $\widetilde{\varepsilon}$是两个这样的符号函数，并令$h=\varepsilon-\widetilde{\varepsilon}$。二者在 R 附近都等于 1；由于它们各自恰好改变符号 m 次，因此在 0 附近都等于 $(-1)^m$。于是， h 从零开始并以零结束，其唯一可能的非零取值为 2 和 -2。忽略断点处的取值，每个符号函数的全变差为 $2m$，因此 h的全变差至多为$4m$。如果 h在某个区间上非零，则其全变差至少为 $2+4S^-(h)+2$：离开零需付出 2，每次符号变化至少付出 4，回到零还需付出 2。因此 $S^-(h)\leq m-1$。但对每个 i都有 $\int_0^R k_i h\,dr=0$，所以引理的假设迫使 $h=0$ 几乎处处成立。由此可知，在它们合并后的切割点之间的每个开区间上， ε和 $\widetilde{\varepsilon}$ 都相等。一个函数的符号变化必然也是另一个函数的符号变化，因此它们的切割点重合。□

设 $\mathcal{Q}$ 是 $[0,\infty$中的一个有限多重集，且满足 $|\mathcal{Q}|=m$。对于 $\mathcal{Q}$ 中每个以重数 μ出现的参数 p，取以下 μ 函数

$$\partial_s^k\varphi_s''(r)\big|_{s=p},\qquad 0\leq k<\mu.$$

由定理 4.8，这些 m 函数具有引理 5.1 所要求的性质：若有限阶梯函数 h 在 $(0,\ R)$ 上与它们全都正交，那么对积分号下求导可知， $f(p)=\int_0^R\varphi_p''h\,dr$ 在每个这样的 p 处都有一个重数至少为 μ 的零点，因此按重数计至少有 m 个零点，所以 $h=0$ 几乎处处成立，或者 $S^-(h)\geq m$。

定理 5.2（预设参数与重数）。 设 $P\in\mathbb{H}^2$、$R>0$ 和 $n\geq3$，并设 $\mathcal{P}$ 是 $[0,\infty]$ 中的一个有限多重集，其中 ∞ 至多出现一次。在以下每种情形中，都存在一个由 n 个点构成的构型（按重数计），这些点位于以 P 为中心、半径为 R 的闭球内，其在 P 上的纤维多重集为 $\mathcal{P}$：

(i) $|\mathcal{P}|=\lfloor(n-1)/2\rfloor$，所有配置点都位于一条经过$P$的测地线上；

(ii) $|\mathcal{P}|=n-2$。

因此，(i) 达到了定理 *4.10* 的共线界，而(ii) 达到了定理*4.6*的一般界。

证明。令 $\delta = 1$ 若 $\infty \in \mathcal{P}$，否则令 $\delta = 0$；设 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{P}$中的有限参数多重集，从而 $m + \delta = |\mathcal{P}|$，其中 $m = |\mathcal{Q}|$。固定正交归一的 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{e} \in T_P\mathbb{H}^2$。若 $m \geq 1$，令 ε 为与上述 $\mathcal{Q}$ 相关的 m 函数按照引理 5.1 给出的、具有符号变化 $t_1 < \cdots < t_m$的对象；若 $m = 0$，则令 $\varepsilon \equiv 1$定义在 $(0, R)$ 上。令 $c = 1$ 对应情形 (i)，令 $c = \frac{1}{2}$ 对应情形 (ii)；再令 $N = c\varepsilon$ 定义在 $(0, R)$ 上，令 $N = 0$ 定义在 (R, ∞) 上，使得 $S^{-}(N) = m$。由尾部恒等式 (13)，$F_p(P) = \int_0^\infty \varphi_p''(r)\, \boldsymbol{T}_P(r)\, dr$，且 $\boldsymbol{T}_P = N_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} + N_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}$。因此，尾部计数为 $N_{\boldsymbol{u}} = N$和 $N_{\boldsymbol{e}} = 0$的构型，在 P处的净 p-力为 $f(p)\boldsymbol{u}$，其中 $f(p) = \int_0^R \varphi_p'' N\, dr$。该函数在每个 $p \in \mathcal{Q}$ 处的零点阶至少等于其重数。由定理 4.8，它在 $[0, \infty)$ 中至多有 m 个零点，按重数计，因此没有其他零点，且这些阶数均为精确值。由命题 2.6和引理 3.4，对于有限 p，$C_p = P$ 当且仅当 $p \in \mathcal{Q}$，并且每个此类解的重数等于其在 $\mathcal{Q}$中的重数。

接下来需要实现 N。在球内，沿方向 $(-1)^{m-j+1}\boldsymbol{u}$，在距离 t_j 处，对于 $j = 1$、.....、m，放置一个重数为 2 的点（情形 (i)）或一个单点（情形 (ii)）；这些点在 t_j 处产生 N 的跳跃点。在距离 R 处，单位方向之和必须为 $c\boldsymbol{u}$，才能在 R 处产生所需的向内跳跃。它们的凸包决定了 P 是否为外心。我们按如下方式选择这些方向：

	$\delta = 0$	$\delta = 1$
(i)	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u},\ -\boldsymbol{u}$
(ii)	$\frac{1}{4}\boldsymbol{u} \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{u},\ -\frac{1}{4}\boldsymbol{u} \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\boldsymbol{e}$

在情形 (ii) 中，这些是 n 个点；在情形 (i) 中，若 n 为奇数，则有 n 个点；若 n 为偶数，则再添加点 P。尾部计数为 $N_{\boldsymbol{u}} = N$ 和 $N_{\boldsymbol{e}} = 0$；在情形 (i) 中，这些点位于同一条测地线上。最远点是距离为 R 的那些点。对于 $\delta = 0$，它们的方向在 $\boldsymbol{u}$ 上的正投影为正，因此 0 不在它们的凸包中，且由命题 2.6 可知 $C_\infty \neq P$。对于 $\delta = 1$，我们有$\frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}(-\boldsymbol{u}) = 0$（情形 (i)）和 $\frac{1}{5}\boldsymbol{u} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{u} + \frac{\sqrt{15}}{4}\boldsymbol{e}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{u} - \frac{\sqrt{15}}{4}\boldsymbol{e}\right) = 0$（情形 (ii)），因此 $C_\infty = P$。□

对于固定的 R 和给定的纤维多重集，根据引理 5.1，本构造中的切割半径是唯一的；但实现该构型的方式未必唯一，即使限定为固定 P 的等距变换也不例外。

备注 5.3（奇参数的显式构型）。 对于多重集 $\mathcal{Q} = \{1, 3, \ldots, 2m-1\}$，定理 5.2 的证明中的切割点 t_j 可以显式选取为

$$\sinh t_j = \sinh R \cos\frac{(m+1-j)\pi}{2m+1}, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

因此，数值 $\sinh t_j / \sinh R$ 是切比雪夫多项式 U_{2m} 的正零点。事实上，令 $y = \sinh r$，径向权重为 $w_{2i-1}(r) =$

$\tanh r\cosh^{2i-1} r = y(1+y^2)^{i-1}$，因此，型式 $\varphi''_{2i-1}\,dr = dw_{2i-1}$、$1 \le i \le m$张成型式 $y^{2l}\,dy$、$0 \le l < m$。令 $y = \sinh R\cos\theta$。对于 $0 \le k < 2m$，型式 $y^k\,dy$ 是 $\sin(l\theta)\,d\theta$ 的线性组合，其中 $1 \le l \le 2m$；而 $\operatorname{sgn}\sin((2m+1)\theta)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上与这些函数正交，证明与定理 7.6(ii) 的证明相同。由于 $2m+1$ 是奇函数，这个符号函数在 $\theta \mapsto \pi - \theta$ 下保持不变，因此关于 y 为偶函数，所以在 $0 < y < \sinh R$ 上，它与型式 $y^{2l}\,dy$ 正交；在 $y = \sinh R$ 附近它等于 1，并且恰好在上述各点改变符号。例如，对于 $m = 2$ 和 $\sinh R = 4$，在经过 P 的测地线上，位于有向距离 $\operatorname{arsinh} 4$、$-\operatorname{arsinh}(\sqrt{5}+1)$ 和 $\operatorname{arsinh}(\sqrt{5}-1)$ 处的五个点（最后两点的重数为 2），仅当 $p \in \{1,3\}$ 时才有 $C_p = P$。$\diamond$

注记 5.4（高维情形）。 定理 5.2 中的构型位于经过 P 的一个全测地平面内。在 $\mathbb{H}^d$ 中，包含于此类平面的构型，其中心根据命题 2.3 也位于该平面内，因此与在该平面中计算出的中心一致；该平面与 $\mathbb{H}^2$ 同构。因此，对每个 $d \ge 2$，这一构造以及第 4 节中界的锐性在 $\mathbb{H}^d$ 中均成立。$\diamond$

6. Applications to binary forms

对于次数为 $2n$ 的全复实二元形式 F，其 p-零点 $\xi_p(F)$ 是其 n 上半平面根的中心 C_p（第 2.4 小节）。本节中，上半平面 $\mathbb{H}^2$ 内的根均按重数计数；当所有上半平面根重合时，使用第 2.4 小节的 Julia 延拓。反过来，$\mathbb{H}^2$ 中任意由 n 个点组成的构型 $\mathcal{A}$，都是次数为 $2n$ 的全复实形式 $F(X,\ Z) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}}(X - \alpha Z)\ (X - \alpha Z)$ 的上半平面根多重集。我们将第 4 节的界和第 5 节的构造转化为 p-零点的重合阈值，对具有与参数无关的零点的低次数形式进行分类，并描述当 p 变化时约化矩阵在何种情况下仍然有效。

6.1. **重合阈值**。 根据定理 4.6，如果足够多的不同参数对应于 F 的同一个 p-零点，那么 $\xi_p(F)$ 与 p 无关。

推论 6.1（p-零点的重合）。 如果全复实二元 F 型式的 p-零点在 $[0,\infty]$ 中的 $n-1$ 个不同参数处取值相同，那么对于每个 $p \in [0,\infty]$，$\xi_p(F)$ 都是同一个点。对于六次型，任意两个参数就足够；对于八次型，任意三个参数就足够。

证明。 对于 $n \le 2$，中心映射为常数（注 2.4）。对于 $n \ge 3$，将定理 4.6 应用于 n 上半平面根。$\square$

对于 $n \ge 3$，阈值 $n-1$ 是精确的。给定点 $P \in \mathbb{H}^2$ 以及 $[0,\infty]$中的任意 $n-2$个不同参数，定理 5.2(ii) 给出了一个次数为 $2n$ 的型式，其p-零点恰好在这些参数处等于 P，并且其所有上半平面根都可以任意接近 P。

特别地，对于每个 $n \geq 4$以及每一对不同参数p_1，$p_2 \in [0,\infty]$，存在一个次数为 $2n$的型式 F，使得 $\xi_{p_1}(F) = \xi_{p_2}(F)$，但$p \mapsto \xi_p(F)$ 不是常数。取 $p_1 = 0$ 和 $p_2 = 1$，我们看到，次数 8 是 Julia 零点与双曲零点能够重合、而并非所有 p-零点都重合的最小次数；关于一个明确的整系数八次型，见例 6.4。

对于共线根，精确阈值则为 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$，根据定理 4.10 和 5.2(i)。

6.2. **六次型和八次型中与参数无关的零点。** 现在我们描述在次数为 4、6 和 8 时，p- 零点与 p 无关的根构型。对于四次型，每个 p- 零点都是两个上半平面根的双曲中点（注 2.4）。对于参数对 $p = 0$，1，这一观察、定理 6.2 和推论 6.5 分别得出了四次型、六次型和共线八次型的命题 11–13] 中的重合结果。这里的证明是自洽的。

定理 6.2 (具有重合的六次型 p-零点)。 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{H}^2$ 是全复实二元六次型 F的上半平面根。以下命题等价：

(i) $\xi_p(F) = \xi_{p'}(F)$ 对某些互不相同的 p、$p' \in [0,\infty]$；(ii) α_1、α_2、α_3 要么是双曲等边三角形的顶点，要么共线，且其中一个是另外两个的双曲中点；(iii) $\xi_p(F)$ 与 $p \in [0,\infty]$ 无关。

证明。 由推论 6.1 可知，对于六次形式，在两个互异参数处重合即已足够，因此 (i) 推出 (iii)。

假设 (iii)，并令 P 为公共的 p-零点。由定理 4.2，关于 P 的每个壳层都是平衡的，因此至少包含两个根。由于只有三个根，壳层至多有一个。若该壳层包含全部三个根，则它们从 P 出发的单位方向之和为零，因而两两夹角均为$2\pi/3$。这些根到 P的距离相等，因此由双曲余弦定理可知，它们两两之间的距离也相等。因此它们构成一个等边三角形。若壳层包含两个根，则它们的方向相反，且到 P 的距离相等，所以 P 是它们的中点。第三个根本身就是 P。若不存在壳层，则三个根都等于 P，中点条件仍然成立。由此证明 (ii)。

反之，设 (ii) 成立。在等边情形中，绕外心旋转 $2\pi/3$ 会置换三个顶点，因此它们在该处的单位方向之和为零。在中点情形中，两个外部根以其中点为中心构成一个平衡壳层，而位于中点的根不产生任何力。如果三个根重合，则不存在壳层。因此，在每种情形下，定理 4.2 都给出 (iii)。最后，(iii) 立即推出 (i)。□

对于六次型，在两个不同参数处重合会迫使所有 p-零点都重合。对于八次型，即使 Julia 零点与双曲零点重合也不足够（例 6.4）。对称性原理 [6, 命题 10]

解释了为什么在下面的每个构型中这两个零点都相同，而壳判据表明，这些恰好是具有与参数无关的零点的八次配置。

定理 6.3（具有与参数无关的零点的八次型）。设 F 为全复实二元八次形式，且 $P \in \mathbb{H}^2$。那么，对于每个$p \in [0, \infty]$， $\xi_p(F) = P$成立，当且仅当 F的四个上半平面根（按重数计）具有以下某种构型：

（i）这些根可以分成两对，每对的双曲中点都是 P。（ii）一个根是 P，另外三个根是一个双曲等边三角形的顶点，其外心为 P。

在（i）中，两对根不必位于同一条测地线上，且一对根可以由两个 P组成。

证明。根据定理 4.2，当且仅当以 P 为中心的每个壳层都是平衡的，零点才与 p 无关且等于 P。首先假设这一条件成立。一个壳层不可能只包含一个根。若它包含两个根，则它们的单位方向相反，因此 P 是它们的中点。

若一个壳层包含三个根，它们的三个单位方向之和为零，因此两两夹角均为 $2\pi/3$。由于这些根到 P 的距离相等，它们构成一个等边三角形，其外心为 P。第四个根必定是 P，否则它会单独构成一个壳层。这就得到了 (ii)。

还需考虑包含全部四个根的壳层。将它们的单位方向记为 $\boldsymbol{v}_1$、.....、 $\boldsymbol{v}_4$。由于 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4$， $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ 和 $\{-\boldsymbol{v}_3, -\boldsymbol{v}_4\}$ 在 $T_P\mathbb{H}^2$ 的单位圆上构成的点对具有相同的中点。若该中点为零，则 $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{v}_4$。若该中点非零，它便唯一确定这条弦：这条弦（可能退化）位于一条直线上，该直线经过中点且垂直于其半径。因此，无论哪种情况，四个方向都分成两对相反方向的点。所有根到 P 的距离相同，因此两对的双曲中点都是 P。

在所有其余情形中，每个壳层都包含两个根。将每个壳层上的根配成一对，再将剩余的 P 副本两两配对。这便得到 (i)。

反过来，在 (i) 中，每对远离 P 的根都对同一壳层贡献两个方向相反的方向。在 (ii) 中，指向各顶点的三个方向相隔 $2\pi/3$ ，且其和为零。因此，在这两种情形下，每个壳层都是平衡的，结论由定理 4.2 得出。□

例 6.4。以下八次型不属于这两类中的任何一类，尽管 Julia 零点与双曲零点重合：

$$F = (X^2 + 4Z^2)(9X^2 + Z^2)(3969X^4 - 7398X^2Z^2 + 5929Z^4).$$

其上半平面根为

$$2i, \qquad i/3, \qquad \frac{\pm 5\sqrt{19} + 8i}{21}.$$

在 $P=i$，前两个根位于虚轴上，后两个根关于虚轴对称。因此，合力竖直。设 $\boldsymbol{e}$ 为 i 处向上的单位向量。三个壳层的 cosh 分别为 $r=5/4,\ 5/3,\ 35/12$，它们沿 $\boldsymbol{e}$ 方向的基力分别为 $3/5,\ -4/5,\ 1/5$。事实上，根 α 在 i 处产生的基力的竖直分量为 $(|\alpha|^2-1)/(|\alpha|^2+1)$。对称对中的每个根都有 $|\alpha|^2=11/9$，因此各自贡献 $1/10$。因此

$$\langle F_p(i),\boldsymbol{e}\rangle=\frac{3}{5}\Big(\frac{5}{4}\Big)^p-\frac{4}{5}\Big(\frac{5}{3}\Big)^p+\frac{1}{5}\Big(\frac{35}{12}\Big)^p.$$

它在 $p=0$ 和 $p=1$处为零，但在 $p=2$处等于 $5/12$。因此，$\xi_0(F)=\xi_1(F)=i$，而 $\xi_2(F)\neq i$。

对于共线八次型，在两个不同参数处同时相等，再次迫使该零点与参数无关。

推论 6.5（共线八次型）。设 F 是一个全复实二元八次形式，其四个按重数计的上半平面根位于同一条双曲测地线上。对于该测地线上的一点 P，以下各项等价：

（i） $\xi_p(F)=\xi_{p'}(F)=P$对于某些不同的 p、$p'\in[0,\infty]$成立；（ii）四个根可以配成两对，使得 P 分别是两对的双曲中点；（iii） $\xi_p(F)=P$对每个 $p\in[0,\infty]$都成立。

证明。如果 $p\mapsto\xi_p(F)$ 非常值，那么由定理 4.10 可知，至多只有$\lfloor(4-1)/2\rfloor=1$个参数使得 $[0,\infty]$ 处的 $\xi_p(F)=P$。因此 (i) 蕴含 (iii)，反向蕴含显然成立。

由定理 6.3，(iii) 成立当且仅当这些根可以像 (ii) 中那样配对，或者其中一个根是 P，其余三个构成一个外心为 P 的等边三角形。共线性排除了这种三角形，因此 (iii) 等价于 (ii)。□

这种刚性在 10 次情形下失效：定理 5.2(i) 取 $n=5$ 以及参数 0 和 1 时，给出五个共线根，其 $C_0=C_1=P$ 且中心映射非常值。

6.3. 约化的推论。 令 $\mathcal{F}$ 为标准闭模基本域，

$$\mathcal{F}=\{z\in\mathbb{H}^2:|\operatorname{Re}z|\le\tfrac12,\ |z|\ge1\}.$$

对于全复实二元形式 F 和 $p\in[0,\infty]$，若 $\xi_p(F)\in\mathcal{F}$，则称 F p-约化。若 F^g是 p- 约化的，则称矩阵 $g\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ p- 约化 F。根据第 2 节中的等变性和代换约定，

$$g\ p\text{-reduces}\ F\quad\Longleftrightarrow\quad g^{-1}\xi_p(F)\in\mathcal{F}.$$

这样的矩阵存在，因为每个模轨道都与 $\mathcal{F}$ 相交。当点 $g^{-1}\xi_p(F)$ 位于 $\mathcal{F}$ 的内部时，约化矩阵在相差一个符号的意义下唯一。在边界上，边识别会带来额外的选择。

推论 6.6 (参数无关约化)。 如果 P 是 F 的上半平面根的通用中心，那么对每个 $p \in [0,\infty]$，使 p 将 F 约化的矩阵集合都相同，即

$$\{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : g^{-1}P \in \mathcal{F}\}.$$

特别地，从中心单独选取约化矩阵的固定规则，会对每个 p 给出相同的变换后形式。

证明。 将 $\xi_p(F) = P$ 代入上述约化判据。 □

推论 6.6 适用于每个全复四次型，以及定理 6.2 和定理 6.3 中分类的六次型和八次型。在次数 $2n$ 的情形下，根据推论 6.1，只需 $\xi_p(F)$ 在 $[0,\infty]$ 中的 $n-1$ 个不同参数处取相同的值即可。

注 6.7（约化矩阵的持续性）。 假设 $g^{-1}\xi_{p_0}(F)$ 对某个 $p_0 \in [0,\infty]$ 位于 $\mathcal{F}$ 的内部，并令 δ 表示它到边界的双曲距离。由于 g^{-1} 是等距变换，当 $d(\xi_p(F), \xi_{p_0}(F)) < \delta$ 时， g 仍然 p-约化 F。根据定理 3.1，对于所有充分接近 p_0 的 p，该结论均成立。在 $p_0 = \infty$ 的情形下，界（8）表明，对于每个有限的 $p > \log n / \log(\cosh \delta)$， g p-约化 F，其中 $2n$ 是 F 的次数。

对于有限的 p 和 p_0，两个零点之间的距离至多为中间路径的长度，因此只需证明

$$\int_{\min\{p,p_0\}}^{\max\{p,p_0\}} \left\| \frac{d}{dq}\xi_q(F) \right\| dq < \delta.$$

这里 $\|\cdot\|$ 是双曲范数，速度由推论 3.2 给出。⋄

一般而言，不同的参数可能给出不同的约化形式，而这两个结果都无法比较它们的高度。对于根簇双曲分离的形式，这个问题将在续篇中讨论 [7]。

7. Riemannian L^q centers

设 M 为 Hadamard 流形，即具有非正截面曲率的完备单连通黎曼流形。对于 $P \neq \alpha$，记 $\boldsymbol{v}_\alpha(P) = \exp_P^{-1}(\alpha)/d(P,\alpha)$ 为在点 P 处指向 α 的单位向量。那么 M 是一个完备 CAT(0) 空间，对每个 P，$\exp_P\colon T_PM \to M$ 都是微分同胚，并且 $d(\cdot,\alpha)$ 是凸的，且在 $M \setminus \{\alpha\}$ 上光滑，其梯度为 $-\boldsymbol{v}_\alpha$[3,第二章 II.1–II.4]。例如欧几里得空间、双曲空间 $\mathbb{H}^d$ 以及非紧型对称空间。

对于 M 和 $1 < q < \infty$ 中的多重集 $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$，黎曼 L^q 中心 $E_q = E_q(\mathcal{A})$ [1] 是 L^q 势函数的极小点

$$\Psi_q(P) = \sum_i d(P,\alpha_i)^q$$

（引理 7.1）； E_2 是 [12] 黎曼质心。等价地， E_q 使距离的 q 次幂平均达到最小，

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(P,\alpha_i)^q\right)^{1/q}.$$

当 $q\to\infty$ 时，此表达式收敛到 $\max_i d(P,\ \alpha_i)$，其极小点为外心 E_∞。我们将 $q\mapsto E_q,\ q\in(1,\ \infty]$ 称为中心路径。

第 4 节的壳层与尾部方法也适用于 Hadamard 流形上的黎曼 L^q中心。我们首先确立它们的基本性质。对于 $q>1$，定义 P 处的净 q-力 如下：

$$F_q(P) := \sum_{\alpha_i\neq P} d(P,\alpha_i)^{q-1}\,\boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P). \tag{14}$$

等于 P 的点贡献为零。

引理 7.1。 (i) 对于 $1<q<\infty$， Ψ_q 是 C^1 且严格凸的，并具有唯一极小点 $E_q=E_q(\mathcal{A})$，且

$$\operatorname{grad}\Psi_q(P) = -qF_q(P), \qquad P=E_q \iff F_q(P)=0. \tag{15}$$

(ii) 函数 $P\mapsto \max_i d(P,\alpha_i)$ 有唯一极小点 E_∞。如果 $\mathcal{A}$ 包含两个不同的点，那么 $P=E_\infty$ 当且仅当0 属于使 $d(P,\alpha_i)$ 达到最大值的那些向量 $\boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P)$ 的凸包。

(iii) 若 $\mathcal{A}$ 属于闭凸集 K，则对于每个 $q\in(1,\infty]$，都有 $E_q\in K$。(iv) 对于每个 $q>1$，

$$d(E_q,E_\infty)\le R\sqrt{n^{2/q}-1}, \qquad R=\max_i d(E_\infty,\alpha_i);$$

特别地，当 $q\to\infty$ 时， $E_q\to E_\infty$。

证明。 (i) 由于 $q>1$, $d(\cdot,\alpha)^q$ 是梯度为 $-q\,d(\cdot,\alpha)^{q-1}\boldsymbol{v}_\alpha$的 C^1，并在 α 处延拓为零。事实上，由 Cartan–Hadamard 定理， $d(\cdot,\alpha)$ 在 $M\setminus\{\alpha\}$ 上光滑；对于 $P\neq\alpha$ 和 $V\in T_PM$，距离的第一变分公式给出

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d(\exp_P(tV),\alpha) = -\langle V,\boldsymbol{v}_\alpha(P)\rangle.$$

因此 $\operatorname{grad}\ d(\cdot,\alpha)(P) = -\boldsymbol{v}_\alpha(P)$，而链式法则给出 $d(\cdot,\alpha)^q$ 的上述梯度。在 α 处，我们有 $d^q=o(d)$，因此 d^q 在 α 处可微，且梯度为零，并且 $q\,d^{q-1}\to 0$，所以梯度在 α 处连续。函数$d(\cdot,\alpha)^q$ 沿测地线严格凸。为此，取 $x\neq y$ ，并令$\gamma\colon[0,1]\to M$为从 x 到 y 的测地线。对于 $t\in(0,1)$，令 $c_t=\gamma(t)$。记 $a=d(x,\alpha)$ 和 $b=d(y,\alpha)$。于是

$$d(c_t,\alpha)^q \le \big((1-t)a+tb\big)^q \le (1-t)a^q+tb^q,$$

由于 $d(\cdot,\ \alpha)$ 和 $s\mapsto s^q$ 的凸性。如果 $a\neq b$，第二个不等式是严格的，因为对于 $q>1$， $s\mapsto s^q$ 是严格凸的。如果 $a=b$，第一个不等式是严格的，

因为 CAT(0) 空间中关于距离平方的强凸不等式

$$d(c_t,\alpha)^2 \le (1-t)a^2 + tb^2 - t(1-t)\,d(x,y)^2 \tag{16}$$

[3, 第二章.1], 对于 $t=\frac{1}{2}$，即 Bruhat and Tits 的 CN不等式，给出 $d(c_t,\alpha) < a$。因此， Ψ_q的每一项以及 Ψ_q 本身都是严格凸的。由于 M 是适当的，且 Ψ_q 连续且强制，故极小点存在。严格测地凸性使其唯一。它也是唯一的临界点，因为凸函数的每个临界点都是极小点。

（ii）在每个完备 CAT(0) 空间中，外心的存在性与唯一性均成立 [3, 命题 II.2.7]。该判据的证明与命题 2.6 相同，只需用 CAT(0) 角比较不等式 $c^2 \ge a^2+b^2-2ab\cos\theta$ [3, 第二章.1]替代双曲余弦定理。若 0 属于活跃方向（即指向最远点的方向）的凸包，且 $\boldsymbol{u}$ 是一个单位向量，则 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P)\rangle \le 0$ 对某个活跃的 i成立。我们得到$d(\exp_P(t\boldsymbol{u}),\alpha_i)^2 \ge d(P,\alpha_i)^2+t^2$ 对 $t\ge 0$成立。因此，对于 $t>0$，有 $r(\exp_P(t\boldsymbol{u})) > r(P)$，其中 $r=\max_i d(\cdot,\alpha_i)$，而 P是 r的极小点。反过来，假设 0 不属于活跃方向的凸包 C 。令 $\boldsymbol{u}\in C$ 为范数最小者。则 $\boldsymbol{u}\neq 0$，且由极小性可得$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\rangle \ge 0$ 对每个 $\boldsymbol{v}\in C$均成立。因此，对每个活跃的 i，都有 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P)\rangle \ge \|\boldsymbol{u}\|^2 > 0$。令 $Q_s=\exp_P(s\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|)$。根据第一变分公式，

$$\frac{d}{ds}\,d(Q_s,\alpha_i)\Big|_{s=0} = -\frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_{\alpha_i}(P)\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|} < 0$$

对于每个活跃的 i，而非活跃距离由连续性在小 s 下保持低于 $r(P)$。因此，在小 $s>0$下， $r(Q_s) < r(P)$，且 P不是 r的极小点。

(iii) 最近点投影 π 到 K 是 1-利普希茨的，并固定 K [3,命题 II.2。4], 因此对于每个 i， $d(\pi P,\alpha_i) \le d(P,\alpha_i)$。所以 πE_q 也是一个极小点，并且由唯一性可得 $\pi E_q = E_q$。

(iv) 令 $x=E_q$、 $c=E_\infty$ 和 $r(Q)=\max_i d(Q,\alpha_i)$。则 $r(x) \le \Psi_q(x)^{1/q} \le \Psi_q(c)^{1/q} \le n^{1/q}R$。令 $\gamma\colon [0,1]\to M$为从 c到x 的测地线，并令 $c_t=\gamma(t)$，其中 $t\in(0,1)$。将 CAT(0)不等式 (16) 应用于该测地线以及每个 α_i，得到

$$R^2 \le r(c_t)^2 \le (1-t)R^2 + t\,r(x)^2 - t(1-t)\,d(x,c)^2.$$

除以 t并令 $t\downarrow 0$，得到 $d(x,\ c)^2 \le r(x)^2 - R^2 \le (n^{2/q}-1)R^2$。 □

对于一个点，中心路径恒定在该点；对于两个点，中心路径恒定在它们的中点。因此，非恒定的中心路径需要 $n\ge 3$。

我们称 P a 普适 L^q 中心，如果 $E_q = P$ 对每个 $q\in(1,\infty]$ 都成立，并令 $\nu(P) = \#\{q\in(1,\infty)\colon E_q = P\}$。与 $\kappa(P)$ 不同，这里统计的是不同参数，不考虑重数；见注 7.3。壳层、壳层向量以及数值 $V_e(P)$、 m、 k 的定义与第 4 节相同，只是在 P不是普适 L^q中心时，取 $1\le k\le \dim M$。对于壳层半径 $r_1<\cdots<r_s$ 和

$\lambda_j = \log r_j$，按壳层对 (14) 分组，得到壳层表示

$$F_q(P) = \sum_{j=1}^{s} r_j^{q-1}\, \boldsymbol{S}_j(P) = \sum_{j=1}^{s} e^{(q-1)\lambda_j}\, \boldsymbol{S}_j(P). \tag{17}$$

定理 7.2 （ L^q 中心的刚性）。设 $\mathcal{A}$ 由 *Hadamard* 流形 M上的 n 个点组成，设 $P \in M$，并设 $r_1 < \cdots < r_s$为从 P 到 $\mathcal{A}$中各点的正距离。

（i） P 是一个普适的 L^q 中心，当且仅当每个壳层向量都为零；若对 s 不同的 $q \in$ （1、 ∞）均有 $E_q = P$，则这一结论已经成立。（ii）若中心路径非常值，则当数 $\langle \boldsymbol{S}_j$（P） $\boldsymbol{e}\rangle$ 不全为零时，有 ν（P） $\leq V_{\boldsymbol{e}}$（P），并且 ν（P） $\leq m - k$。（iii）若 $n \geq 3$且中心路径非常值，则有 ν（P） $+ \mathbf{1}_{\{E_\infty = P\}} \leq n - 2$。

证明。根据引理 7.1(i)和（17）， $E_q = P$当且仅当 $\sum_j e^{(q-1)\lambda_j} \boldsymbol{S}_j(P)$ =0。这就是将 $\tanh r_j$ 替换为 1、将 p 替换为 $q - 1 > 0$，并以 $\lambda_j = \log \cosh r_j$替代 $\lambda_j = \log r_j$后的（11）。现在我们沿用定理 4.2、4.5 和 4.6 的证明，并计算不同参数而非重数。所需的要素包括这一指数和表示、引理 4.1、引理 7.1(ii)的外接中心判据，以及r_j^{q-1} 随 j增加这一事实。当 $\dim M > 2$时需要作一处调整：对于（ii）中的壳层张成界，使用注 4.11 的投影论证，而不是定理 4.5(ii)证明中的二维情形分类讨论。

□

注记 7.3（重数）。 设中心路径非常值，令 $P \notin \mathcal{A}$，并令 $q_0 \in$(1， ∞) 为满足 $E_{q_0} = P$ 的任意参数。固定 $T_P M$ 的一个正交归一基，并令 x(q) $\in \mathbb{R}^{\dim M}$ 表示 $\exp_P^{-1}$ (E_q) 在此基下的坐标，即以 P 为中心的 E_q 的正规坐标。函数 Ψ_q 在 P 附近关于 q 联合光滑，并且对于 $d_i = d$(·， α_i) > 0，Hessian 比较定理给出

$$\operatorname{Hess}(d_i^q)(V,V) \geq q\, d_i^{q-2} \min\{1, q-1\}\, \|V\|^2.$$

因此， Ψ_q 的海森矩阵在 $\mathcal{A}$ 之外正定，而隐函数定理使 $q \mapsto E_q$，从而使 x(q) 在 $q_0 \in$(1， ∞) 附近光滑。我们将 q_0 作为 $E_q = P$ 的解的重数 ord_{q_0}(P)定义为：使得 $x^{(\ell)}(q_0) \neq 0$ 的最小整数 $\ell \geq 1$ ；如果所有导数都为零，则定义为 ∞ ；它与所选基无关。我们断言该重数是有限的，并且定理 7.2(ii)–(iii) 的界在将 ν(P) 替换为 $\sum_{1<q<\infty,\ E_q=P} \operatorname{ord}_q(P)$ 后仍然成立，端点仍计数一次。事实上，引理 3.4 的论证给出

$$q F_q(P) = K(q) x(q),$$

其中， K(q)在 q_0附近光滑且可逆。由于 F_q(P)关于 q 是实解析的且不恒等于零，它在 q_0 处以有限阶消失，并且 x(q) =

$qK(q)^{-1}F_q(P)$以相同的阶消失。因此，$\operatorname{ord}_{q_0}(P)$是有限的，并且等于 $F_q(P)$ 的消失阶。$F_q(P)$的每个非零标量投影至少以此阶消失，因此由引理 4.1可得包含重数在内的相同界。使用引理 7.4进行相同的论证表明，只要 $P \notin \mathcal{A}$，下述定理 7.6(i)中的共线界在计入重数时同样成立。

在数据点处，这一结论可能不成立。双曲势 $\varphi_p(r)$ 在 r^2 near $r=0$ 处是解析的，其首项为 $r^2/2$；而当 $1<q<2$ 时， L^q 势函数r^q 在该处不可二次微分。因此，在这些数据点处无法使用引理 3.4 中所用的有限正定海森矩阵，下面的例子说明了这一点。$\diamond$

例。 在实直线上，考虑多重集 $\{-1,-1,0,8\}$。将其L^q中心记为 $x(q)$。对于所有 $q>1$，它都位于 $[-1,8]$ 中。令 $q_0=4/3$，并令 $A=2\log 8$。根据 (14)，$x\in[-1,8]$ 处的带符号净力为

$$F_q(x)=(8-x)^{q-1}-2(1+x)^{q-1}-\operatorname{sgn}(x)|x|^{q-1}.$$

在 $x=0$ 处，

$$F_q(0)=8^{q-1}-2=A\,(q-q_0)+O((q-q_0)^2),$$

因此，对 $q=q_0$， $x(q)=0$ 恰好成立，且力在该处有一个单零点。势函数关于 $(q,\ x)$ 联合连续，且其极小点唯一，因此$x(q)\to 0$，当 $q\to q_0$ 时。

为确定位移，我们在固定空间点的情况下，比较参数 q 和q_0处的力。在 q_0处，

$$F_{q_0}(x)=-\sqrt[3]{x}+O(|x|).$$

对参数求导可得

$$\partial_s F_s(x)=(8-x)^{s-1}\log(8-x)-2(1+x)^{s-1}\log(1+x)-\operatorname{sgn}(x)|x|^{s-1}\log|x|,$$

其中最后一项在 $x=0$处延拓为零。当 $(s,x)\to(q_0,0)$ 时，前两项分别趋于 $2\log 8$ 和 0。最后一项也趋于零：对于 s，取 q_0附近的 $a>0$，使得 $s-1\geq a$；于是

$$|x|^{s-1}|\log|x||\leq|x|^{a}|\log|x||\longrightarrow 0.$$

因此，当 $(s,x)\to(q_0,0)$ 时， $\partial_s F_s(x)\to A$。在固定 $x=x(q)$ 的情况下，对参数应用中值定理，可得

$$0=F_q(x)=F_{q_0}(x)+(q-q_0)\,\partial_s F_s(x)\big|_{s=\sigma_q},$$

其中 σ_q 介于 q_0 和 q之间。因此，由于 $|x|=o(|x|^{1/3})$，

$$q-q_0=\frac{\sqrt[3]{x}+O(|x|)}{A+o(1)}=\frac{\sqrt[3]{x}}{A}\,(1+o(1)).$$

立方并重新整理可得

$$x(q)=(2\log 8)^3(q-q_0)^3+o(|q-q_0|^3).$$

因此，力有一个简单零点，但位移的首项为三次阶。若将 q_0 按重数 3 计数，就会超过定理 7.2(iii) 的界限 $n-2=2$。

更一般地，对于一个奇整数 $k\ge 3$，令 $\mathcal{A}_k=\{-1,-1,0,2^k\}$ 和 $q_0=1+1/k$。通过相同的论证，

$$x(q)=(2k\log 2)^k(q-q_0)^k+o(|q-q_0|^k).$$

因此，仅有四个数据点时，位移的奇数阶首项可以任意高，而 0 处的力仍可具有一个简单零点。

结合第 4.3 小节的尾部计数 $N_{\boldsymbol{e}}$，代入 $d^{q-1}=(q-1)\int_0^d r^{q-2}\,dr$ 可得

$$\begin{aligned}\langle F_q(P),\boldsymbol{e}\rangle &= (q-1)\int_0^{\infty} r^{q-2}N_{\boldsymbol{e}}(r)\,dr\\ &= (q-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{(q-1)\lambda}N_{\boldsymbol{e}}(e^{\lambda})\,d\lambda,\end{aligned}\tag{18}$$

其中第二个等式使用了 $r=e^{\lambda}$。令 $h(\lambda)=N_{\boldsymbol{e}}(e^{\lambda})$，并且

$$L(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{s\lambda}h(\lambda)\,d\lambda,\qquad s>0.$$

于是 $\langle F_q(P),\boldsymbol{e}\rangle=(q-1)L(q-1)$。函数 h 有界，并且当 $\lambda>\log\max_i d(P,\alpha_i)$ 时消失，但当 $\lambda\to-\infty$ 时不一定消失；此时它趋于 $N_{\boldsymbol{e}}(0^+)$。当 $s=q-1>0$ 时，积分绝对收敛。只要 h 不几乎处处为零，下一个引理就会将 L 的零点（按重数计）界定为 h 的符号变化数。对投影力同样适用这一界，因为因子 $q-1$ 为正。下面的归纳通过乘以线性因子进行，因此不会保持有界阶梯函数这一类。我们允许多项式增长，并将符号变化的定义扩展到阶梯函数之外。

对于区间上的可测函数 h，令 $S^-(h)$ 表示使该区间可在 V 个点处分割成若干子区间，并且在这些子区间上 h 几乎处处交替为 ≥ 0 和 ≤ 0 的最小 V；若不存在这样的有限分割，则 $S^-(h)=\infty$。对于有限阶梯函数，这与第 4.3 小节中的计数一致。

引理 7.4。 *设 h 在 $\mathbb{R}$ 上可测，在某个 Λ 下于 (Λ,∞) 上为零，且 $|h(\lambda)|\le C(1+|\lambda|)^k$，并非几乎处处为零，且 $S^-(h)<\infty$。则 $L(s)=\int_{\mathbb{R}}e^{s\lambda}h(\lambda)\,d\lambda$ 在 $(0,\infty)$ 上 (i) 光滑，并且 (ii) 在该区间内至多有 $S^-(h)$ 个零点，按重数计。*

证明。(i) 由于 h 在（Λ，∞）上消失，并且当 $\lambda\to-\infty$ 时至多呈多项式增长，指数衰减使得对于每个 $s>0$ 和整数 $j\ge 0$，$\lambda^j e^{s\lambda}h(\lambda)$ 都绝对可积，并且关于 s 局部一致。因此，L 光滑，且

$$L^{(j)}(s)=\int_{\mathbb{R}}\lambda^j e^{s\lambda}h(\lambda)\,d\lambda.$$

(ii) 我们对 $V = S^-(h)$ 进行归纳。如果 $V = 0$，则 h 具有同一符号，且 L 没有零点。如果$V \geq 1$，令 μ 为第一个切点。函数 $e^{-s\mu}L(s)$ 与 $L(s)$ 具有相同的零点，并且 $\frac{d}{ds}\big(e^{-s\mu}L(s)\big) = e^{-s\mu}\int_{\mathbb{R}} e^{s\lambda}h_1(\lambda)\, d\lambda$，其中 $h_1(\lambda) = (\lambda - \mu)h(\lambda)$ 满足引理的假设，且 $S^-(h_1) \leq V - 1$。按照引理 4.1 中的方式应用罗尔定理即可完成证明。□

应用于 (18) 后，引理 7.4 给出 $\nu(P) \leq S^-(N_{\boldsymbol{e}})$，其中 $N_{\boldsymbol{e}} \not\equiv 0$。对于下面的尖锐性构造，固定不同参数 q_1、……、$q_m > 1$。如果阶梯函数 h 在 $(0, R)$ 上几乎处处不为零，并且与所有 m核函数 r^{q_i-2}正交，那么 $L(s) = \int_0^R r^{s-1}h(r)\, dr$ 在 m 个不同点$s = q_i - 1$处为零。作代换 $r = e^{\lambda}$后，引理 7.4 给出 $S^-(h) \geq m$，正如引理 5.1 所要求的那样。

推论 7.5 （L^q 界的锐性）。令 维数 $M \geq 2$、$n \geq 3$、$P \in M$以及 $R > 0$。对于所有 $1 < q_1 < \cdots < q_{n-2} < \infty$，存在 n 个 M中的点，它们与 P的距离不超过 R，使得 $E_q = P$ 恰好当且仅当 $q \in \{q_1, \ldots, q_{n-2}\}$；特别地，定理 *7.2(iii)* 的界可以达到。

证明。这是定理 5.2(ii)证明中的构造，其中 $\mathcal{P}$ 由彼此不同的有限参数组成，以 $k_i = r^{q_i-2}$替代（13）中的 (18)，以引理 7.4替代定理 4.8，并取正交归一的 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e} \in T_P M$。按照该构造，每个点均取为 $\alpha = \exp_P(r\boldsymbol{v})$，其中半径为 r，单位向量为 $\boldsymbol{v}$，从而 $d(P, \alpha) = r$且 $\boldsymbol{v}_\alpha(P) = \boldsymbol{v}$。因此，在 $(0, R)$ 上有 $\boldsymbol{T}_P = \frac{1}{2}\varepsilon\, \boldsymbol{u}$，并且在 R之外有 $\boldsymbol{T}_P = 0$；此时 ε 的切割半径由核函数 r^{q_i-2}确定。不需要全测地曲面。指向最远点的方向在 $\boldsymbol{u}$上的正投影为正，因此根据引理 7.1(ii)，有 $E_\infty \neq P$。□

定理 5.2(ii)证明中的构造对于包含 ∞的 $\mathcal{P}$ 也以同样方式成立：其中一个 $n - 2$ 参数可以替换为端点 $q = \infty$，因此定理 7.2(iii)的界也可在 $E_\infty = P$ 时达到。

定理 7.6 (测地线上的点)。设 $n \geq 3$ 和 $k = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$。

(i) 若 $\mathcal{A}$ 由测地线 γ 上的 n 个点组成，且中心路径不是常值路径，则对每个 $q \in (1, \infty]$，以及对每个 $P \in M$，$E_q \in \gamma$和 $\nu(P) + \mathbf{1}_{\{E_\infty = P\}} \leq k$。*(ii)* 反过来，对任意测地线 γ、任意 $P \in \gamma$、任意 $R > 0$ 以及所有$1 < q_1 < \cdots < q_k < \infty$，都存在 γ上的 n 个点，它们与 P的距离不超过R，且仅当 $q \in \{q_1, \ldots, q_k\}$时满足 $E_q = P$。对于 $q_i = i + 1$和 $R = 1$，可以取一个距 P 为 *1* 的点；而对于$j = 1$、……、k，取一个重数为 *2*、距离为 $\sin^2\big(j\pi/(2k+2)\big)$的点，这些点交替位于 P 两侧，最外侧的重数为 *2* 的点与单点位于相对的一侧；此外，当 n 为偶数时，还取点 P。

证明。(i) 测地线是闭且凸的，因此根据 $E_q \in \gamma$ 引理 7.1(iii)可得。其余部分就是定理 4.10 的证明，其中用(18)和引理 7.4替代命题 4.9，并用引理 7.1(ii)替代引理 2.6。

(ii) 该构造与定理 5.2(i)的证明相同，其中 $\mathcal{P}$ 由互异的有限参数组成，使用 $k_i = r^{q_i-2}$ 和(18)替代(13)，并取点 $\exp_P(\pm t\boldsymbol{u})$位于 γ上，其中 $\boldsymbol{u}$ 是 γ 在P处的单位切向量。对于 $q_i = i+1$， ε 可以显式选取。代入 $r = \sin^2(\theta/2)$，使得 $r^{i-1}\,dr = 2^{-i}(1-\cos\theta)^{i-1}\sin\,\theta\,d\theta$ 对于 $1 \le i \le k$成立。每个乘积$(1-\cos\theta)^{i-1}\sin\theta$ 都是$\sin(l\theta)$的线性组合，其中 $1 \le l \le i$。函数 $\pm\operatorname{sgn}\sin((k+1)\theta)$在$(0,\pi)$上具有傅里叶正弦级数，其中仅包含频率$(k+1)(2m+1)$，因此它与所有这些函数正交，并且恰好在 $\theta = j\pi/(k+1)$处变号，也就是在 $r = \sin^2(j\pi/(2k+2))$处变号。它满足引理 5.1的结论，因此可以作为 ε。$\square$

距离 $\sin^2(j\pi/(2k+2))$ 是第二类切比雪夫多项式 $U_k(1-2r)$ 的零点，也是马尔可夫最佳 L^1 逼近 [16]定理中的典范点。

例。 将测地线与 $\mathbb{R}$ 等同，取 $P = 0$，并令

$$\mathcal{A} = \{-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1\},$$

定理 7.6(ii) 的情形 $n = 5$, $k = 2$。0 处的标量力为

$$f(q) = 1 + 2\big(\tfrac{1}{4}\big)^{q-1} - 2\big(\tfrac{3}{4}\big)^{q-1},$$

因此 $f(2) = f(3) = 0$，而 $E_\infty = -\frac{1}{8}$。因此该族不是常值族，定理 7.6(i) 表明，仅当 $q \in \{2,3\}$ 时， $E_q = 0$： 均值与中心重合，尽管该构型并不关于 0 对称。

8. Further questions

我们已经限定了中心映射取某个指定值的次数，并构造了达到这些界的构型。现在我们探讨它的驻参数、使尾部界成立的径向权重，以及能够显式求出切割半径的情形。

驻参数。 对于 $\mathbb{H}^2$ 中由 n 个点组成的构型，非恒定中心映射最多能在多少个有限参数处满足 $C_p = 0$? 令 $B(n)$ 表示所有此类构型中该数量的上确界。

推论 4.7 给出 $B(3) = 0$。对于 $n \ge 4$，我们有 $B(n) \ge n-3$。事实上，固定一点 P，并选取 $n-2$ 个互不相同的有限参数。定理 5.2(ii) 的证明构造出一个构型，使得 $C_p = P$ 恰好在这些参数处成立。内点位于一条经过 P 的测地线上，且关于这条测地线的反射会交换两个外点。根据命题 2.7 和唯一性，每个中心都位于这条测地线上。它到 P 的有向距离在每个指定参数处都为零，因此由罗尔定理，每对相邻参数之间都存在一个驻参数。

对每个 n， $B(n)$都是有限的。在上半平面坐标中，平衡方程和驻定条件 (10) 在以构型为参数的实指数域中定义了驻参数。对于非恒定解析路径，这些参数不包含任何区间。因此，根据 O-最小性，每个这样的集合都是有限的 [21], ，而一致有限性给出了一个界

该界仅取决于 n [5, 第 3] 章。紧界是多少？即使只有四个点，非恒定中心映射能否在两个不同参数处都满足驻定条件？

其他径向权重。 壳层论证适用于具有如下型式的权重$w_p(r) = \tau(r) e^{p\lambda(r)}$；尾部界则要求其径向导数具备进一步的性质。设 $x = \lambda(r)$ 是一个光滑的递增坐标变换，并令 $a(x) = \tau(\lambda^{-1}(x))$。在此坐标下，尾核为

$$dw_p = e^{px}\big(a'(x) + p\,a(x)\big)\,dx.$$

对于双曲 p-重心， $a(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$ 和 $p \geq 0$；对于L^q 中心， $a \equiv 1$ 和 $p = q - 1 > 0$。在这两种情况下，如果 h 是一个有限阶梯函数，对于所有充分大的 x 均为零，并且在某个区间上非零，那么其变换至多有 $S^{-}(h)$ 个零点，按重数计（定理 4.8 和引理 7.4）。对于其他哪些正函数 a，以及在哪些参数区间上，这一界成立？引理 4.12 的证明表明，可以考察对 $1/a$的充分条件。

显式截断半径。 对于固定的外半径 R 和给定的有限参数多重集，引理 5.1 唯一确定了定理 5.2 构造中的切割半径。对于参数 1、 3、.....、 $2m - 1$，注 5.3 用切比雪夫多项式的零点给出了这些半径。对于列表 0、1、.....、 $m - 1$，是否存在类似的公式或半径递推关系？它的前两个参数给出了 Julia 零点和双曲零点。

References

[1] B. Afsari, *Riemannian L^p center of mass: existence, uniqueness, and convexity*, 《美国数学会会刊》**139** （2011），第2期，655–673，doi:10.1090/S0002-9939-2010-10541-5。[2] K. Biswas, *Hyperbolic p-barycenters, circumcenters, and Moebius maps*, arXiv: 1711.02559（2017）。[3] M. R. Bridson 和 A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, 《数学科学基础丛书》**319**，Springer，柏林，1999年。[4] J. E. Cremona, *Reduction of binary cubic and quartic forms*, 《伦敦数学会计算数学期刊》**2** （1999），62–92。[5] L. van den Dries, *Tame Topology and O-minimal Structures*, 《伦敦数学会讲义系列》**248**，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[6] A. Elezi, *Equilibrium laws for Julia's zero and the hyperbolic zero of binary forms*, arXiv: 2608.27876v2（2026年）。[7] A. Elezi, *Phase transitions for hyperbolic p-barycenters of separating clusters*, 准备中。[8] A. Elezi 和 T. Shaska, *Reduction of binary forms via the hyperbolic centroid*, 《罗巴切夫斯基数学杂志》**42** （2021），第1期，84–95，doi:10.1134/S1995080221010011X。[9] G. A. Galperin, *A concept of the mass center of a system of material points in the constant curvature spaces* **154** 1993 1, 63 84, ，《数学物理通讯》（），第–期，–，doi:10.1007/BF02096832。[10] C. R. Hobby 和 J. R. Rice, *A moment problem in L_1 approximation*, 《美国数学会会刊》**16** （1965），665–670。[11] G. Julia, *Etude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes* ´ **55** 1917 1 296 ，《法国科学院回忆录》（），–。

[12] H. Karcher, *Riemannian center of mass and mollifier smoothing*, 《纯粹与应用数学通讯》**30** (1977), 第5期, 509–541。[13] S. Karlin, *Total Positivity*, 第I卷, 斯坦福大学出版社, 美国加利福尼亚州斯坦福, 1968年。[14] D. Novikov 和 S. Yakovenko, *Integral curvatures oscillation and rotation of spatial , ,* 动力学与控制系统杂志 ( ), –。[15] A. Pinkus, *A simple proof of the Hobby–Rice theorem*, 《美国数学会会刊》**60** (1976), 82–84。[16] A. Pinkus, *On L^1-Approximation*, 《剑桥数学论丛》**93**, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1989年。[17] G. P´olya, *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation* **24** 1922 4, 312 324 国数学会汇刊》 ( ), 第–期, –。[18] G. P´olya 和 G. Szeg˝o, *Problems and Theorems in Analysis II*, 《数学科学基础丛书》**216**, Springer, 柏林, 1976年。[19] C. D. da Silva Alves、P. R. Oliveira 和 R. M. Greg´orio, *L^α Riemannian weighted centers of mass applied to compose an image filter to diffusion tensor imaging* , , 《应用数学与计算》**390** (2021), 125603, doi:10.1016/j.amc.2020.125603。[20] M. Stolland J.E.Cremona, *On the reduction theory of binary forms*, 《纯粹与应用数学杂志》**565** (2003), 79–99, doi:10.1515/crll.2003.106。[21] A. J. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function* , 《美国数学会杂志》**9** (1996), 第4期, 1051–1094, doi:10.1090/S0894-0347-96-00216-0。

Department of Mathematics and Statistics, American University, Washing-ton, DC 20016*Email address*: aelezi@american.edu