LSST 和 Simons Observatory 时代作为暗能量几何探针的透镜比

Judit Prat[1,2] 和 Carles Sánchez[3,4]物理系（*FIS*）、天文学与天体物理学组（*GAA*）、巴塞罗那东部工程学院（*EEBE*）、加泰罗尼亚理工大学-*BarcelonaTech*（*UPC*）、对角线-贝索斯校区，*Av. d' Eduard Maristany, 16, 08019* 巴塞罗那，西班牙[2]*DARK*、尼尔斯·玻尔研究所、哥本哈根大学，*Blegdamsvej 17, 2100* 哥本哈根，丹麦[3]物理系、巴塞罗那自治大学（*UAB*），*08193* 贝拉特拉（巴塞罗那），西班牙[4]高能物理研究所（*IFAE*）、巴塞罗那科学技术研究所、*UAB*校区，*08193* 贝拉特拉（巴塞罗那），西班牙（日期：2026年11月25日）

arXiv:2611.32861v1 [astro-ph.CO] 24 Nov 2026

围绕同一批前景星系测量星系–宇宙微波背景透镜效应与星系–星系透镜效应的比值，可探测延伸至复合时期的相对距离，无需标准烛光或标准尺。对于足够窄的前景红移分布，在控制好本征对齐和透镜放大后，这些透镜比（LRs）便成为几何量。本文刻画了其几何极限，并针对 LSST Y10 和 Simons Observatory 的不确定性，为这一探针开发了端到端优化框架。在对 LSST Y10 的预测中，各个比值的测量中位精度为 1.0%，总信噪比为 360。随后，我们研究了透镜比作为额外几何探针，在约束暗能量和曲率方面的互补作用。我们发现，在边缘化系统不确定性后，透镜比可使 CMB、Ia型超新星和重子声学振荡（BAO）数据联合分析的 w_0–w_a 优值提高 15%。作为独立的几何探针，透镜比还可用于具有竞争力的留一检验，即去掉其中一个探针；我们发现，它们最能替代 BAO：在 CMB+超新星数据中加入透镜比，可使优值从完整 CMB+超新星+BAO 联合分析结果的 33% 提高至 66%。我们还发现，在只依赖最少假设的扩展模型空间中，透镜比尤为重要：在对暗能量密度进行七分箱重建时，它们可将每个分箱的不确定性最多降低 16%（$z > 1$）；若放开曲率并舍弃 CMB 似然中的非几何部分（即保留声学角尺度部分），则最多可降低 50%，此时透镜比能够打破曲率与暗能量之间的简并。

I. 引言

近期数据对将宇宙学常数作为宇宙加速膨胀的描述这一观点提出了挑战。重子声学振荡（BAO）、宇宙微波背景（CMB）和Ia型超新星（SNe）数据的组合倾向于支持暗能量密度随时间演化，显著性约为 3σ [1–4]。这一倾向持续存在，但尚无定论：即使移除超新星、宇宙微波背景或重子声学振荡数据，仍能看到相关迹象，但约束能力会显著减弱。此外，这两种距离探针依赖不同的假设：超新星约束相对距离，而相对距离会受到低红移和高红移样本之间光度测量交叉校准的影响 [2], ；重子声学振荡则约束以声学视界为单位的距离。将其与宇宙微波背景结合时，声学视界的绝对尺度由早期宇宙物理决定。某些简并也会影响数据的解读，尤其是暗能量演化、空间曲率和中微子质量之间的简并[5–7], 然而，由于约束能力不足，这些扩展几乎总是被分别分析，或两两组合分析 [例如 8]。因此，若能在宇宙学工具箱中加入一种独立的几何探针，将极具价值：它既能让留一法稳健性检验更具竞争力，也能收紧约束，尤其是对扩展参数空间的约束。

透镜比（LRs）正好提供了这种 [9–12]。前景星系周围的透镜信号可分解为透镜的投影质量分布和一个纯几何因子，后者由观测者—透镜—源距离构成。如果用多个背景源平面观测同一个透镜样本，那么质量因子对所有平面都相同，并会在交叉相关的比值中抵消；当透镜红移分布无限窄时，剩下的就是角直径距离之比。在这种几何情形下，透镜比无需星系偏置模型，不受非线性物质功率谱影响，还能利用标准弱透镜分析因非线性和重子建模不确定性而必须舍弃的小角尺度。此外，透镜比的计算成本也很低，因为预测距离比无需对非线性结构进行建模。

根据源平面的选择，可以得到不同类别的比值：仅使用星系样本，或包括宇宙微波背景 [13, 14]。宇宙微波背景源平面尤其有用：其红移已被精确测定，并且提供了目前可用的最长距离。另一方面，仅使用星系的比值中，所有源平面都处于低红移，因此对宇宙学的敏感性较低，却更依赖于光度红移和剪切校准的不确定性；在 DES 中，这些比值已被证明可作为校准和系统误差缓解工具使用 [15–17]。

宇宙微波背景透镜比此前曾基于数据进行过三次测量，除最后一次外，其余均采用光谱透镜。Miy- atake等 [18] 测量了一个单比率，精度为 17%；该测量结合了 CMASS 透镜星系、CFHTLenS 星系引力透镜和*Planck* 宇宙微波背景透镜；Singh 等 [19] 测量了一个比值，精度为11%，采用 BOSS 透镜、SDSS星系引力透镜和*Planck*。Prat、Baxter 等 [20]约束了六个比值，精度达到13–23%；其合并振幅的精度为10%，并利用 DES、SPT 和*Planck* 数据将该方法扩展到了光度透镜星系。

预报表明，未来的巡天能够达到高得多的精度。Bermejo-Climent 等人 [21] 预报了宇宙微波背景

使用*Euclid*类源和来自*Euclid*、DESI 与 SPHEREx 的光谱透镜，针对当前及未来的宇宙微波背景实验，在不考虑系统不确定性的情况下研究透镜比；Li [22] 最近提出了运动学引力透镜比，该方法利用从运动学推断出的内禀星系形状来抑制形状噪声和大部分一阶引力透镜系统误差，并针对罗曼空间望远镜进行了预报。

在这项工作中，我们开发并验证了将几何 CMB透镜比提升至 LSST × SimonsObservatory时代百分之一精度所需的端到端框架，其中纳入了真实分析中的系统不确定性，并预测了这些比值对上述两项目的的影响。我们刻画了几何极限的有效范围，构建了针对该探针优化的层析透镜与源样本，并通过透镜筛选确保在透镜放大可能造成偏差的情况下，比值仍保持几何性质；此外，我们还引入了一种偏差可忽略、抽样分布近似服从高斯分布的估计量。我们还检验了来自 4MOST、DESI 和 *Euclid* 的光谱透镜样本。随后，我们使用 CMB、重子声学振荡和超新星似然函数，对多个扩展宇宙学模型进行了模拟联合分析，包括演化暗能量、自由曲率和自由中微子质量。我们还检验了一种非参数暗能量模型。最后，我们量化了对光度红移和剪切校准进行边缘化的代价，以及内禀排列效应的影响。

本文结构安排如下。第II节介绍透镜比理论及几何近似的适用范围。第III节描述模拟数据：LSST 和 Simons Observatory 的配置、透镜与源样本、协方差、比率估计量、几何有效性筛选，以及外部似然。第IV节给出宇宙学结果。

第V 节总结我们的发现。附录验证了该估计量在含噪数据上的表现，并将其与 DES Y3 剪切比估计量进行比较；介绍了采用来自 4MOST、DESI 和 Euclid 的光谱透镜样本得到的比值；分解了透镜比误差预算；量化了光度红移、剪切校准、内禀排列和 CMB 透镜系统误差的影响；并评估了源样本优化的影响。

II. 理论

A. 星系—引力透镜互相关

前景结构产生的引力透镜效应，会使透镜星系位置与背景会聚场之间出现相干相关性。本文基于对两种此类交叉相关取比值：

1. $\xi^{(ij)}_{g\kappa_g}(\theta)$：透镜分箱 i 中的透镜星系与分箱 j中的源星系周围的星系—会聚关联。

2. $\xi^{(i)}_{g\kappa_{\rm CMB}}(\theta)$：“透镜星系”层析分箱 i中，同一批透镜星系周围的星系–CMB透镜会聚。

在 Limber近似 [23, 24], 下，它们在多极矩 ℓ 处对应的角交叉功率谱可化为视线积分

$$C_\ell^{g\kappa,ij} = \int_0^{\chi_H} \frac{d\chi}{f_K^2(\chi)}\, W_g^i(\chi)\, W_\kappa^j(\chi)\, P_m\!\left(\frac{\ell+\frac{1}{2}}{f_K(\chi)}, z(\chi)\right), \tag{1}$$

其中，χ是红移 z处的共动径向距离，χ_H是到视界的共动距离，$P_m(k,\ z)$是波数为 k、在 $k = (\ell+1/2)/f_K(\chi)$处取值的非线性物质功率谱；$W_g^i(\chi) = b_i\, n_i^l(z)\, dz/d\chi$ 是星系位置核，其线性星系偏差为 b_i，并采用透镜分箱 i的归一化红移分布 $n_i^l(z)$；W_κ^j 是透镜核。$f_K(\chi)$是共动横向距离：对于平直宇宙，$= f_K(\chi) = \chi$；对于闭合宇宙（$\Omega_k > 0$），为 $f_K(\chi) = |\Omega_k|^{-1/2}\sin\!\left(|\Omega_k|^{1/2} H_0\chi/c\right)/H_0/c$；对于开放宇宙（$\Omega_k < 0$），为 $f_K(\chi) = |\Omega_k|^{-1/2}\sinh\!\left(|\Omega_k|^{1/2} H_0\chi/c\right)$。

对于星系源分箱 j，其归一化红移分布为 $n_j^s(z)$；对于宇宙微波背景源平面，相应的收敛核分别为

$$W^j_{\kappa_g}(\chi) = \frac{3H_0^2\Omega_m}{2c^2}\frac{f_K(\chi)}{a(\chi)}\int_\chi^{\chi_H} n_j^s(z')\frac{dz'}{d\chi'}\frac{f_K(\chi'-\chi)}{f_K(\chi')}\,d\chi', \tag{2}$$

$$W_{\kappa_{\rm CMB}}(\chi) = \frac{3H_0^2\Omega_m}{2c^2}\frac{f_K(\chi)}{a(\chi)}\frac{f_K(\chi_{\rm CMB}-\chi)}{f_K(\chi_{\rm CMB})}, \tag{3}$$

其中 $a(\chi)$为尺度因子，宇宙微波背景源平面位于 $z_{\rm CMB} = 1089.80 \pm 0.21$ [25]。相应的实空间相关性通过自旋-0×与自旋-0变换[1]得到

$$\xi^{(ij)}_{g\kappa}(\theta) = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1)\, C_\ell^{g\kappa,ij}\, P_\ell(\cos\theta), \tag{4}$$

其中 θ 为角分离，P_ℓ 为 ℓ阶勒让德多项式。

对于星系–CMB透镜交叉相关，我们按照 Zhang 的方法，在变换到实空间之前模拟重建后的 CMB 汇聚度图的属性等人 [26]。我们将角交叉功率谱$C^{g\kappa_{\rm CMB},\,i}_\ell$乘以一个高斯波束，其 全宽半高为 1 角分，以近似 SO 波束的尺寸，并将式（4）中的调和变换限制在多极范围 $30 \le \ell \le 3000$ [内，该范围遵循 27], SO 透镜图能够可靠重建的尺度。对分子和分母均一致地应用相同的波束和多极范围，从而使比值保持与尺度无关。

B. 几何透镜比值

在透镜红移分布无限窄的极限情况下，透镜比具有几何意义。在这一极限下，

[1] 我们使用会聚相关性，而不是通常用于星系-星系透镜的切向剪切 γ_t，以便对星系–源和星系–CMB透镜相关采用相同的标量角核。这一点很重要，因为实空间中的尺度无关比值要求分子和分母使用相同的角变换。

上一节中的透镜交叉相关表达式可分解为两项：一项描述投影透镜质量分布，另一项仅取决于距离：

$$\xi^{(ij)}_{g\kappa_g}(\theta) \;=\; \Sigma^{(i)}(\theta)\,\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(ij)}, \tag{5}$$

$$\xi^{(i)}_{g\kappa_{\rm CMB}}(\theta) \;=\; \Sigma^{(i)}(\theta)\,\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(i,{\rm CMB})}. \tag{6}$$

$\Sigma^{(i)}(\theta)$ 是透镜星系周围的投影表面质量密度对比度，包含了所有透镜特性：星系偏置、物质聚类和非线性结构。对于切向剪切相关，相应的质量因子将是差值 $\langle\Sigma(<\theta)\rangle - \Sigma(\theta)$；而此处使用的汇聚相关测量的是投影密度剖面本身。另一方面，有效逆临界表面密度 $\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle$ 是几何因子。对于一群透镜星系和源星系，

$$\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(ij)} = \int dz_l\, n_i^l(z_l) \int dz_s\, n_j^s(z_s)\,\Sigma_{\rm cr}^{-1}(z_l,z_s), \tag{7}$$

而对于宇宙微波背景源平面，

$$\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(i,{\rm CMB})} = \int dz_l\, n_i^l(z_l)\,\Sigma_{\rm cr}^{-1}(z_l,z_{\rm CMB}). \tag{8}$$

对于单个透镜—源对，逆临界表面密度为

$$\Sigma_{\rm cr}^{-1}(z_l,z_s) = \frac{4\pi G}{c^2}\,\frac{D_A(z_l)\,D_A(z_l,z_s)}{D_A(z_s)}, \tag{9}$$

其中，$D_A(z_l)$ 和 $D_A(z_l,z_s)$ 分别是透镜的角直径距离以及透镜与源之间的角直径距离，而 $\Sigma_{\rm cr}^{-1}(z_l,z_s)=0$ 适用于 $z_s\le z_l$。

那么，对于固定的透镜分箱 i和两个源星系分箱 $j\neq j'$，星系–星系透镜效应比值变为

$$\mathcal{R}^{\rm GGL}_{(i,j,j')} = \frac{\xi^{(ij)}_{g\kappa_g}(\theta)}{\xi^{(ij')}_{g\kappa_g}(\theta)} = \frac{\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(ij)}}{\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(ij')}}, \tag{10}$$

对于透镜分箱 i 和源星系分箱 j，CMB透镜比为

$$\mathcal{R}^{\rm CMB}_{(i,j)} = \frac{\xi^{(i)}_{g\kappa_{\rm CMB}}(\theta)}{\xi^{(ij)}_{g\kappa_g}(\theta)} = \frac{\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(i,{\rm CMB})}}{\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(ij)}}. \tag{11}$$

注意，我们始终将 CMB 放在分子中，因为它通常是信噪比较低的量。利用公式（7）–（9）中的层析红移分布展开后，几何模型可写为：

$$\mathcal{R}^{\rm CMB}_{(i,j)} = \frac{\displaystyle\int dz_l\, n_i^l(z_l)\,D_A(z_l)\,\frac{D_A(z_l,z_{\rm CMB})}{D_A(z_{\rm CMB})}}{\displaystyle\int dz_l\, n_i^l(z_l)\int dz_s\, n_j^s(z_s)\,D_A(z_l)\,\frac{D_A(z_l,z_s)}{D_A(z_s)}}, \tag{12}$$

对于 $\mathcal{R}^{\rm GGL}$ 也同样如此，只需将分子替换为第二个对源进行平均的积分。注意，该模型与尺度无关，因此每种分箱组合都由一个数值预测；在数据端，则通过将测得的相关性压缩为每种组合对应的一个振幅来进行匹配（见第IIID 节中，将测得的相关性压缩为每种组合对应的一个振幅。

考虑系统不确定性，每个层析分箱设置一个光度-z 均值偏移参数 Δz_b，用于移动输入红移分布，$n_b(z) \to \tilde{n}_b(z) \propto n_b(z-\Delta z_b)$。每个源分箱设置一个乘性剪切校准参数 m_j，将测得的 $\xi^{(ij)}_{g\kappa_g}$ 按 $(1+m_j)$ 重新缩放；由于剪切出现在 CMB比值的分母中，宇宙学参数 $\mathbf{p}$ 的完整模型变为

$$\mathcal{R}^{\rm CMB,\,model}_{(i,j)}(\mathbf{p},\Delta z_b,m_j) = \frac{1}{1+m_j}\,\frac{\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(i,{\rm CMB})}\,[\tilde{n}_i^l]}{\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle^{(ij)}\,[\tilde{n}_i^l,\,\tilde{n}_j^s]}, \tag{13}$$

公式（10）中的星系—星系透镜比也相应获得因子 $(1+m_j)/(1+m_{j'})$。对于光谱透镜样本，透镜红移是精确的，因此只需考虑源偏移。这些参数的先验及其影响在附录 D中进行了量化。似然在压缩比值上服从高斯分布，

$$-2\ln\mathcal{L} = \left(\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_{\rm model}\right)^{\top}\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{r}}^{-1}\left(\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_{\rm model}\right), \tag{14}$$

$\hat{}$使用完整数据向量$\hat{\mathbf{r}}$ 及其协方差$\mathbf{C_r}$，如第III D 节和第IIIE 节所构造。

C. 超越理想几何极限

方程（10）和（11）中的比值只有在分子和分母中相同的透镜平面贡献因子能够约去时，才是纯几何的。在现实的测光巡天中，这种因式分解只是近似成立。可能破坏纯几何极限的主要因素包括较宽的透镜红移分布、透镜样本的放大，以及源星系的本征对齐。

首先，如果透镜红移分布较宽，信号中依赖距离的部分就无法从方程（1）的视线积分中提出：观测量会变成对透镜红移的加权平均，权重取决于透镜分布范围内的星系偏置、增长因子和物质功率谱；两个此类积分之比不再能简化为 $\langle\Sigma_{\rm cr}^{-1}\rangle$因子的比值。若透镜红移分布足够窄，使这些项在其范围内变化缓慢，则抵消近似成立。

其次，观测到的透镜星系密度不仅仅是内禀星系过密度。它还会受到放大偏差的贡献 [28–30]，因为前景结构会同时改变透镜样本的表观流量和观测立体角：

$$\delta_g^{\rm obs} = \delta_g^{\rm int} + 2(\alpha_l-1)\kappa_l, \tag{15}$$

其中，α_l 是透镜样本的对数数目计数斜率，κ_l 是透镜群体的会聚。将这一观测到的密度代入交叉相关后，会加入一个放大贡献，

$$C_\ell^{g_{\rm obs}\kappa_s} = C_\ell^{g_{\rm int}\kappa_s} + 2(\alpha_l-1)\,C_\ell^{\kappa_l\kappa_s}. \tag{16}$$

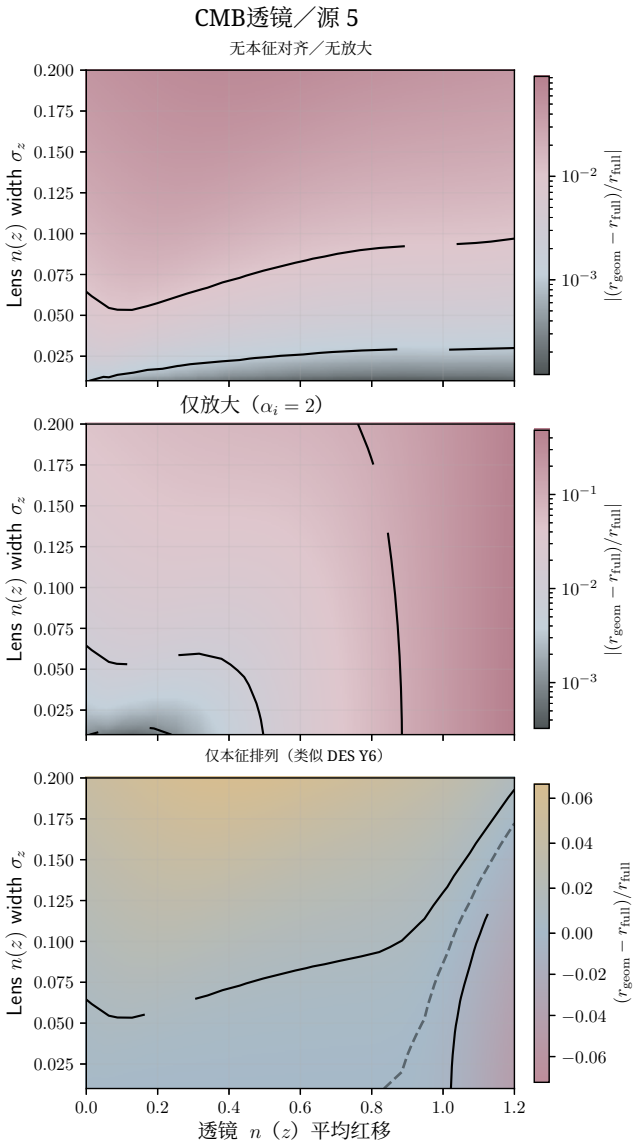


图1：**纯几何近似的有效性**。CMB 透镜/源 5 比值 $\Delta r = (r_{\rm geom} - r_{\rm full})/r_{\rm full}$的纯几何预测与完整模型之间的分数差异，随高斯透镜红移分布的平均红移和宽度变化。顶部面板不包含透镜放大或本征对齐；中间面板仅包含透镜放大，参数为 $\alpha_l = 2$；底部面板仅包含本征对齐，采用基准类TATT本征排列参数。顶部和中间面板以对数色标显示 $|\Delta r|$，底部面板则以线性色标显示有符号残差，以呈现抵消和零交叉点。每个面板均有各自的色条。实线等值线标示具有代表性的残差水平，底部面板中的虚线等值线标示 $\Delta r = 0$。

第一项是所需的透镜密度与背景会聚场之间的相关性。第二项由位于透镜样本前方的物质产生，其红移核不同于内禀透镜密度项。因此，它不具有相同的因子化透镜平面依赖性，其贡献也不会在比值中抵消。对于宽红移范围或高红移的透镜样本，以及数目计数斜率远离 $\alpha_l = 1$的透镜选择而言，这一效应尤为重要。

第三，源形状场并非纯粹的引力透镜场。观测到的源会聚或剪切包含透镜贡献和内禀排列贡献，

$$\kappa^j_{\rm obs} = \kappa^j_{\rm G} + \kappa^j_{\rm IA}, \tag{17}$$

因此

$$C_\ell^{g\kappa_{\rm obs},ij} = C_\ell^{g\kappa_{\rm G},ij} + C_\ell^{g\kappa_{\rm IA},ij}. \tag{18}$$

本征排列项描述了透镜星系与源星系本征取向之间的相关性。它不依赖于相同的透镜效率核，并且会在透镜与源红移分布重叠时出现。因此，它会引入临界面密度因子在公式（10）和（11）中未能捕获的红移和尺度依赖性。

D. 纯几何近似在何处有效?

我们使用一组均值 $\bar{z}_l$ 和宽度 σ_z各不相同的高斯透镜红移分布网格，量化纯几何近似的有效性，同时将星系—源分布固定为基准 LSST Y1 分箱（见 §IIIA）。对于每种配置，我们将 CosmoSIS [31], 的完整预测（包括第 IIA节所述的贡献）与由公式（12）中的临界面密度因子及其星系—星系透镜类似量得到的纯几何预测进行比较。图 1 显示了CMB透镜/源5比值的分数残差 $(r_{\rm geom} - r_{\rm full})/r_{\rm full}$。

三个面板分别展示不含内禀排列或透镜放大的基线情形、仅放大情形，以及仅含内禀排列的情形。对于 $\alpha_i = 2$ 放大测试，我们采用 $\alpha_i = 1$，其中对应于无放大；对于 IA 测试，则采用基准 TATT 参数 [32] $A_1 = 0.54$ 和 $A_2 = -0.89$，以及相应采用的红移依赖关系（见 §D）。这些选择旨在展示具有代表性的污染程度，而非针对特定透镜选择进行预报。前两个面板展示绝对残差，而 IA 面板保留其符号，以揭示抵消效应。

较窄的透镜分布能提供最可靠的几何比值：随着宽度增加，分子和分母中结构依赖贡献的红移权重会有所不同。对于 CMB 透镜/源 5，在宽度固定时，基线偏差通常在低透镜红移处较大。相比之下，放大会使残差随着透镜红移升高而显著增大，因为高红移处的透镜放大贡献更为显著。内禀

排列效应会带来更复杂的响应，其中包括零交叉点，即符号相反的贡献相互抵消。这些抵消取决于所假设的 IA参数，并会随其变化而移动，因此零交叉点附近的残差较小，并不意味着该配置对 IA污染具有稳健性。这些结果表明，应采用较窄的透镜筛选，并控制放大和 IA贡献；可接受的宽度取决于红移和所需的建模精度（我们将在§IIIF中对此进行详细讨论）。

E. 几何比值的宇宙学敏感性

接下来，我们使用相同的设置来确定哪些透镜–源配置对宇宙学的响应最强。我们将远处源固定为宇宙微波背景，位于 $z_* = 1090$，并扫描高斯透镜分布和星系源分布的平均红移，同时将它们的宽度固定为 $\sigma_{z,\ l} = 0.003$和 $\sigma_{z,\ s} = 0.05$。在覆盖 $0.05 \le \bar{z}_l \le 1.2$ 和 $0.1 \le \bar{z}_s \le$2。5的 25×25 网格上，我们计算

$$S_p \equiv \frac{\partial \ln r_{\rm geom}}{\partial p} \simeq \frac{\ln r_{\rm geom}(p + \Delta p) - \ln r_{\rm geom}(p - \Delta p)}{2\Delta p}, \tag{19}$$

对于 $p \in \{\Omega_m$、Ω_k、w、$w_a\}$，其中 $w(a) = w + w_a(1 - a)$ [33, 34]。该对数导数衡量了比值对参数单位变化的分数响应。

这些导数在$\Omega_m = 0.3$、$\Omega_k = 0$、$w = -1$和 $w_a = 0$ 附近进行计算，其中 $H_0 = 70$千米 秒$^{-1}$ 兆秒差距$^{-1}$和 $\sum m_\nu = 0.06$ 电子伏特，所采用的步长为 $\Delta\Omega_m = \Delta\Omega_k = 0.02$、$\Delta w = 0.05$和 $\Delta w_a = 0.10$。我们分别改变每个参数，同时固定其余独立参数。改变Ω_m 或Ω_k时，我们调整当前的暗能量密度，使密度参数（包括曲率和辐射）之和为 1。改变 w或 w_a时，当前密度保持不变。对采样导数进行插值以便可视化，并排除 $\bar{z}_s - \bar{z}_l \le 0.05$的配置。

图2 展示了对 Ω_m、Ω_k、 w 和 w_a的响应。曲率导数在所示范围内始终为负，因此我们绘制$-S_{\Omega_k}$，以便直接将其大小与其他参数的正响应进行比较。上方两个面板的色标范围为 0–0.5，下方两个面板的色标范围为 0–0.08 ，便于比较各组参数（较大的响应会在色标上限处饱和）。

物质密度响应和曲率响应的绝对值通常随透镜红移增加而增大。相比之下，对 w 的响应偏向较低至中等透镜红移，而对 w_a 的响应则延伸至更高红移。由于每个参数的响应峰值出现在不同区域

在透镜—源平面中，单个比率只能约束参数的一个退化组合，而涵盖广泛透镜红移范围的比值会以不同方式对这些响应加权，因而能够约束相互独立的组合。此外，位于透镜后方且与透镜距离相对较近的星系源分布通常会增强分数响应，尽管对于曲率而言，其对源红移的依赖较弱。在所扫描的范围内，最大响应幅

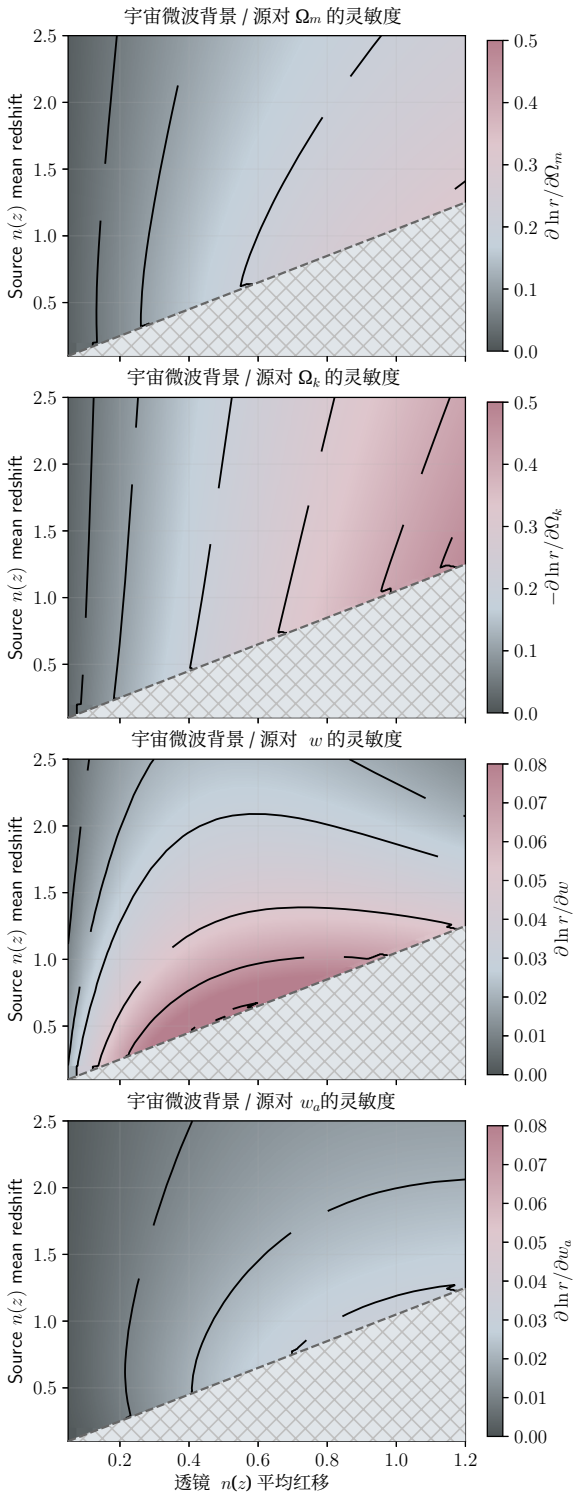


图 2： **几何引力透镜比的宇宙学敏感性**。纯几何**的分数响应**

宇宙微波背景透镜/星系源比 $S_p = \partial \ln r_{\rm geom}/\partial p$ 随平均透镜与星系源红移的变化。透镜和源分布均为高斯分布，固定宽度为$\sigma_{z,\ l} = 0.003$ 和$\sigma_{z,\ s} = 0.05$，宇宙微波背景源平面固定在 $z_* = 1090$。各面板显示对 Ω_m、Ω_k、 w 和 w_a 的响应。对于曲率，我们显示$-S_{\Omega_k}$，因为其响应在所绘制的整个范围内均为负值。颜色表示从采样网格插值得到的有限差分导数。

表 I：**基准宇宙学参数和先验范围**。方括号表示平坦先验。 σ_8 是基准宇宙学下由固定的 A_s 以及$\sum m_\nu = 0.06$电子伏特所得的数值。 †Ω_b 在所有包含重子声学振荡、 θ_*或压缩宇宙微波背景先验的链中均采用平坦先验进行变化，因为它会参与声视界计算；而在仅 LR和仅超新星链中则保持固定，因为它对纯几何观测量的影响可以忽略。

	基准	先验
宇宙学		
Ω_m	0.3156	$[0.10,\ 0.60]$
h	0.6727	$[0.50,\ 0.90]$
Ω_b	0.0492	$[0.03,\ 0.07]^\dagger$
模型扩展（适用时）		
w	-1	$[-3.0,\ -\frac{1}{3}]$
w_a	0	$[-3.0,\ 3.0]$
Ω_k	0	$[-0.25,\ 0.25]$
$\sum m_\nu$ [电子伏特]	0.06	$[0.06,\ 0.6]$
在所有链中固定		
n_s	0.9645	—
A_s	2.129×10^{-9}	—
σ_8	0.819	—
τ	0.054	—

曲率方面大于格式器密度[2]，，并且大于 w 相较于 w_a。

因此，最优样本必须在宇宙学敏感性、测量噪声以及第IID节所确定的建模要求之间取得平衡。特别是，相邻的透镜与源分布可能存在显著重叠，尽管分数响应较大，但弱引力透镜效率可能较低。参数简并、红移不确定性以及比值之间的协方差也必须纳入对可实现约束的预报中。我们结合有效性测试和敏感性测试，为下一节所述基于 COSMOS 的样本选择提供指导。

III. 模拟数据集设置

所有模拟数据向量和协方差矩阵均在表I所列的基准宇宙学下计算。这些

[2] Bernstein [11]指出，较大的曲率响应完全源自几何效应。引力透镜效率取决于观测者–透镜–源三角形的三条边。在平直宇宙中，透镜–源距离可直接由观测者–透镜距离和观测者–源距离得出；但在存在曲率时，它会多出一项与 Ω_k 成正比的项。因此，即使距离–红移关系保持不变，曲率也会改变比值。原则上，利用同一透镜样本周围、位于多个源平面的引力透镜效应，可以同时求解距离–红移关系（将其视为自由函数）和曲率；这一方法仅依赖罗伯逊–沃克度规的几何性质，而不依赖膨胀历史模型，即不依赖暗能量或结构增长模型。

这些数值遵循 LSST DESC《科学需求文档》 [35]，，与 Zhang等人[26], 采用的数值相同，唯一不同的是，我们还采用了最小中微子质量 $\sum m_\nu = 0.06$电子伏特。

A. LSST

薇拉·C·鲁宾天文台已经开始全面运行其时空遗产巡天（LSST） [36]。我们预报 LSST 的两个观测时期。基准配置针对完成十年巡天（Y10）：根据 LSST DESC 科学需求文档 [35, 36]，，我们假设采用 Y10 金级星系样本（$i < 25.3$），其有效弱引力透镜源密度为27 角分$^{-2}$，由此构建第IIIA 1 节中的层析样本，覆盖14300 度^2 （$f_{\rm sky} = 0.347$），这些区域在银河系掩膜后与 Simons Observatory 的引力透镜图重叠，见图3 和表II）。Y1 配置对应 DR1 时期（预计于 2028 年），其样本较浅（10角分$^{-2}$ 的源，覆盖12300 度^2），用于评估首批数据发布后已经能够开展多少科学研究。下面将介绍我们如何按红移分箱划分星系。

1. 透镜和源优化样本

第 IID 节的分析表明，透镜样本应具有较窄的红移分布，覆盖较宽的红移范围，同时还需控制透镜放大和透镜—源重叠。首先，对于 LSST Y1，我们利用 COSMOS2020 星表 [37]探索实现此类筛选的一种实用方法。我们使用 Sánchez 等人 [38], 提出的感知噪声算法，在六波段孔径通量及其不确定度上训练 48×48 自组织映射（SOM）；其中的 CFHT u 和 HSC $grizy$数据用作 Rubin 的代理 $ugrizy$。我们对经过退化处理、深度模型类似 LSST Y1 的测光数据进行 $i < 23$ 筛选，并应用干净覆盖区、星系分类和 LePhare 质量筛选。COSMOS LePhare 红移估计为每个 SOM 单元提供经验分布 $p(z \mid c)$。层析样本由平均红移相近、且各自红移分布较窄的互不相交单元集合构成（会使分箱变宽或引入显著尾部的单元不会被分配到任何层析分箱中）。因此，分箱 $n(z)$ 是其组成单元分布按星系数量加权得到的混合分布。

相同的 SOM 表征使放大响应能够与红移和密度一起纳入样本筛选，正如 Alarcon 和 Sánchez [39] 最近所展示的那样。遵循 Elvin-Poole 等 [29],Legnani 等 [30], 的通量扰动方法，我们将所有波段的通量扰动为 $f_b \to (1 + 2\delta\kappa) f_b$, 其中 $\delta\kappa = 0.01$，然后重复对固定 SOM 的分配。对于一组固定的筛选单元，其总体估计值的分数变化即为选择响应，

$$C_{{\rm sample},i} \simeq \frac{N_i(\delta\kappa) - N_i(0)}{\delta\kappa\, N_i(0)}. \tag{20}$$

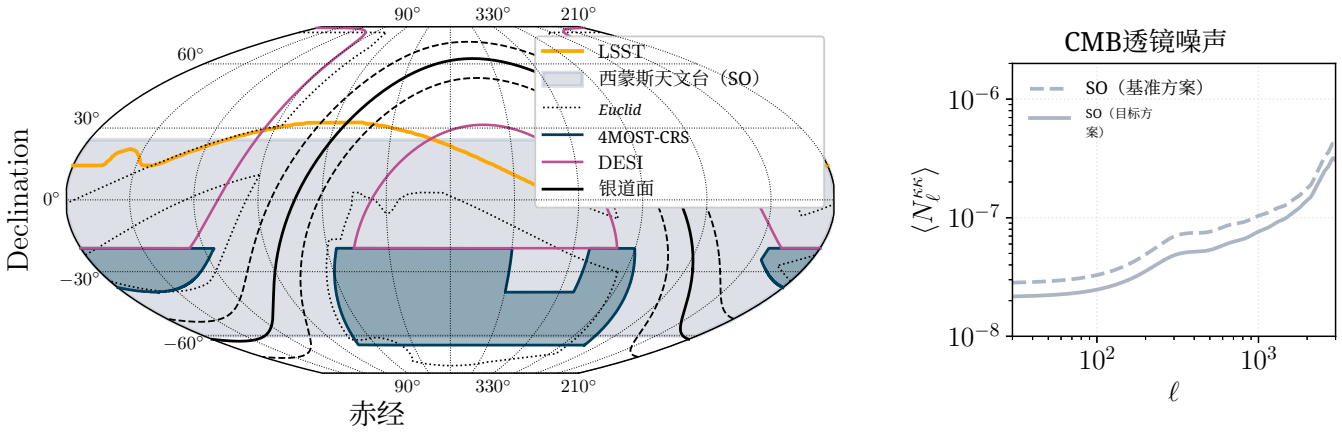


图 3： **巡天特征**。 左图： 本研究所用巡天的覆盖范围：LSST 和 Simons Observatory（SO）， 以及合并后构成附录 B 中替代透镜样本的光谱巡天：4MOST-CRS 、 DESI 和 *Euclid*。 右图： CMB 引力透镜噪声功率谱。对于 SO，我们展示了基准灵敏度（虚线）， 用于 LSST Y1 交叉相关（∼2028）， 以及目标灵敏度（实线）， 用于 LSST Y10。

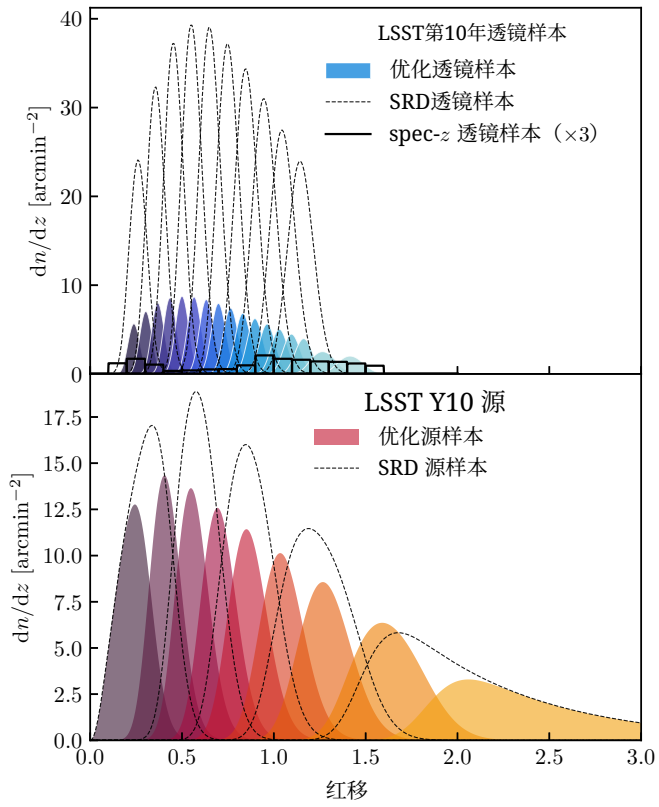


图4： **层析透镜与源样本**。 本研究所用 LSST Y10 层析分箱的单位红移数密度。填充曲线表示为引力透镜比测量优化的窄透镜（17 个分箱）和源（9 个分箱）样本；黑色虚线轮廓表示对应的标准 LSST SRD Y10 样本（10 个透镜分箱／5 个源分箱）。顶图中的黑色实线轮廓表示我们在附录 +DESI+*Euclid*中定义并检验的替代合并光谱透镜样本；为便于观察，其数密度显示为实际值的三倍。B。

纳入立体角稀释后，在第 IIC 节的约定下得到 $C_{\text{total},\ i} = C_{\text{sample},\ i} - 2 = 2(\alpha_{l,\ i} - 1)$。因此，相关目标是 $C_{\text{sample},\ i} \simeq 2$，而不是零选择响应。可以组合不同单元来接近这一目标，同时保持较窄的 $n(z)$ 和足够的密度（不要求每个单元都具有零响应）。在中等和较高透镜红移处，我们更加重视抑制放大，因为此时前景引力透镜贡献更为重要，并且不具有会在几何比中相互抵消的透镜平面依赖性。针对这种抵消的筛选策略将在 Alarcon 和 Sánchez [39] 中进一步讨论。

这些测试表明，为保留几何引力透镜比，需要联合进行红移与放大筛选。完整的校准还必须涵盖跨越母样本选择边界的天体、检测与尺寸依赖选择效应，以及响应估计的不确定性。对于实际测量，可使用源注入（例如 DES 中的 BALROG ）来校准完整的选择响应[29, 30], ，具体流程与 [39]类似。本文中的 COSMOS 分析得到了一种候选 LSST Y1 透镜配置，包含 13 个窄层析分箱，平均红移范围为 $\bar{z} \simeq 0.17$–0.94，红移宽度为$\sigma_z \simeq 0.02$–0.06，估计数密度约为每个分箱0.06–0.20角分$^{-2}$ 。对于红移最高的六个分箱（$\bar{z} \simeq 0.65$–0.94），估计的仅通量响应满足 $|C_{\text{total}}| \lesssim 0.3$，同时仍保持较窄的红移分布（总结见表II）。

基于这一样本设计策略，我们采用一个解析的 LSST Y10 透镜预报，假设每个星系的光度-z 散 $\sigma_z = 0.02$射为$1 + z$，而标准 SRD透镜样本的这一数值为 $0.03(1 + z)$。我们在 $0.2 < z_{\text{phot}} < 1.2$范围内采用 15 个等宽的光度-$z$ 区间，并补充区间$1.2 < z_{\text{phot}} < 1.35$ 和 $1.35 < z_{\text{phot}} < 1.5$。前 15 个区间中的母体分布归一化为每平方角分$^{-2}$ 10 个星系，另外两个区间的星系密度则有所降低，以延续高红移密度趋势的下降趋势。这

形成了 17 个区间，其平均红移为 $\bar{z} = 0.24$–1.42，总密度为 10.8角分$^{-2}$ （图 4）。与 Zhang 等人 [26]（每平方角分 35.7 个星系 $^{-2}$）相比，我们保守地选择了这一密度，以便为在光度-筛选基础上进一步施加联合红移-放大筛选留出密度预算。这些密度、红移宽度以及可忽略不计的放大效应，是受 COSMOS 测试启发而采用的预报设定。

源样本是将 SRD Y10 星系群体重新划分为 9 个数量相等的光度红移分箱，同时保持源样本总量 $n(z)$ 和 27 角分$^{-2}$的有效密度。

作为光度透镜的替代方案，我们构建了一个结合 4MOST [40], DESI [41],和 *Euclid* [42] 的光谱样本（附录 B）。光谱红移可将透镜的光度红移不确定性降至最低z，但无法消除放大效应；仍须按照上文所述流程，针对相应的星系选择对其响应进行表征。

表 II 列出了预测配置的规格。我们采用图4中的优化的透镜与源样本作为基准。附录 E 表明，在大多数配置中，标准 SRD 源分箱的表现几乎同样出色。因此，样本设计的主要要求是构建适当狭窄且放大效应受控的透镜分箱，而非专门进行源样本筛选。

B. Simons Observatory

Simons Observatory（SO）将在与 LSST 重叠的广阔区域内提供高精度宇宙微波背景辐射透镜图（图 3）。我们假设 SO 的覆盖率约为 20,000 平方度^2；经银河系掩膜处理后，约剩余 15,000 平方度^2；分析覆盖区域见表 II。Advanced SO 升级旨在将 LAT 制图速度提高约一倍 [43]。

我们采用 Ade等人 [27]公布的透镜重建噪声功率谱。对于 LSST Y1，我们使用基线曲线（SENS1）[3]，；对于 LSST Y10，我们使用目标方案 曲线（SENS2）[4]。这些选择定义了我们的预测配置；各个时期达到的噪声水平将取决于累积观测时间、巡天覆盖范围以及重建方法。这两种功率谱均对应于不进行前景去投影、采用迭代透镜重建 [的最小方差（MV）重建；另请参见 43]。

[3] https://github.com/simonsobs/so_噪声_模型/ blob/master/LAT_透镜_噪声/lensing_v3_1_1/ nlkk_v3_1_0_deproj0_SENS1_fsky0p4_it_lT30-3000_lP30-5000.dat[4] https://github.com/simonsobs/so_噪声_模型/ blob/master/LAT_透镜_噪声/lensing_v3_1_1/ nlkk_v3_1_0_deproj0_SENS2_fsky0p4_it_lT30-3000_lP30-5000.dat

C. 交叉相关的协方差

我们使用 COSMOSIS [31], 计算解析高斯协方差矩阵，并扩展了 save_2pt模块以支持宇宙微波背景透镜化交叉相关。对于高斯场，在掩膜的 $f_{\rm sky}$ 近似下，不同多极矩之间不相关，$\mathrm{Cov}(C_\ell,\ C_{\ell'}) \propto \delta_{\ell\ell'}$，其中

$$\mathrm{Cov}\left(C_\ell^{12,ij},\, C_\ell^{34,kl}\right) = \frac{\tilde{C}_\ell^{13,ik}\,\tilde{C}_\ell^{24,jl} + \tilde{C}_\ell^{14,il}\,\tilde{C}_\ell^{23,jk}}{f_{\rm sky}\,(2\ell+1)}, \tag{21}$$

其中，场标签 1、2、3，$4 \in \{\kappa_g, \kappa_{\rm CMB}, g\}$ 和 i，j，k，l 表示第˜个层析分箱。这里，C_ℓ 表示信号功率谱与噪声功率谱之和，$f_{\rm sky}$ 表示天空重叠面积比例。自功率谱中包含噪声贡献，并假设不同场或互不重叠的层析样本之间的噪声贡献为零。第IIA节中的波束和多极范围应用于数据向量，但不应用于协方差；协方差由未滤波功率谱计算。

为了得到实空间协方差，我们将式（21）通过 C_ℓ-到-ξ 变换进行传播。利用全天空离散求和 $\xi^{(p)}(\theta) = \sum_\ell F_\theta^{(p)}{}_\ell\, C_\ell$，其中滤波矩阵$F_{\theta\,\ell}^{(p)}$，编码了星系聚类的勒让德多项式（$p = 00$）、星系-剪切的缔合勒让德多项式（$p = 02+$），以及剪切-剪切的自旋加权函数（$p = 22\pm$），协方差块变为

$$\Sigma^{(pq)}_{\theta_a,\theta_b} = \sum_\ell F^{(p)}_{\theta_a,\ell}\,\mathrm{Cov}(C_\ell^{ij}, C_\ell^{kl})\,F^{(q)}_{\theta_b,\ell}. \tag{22}$$

噪声贡献的处理方式取决于 N_ℓ 是否为白噪声（即与尺度无关）。对于星系位置和形状，噪声与 ℓ无关，因此式（22）中的噪声-噪声项在形式上是角度上的 δ函数；截断于 $\ell_{\rm max}$ 的求和难以很好地逼近它。因此，我们在谐波空间中减去该项，并加上其精确的实空间形式；后者在角度上是对角的，

$$\Sigma^{\rm NN}_{\theta_a\theta_b} = \delta_{ab}\frac{N^{13}N^{24} + N^{14}N^{23}}{8\pi^2 f_{\rm sky}\,\theta_a\Delta\theta_a} \tag{23}$$

对于 $\xi_\pm$，还需额外乘以 2；该因子来自 E-模和 B-模，并且 δ_{ab} 将该项限制在对角线上，$\theta_a = \theta_b$。这就是通常的成对计数方差。其余的信号项和信号-噪声项通过对式（ ℓ中的 22）显式求和得到，在上采样的 θ 网格上计算，并使用权重 $w_i = \theta_i\Delta\theta_i$平均到数据分箱中。

宇宙微波背景辐射透镜重建噪声 $N_\ell^{\kappa_{\rm CMB}}$具有很强的$\ell$依赖性（图3），因此其噪声-噪声项在 θ 上不是对角的，也没有成对计数的对应形式。对于每个涉及 $\kappa_{\rm CMB}$ 的分块，我们因此保留式（$C_\ell = C_\ell + N_\ell$ 中的完整观测功率谱22），并通过相同的 ℓ 求和计算所有项，包括噪声-噪声项。由于 $\kappa_{\rm CMB}$ 是自旋-0，$\xi_{g\kappa}$使用 $p = 00$ （勒让德）滤波器。

部分天空覆盖仅通过方程（21）中的有效天空比例 $f_{\rm sky}$ 进入协方差。我们不应用模耦合矩阵（例如通过 NAMASTER；Alonso 等

表 II： **各设置的模拟规格。** $\bar{z}$ 表示层析分箱的加权平均红移。LSST 透镜星系偏置遵循 $b_i = b_0/G(\bar{z}_i)$，其中 G是基准宇宙学下的线性增长因子， $b_0 = 1.05$ （Y1）和0.95 （Y10），与 Zhang 等人 [26]所述相同；规格中的z 偏差是示踪体特定的（见附录 B）。源星系数密度在所有分箱间均分；所有情况下，每个椭率分量的形状噪声均为 $\sigma_e = 0.26$ 。高斯光度红移均值偏移先验$\sigma(\Delta z_b)$ 和剪切校准先验 σ_m （此处给出每个分箱的范围）均见附录 D。

	LSST Y1	**LSST Y10**	**规格-z**
巡天与宇宙微波背景设置			
$f_{\rm sky}$ Simons Observatory 噪声水平	0.298 (12,300 度^2) 基线（SENS1）	0.347（14,300 度^2） 目标方案（SENS2）	0.259（10,700 度^2） 目标方案（SENS2）
透镜星系样本			
样本	优化	优化	4MOST+DESI+*Euclid*
$N_{\rm bins}^{\rm lens}$	13	17	16
$\bar{z}^{\rm lens}$ 范围	0.17–0.94	0.24–1.42	0.14–1.55
$n_{\rm lens}^{\rm tot}$ [角分$^{-2}$]	1.59	10.76	0.57
b_i 范围	1.15–1.68	1.08–1.86	1.34–2.08
$\sigma(\Delta z_b)$ 先验范围	0.0058–0.0097	0.0059–0.0133	0
源星系样本			
$N_{\rm bins}^{\rm src}$	5	9	
$\bar{z}_i^{\rm src}$	0.25, 0.46, 0.66, 0.92, 1.53	0.24, 0.42, 0.56, 0.71, 0.87, 1.05, 1.29, 1.63, 2.36	
$n_i^{\rm src}$ [角分$^{-2}$]	2.0（每个分箱相等）；总计 10.0	3.0（每个分箱相等）；总计 27.0	
$\sigma(\Delta z_b)$先验范围	0.0025–0.0051	0.0017–0.0045	
σ_m 先验	0.013	0.0040	
尺度截断（实空间）			
θ 范围 [角分]	2.5–250（20 个对数间隔分箱）		
$\ell_{\rm max}$ （理论）	3000		
θ 比值中使用的范围	$\theta \leq 100$角分（20 个分箱中的 16 个）		

44），因此不会在功率谱层面对掩膜进行去卷积；这种 $f_{\rm sky}$ 近似预计会使协方差相对于完整的伪C_ℓ 处理略微偏大。

我们将协方差与 Zhang等 [26] 对星系×宇宙微波背景-引力透镜交叉相关 $\xi_{g\kappa}$所作的独立高斯解析估计进行比较验证，该估计使用 TJPCOV [45]计算得到。比较五个透镜分箱中 $C_{ii}^{g\kappa}$ 的对角方差后，我们发现二者在 $\lesssim 10\%$ 的水平上一致，但我们的数值系统性地更大；两种计算在掩膜的处理方式上有所不同（Zhang等 26 使用 NAMASTER，而我们使用 $f_{\rm sky}$ 近似），并且在噪声和分箱的细节处理上也存在差异。

D. 引力透镜比值估计量

在纯几何极限下，比值 $\mathcal{R}^{\rm GGL}$ 和 $\mathcal{R}^{\rm CMB}$在方程（10）–（11中定义，是与尺度无关的。对于真实的光度透镜分箱，这种尺度无关性只是近似成立的，因此我们在一定角尺度范围内将每个比值压缩为单个标量。图5 显示，与每个角分箱的不确定度相比，残余尺度依赖性很小：在不存在本征对齐的情况下，每个测量精度约为5%的比值，对于每种组合都保持在压缩值的0.3σ 以内。本征对齐会在某些组合中引入最高达 5σ 的尺度依赖性；第 χ^2IIIF节的筛选会消除这些影响，而保留比值保持在 0.25σ以内。

本节描述单个比值组合的估计量。第IIIE 节随后将所有透镜—源组合汇总为比值数据向量$\hat{}\mathbf{r} = (\hat{}r_1, \ldots\ldots, \hat{}r_N)$，其中，此处定义的量在指代组合 a时带有索引 a 。对于一个组合，其分子和分母相关函数 $\boldsymbol{\xi}_{\rm num}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_{\rm den}$ 在所选范围内的 n_θ 个角度分箱中测量；我们采用先平均后相除估计量，该估计量由线性模型$\boldsymbol{\xi}_{\rm num} = r\,\boldsymbol{\xi}_{\rm den}$的振幅 r 的广义最小二乘（GLS）拟合得到。该估计量为：

$$\hat{r} = \frac{\mathbf{v}^\top \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\rm num}}{\mathbf{v}^\top \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\rm den}}, \tag{24}$$

其中，帽符号表示测量量，$\mathbf{v}$ 是权重向量，我们根据拟合残差的协方差$\mathbf{M}$构造该向量 $\boldsymbol{\xi}_{\rm num} - r\,\boldsymbol{\xi}_{\rm den}$。从堆叠向量的联合$2n_\theta \times 2n_\theta$ 解析协方差 $\mathbf{d} = (\boldsymbol{\xi}_{\rm num}, \boldsymbol{\xi}_{\rm den})$（按第 IIIC 节中的方法计算）出发，我们写成

$$\mathbf{C_d} \equiv {\rm Cov}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_{\rm num}\\ \boldsymbol{\xi}_{\rm den}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{C}_{\rm nn} & \mathbf{C}_{\rm nd}\\ \mathbf{C}_{\rm dn} & \mathbf{C}_{\rm dd}\end{pmatrix}. \tag{25}$$

将每个角度分箱中的比值固定为其基准宇宙学值 $r_k^{\rm fid} = \xi_{\rm num}^{\rm fid}(\theta_k)/\xi_{\rm den}^{\rm fid}(\theta_k)$ 后，残差是数据的线性变换，

$$\boldsymbol{\xi}_{\rm num} - \mathbf{R}\,\boldsymbol{\xi}_{\rm den} = \mathbf{A}\,\mathbf{d},$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{R}\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = {\rm diag}\big(r_1^{\rm fid}, \ldots, r_{n_\theta}^{\rm fid}\big), \tag{26}$$

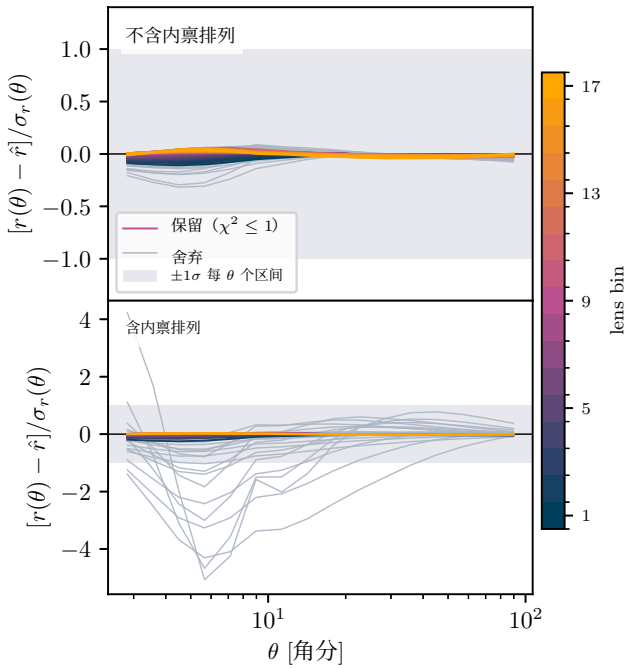


图 5：**透镜比的尺度依赖性**。无噪声 LSST Y10 数据向量的逐角度分箱 CMB 比值 $r(\theta) = \xi_{g\kappa_{\rm CMB}}(\theta)/\xi_{g\kappa}(\theta)$ 相对于同一透镜–源组合的压缩比值 $\hat{r}$，以逐分箱比值不确定度 $\sigma_r(\theta)$为单位，在基准范围$\theta \leq 100$ 角分内展示，共有 84 种组合。经 $\chi^2 \leq 1$ 筛选保留的组合按透镜分箱着色，舍弃的组合以灰色显示；色带表示 $\pm 1\sigma$。上：未受本征对齐（IA）污染的数据向量。下：受 IA 污染且采用其自身筛选进行分析的数据向量。

其中 $\mathbf{I}$ 是 $n_\theta \times n_\theta$ 单位矩阵。因此，其协方差为

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}\,\mathbf{C_d}\,\mathbf{A}^\top. \tag{27}$$

使式（28）最小化的权重与 $\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\xi}^{\rm fid}_{\rm den}$[5] 成正比。权重采用基准量而非测量量，可使式（24）中的两个求和项保持对数据的线性；若使用测量分母进行加权，分母将关于噪声呈二次关系，并使比值产生趋向于零的偏差。

我们通过假设一种替代宇宙学来检验对所假定基准宇宙学的依赖性，并发现这种依赖可以忽略不计：在 $w_0 = -0.83$ 处生成数据向量和协方差，$w_a = -0.59$ 并使用来自基准 Λ冷暗物质宇宙学的权重进行分析，所得点估计的偏移最多为 $0.003\sigma_{\hat{r}}$。

在尺度无关极限下，估计量方差的主导阶为

$$\sigma^2_{\hat{r}} \simeq \frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{M}\,\mathbf{v}}{(\mathbf{v}^\top \boldsymbol{\xi}^{\rm fid}_{\rm den})^2}. \tag{28}$$

请注意，以往的透镜比分析采用了不同的比值压缩方式：Sánchez 等人 [16] 和 Giannini等人 [17]使用先除后平均估计量，即对逐角度分箱比值拟合常数的广义最小二乘拟合 $\xi_{\rm num}(\theta_k)/\xi_{\rm den}(\theta_k)$；而我们此前的 CMB透镜比分析 [20] 则通过马尔可夫链蒙特卡罗，对全套相关函数联合拟合一个共享的角度形状参数和逐源平面振幅。我们的部分比值，尤其是透镜与源红移间隔较小的比值，其信噪比低于上述分析，这促使我们提出了上述估计量。我们的新估计量在合并角分箱后才进行除法，从而避免逐一除以含噪声的分母。附录 A 中对含噪声模拟数据向量的测试表明，对于这些构型，偏差可以忽略，抽样分布近似服从高斯分布。该附录还将此估计量与 Sánchez 等人 [16]进行了比较。

E. 透镜比值协方差

我们通过对联合解析协方差进行线性传播，计算压缩比值的协方差 $\mathbf{C}_\boldsymbol{\xi}$，其中数据向量 $\boldsymbol{\xi}$ 串联了分析中涉及的所有相关函数（第 IIIC 节）：

$$(\mathbf{C_r})_{ab} = \mathbf{g}_a^\top \mathbf{C}_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{g}_b, \tag{29}$$

其中，a、b 标记比值组合，$\mathbf{g}_a$ 是响应向量，其定义体现为数据向量发生微小偏移 $\delta\boldsymbol{\xi}$ 时的作用：

$$\mathbf{g}_a^\top \delta\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{v}_a^\top \left(\delta\boldsymbol{\xi}_{{\rm num},a} - \mathbf{R}_a\,\delta\boldsymbol{\xi}_{{\rm den},a}\right)}{S_a}, \qquad S_a = \mathbf{v}_a^\top \boldsymbol{\xi}^{\rm fid}_{{\rm den},a}, \tag{30}$$

因此 $\mathbf{g}_a$ 仅在 $\boldsymbol{\xi}$ 中保存组合 a的分子和分母的行上非零。这些响应向量近似于公式（24）的梯度。精确梯度应使用标量压缩基准比值代替 $\mathbf{R}_a$。在尺度无关极限下，这两个表达式相同；对于保留的 LSST Y10 比值，使用精确梯度最多使标准差变化 0.08%。在所采用的基准权重下，$\mathbf{C_r}$ 的对角线等于公式（28）。

F. 选择几何比值

我们针对所有保留的透镜-源对采用一组非冗余的宇宙微波背景透镜比 $\mathcal{R}^{\rm CMB}_{(i,j)}$，并考虑其完整协方差。在基础透镜信号层面，

[5] 实际操作中，我们首先在完整角度范围内构建残差协方差，$\mathbf{M}_{\rm full}$，然后将其逆矩阵限制在选定的角度分箱上：$\mathbf{v} \propto (\mathbf{M}^{-1}{}_{\rm full})_{SS}\boldsymbol{\xi}^{\rm fid}_{\rm den}$，其中 S 表示选定的角度分箱，$\boldsymbol{\xi}^{\rm fid}_{\rm den}$ 则限制在该范围内。对于保留的 LSST Y10 比值，与最优选择相比，所实施的权重最多使标准差增加 0.24%。

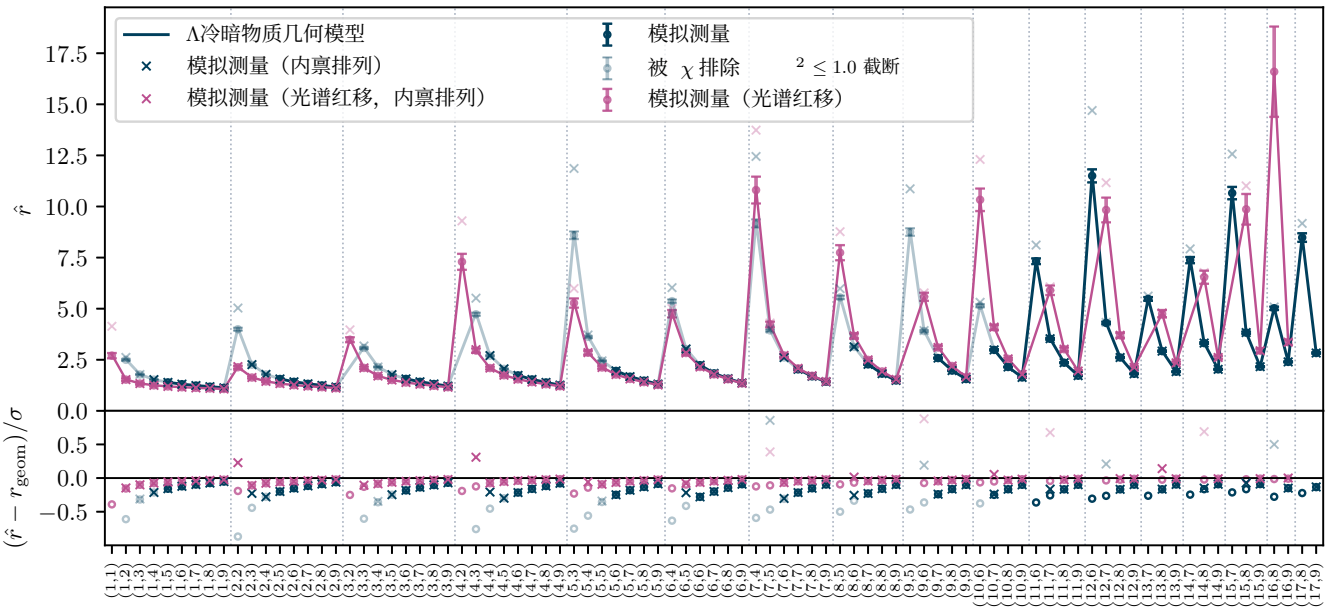


图 6： **透镜比数据向量：** LSST Y10 光度透镜样本（蓝色）和附录 B （粉色）的数据，均与 LSST Y10 源配对。各点表示测得的比值，按透镜分箱分组 i （点状竖线），并按源分箱递增顺序排列 j；线条表示纯几何预测 $r_{\rm geom}$。通过迭代 $\chi^2 \leq 1$ 筛选切除的非几何组合以降低不透明度显示（光谱筛选按构造保留其全部组合）。十字表示与 IA 污染数据向量对应的测量结果。底部面板显示残差。

星系—星系透镜比可表示为

$$\mathcal{R}^{\rm GGL}_{(i,j,j')} = \frac{\mathcal{R}^{\rm CMB}_{(i,j')}}{\mathcal{R}^{\rm CMB}_{(i,j)}}, \tag{31}$$

因此不将其作为额外的可观测量。我们要求最小平均红移间隔 $\bar{z}_s - \bar{z}_l \geq 0.05$，以排除几乎重叠、星系–星系透镜信号较弱且比值分母难以确定的透镜-源对。

图6 总结了模拟数据向量。数据向量$\hat{}\mathbf{r}$ 没有噪声：每个比值均由第IIA 节的完整交叉相关模型（CosmoSIS 积分，见公式（1），包括星系偏置、非线性物质功率谱以及完整的透镜核）计算得到。我们将这一完整模型的数据向量与纯几何预测 $r_{\rm geom}$进行比较，该预测按照第IID 节的方法，直接根据公式（10）–（11）中的临界面密度因子计算得到。图中包括我们的基准 LSST Y10 透镜样本，以及附录B中考虑的一个替代光谱样本。

我们采用迭代式 χ^2 筛选，移除纯几何预测不适用的比值组合。从完整集合开始，我们计算 $\chi^2 = \Delta\mathbf{r}^{\top}\hat{}\mathbf{C}_{\mathbf{r}}^{-1}\Delta\mathbf{r}$，其中 $\Delta\mathbf{r} = \hat{}\mathbf{r} - \mathbf{r}^{\rm geom}$，确定移除后对 $\Delta\chi^2$ 贡献最大的组合，将其移除，并迭代进行，直至 $\chi^2 \leq \chi^2_{\rm thr}$。我们采用 $\chi^2_{\rm thr} = 1$，这保留了84个候选 LSST Y10 比值组合中的59个（以及全部79个光谱样本组合：该样本更精细的低红移透镜分箱在附录 B中有所描述，其筛选方式正是为确保不丢弃任何组合而选择的）。

请注意，被舍弃的组合并非不可使用：通过对具有完整红移核的完整交叉相关进行建模，可以保留这些组合，就像 DES 剪切比分析 [16], 中所做的那样，其中星系偏置和物质聚类仍会部分抵消。在本研究中，我们选择舍弃这些组合，以保持数据向量的纯几何解释。

保留的 LSST Y10 比值，其单个比值的精度达到 $\sigma_r/|r| = 0.8$–2.8%（中位数为 1.0%），总信噪比为 360（光谱样本为 166）；噪声预算的分解见附录C。信噪比主要来自 3×2pt 分析所舍弃的小尺度：若将压缩范围限制为 θ 大于 $6\,h^{-1}$ Mpc 共动距离（各透镜分箱对应 7–31 角分，即 DES Y6 星系–星系透镜效应的截断尺度），LSST Y10 的总信噪比将降至 98。对于 LSST Y1配置，同样的筛选保留了 37 个有效组合中的 31 个，单个比值的精度为 1.5–4.5%（中位数为 2.0%），总信噪比为 163。

G. 外部模拟似然

为了量化透镜比对现有几何探针的增益，我们将其与不同组合的外部模拟数据结合；本节将介绍这些数据。所有外部数据向量均在基准宇宙学下模拟（表 I），以确保预测前后一致。

DES第五年 Ia型超新星。 我们使用了一个模拟版本的DES第五年超新星哈勃图 [46], , 其中包含 1829 颗超新星，红移范围为 0。025 < z < 1.12。似然基于 χ^2 距离模数 $\mu(z_i)$，并对超新星绝对星等进行解析边缘化，同时采用真实DES第五年数据发布的统计与系统协方差。超新星通过晚期膨胀率约束光度距离随红移的变化，$D_L(z) = (1+z) f_K[\chi(z)]$, 从而对暗能量状态方程提供约束。

DESI DR2重子声学振荡。 我们使用 DESI第二次数据发布重子声学振荡测量的模拟版本 [1]。DESI DR2 数据集包含 13 项距离测量，覆盖 $0.3 \lesssim z_{\rm eff} \lesssim 2.3$，并给出共动角直径距离 D_M 与哈勃距离 $D_H \equiv c/H$（z）相对于重子拖曳时期的声学视界 r_d的比值。重子声学振荡测量对积分膨胀历史敏感，并约束 Ω_m 和 $h\,r_d$。

声学视界角尺度（$\theta_\star$ 先验）。 对复合时期的声学视界角尺度 $\theta_\star = r_\star/D_M$（$z_\star$）施加高斯先验，其中 $r_\star$ 是光子退耦时的声学视界，$z_\star$。使用此似然时，我们通过在仅求解背景膨胀和复合历史、不包含扰动的模式下运行 CAMB [47], 来计算 $\theta_\star$：$z_\star$ 和 $r_\star$ 来自复合计算，而 D_M（$z_\star$）来自背景计算，其中包含有质量中微子贡献。同一复合计算还给出重子声学振荡声学视界 r_d，其取值时刻为拖曳时期，而非 $z_\star$。先验均值设为基准宇宙学下该计算的取值，$\theta_\star^{\rm fid} = 0.0104081$。按照 DESI DR2 的做法，我们采用宽度 $\sigma = 5.3 \times 10^{-6}$，该值比名义上的*Planck* 2018 精度宽 75%，以考虑扩展宇宙学模型中潜在的模型依赖性 [1]。

压缩宇宙微波背景先验。Lemos和Lewis的压缩宇宙微波背景先验 [48], 用于 DESI DR2 分析 [1]，它是关于（$\theta_\star$、ω_b、ω_{bc}）的联合高斯分布。这里，$\omega_{bc} = (\Omega_b + \Omega_c) h^2 = (\Omega_m - \Omega_\nu) h^2$ 是物理冷物质（重子 + 冷暗物质）密度，不包括中微子贡献。先验均值设为基准值 $\boldsymbol{\mu}^{\rm fid}$ =（0.0103778、0.022264、0.142172），这些值是在基准宇宙学下计算得到的，并在声学视界积分和角直径距离中都计入了中微子质量；$\theta_\star$在此处使用与似然相同的解析声学视界计算进行评估，因此与上文引用的玻尔兹曼代码值略有不同，协方差则取自 Lemos和Lewis [48]。我们采用这一压缩先验，而不是完整CMB似然，因为它不需要进行扰动计算：与透镜比、重子声学振荡和超新星一样，它只依赖于背景膨胀和复合历史，因此完整分析的计算成本仍然很低。这一压缩先验保留了完整CMB似然的大部分约束能力：与重子声学振荡和超新星结合后，其 FoM(w_0、w_a) = 189（表III）为 202，而完整似然的结果为 202 [3]。

IV. 结果

我们考虑五种扩展晚期模型空间（Λ冷暗物质 +Ω_k、w冷暗物质 + Ω_k、平直 w_0w_a冷暗物质、w_0w_a冷暗物质 + Ω_k, 以及 w_0w_a冷暗物质 + Ω_k + $\sum m_\nu$），以及第 IVC 节中的非参数分箱暗能量重构。所有数据向量均在表 I 所示的平直-Λ冷暗物质基准模型下进行模拟。所有链均使用 NAUTILUS 采样器 [49]；由于该流程只需要背景量，因此计算成本较低（在 256 个 CPU 核心上，一条典型链需要一到两个节点小时，而最耗时的链——增加了附录 D 中的 35 个光度-z 和剪切校准干扰参数——需要五到十个节点小时）。

我们给出边缘化二维后验分布的优度因子 $\overline{\rm FoM(p_1,\ p_2)} = 1/\sqrt{\det \rm Cov}$。对于每个模型，我们在单一参考平面中评估 FoM，该平面由使模型超出平坦 Λ冷暗物质模型的参数张成：对于 w_0w_a 模型，为 (w_0, w_a)；对于 w冷暗物质模型 + Ω_k, 为 (w, Ω_k)；而对于Λ冷暗物质模型 + Ω_k，其唯一的扩展参数是 Ω_k，则为 (Ω_m, Ω_k) 平面。下文将这些平面称为核心平面。

A. 透镜比在扩展暗能量和曲率模型中的影响

我们首先介绍预测的最佳情况配置所对应的结果：经过优化的 LSST Y10 透镜与源样本，并将所有系统误差参数固定为其输入值。图 7 和表 III 总结了透镜比在各模型中带来的增益。我们得到以下结果：

- 比值本身只能约束距离的比值，因此其单独的优度因子从绝对意义上看较为有限，但与其他单一探针相比仍具有竞争力。

- 结合 CMB 先验后，它们成为具有竞争力的暗能量和曲率探针：其物理密度（ω_b, ω_{bc}）能够标定 $\Omega_m h^2$，并将比值中的距离比信息转换为绝对参数约束；根据模型不同，这使 CMB 单独分析的优度因子提高了 7–68 倍。我们还发现，它们与单独使用的重子声学振荡和超新星具有很强的互补性。

- 在宇宙微波背景 + 重子声学振荡 + 超新星的完整组合基础上，透镜比的贡献十分显著：暗能量参数平面上分别为 +33%（开放 w_0w_a）、+31%（平直 w_0w_a）和 +15%（w冷暗物质 + Ω_k）（在+4%的 Λ冷暗物质 +Ω_k 曲率平面上）。进一步放开中微子质量后，开放-w_0w_a 的贡献升至 +45%（中微子质量自由但曲率固定时为 +36%）[6]。因此，总体而言，我们发现模型空间越自由，

[6] 请注意，这种增益源于简并性破缺，而不是对中微子质量本身的敏感性。我们发现，加入比值后，$\sum m_\nu$ 与 w_a 之间的相关性从 -0.40 降低至 -0.28，而 σ（w_a）则从 0.29 缩小至 0.23（在固定曲率时，则从 -0.43 变为 -0.37，并从 0.25 变为 0.21）。

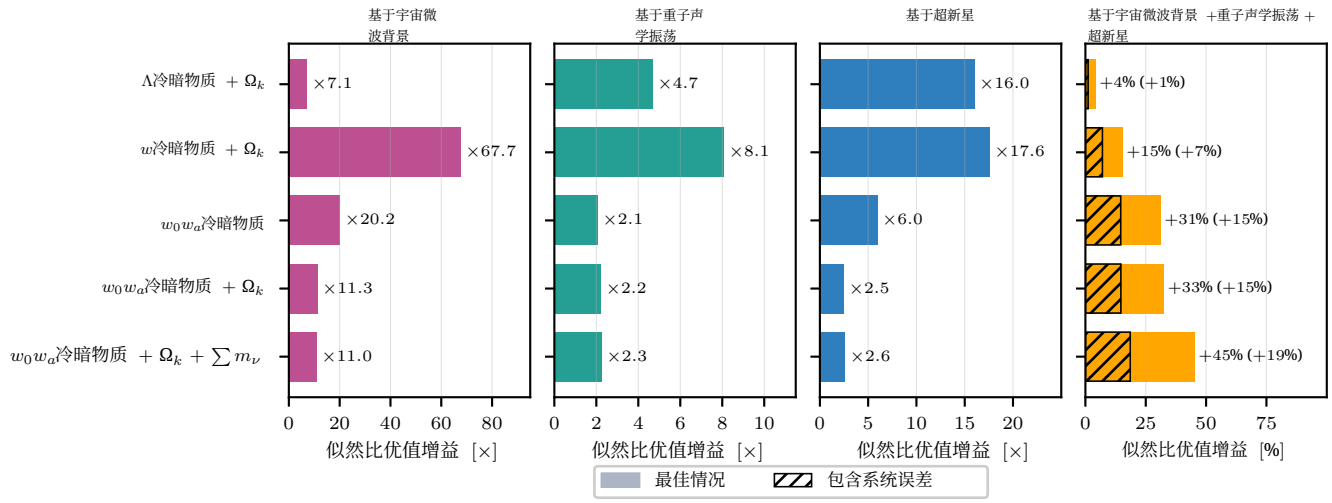


图7： **不同模型中的透镜比增益**。 在每个模型的主要参数平面中（见表 III），将透镜比加入各外部数据集后，优值（FoM）的增益。前三个面板给出了在最佳情况情景下，透镜比使压缩宇宙微波背景先验、DESI DR2重子声学振荡和 DES Y5超新星各自的 FoM 提高的倍数。最右侧面板给出了完整的宇宙微波背景 + 重子声学振荡 + 超新星组合的相对增益；实心条表示最佳情况配置，斜线填充条表示对系统误差边缘化后的结果。

表III：优度因子 $\mathrm{FoM} = 1/\sqrt{\text{协方差矩阵行列式}}$ 在各模型的核心参数平面上，单独使用透镜比（LR）以及与外部数据组合时的结果。CMB 表示 Lemos和Lewis 的压缩宇宙微波背景先验 [48], 对以下参数的联合高斯分布$(\theta_\star, \omega_b, \omega_{bc})$（第 IIIG节）；BAO 和 SNe 分别表示模拟的 DESI DR2 和 DES Y5 似然函数；“All”表示 CMB+重子声学振荡+超新星+透镜比。透镜比采用最佳情形配置，即固定系统误差参数，并使用优化的透镜与源样本（边缘化情形见表 V）。最后一列根据附录 D的最终系统误差处理，重复完整组合（数据向量受内禀排列污染，光度红移-z 和剪切校准已边缘化）。

模型	平面	透镜比		宇宙微波背景+透镜比		重子声学振荡+透镜比		超新星+透镜比	宇宙微波背景+重子声学振荡+超新星		All	全部（含系统误差）
ΛCDM +Ω_k	Ω_m–Ω_k	938.6	7 250	51 664	2883	13 523	530.9	8 489	221 371	230 929	223 845	
wCDM +Ω_k	w–Ω_k	39.3	63.7	4 307	233.4	1 886	38.3	673.8	34 219	39 512	36 631	
w_0w_aCDM	w_0–w_a	8.7	2.9	59.0	11.7	24.3	5.8	34.4	189.3	248.4	216.9	
w_0w_aCDM +Ω_k	w_0–w_a	1.2	1.0	10.9	8.5	19.0	3.6	8.9	166.4	220.7	190.9	
w_0w_aCDM + Ω_k + $\sum m_\nu$	w_0–w_a	1.2	1.0	10.6	8.6	19.5	3.5	9.0	111.1	161.4	131.8	

透镜比有助于完整组合，凸显了在扩展模型空间中加入更多探针的价值。

以上所述的所有增益均假设透镜比系统误差参数固定在其输入值。按照附录D所述，启用三种主要测量系统误差（在表II的先验下，每个层析分箱有一个平均红移偏移；每个源分箱有一个乘性剪切偏差；并在数据向量中注入一个未建模的内禀对齐信号，其幅度取 DES Y6 3×2 点相关最佳拟合 TATT 值）后，在平直 w_0w_a冷暗物质（$\mathrm{FoM}(w_0, w_a) = 8.7 \to 4.1$）模型中，比值的独立约束能力大约减半。损失源于剪切和光度红移校准先验，而非内禀对齐污染；我们发现，透镜平均红移偏移可以自校准，收紧至其先验宽度的0.36–0.79 。我们发现，在对预测的系统误差进行边缘化时，如图7右图的斜线填充条所示，这些比值对 CMB + 重子声学振荡 + 超新星组合的增益，在每个模型中都保留了最佳情形增益的大约一半。

最后，我们还检验了增益是否取决于Λ冷暗物质输入宇宙学：将每个探针都基于 DES Y6 全数据 w_0w_a冷暗物质最高后验样本 [3] $(w_0 = -0.83, w_a = -0.59)$重新模拟后，我们发现，在平直 w_0w_a 冷暗物质模型中，这些比值使 CMB +超新星 + 重子声学振荡组合的约束提升了 +34%，而基准输入 Λ冷暗物质下则提升了+31%。

B. 膨胀历史的独立约束

本节通过提供一种额外的几何探针，检验透镜比对膨胀历史给出独立约束的能力。该探针可用于具有竞争力的留一法稳健性检验（每次从宇宙微波背景 + 重子声学振荡 + 超新星中移除一个外部探针）。我们在图8中展示了不同模型下的结果。

我们发现，每次移除一个探针后，剩余的探针对仍能保留完整 CMB + 重子声学振荡 + 超新星组合约束能力的 2–57%（只有 CMB + 重子声学振荡组合例外，

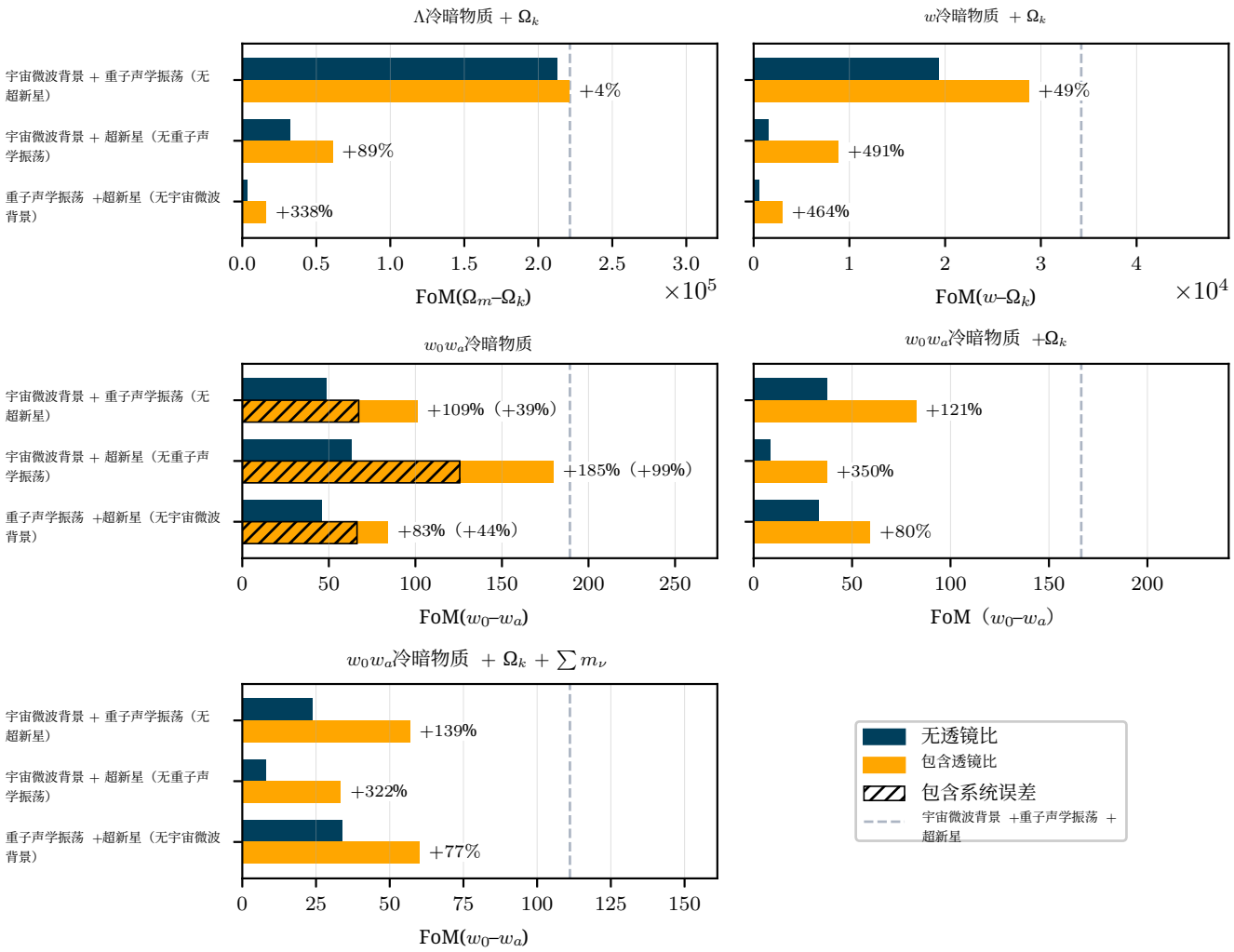


图 8：**留一组合**。各模型主要参数平面中，剔除完整宇宙微波背景 +重子声学振荡 +超新星组合中的一个外部探针后，各组合对应的优度因子。虚线表示不含比值的宇宙微波背景 + 重子声学振荡 + 超新星组合，因此每个黄色条形显示比值补回了多少因剔除探针而损失的信息；标签给出加入比值后 FoM 的相对增益。斜线填充条形表示对系统误差进行边缘化后的平直冷暗物质模型组合，括号中为增益。

Λ冷暗物质 +Ω_k 达到 96%）。我们发现，在大多数情况下，加入比值能够弥补相当一部分损失的约束能力。有两个具体情况尤其值得关注：1）在平直的 w_0w_a冷暗物质模型中，将比值加入 CMB + 超新星后，可达到完整 FoM 的 95%（不加入比值时为 33%），几乎可以替代重子声学振荡；2）在 w冷暗物质 +Ω_k模型中，CMB+ 重子声学振荡组合加入比值后，可显著弥补缺少超新星观测所损失的 FoM。

我们还展示了在最终系统误差处理下的三组平坦 w_0w_a 冷暗物质组合（ w_0w_a冷暗物质面板中的斜线填充条形）。增益大致减半，与我们在图7中的发现一致。图9展示了在 w_0–w_a 平面中对系统误差进行边缘化后得到的这三种组合，以及不使用比值时相同的组合。

C. 暗能量演化的非参数重建

动力学暗能量的证据几乎完全是在 w_0w_a 参数化框架下提出的，而这种参数化强加的时间依赖性并不直接对应任何基于物理动机的模型。相比之下，非参数重建能够在对其时间依赖性几乎不作假设的情况下约束其演化，但代价是每个参数对应的信号较弱；这正是额外几何信息最有价值的地方。

按照 Kessler等人 [50], 的方法，我们按红移分箱重建暗能量密度，写作

$$H^2(z) = H_0^2\big[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_{\rm DE}\, f_{\rm DE}(z)\big], \tag{32}$$

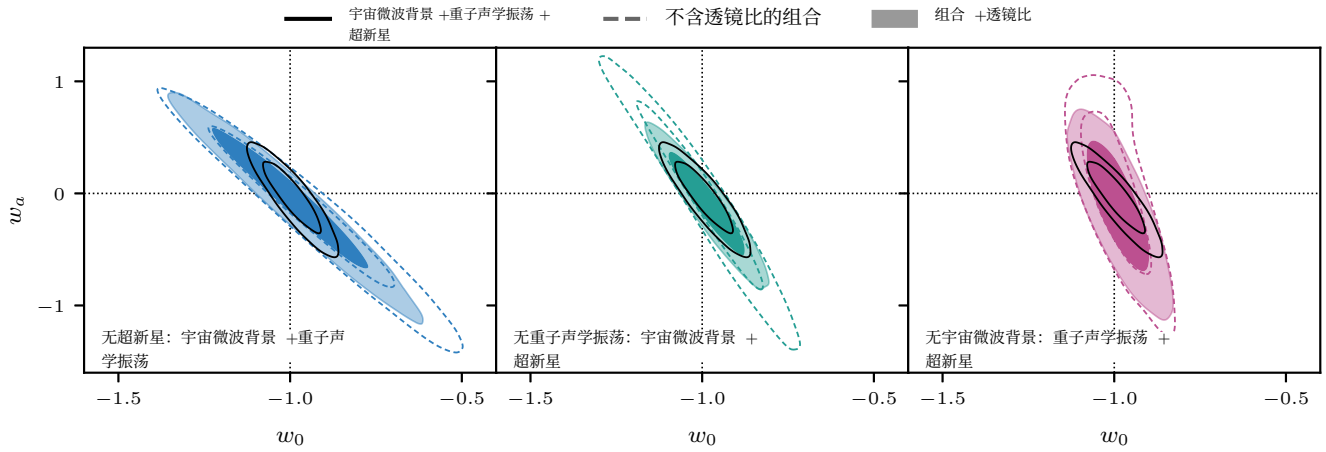


图9： **平坦 w_0w_aCDM 模型中的留一组合。** 每个面板都从 CMB、 + BAO + 和超新星（黑色显示）组成的完整组合中去掉一个探针。虚线等值线显示剩余的两个外部探针单独使用时的结果，填充等值线显示在最终系统误差处理（附录D （受 IA 污染的数据向量，光度红移和剪切校准边缘化）下加入透镜比后的结果。加入透镜比后，CMB + 超新星优值从完整 CMB + BAO + 超新星基准组合的 33% 提升至 66%，从而能够进行更具竞争力的留一法稳健性检验。

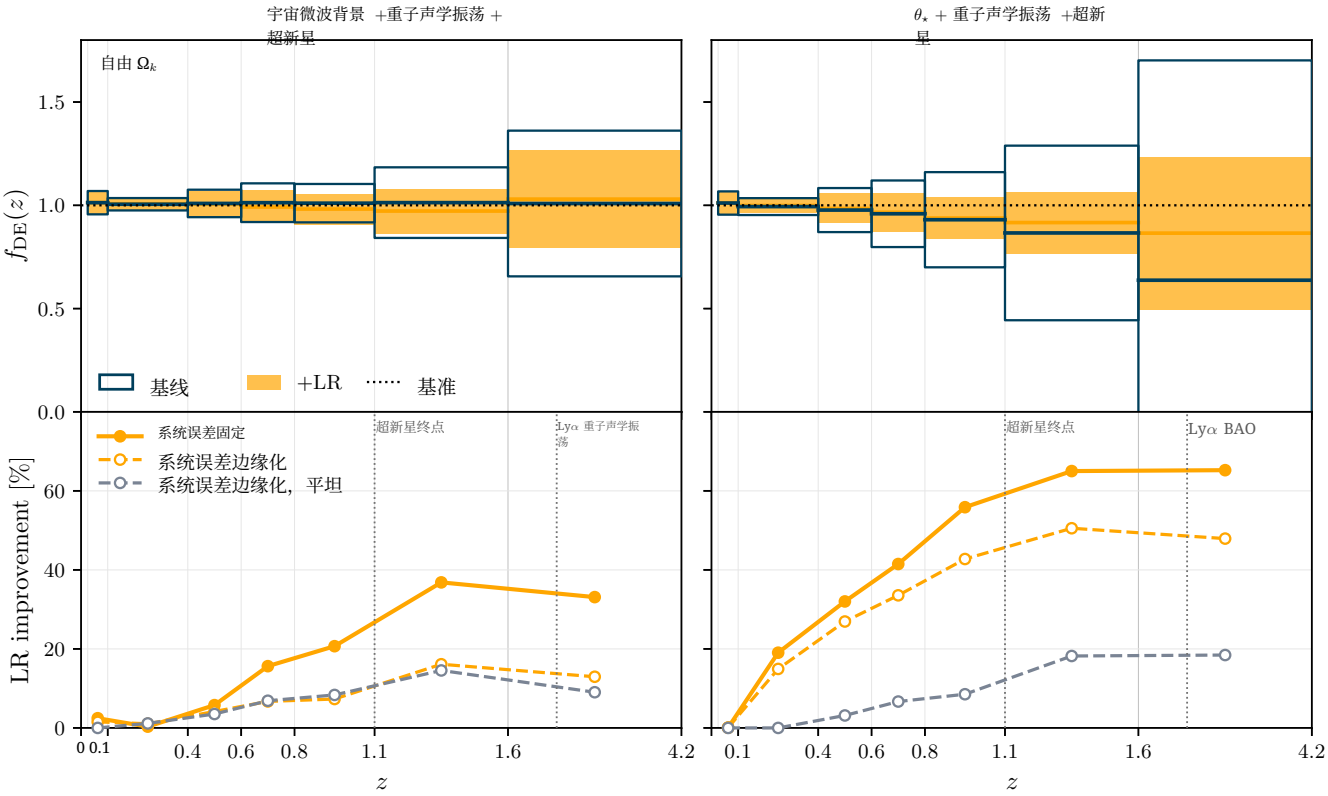


图10： **暗能量密度和透镜比值贡献的非参数重建。** 上：$f_{\rm DE}\left(z\right) = \rho_{\rm DE}\left(z\right)/\rho_{\rm DE}\left(0\right)$ 在七个红移分箱中、自由曲率条件下，基于 ΛCDM 基准模型的模拟数据向量。曲线表示每个分箱的后验均值，带状区域表示 68% 区间：未填充区域对应基准组合，填充区域对应加入 LSST Y10 透镜比（+LR）、压缩 CMB 先验（左图； $\theta_\star$， ω_b， ω_{bc}）以及仅 $\theta_\star$锚点（右图）后的结果。下：在系统误差参数固定（填充标记）以及对其进行边缘化（空心标记；附录 D）时，比值带来的每个分箱的改进。灰色虚线显示平坦几何下的边缘化结果。竖直点线标记超新星哈勃图的覆盖范围（$z \simeq 1.1$）以及来自 Lyman-α （$z_{\rm eff} = 2.33$）的最后一个 BAO 点。该 z 坐标轴在$z = 1.6$ 之前为线性刻度，最后一个分箱中压缩了四倍。

其中 $f_{\rm DE}(z) \equiv \rho_{\rm DE}(z)/\rho_{\rm DE}(0)$是相对于当前值的暗能量密度，与状态方程$w(z)$的关系为

$$f_{\rm DE}(z) = \exp\left[3\int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'}\,dz'\right]. \tag{33}$$

我们的分箱重建将密度振幅视为现象学参数，允许其取负值，并在范围 $f_{\rm DE}(z) \in [-1,3]$ 内采用平坦先验（因此不需要存在等价的常规 $w(z)$描述）。

我们将分箱边界与 DESI 示踪体红移范围 $\{z_i\} = \{0.025, 0.1, 0.4, 0.6, 0.8, 1.1, 1.6, 4.2\}$对齐，并在 $z_{\rm max} = 4.2$ 以上固定为 Λ冷暗物质行为（$w = -1$, $f_{\rm DE} = 1$）。我们将密度设为分段常数，$f_{\rm DE}(z) = f_i$，适用于 $z \in [z_i, z_{i+1})$。在 $z_{\rm min} = 0.025$以下，我们固定 $f_{\rm DE} = 1$，使其与在 $z = 0$处的归一化一致。将这一数值延伸至整个区间是一种建模选择，其依据是：在如此狭窄的区间内，自由振幅对距离的敏感度很弱。我们对这七个振幅与 (Ω_m, h, Ω_b) 联合取样，并在注明的情况下也对 Ω_k 和 $\sum m_\nu$取样。我们在第 IV C 1 节中将这一选择与对状态方程进行分箱的做法作比较。

图10 的左侧和底部面板展示了自由曲率模型下，结合模拟的 DESI DR2重子声学振荡和 DES Y5超新星基线数据时，各分箱约束以及透镜比值对压缩宇宙微波背景先验的贡献。在 $z \lesssim 0.6$处，重子声学振荡和超新星数据的约束力最强，比值增加了 $\lesssim 5\%$；在16–21%处，其贡献上升至 $0.6 < z < 1.1$，并在33–37% 的两个最高红移分箱中达到这一水平。分箱参数化因此在红移方向上定位了前几节所述的增益：比值在超新星哈勃图结束处（$z \simeq 1.1$）以及重子声学振荡示踪体变得稀疏的区域发挥作用，并且只有通过位于α 处的莱曼-$z_{\rm eff} = 2.33$点才能延伸到最后一个分箱。

当宇宙微波背景信息被缩减至其最小的、仅包含背景的信息，即仅保留声学尺度 $\theta_\star$ 时，比值的贡献增加了2.4 倍（图10的右侧和底部面板）。 $\theta_\star$ 是对宇宙学假设最稳健的宇宙微波背景量 [25, 48], ，而 ω_b 和 ω_{bc}更加依赖模型；省略它们后，重建仅由晚期距离驱动，不受早期物理以及早期与晚期探针之间潜在物质密度张力的影响，这正是Kessler等人基准配置背后的理由 [50]。在自由曲率情况下，$\theta_\star$ 基线每个分箱扩大35–140%（最后一个分箱达到 $\sigma = 1.06$），而比值弥补了其中大部分损失：平均改进幅度上升至39.8%，在 $z > 1.1$处达到 ≈65%； $\sigma(\Omega_k)$的约束收紧了两倍，从0.0099降至0.0046。

由于没有 ω_b 和 ω_{bc}，声学视界不再经过校准，因此以仅含 $\theta_\star$ 的锚定为基准时，这些比值更为重要。此时，重子声学振荡和超新星仅约束相对的低红移膨胀，而由 $\theta_\star$ 确定的、到复合时期的单一积分距离可以保持不变，同时 Ω_k、高红移分箱和 $(\Omega_m,\ h)$ 彼此权衡。CMB 引力透镜比不依赖任何标尺：通过$f_K(\chi_\star - \chi_l)/f_K(\chi_\star)$，它们测量从各个透镜红移到复合时期的距离，为每个透镜分箱增加一个积分约束，且其对曲率的依赖各不相同，从而.....

打破简并（图11 展示了最后一个红移分箱）。

固定曲率后，压缩 CMB 重建的表现与曲率自由的情况相似（平均提升 15% 对 16%）；而在仅以 $\theta_\star$为锚点的情况下，比值的贡献平均降至 17%（两个最高红移分箱中为 38–39%），接近压缩情形。

最后，我们量化重建中对系统误差进行边缘化所付出的代价，并重复附录 D 中的处理方法：对受 IA 污染的数据，将光度-z 和剪切校准参数进行边缘化（见图10底部面板中的空心标记）。我们发现，对于 CMB +重子声学振荡 + 超新星基线，比值的贡献减半，平均提升降至 6–7%，两个最高红移分箱中为 9–16%。对于最小 $\theta_\star$ 锚点，平均提升为 31%（系统误差固定时为 40%），两个最高红移分箱中仍可达到 48–51%，其中 $\sigma(\Omega_k) = 0.0055$，而对照值为 0.0046。代价主要来自最高源分箱的剪切校准，它与最后一个密度分箱存在简并。附录 E 显示，对于重建而言，标准 SRD 源样本的表现几乎同样出色。

1. 暗能量密度分箱与状态方程分箱

密度分箱的另一种方案是采用 $w(z) = w_i$，从而通过式（33）得到连续的 $f_{\rm DE}(z)$。我们使用附录E中的 Fisher 设置比较这两种参数化，并对自由曲率、仅 $\theta_\star$的情况额外进行链验证。此次比较中，系统误差参数始终保持不变。

在自由曲率条件下，使用压缩宇宙微波背景先验时，透镜比在两种参数化下带来的提升相近。然而，仅使用 $\theta_\star$ 锚点时，透镜比平均可使密度分箱的不确定度降低约 40%，而状态方程分箱仅降低 14%。在此配置下，密度分箱表现出更强的曲率简并，透镜比有助于打破这种简并（图11）。固定曲率时，两种参数化在任一锚点下的平均改进幅度相近，均为 14–16%。这些比较结果取决于所采用的参数化和先验：对 f_i 和 w_i 采用等宽平坦先验，并不意味着对膨胀历史作出了等价假设。

D. LSST Y1 +Simons Observatory 基线预报

现在，我们使用表 II 的 Y1配置，询问这一计划中有多少内容在 LSST Y1时期已经可用。在系统误差固定的情况下，Y1透镜比在扁平冷暗物质模型中，单独达到 FoM(w_0, w_a) =2.4，在加入 CMB 先验后达到 17（占 Y10数值的 ∼ 30%），并使完整的 CMB+重子声学振荡 +超新星组合提升 +8%。对 Y1系统误差进行边缘化后（对 IA污染数据中的光度-z 和剪切校准进行边缘化，并采用 SRD Y1先验），这些数值降至：加入 CMB 先验时为 FoM$(w_0, w_a) = 7.5$ （在自由中微子质量空间中为 1.5），完整组合则提升 +3.5%。

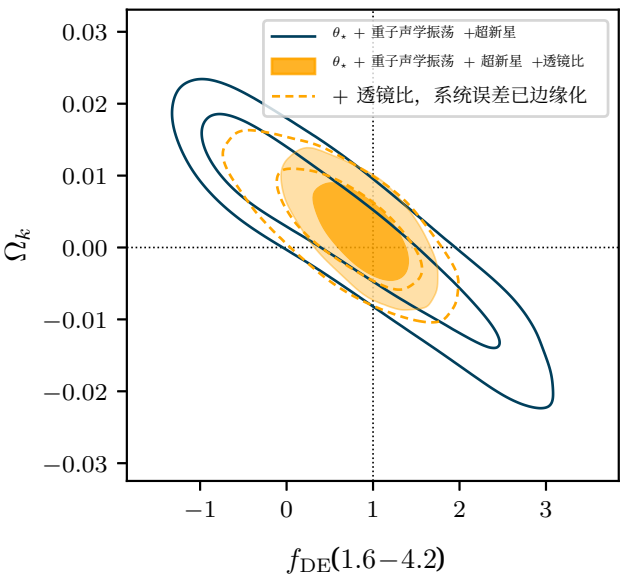


图11： **曲率—暗能量简并**。 最高红移密度分箱与空间曲率的联合后验分布，针对 $\theta_\star$ +重子声学振荡 +超新星重建。加入透镜比（填充等值线）会减弱简并，使相关系数从 $r=-0.91$ 变为−0.64。虚线等值线包含对透镜比系统误差的边缘化（附录D）。细点线标示输入宇宙学。

我们发现，第 IVC节中的非参数重建是首年透镜比贡献最大的部分。在最小 $\theta_\star$锚点下，系统误差固定时，它们使密度分箱平均改善 17% （Y10时期为 40% ），达到23–28%，在 $0.6<z<1.6$处；即使在对 Y1系统误差进行边缘化后，这些分箱仍可提升9–12%。所采用的 Y1透镜样本在 $\bar{z}=0.94$处截止，因此，带来 Y10增益的高红移透镜—源组合缺失。在 Y1时期，只有构建一个延伸至更高红移的透镜样本，透镜比才尤其可能增加有趣的信息。

五、结论

我们开发并验证了一套适用于 LSST 和 Simons Observatory 的端到端透镜比值框架，并在模拟的联合分析中预测了其宇宙学影响；联合分析采用了压缩宇宙微波背景先验、DESI DR2重子声学振荡和 DES Y5 超新星。在几何极限下，同一透镜周围的星系—星系透镜效应与星系–CMB透镜效应之比会抵消对星系偏置和物质功率谱的依赖，只留下距离之比，其中包括到宇宙微波背景源平面的距离。我们刻画了该极限成立的条件，并为这一探测方法构建了经过优化的逼真 LSST Y10 透镜样本和源样本（17 个窄透镜分箱和 9 个源分箱），并搭配达到目标灵敏度的 Simons Observatory CMB透镜。我们提出了一种带线性化协方差的先平均后相除估计量，并仅保留满足$\bar{z}_s-\bar{z}_\ell\geq 0.05$ 且通过几何极限迭代 $\chi^2\leq 1$ 检验的透镜–源组合。作为替代方案，我们利用 4MOST、DESI 和 *Euclid* 构建了一个光谱透镜样本，从而消除了透镜光度红移不确定性，并将我们优化的源分箱与标准 SRD 分箱 [35]进行了比较。

我们将模拟得到的比值与外部数据结合，考察了五种晚期宇宙模型，从 ΛCDM +Ω_k 到具有自由曲率和中微子质量的 w_0w_aCDM；还对暗能量密度进行了七分箱非参数重建，并考虑了一个仅含 $\theta_\star$ 的最简宇宙微波背景锚点，即纯几何情形。我们通过对每个层析分箱中的一个平均红移偏移量和每个源分箱中的一个乘性剪切偏差进行边缘化，量化了主要测量系统误差的影响；筛选比值时，所用数据向量受到 DES Y6 最佳拟合参数下的本征对齐污染。我们还针对 LSST Y1 配置重复了分析。主要发现如下：

- **透镜比对各参数的灵敏度在不同透镜红移处达到峰值**。它们对空间曲率的响应最强，其次是物质密度， w 以及w_a。随着透镜红移增大，对曲率和物质密度的响应会增强，而对 w 的响应则在较低红移处达到峰值，因此，覆盖广泛透镜红移范围的比值更有利（第IIE节）。

- **可实现的窄透镜分箱使 LSST × Simons Observatory 精度下的大多数比值保持几何性质**。采用 17 个窄透镜分箱时，LSST Y10 的 84 种红移组合中有 59 种通过了我们的几何筛选。因此，这些比值可以利用小尺度（低至 2.5 角分），我们发现大部分信噪比都来自这些尺度：总计 360 ，相比之下，98 来自 $6\,h^{-1}$ Mpc 截断以上的尺度，该截断用于 3×2pt 分析（第 IIIF节）。

- **统计精度受宇宙微波背景辐射透镜重建噪声和宇宙方差限制，而非透镜密度**。在所有透镜红移处，宇宙微波背景辐射透镜噪声均占主导，其次是宇宙方差，再次是形状噪声；我们预测 LSST Y1.0% 的中位单比值不确定度，而对于 LSST Y10 × Simons Observatory（第 IIIF节，附录 C）。

- **我们新提出的先平均后相除估计量在保持高斯似然的同时，相较于 DES Y3 估计量提高了透镜比的约束能力**。我们提出了一种新的估计量，在相除之前先合并角度分箱，因此不会除以单个含噪分箱；其协方差通过解析方法传播，而不是从模拟中估计。我们发现，在我们的配置下，当分母含噪时，DES Y3 估计量会将其蒙特卡洛协方差膨胀至中位数为1.8 （最高达 96）倍。我们的估计量达到了名义上的68% 和95% 覆盖率。仅考虑透镜比时，这使暗能量参数平面中的优值提高了2–14% ，而对于信噪比较低的光谱透镜样本，优值最高提高了 1.6×（附录 A）。

• **随着模型扩展，透镜比对完整的宇宙微波背景 + 重子声学振荡+ 超新星组合的贡献越来越大**。最佳情况下，优值增益从 +4%（在Λ冷暗物质 + Ω_k 模型中）提升至 +45%（考虑演化暗能量、自由曲率和中微子质量），而在平坦w_0w_a冷暗物质模型中为 +31%。计入系统误差后，通常仍能保留约一半的增益。在暗能量密度的七分箱重建中，透镜比使两个最高红移分箱的不确定性降低了 ∼ 35%，这些区域超出了超新星的探测范围，且重子声学振荡示踪体逐渐稀少（计入系统误差后为 ∼ 15%）。在假设最少、采用几何 $\theta_\star$ 锚点并允许自由曲率的情况下，透镜比有助于打破曲率与高红移暗能量之间的简并：在 $z > 1.1$ 处不确定性降低达到65%（计入系统误差后为50%）。

• **透镜比支持对膨胀历史进行留一稳健性检验**。作为独立的几何探针，它们支持竞争力强的留一检验，即剔除其中一个探针；我们发现，透镜比在替代重子声学振荡方面最为有效：在宇宙微波背景+超新星组合中加入透镜比后，优值从完整的宇宙微波背景+超新星+重子声学振荡组合的 33% 提升至 95%（边缘化系统误差后为 66%）。

• **光度红移和剪切校准是限制因素，而非本征对齐**它们使仅 LR 的优值降低了一半（8.7 → 4.1），而本征对齐造成的损失很小。

• **光谱透镜样本的表现几乎与光度 LSST Y10 样本一样好**在边缘化系统误差后，光谱 4MOST + DESI+ *Euclid* 透镜样本在仅使用透镜比时表现与 LSST Y10 样本一样好，但在组合分析中的增益较小（+8%相比于 +15%；附录D和B）。

• **透镜比需要专用透镜样本，但不需要专用源样本**。标准LSST科学需求文档源分箱所得到的信噪比相同，且表现几乎与我们的优化方案一样好（附录E）。

•**LSST第一年分析已经在外部约束最弱的区域作出贡献，而高红移增益则需要更深的透镜样本**。在计入系统误差后，它们将 $\theta_\star$锚定的密度分箱不确定性降低9–12% ，对应于 $0.6 < z < 1.6$ 。采用的Y1透镜样本在 $\bar{z} = 0.94$ 处截止，因此缺少能够带来Y10增益的高红移透镜—源组合（第IVD节）。

透镜比能够探测膨胀历史，无需标准烛光或标准尺，并可延伸至宇宙微波背景源平面；同时，似然只依赖背景量，计算成本低。要实现这些优势，需在维持所采用的透镜密度和红移分布的同时抑制透镜放大，这一假设依据的是我们在 COSMOS (§IIIA1) 上采用的流程，以及 Alarcon 和 Sánchez 的方法 [39]。在扩展模型空间中，透镜比的贡献最大；在这些空间里，透镜比可探测到超新星红移范围之外的区域。在留一检验中，独立的几何信息有助于检验演化暗能量的证据，并将其与曲率和中微子质量造成的简并区分开来。

致谢

JP和CS感谢Colin Hill就SO噪声曲线进行的有益讨论，也感谢Alex Alarcon和Gisela Camacho围绕这一主题展开的讨论。

JP感谢由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的项目 PID2025-172756NA-C33，以及由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和 ESF 资助的项目 RYC2024-048406-I 的支持+。CS感谢由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和 FEDER，欧盟资助的项目 PID2022-138123NA-I00 和 PID2025-172756NB-C32，以及由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和“欧盟 NextGenerationEU/PRTR”资助的 Ramón y Cajal 项目 RYC2021-031194-I 的支持。

附录 A：含噪数据上的估计量验证及与 DES Y3 剪切比估计量的比较

在本附录中，我们在含噪数据上验证公式（24）中的比率估计量，并将其与 DES Y3 和 Y6 剪切比分析中使用的估计量进行比较 [16, 17], ，以便与先前的工作衔接，并解释为何当前分析需要使用不同的估计量。

a. DES Y3 估计量。对于单个透镜–源组合，两个估计量都可以用相同的逐角度分箱比值 $r_k = \xi_{\rm num}(\theta_k)/\xi_{\rm den}(\theta_k)$ 表示，并且二者均基于基准模型下固定的权重构建。Sánchez等人 [16] 的估计量直接对这些比值取平均，

$$\hat{r}_{\rm Y3} = \sum_k w_k\, r_k, \tag{A1}$$

其中 w_k 是根据从 $\mathbf{C_d}$（方程25）传播得到的协方差，对 r_k 拟合常数时所使用的最小方差权重。我们的估计量（方程24）同样使用固定权重 v_k，但在相除之前将其分别应用于两个相关函数，而不是应用于二者的比值。它仍然可以写成对 r_k的加权平均：

$$\hat{r} = \sum_k \tilde{w}_k\, r_k, \qquad \tilde{w}_k \propto v_k\, \hat{\xi}_{\rm den}(\theta_k). \tag{A2}$$

二者的共同点：Sánchez等人 [16] 的固定权重为 $w_k \propto v_k\, \xi^{\rm fid}_{\rm den}(\theta_k)$，[7] 因此在无噪声数据向量上

[7]一阶近似下，每个 r_k 的误差等于该分箱中方程（26）的残差除以 $\xi^{\rm fid}_{\rm den}(\theta_k)$。因此，以权重 w_k 对 r_k 取平均，等价于以权重 $w_k/\xi^{\rm fid}_{\rm den}(\theta_k)$ 合并残差，而这些权重的最小方差选择为 v_k（第 IIID节）。因此，只要两个估计量使用相同的选定角度分箱，就有 $w_k \propto v_k\, \xi^{\rm fid}_{\rm den}(\theta_k)$。

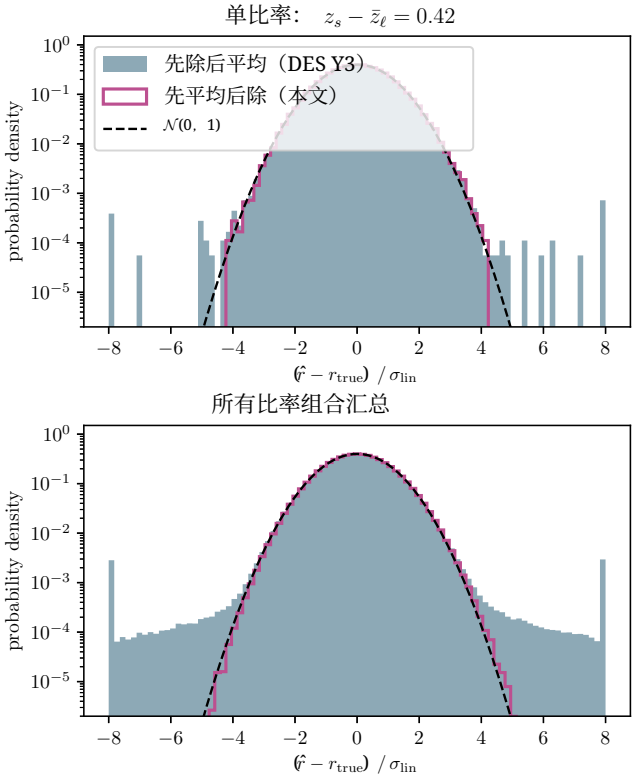


图12： **含噪数据上的估计量拉值。** 两种比值估计量的拉分布，基于 10^5 含噪模拟数据向量（LSST Y10），并按线性传播不确定性归一化 $\sigma_{\rm lin}$。上：尾部最重的透镜–源组合；下：所有组合汇总（全部84个比值，筛选之前）。我们提出的先平均后相除估计量，公式（24），符合高斯分布（虚线）；Sánchez等人 [16],的先除后平均估计量，公式（A1），当各个分母区间的波动趋近于零时，就会出现长尾。

$\tilde{w}_k = w_k$，两个估计量给出相同的比值，并具有相同的领先阶不确定性。二者的差异在于：首先，它们对噪声的响应不同。在公式（A1）中，如果某个角分箱的测量分母恰好接近零，其比值r_k 会变得非常大，但仍以其完整权重 w_k参与计算，从而产生图12中的厚尾。公式（24）从不除以单个角分箱：除法只在合并角分箱之后进行。其次，比值之间的协方差获取方式不同：Sánchez 等人 [16] 使用估计量在 10^5 模拟实现上的样本协方差，而厚尾会放大该协方差；相比之下，我们通过线性方式传播解析协方差（公式29）。

b. 含噪数据向量上的验证。 我们从 $[\xi_{g\kappa_g}, \xi_{g\kappa_{\rm CMB}}]$ 基准 LSST Y10 配置下的完整联合解析协方差中抽取 10^5 个含噪模拟数据向量，对每个实现和每个比值组合应用两种估计量，并将恢复的比值与由无噪声数据向量计算得到的真值 $r_{\rm true}$进行比较。以下结果使用筛选 χ^2 之前的全部 84 个比值组合。图-

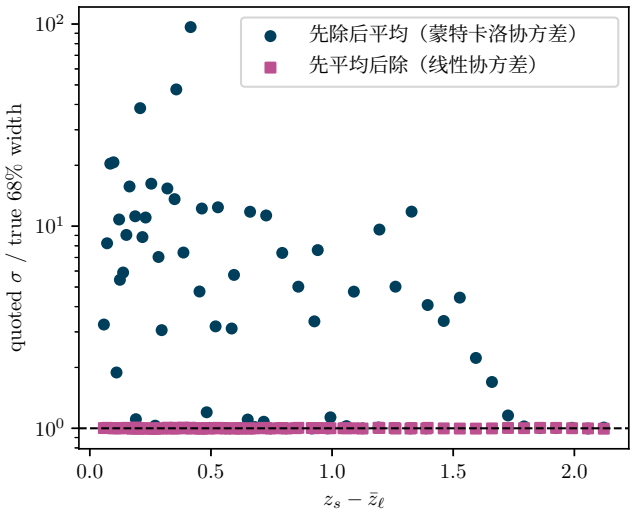


图13：**报告的不确定性的准确度。** 对于全部84种组合，每种方法报告的 σ 与其抽样分布真实68% 宽度之比随透镜-源间隔的变化。先除后平均估计量的蒙特卡洛样本协方差受长尾事件影响，最多膨胀两个数量级；我们估计量的线性传播协方差在所有情况下的准确度均优于1%。

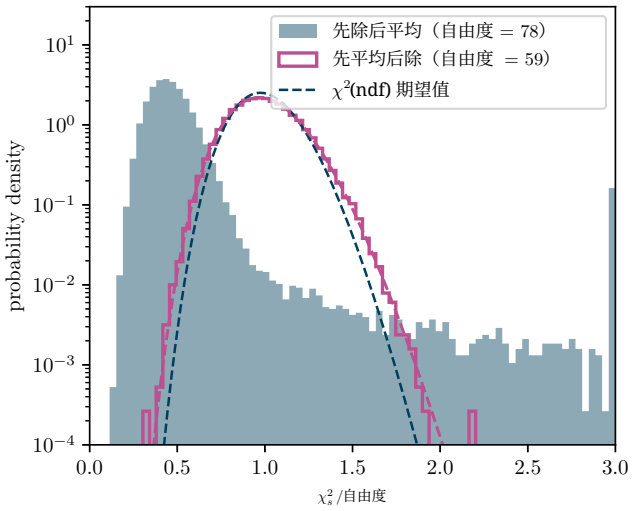


图14：**两种估计量的拟合优度。** 在 10^5 次实现上，含噪声比值与真实比值之间的 χ^2_s 分布，并按自由度数目归一化；每种估计量使用各自的协方差和各自的基准 $\chi^2 \leq 1$筛选。虚线和点线表示相应的χ^2(ndf)期望。我们的新估计量（品红色）遵循预期分布；逐区间比值估计量（深蓝色）按构造与其均值相符，但形状不符。

12 显示 所得的拉分布，$(\hat{r} - r_{\rm true})/\sigma_{\rm lin}$，其中 $\sigma_{\rm lin}$ 是由公式（29）对角线传播得到的线性传播不确定性；在首阶近似下，它是两种估计量的不确定性（对于公式（A1）严格成立，对于公式（24）则在尺度无关极限下严格成立）。对于每个组合，我们的新估计量都高度接近高斯分布。相比之下，DES-Y3 估计量出现了高斯变量之比所预期的幂律尾部。

实际影响总结于图13中，该图将每种方法报告的不确定性与其抽样分布真实的 68% 宽度进行了比较。对于 Y3 估计量，蒙特卡洛样本协方差主要受尾部事件而非分布宽度支配，因此将真实不确定性高估了中位数 1.8 倍，最高可达 96 倍；因此，报告的“1σ”区间有 92.4% 的概率包含真值（各组合的中位数）。如果改为报告 $\sigma_{\rm lin}$，则可以恢复主体分布的宽度，但无法反映尾部，从而使 2σ 覆盖率降低至最低 92.6%。我们的新估计量及其线性传播的协方差不存在这两个问题：在所有组合中，其覆盖率在 1σ 处为 68.0–68.7%，在 2σ 处为 95.3–95.6%，与高斯似然的假设完全一致。

图 14重复了用于验证 DES Y3 估计量的高斯性检验（Sánchez 等人 16中的图5）：$\chi^2_s = (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_{\rm true})^{\top}\mathbf{C}_{\mathbf{r}}^{-1}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_{\rm true})$ 在各次实现中的分布，其中 $\mathbf{r}_s$ 是实现 s的比值数据向量，而 $\mathbf{C_r}$ 是每种估计量会报告的协方差（对于我们的估计量，为方程（29）中的协方差；对于 DES Y3 估计量，则为蒙特卡洛样本协方差）；对每种估计量，均使用其自身的协方差以及由基准 $\chi^2 \le 1$ 选择截断（我们的估计量保留了84个组合中的59个，而 DES Y3 估计量保留了78个；后者因蒙特卡洛误差膨胀而使截断限制较弱）所保留的自身组合集合进行计算，并与预期的$\chi^2(\mathrm{ndf})$分布进行比较。对于我们的新估计量，两者一致；对于 DES-Y3 估计量，均值按构造与自由度相等（因为协方差是相同实现的样本协方差），但分布并不一致[8]。

c. 约束能力的提升。这些抽样特性直接转化为约束能力。我们使用每种估计量端到端地重复了宇宙学推断，每种估计量均采用其自身的协方差和自身的 χ^2 筛选（第IIIF 节）。这些链对两种估计量都采用 $\chi^2 \le 0.5$阈值。我们比较了数据组合相同时得到的优值。对于仅比值的 LSST Y10 链，本文采用的估计量使暗能量参数平面中的优值提高了2–14%，并使22–58% 的Ω_m–Ω_k 优值提高。

[8] 这种失效模式是分析配置本身的属性，在信噪比较低时会出现。在 DES Y3 分析中，9 个比值由红移最低的三个透镜分箱构造，并以红移最高的源分箱作为共同分母，因此每个分母分箱的测量信噪比都很高，按角度分箱进行除法时分母从未接近于零；相应的 χ^2_s 检验（其图 5）与本文进行的检验等效，证实在 DES Y3 的精度下，高斯似然不存在噪声偏差。我们自己的检验在相同条件下也得出了这一结论：对于彼此充分分离的透镜–源组合，这两种估计量在统计上无法区分。

表 IV：**合并后的光谱透镜样本**。每个红移分箱的有效面数密度和 n 加权星系偏置，定义于单一协方差覆盖区域 $A = 10\,700$ 度^2 (4MOST+DESI；*Euclid* 统计范围为 8200 度^2 其覆盖区域内）。这些是第 IIIC 节协方差的输入。

z 范围	$n_{\rm eff}$ [角分$^{-2}$]	$b_{\rm eff}$
0.100–0.175	0.028	1.34
0.175–0.250	0.041	1.34
0.250–0.325	0.040	1.35
0.325–0.400	0.024	1.38
0.4–0.5	0.012	1.84
0.5–0.6	0.014	1.93
0。6–0。7	0.017	2.08
0.7–0.8	0.019	2.08
0.8–0.9	0.033	1.92
0.9–1.0	0.070	1.58
1.0–1.1	0.057	1.49
1.1–1.2	0.054	1.53
1。2–1。3	0.047	1.52
1。3–1。4	0.046	1.62
1.4–1.5	0.040	1.61
1。5–1。6	0.031	1.75
总计	0.57	1.59

第IV节的四种模型。增益在光谱透镜样本中最大；该样本的信噪比较低，因此蒙特卡洛协方差的尾部膨胀最为明显：1.6 倍，体现在 w_0–Ω_k 上；而2.5 倍，体现在Ω_m–Ω_k上。加入重子声学振荡和超新星数据后，差异缩小至 $\lesssim 12\%$。两种估计量都能在没有显著偏差的情况下恢复输入的宇宙学参数。

附录 B：使用来自 4MOST、DESI 和 Euclid 的组合光谱透镜样本计算透镜比

我们还汇集了来自三个将与 LSST 重叠的宽域光谱巡天的光谱透镜样本，以检验相较于 LSST 光度透镜样本，这种做法是否更有优势。为此，我们考虑了

4 MOST 宇宙学红移巡天 (CRS)（度）^{2}、$A = 5700$ 沿赤道带分布的 DESI（度）^{2}，以及 $A =$ 南部的 5000 *Euclid* 宽域巡天，其覆盖范围包括 4MOST 的足迹区域，并大致覆盖赤道带的一半 [51]（$\simeq$8200度^2 的 LSST 重叠区域）。合并后，覆盖面积达到 $A = 10\,700$度^2。我们按照表IV所示，将样本划分为不同的红移分箱。

对于 4MOST-CRS，我们从 Verdier 等人 [52] 的图7中数字化提取亮星系 (BG) 和高亮红星系 (LRG) 的目标分布，并乘以该研究的巡天模拟所预期的五年巡天完备度：亮星系为 87%，高亮红星系为 67%。

对于 DESI，我们使用第二次数据发布中的可靠红移计数[9] 以及覆盖区域面

[9]对于 亮红星系和发射线星系，我们采用 图4

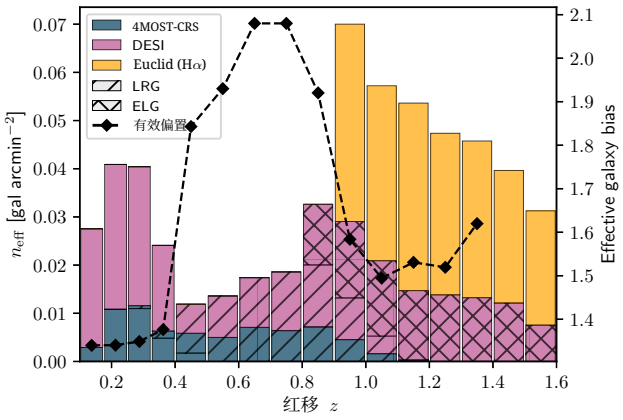


图1 5：**光谱透镜样本的组成**。在 10 700deg^2 协方差覆盖区域内，各巡天对有效数密度的贡献分解（柱形图，左轴），以及按 n加权的有效星系偏置（虚线，右轴）。

积，数据取自 DESI合作组等人的 [表 2–3 1]，并根据每种示踪体在巡天完成时预期的光纤分配完备度，将其缩放至完整的五年巡天（DESI合作组第 4.3–4.5 节等人54）。与第二次数据发布相比，亮星系巡天仅增加 6%，发光红星系增加 8%，发射线星系增加 28%，因为完成巡天主要是在 LSST 重叠区域之外扩大覆盖区域面积，而非增加该区域内的密度。我们已核实，对于表中所列的示踪体，所得密度逐个红移区间均与 DESI合作组等人的[54]五年预报表（表 7）相差不超过 10%。我们未纳入 DESI-II 拟议的低红移计划 [55]：其高密度样本仅覆盖一个 ∼1400度^2 的区域，无法在协方差中用单一均匀数密度来表示。

对于*Euclid*，我们采用官方预报的 Hα 样本[表 3 56]：1268 个星系 deg^{-2}，覆盖 $0.9 < z < 1.8$，各分箱偏置为 $b = 1.46$–1。90。这些计数以四个分箱的总数形式公布，我们依据其底层模型的表列 d $\Delta z = 0.2$ 分箱，将其重新分配到我们的 $\Delta z = 0.1$ 网格上。该模型的表列$\mathrm{d}N/\mathrm{d}z$ 取自 Pozzetti 等人 57（）。

对于星系偏置，我们采用 DESI 的测量结果，这些结果同样适用于类DESI的4MOST选样： $b_{\rm BG}$ =1.34 [41]以及 $b_{\rm LRG} = 1.93$–2.31每个红移分箱 [58]，，4MOST-CRS预报也采用了相同设定 [52], 以及 $b_{\rm ELG} = 1.3$。表 IV 列出了由此得到的每个分箱的有效数密度和 n加权偏置，它们是我们计算协方差的输入。基准层析分析包含16个顶帽透镜分箱：该范围 $0.1 < z < 0.4$ 被划分为四个宽度为 $\Delta z = 0.075$的均匀子分箱，随后是在 $\Delta z = 0.1$ 上的均匀 $0.4 < z < 1.6$。更细的低红移分箱将最近的透镜-源对保持在仅几何近似的有效范围内：采用该分箱后，Sec. IIIF的迭代筛选不会舍弃任何光谱样本组合，同时总信噪比不受影响。图15 展示了各巡天的贡献：4MOST和DESI在 $z < 0.9$ 处占主导，而*Euclid*在 $z > 0.9$处提供了大多数透镜。

我们还注意到，在这类样本中，透镜放大污染会更难以最小化，因为光谱筛选通常并不位于 $\alpha_l = 1$附近，因此与光度透镜样本相比，这类样本需要采用不同的透镜放大表征和消除方法。

用该光谱样本替代LSST Y10透镜样本，重新进行仅使用透镜比的分析，可得58% 的平直 w_0w_a冷暗物质模型 FoM（固定系统误差；见表V）。透镜比的信噪比预算主要由CMB透镜重建噪声和源形状噪声决定，而非透镜泊松噪声（附录C），因此 ∼ 20×透镜密度下降所造成的比例损失要小得多。不过，即使我们认为在固定系统误差下这一代价相当显著，纳入光度测量不确z定性后，比较结果也会改变。由于光谱样本不需要透镜光度测量的z 干扰参数，此时差距会缩小；我们发现，在平直 w_0w_a冷暗物质模型中，仅使用透镜比时两个样本的FoM相同。与其他几何探针结合后，光度样本的表现仍略胜一筹，其CMB+重子声学振荡+超新星FoM相比光谱样本提高15%，而光谱样本提高8% 。

SPHEREx [59], 是一项于 2025 年启动的全天巡天，可提供更多透镜样本，正如 Bermejo-Climent等人 [21]在研究透镜比时已考虑的那样。其预测的星系样本按红移精度[10]划分为互不重叠的范围。精度最高的两个样本的红移误差低于我们的透镜分箱宽度（$\Delta z = 0.075$–0.1），合计覆盖面积远大于上述合并样本，达到 ≈0.96角分$^{-2}$。在$0.1 < z < 0.4$，其密度是我们合并样本的三倍多，但其中 77% 的星系位于 $z < 0.6$；而在 $1 < z < 1.6$，它们提供 ≈0.04 角分$^{-2}$，相比之下，我们的合并样本为 0.28 角分$^{-2}$。因此，SPHEREx 样本将与高红移 *Euclid* 透镜形成互补，而非取而代之。我们将基于该样本的预测留待未来工作；与其他光谱筛选一样，它也需要针对自身进行放大效应表征。

附录C：透镜比误差预算

图16 将透镜比协方差分解为四种高斯贡献：宇宙方差、星系散粒噪声、剪切形状噪声和 CMB透镜重建噪声（第 IIIC 节）。我们对每个几何上有效的比值绘制该分解，即在应用 χ^2 切选之前。重新计算该预算

DESI合作组等人 [1]。对于BGS星系，我们采用完整的亮时段样本（$> 9.1 \times 10^6$ 个红移，位于 $0.1 < z < 0.4$），而非光度截断重子声学振荡子样本；红移分布取自Hahn等人 [53,的图 18]中观测到的$\mathrm{d}N/\mathrm{d}z$。

[10]来自 https://github.com/ SPHEREx/Public-products的数密度和偏差。

表 V：**平直 w_0w_aCDM 中系统不确定性的影响**。 透镜比（LR）单独使用以及与 CMB 或 CMB + 重子声学振荡 + 超新星（标记为 全部）联合使用时的 FoM(w_0, w_a)。每一行标出了被边缘化的干扰参数：“光度红移-z”表示对每个层析分箱抽样一个平均红移偏移，并采用基于 SRD 的高斯先验（LSST Y10 包含 17 个透镜 +9 个源分箱；光谱透镜样本包含 9 个源分箱，其透镜红移为精确值）；“剪切校准”表示每个源分箱使用一个乘性偏差。“数据中的 IA”各行向 LR 数据向量加入 IA 信号（DES Y6 3×2 点相关最佳拟合 TATT 输入），同时保留无 IA 的几何模型；随后将 $\chi^2 \leq 1$ 筛选重新应用于受污染数据，从而保留一组不同的比值。每个区块的最后一行结合了全部三种效应。括号中的数值给出了比值带来的增益：对于 CMB+LR，表示相对于仅使用 CMB 时的 FoM 倍数（FoM $= 2.92$）；对于全部探针，表示相对于 CMB + 重子声学振荡 + 超新星的相对改进（FoM $= 189.25$）。FoM 相差 $\lesssim$2% 属于链的抽样噪声范围内。

系统误差	透镜比（增益）	宇宙微波背景+透镜比	全部（增益）
LSST Y10 光度-z 透镜			
固定	8.7	59.0（20.2×）	248（+31%）
光度-z	5.6	31.2 (10.7×)	222 (+17%)
光度-z + 剪切校准	3.9	23.7（8.1×）	217（+15%）
数据中的 IA	11.0	77.5 (26.5×)	253 (+34%)
数据中的 IA +光度-z +剪切校准	4.1	23.6（8.1×）	217（+15%）
光谱透镜			
固定	5.0	23.5（8.0×）	210（+11%）
源光度-z	4.5	20.8（7.1×）	209（+10%）
源照片-z +剪切校准	3.7	18.6（6.4×）	213（+12%）
数据中的 IA	5.1	20.7（7.1×）	208（+10%）
数据中的 IA + 源照片-z + 剪切校准	4.1	17.4 (5.9×)	205 (+8%)

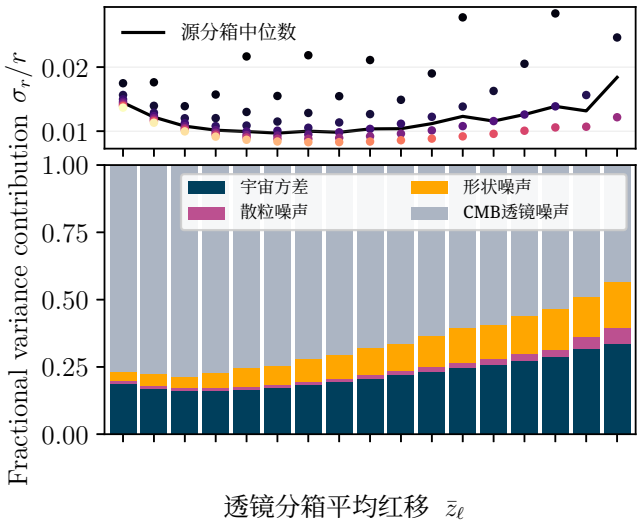
对于 $\chi^2 \leq 1$ cut 保留的组合，透镜分箱比例的变化最多只有几个百分点，因此该图同样能够很好地描述分析样本。CMB 透镜重建噪声在低透镜红移处占主导，此处 SO 噪声曲线相对于信号最低；随着透镜红移升高，星系样本变得更加稀疏，散粒噪声和形状噪声的重要性也随之增加。

附录 D：系统不确定性的影响

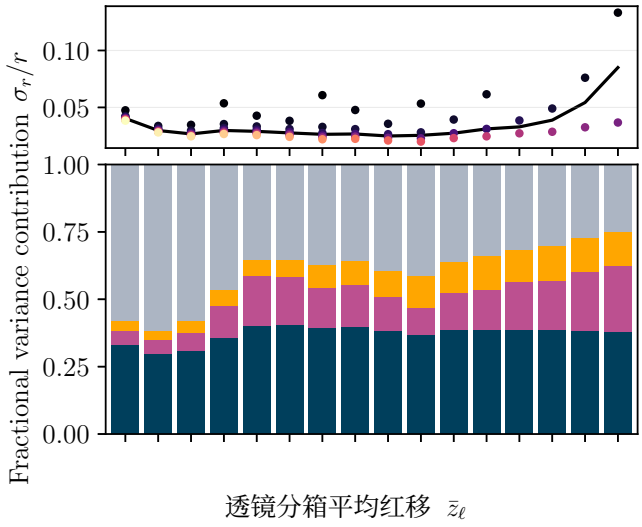
现在，我们逐一纳入主要系统不确定性，并针对两个透镜样本，分别重复进行平直 w_0w_a冷暗物质分析，考察仅使用比值以及联合分析的情形；表 V 汇总了由此得到的优度因子。我们采用平直w_0w_a冷暗物质作为这项测试的参考模型，因为在这个参数空间中，仅比值约束最强（FoM$(w_0, w_a) = 8.7$，而开放模型中为 ≈ 1）：这样一来，各项系统误差的代价在仅比值的优度因子中更容易分辨；而在比值本身几乎无法约束的参数平面上，不同处理方式的差异则难以区分。附录最后还将重新考察自由中微子质量模型，并进行完全边缘化；在该模型中，相对于当前的重子声学振荡+宇宙微波背景+超新星基线，比值带来的贡献最大。我们首先考虑透镜与源样本的光度红移不确定性，接着考虑叠加乘性剪切标定的情形，然后仅考虑未建模的本征对齐，最后则同时考虑这三种效应。

a. 光度红移 预测基于距离因子，并按层析 $n(z)$分箱加权，见式（11）。因此，某个分箱的平均红移发生一致偏移，会直接改变这些预测。我们为每个层析分箱设定一个加性平均红移偏移，以此对该不确定性建模， Δz_b (17 个透镜 + 9个源参数，适用于 LSST Y10)，并将其应用于输入 $n(z)$ 并采用以零为中心的高斯先验对其边缘化处理。先验宽度起初采用 Zhang 等人针对 LSST Y10 的预测设定 [26], $\sigma(\Delta z_b) = 0.003(1+\bar{z})$，用于 SRD透镜样本；针对 SRD源样本则采用 0.001（$1+\bar{z}$）。随后，我们假设校准不确定性与校准星系数量的平方根成反比，并据此将先验宽度缩放至我们的样本， $\sigma(\Delta z_b) \propto \sigma_z/\sqrt{N}$。对于我们的明亮保守透镜样本，这种缩放带来两项修正，分别对应两个因子：假设更明亮的筛选会使光度红移散布从 0.03（$1+z$）降至 0.02（$1+z$），从而改善 $0.02/0.03$；以及放大 $\sqrt{n_{\rm ref}/n_{\rm bin}}$，因为我们的每分箱数密度（0.34–0.81 角分$^{-2}$）远低于相同红移范围内的 SRD 透镜数密度（2.6–4.3 角分$^{-2}$）。对于源样本，仅需进行数密度修正：相同的 27 角分$^{-2}$ 被分为 9 个分箱，而非 5 个，因此先验宽度扩大 $\sqrt{5.4/3.0} = 1.34$。最终得到 $\sigma(\Delta z_b) = 0.0059$–0.0133（透镜分箱）和 0.0017–0.0045（源分箱）（表 II），在所有情况下都比 Zhang 等人的 [26] 值更宽。对于 LSST Y1（13 个透镜分箱、 +个源分箱，第 IV D 节），我们直接采用 Zhang 等人的 SRD Y1要求 [26]，即透镜 $\sigma(\Delta z_b) = 0.005(1+\bar{z})$，源样本为 0.002（$1+\bar{z}$）（分别为 0.0058–0.0097 和 0.0025–0.0051），并为每个源分箱采用 $\sigma_m = 0.013$ 。由于 Y1 源样本采用标准的 5 分箱 SRD 划分，因此不进行缩放。

对这些偏移进行边缘化后，仅比值FoM(w_0, w_a)从8.7降至5.6，宇宙微波背景+透镜比组合则从59降至31（表V）。加入重子声学振荡和超新星后，FoM从248降至222。图 17比较了偏移的后验分布与先验：比值能够自校准透镜偏移，将其约束在先验宽度的0.36–0.79倍；在先验范围最宽的高红移处，约束最强。而源偏移仍主要由先验决定（先验宽度的0.7–1.0倍）。光谱透镜样本无需对透镜



(a) LSST Y10



(b) 光谱透镜样本

图1 16：**透镜比误差预算**。(a) LSST Y10 和 (b) App B 的光谱透镜样本的透镜比对角协方差噪声预算。上图：每个透镜-源组合的相对精度 $\sigma_r/|r|$，按透镜-源间隔 $\bar{z}_s - \bar{z}_\ell$ 以不同颜色标示（颜色越浅，间隔越大）；黑线表示源分箱中位数。下图：四种高斯噪声源各自对总方差的相对贡献；在每个透镜分箱内，使用逆方差（S/N^2）权重合并源分箱，使误差预算反映实际具有约束能力的比值。

红移进行边缘化；仅对源进行边缘化，使光谱比值仅损失10%（5.0降至4.5），在宇宙微波背景+透镜比组合中损失12%（23.5降至20.8），而完整组合在抽样噪声范围内保持不变。在现实的光度z 不确定性下，两个透镜样本之间的FoM差距因此缩小，但光度样本仍然占优。

b. 剪切校准。式（13）中的乘性剪切校准参数 m_j，每个源分箱对应一个，采用相同的处理方式：使用中心为零、宽度为 $\sigma_m = 0.003 \times \sqrt{5.4/3.0} = 0.0040$ 的高斯先验。该先验取自 Zhang 等人 [26] 采用的 SRD要求，并按照我们将其 5 个源分箱配置拆分为 9 个分箱的情况，乘以相同的校准统计因子。除光度-z 偏移外，再加入剪切校准边缘化会产生显著影响：LSST Y10 的仅透镜比FoM 从 5.6 降至 3.9，宇宙微波背景+透镜比组合从 31.2 降至 23.7；而完整组合的变化 ∼2% 则处于抽样噪声水平。光谱样本也呈现相同趋势（分别从 4.5 降至 3.7、从 20.8 降至 18.6；完整组合在抽样噪声范围内不变）。随后，两种透镜样本之间的差距进一步缩小，不过光度样本仍然更具竞争力。

c. 本征对齐 本征对齐仅通过星系-剪切相关进入透镜比：排列贡献会加到 γ_t 源红移分布与透镜重叠的部分，而星系-CMB透镜相关不受影响。为量化其影响，我们使用非零输入排列信号生成数据向量，在 DES Y6 3×2 点相关 [60] 最佳拟合参数下采用 TATT模型[32]（潮汐对齐和潮汐力矩振幅为 $A_1 = 0.539$ 以及 $A_2 = -0.889$、红移演化指数 $\eta_1 = -0.363$ 和$\eta_2 = -1.040$），并使用无排列的几何模型对其进行分析。 $\chi^2 \leq 1$ 第 IIIF 节的筛选应用于受污染数据后，移除了受到严重污染的透镜–源邻近组合，并相对于基准筛选重新调整了保留集合：对于 LSST Y10，它新移除了八个高红移组合，同时保留了九个被基准筛选移除的低红移组合（保留 84 个中的 60 个；图 6 中的叉号），对于光谱样本则移除了十五个组合（保留 79 个中的 64 个）。LSST Y10 的 FoM 略有提高（仅比值 11.0 而非 8.7；CMB+透镜比77.5 而非 59.0；表V），因为恢复的低红移组合比被移除的组合包含更多信息。我们还验证了，在协方差中纳入本征对齐贡献并重新计算后，保留比值的误差变化小于 0.3%，且不会改变筛选结果，因此全文始终采用基准协方差。

d. 联合边缘化 每个区块的最后一行是本预测中更贴近现实的最终结果：对受 IA污染数据进行分析，并同时对光度红移z 和剪切校准的不确定性进行边缘化。与系统误差固定的理想配置相比，仅使用透镜比时，LSST Y10 的约束能力保留约一半（8.7 → 4.1），而光谱样本保留五分之四（5.0 → 4.1）；这两种情况下，代价主要来自校准先验，而非本征对齐污染。在这种完整处理下，核心结论依然成立：透镜比仍使仅用宇宙微波背景时的优值提升 8.1×（5.9×光谱样本），并使宇宙微波背景 + 重子声学振荡+超新星的完整组合提升 +15%（+8%）。

e. 其他模型 在这里，我们检验针对平坦 w_0w_a 模型得出的结论能否推广至其他模型。具体而言，我们考察 w_0w_aCDM + Ω_k+$\sum m_\nu$ 模型；在该模型中，透镜比带来的增益最大，因此可能是最值得关注的情形之一。我们发现，在该模型中，将透镜比加入宇宙微波背景 + 重子声学振荡 + 超新星组合后，FoM(w_0, w_a) = 134；而系统误差固定时为 161。与不含透镜比、优值为 111 的基线相比，这仍提升了 +21%，与平坦模型相比，增益幅度相近。在相同边缘化基础上再加入 IA污染，即启用全部三种系统效应的最终配置，结果基本不变：FoM(w_0, w_a) = 132，较基线提升 +19%。

f. CMB 透镜系统误差 迄今考虑的系统误差都来自星系透镜测量；重建的 CMB 汇聚度图也有自身的系统误差。最重要的是 CMB 图中的河外前景：热 Sunyaev–Zel'dovich（tSZ）效应、宇宙红外背景和未分辨点源。这些场追踪着与透镜星系相同的结构，因此不会在交叉相关中相互抵消：它们会给 $\xi_{g\kappa_{\rm CMB}}$带来虚假贡献；由于 $\kappa_{\rm CMB}$ 只出现在 CMB 比值的分子中，偏差会直接传递到比值中，而不会相互抵消。tSZ 污染在小尺度上最为显著，曾是 Prat、Baxter 等 [20]测量中的一项限制性系统误差。不过，如今在地图处理方面，其缓解方法已成为标准：去除前景投影并进行偏差硬化的重建，能够大幅消除 tSZ 贡献，且只会小幅增加噪声 [61–63], 而基于偏振的重建在 SO 灵敏度下将具有竞争力，且基本不受这些前景影响。我们假设 CMB 透镜前景残差偏差能够得到控制，降至可忽略的水平。采用的噪声曲线未计入前景缓解带来的惩罚。

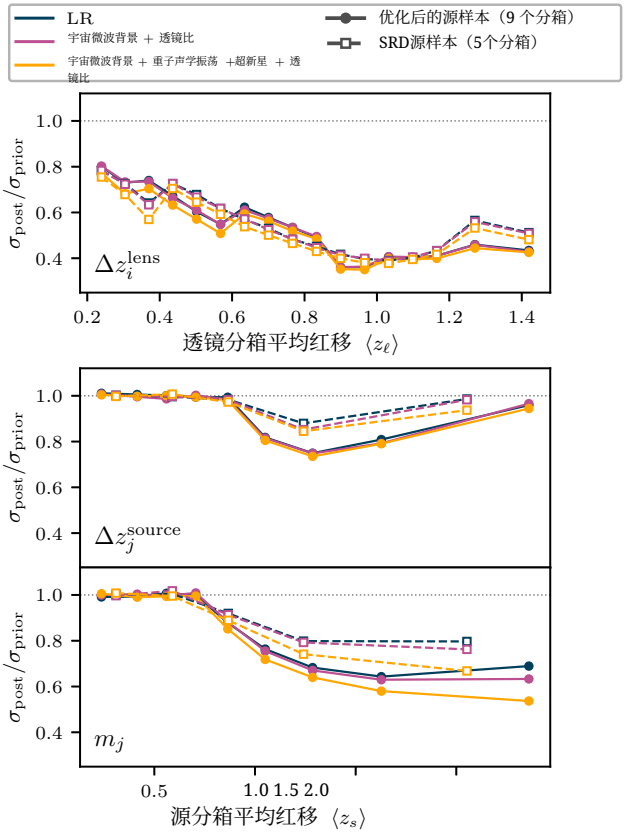


图17：**干扰参数的自校准**。在平坦 w_0w_a冷暗物质模型中，对于LSST Y10透镜，进行完全边缘化（同时考虑光度-z 偏移和剪切校准）时，后验分布标准差与先验标准差之比

平均红移偏移（上）、源偏移（中）和乘性剪切偏差（下）随各分箱平均红移的变化。实心圆和实线表示优化的9分箱源样本，空心方块和虚线表示标准SRD 5分箱样本；两者均与相同的17个透镜分箱配对。颜色表示数据组合，点线标示先验主导参数。对于这两种源样本，比值都能将透镜偏移自校准至先验宽度的0.35–0.80。对于 $\langle z_s \rangle < 0.9$，源偏移和剪切偏差由先验主导；在更高红移处，它们可实现自校准，且优化划分的自校准效果更强。

附录 E：源样本优化的影响

本文始终采用的窄化 9 分箱源样本旨在最大化透镜比的约束能力。为量化这一优化所带来的收益，我们改用标准 SRD Y10 源样本重复分析：相同的 27角分$^{-2}$ 划分为 5 个数量相等的分箱（图 4 中的虚线轮廓）。请注意，在本测试中仅替换了源样本：透镜仍采用第

III，修改后的17分箱光度选择和光谱样本，而非标准SRD透镜定义。

在信噪比方面，两种源配置几乎相同：对于光度透镜样本，标准配置与优化配置分别为368和360；对于光谱样本，分别为167和166。这些信噪比是在各自配置完成 $\chi^2 \leq 1$几何有效性筛选后计算的。

然而，信噪比相同并不意味着参数约束能力相同。SRD层析分箱所涉及的干扰参数也更少，且校准得更好。此外，两种配置中保留下来的比值对透镜—源几何的取样方式不同，因此必须通过宇宙学后验分布来评估优化的实际影响。表VI

表 VI：**源样本优化的影响**。对于本文始终采用的优化九箱源样本划分，与标准 SRD Y10 源样本（27 角分$^{-2}$范围内按数量均分为 5 箱）相比，平直 w_0w_aCDM 模型的 FoM(w_0，w_a)。每行按边缘化处理的干扰参数标注（“固定” = 表示无）；“数据中的 IA”各行在每种配置各自的 $\chi^2 \leq 1$ 筛选后，使用未改变的无 IA 模型拟合 IA 污染的数据向量。对于仅使用透镜比以及所有探针联合（CMB+透镜比+重子声学振荡+超新星）的情形，我们给出优化源样本和标准源样本对应的 FoM；对于所有探针联合，括号中的百分比表示相对于 CMB+重子声学振荡+超新星基线（FoM $= 189.25$）的相对改进。

	LR		全部（增益）	
系统误差	优化的 SRD		优化的	SRD
LSST Y10 光度红移z 透镜				
固定	8.7	8.3	248.4 (+31%)	251.8 (+33%)
photo-z + 剪切校准	3.9	3.8	217.0 (+15%)	216.0 (+14%)
数据中的 IA +照片-z +剪切校准	4.1	3.9	217.0（+15%）	217.0（+15%）
光谱透镜				
固定	5.0	4.2	210.2（+11%）	206.9（+9%）
源光度-z +剪切校准	3.7	3.4	212.7（+12%）	211.7（+12%）
数据中的 IA + 源光度-z + 剪切校准	4.1	3.0	204.8（+8%）	204.9 (+8%)

汇总了附录D中系统学阶梯各阶段的仅比值优度因子。在固定系统误差下，优化对光度透镜样本的提升已经不大（8。7对比 8。3），光谱样本的情况也类似（5。0 对比4。2）。接着，在对光度测量和z 剪切系统误差进行边缘化后，标准源样本所得的 FoM 与优化样本的差距更小。

优化仍能带来显著帮助的唯一情形，是带有光谱透镜且受内禀排列污染的透镜比（3.0 对比 4.1）；在这种情况下，更粗的 5 分箱 $\chi^2 \leq 1$ 筛选会舍弃更多可用信号。不过，一旦加入外部数据，这一差异也会消失：在所有探针联合的情况下，两个样本无法区分（204.9 对比 204.8）。因此，优化样本仅对仅使用透镜比的预报有影响；在现实的边缘化情况下，或与宇宙微波背景及其他背景探针结合时，标准 SRD 源样本的表现基本同样出色。因此，我们得出结论：没有必要为透镜比探针生成优化的源样本，可以使用标准 SRD源样本。

我们还确认，这些结论并非平直 w_0w_a冷暗物质模型所特有：在开放的 w_0w_a冷暗物质模型中重复光度测量透镜比较后，标准源样本保留了仅用比值时 FoM 的 98%（1.14 对比 1.16），采用压缩的宇宙微波背景先验时则保留 94%（10.2 对比 10.9）；在开放的 Λ冷暗物质模型中，两个样本无法区分；而在固定系统误差时，自由中微子质量模型的结果不变（161.3 对比 161.4，增益恰好仍为 $+45\%$），在完整的光度测量-z + 剪切校准边缘化下也保持不变（133.6 对比 134.0，相对于基线的增益分别为 $+20\%$ 和 $+21\%$）。

对于第 IV C 节的非参数重建，同样的结论也成立。为了尽量降低这一补充测试的计算成本，我们使用 Fisher 近似进行比较：将第II B节的几何比模型在基准附近线性化，并从抽样得到的基线后验分布中提取外部信息。与相应的优化样本链进行验证后，该预报对每个分箱不确定度的复现精度优于 11%，且始终略微低估不确定度。我们发现，对于 $\theta_\star$ + 重子声学振荡 +超新星组合，在自由曲率情况下（此时透镜比最为重要），两个源样本几乎等效：系统误差固定时，平均改善幅度分别为 39.5% 和 42.4%；边缘化后分别为 31.2% 和 33.4%；而 $\sigma(\Omega_k) = 0.0054$ 分别为 0.0052。差异集中在最后一个红移分箱中（对系统误差边缘化时为 46% 对比 54%）；在该分箱中，更粗的源分箱会迫使内禀排列筛选舍弃更多高红移信号。

图17 比较了在完全边缘化条件下两个源样本的干扰参数后验分布。两个样本以相同方式自校准了17个（共享的）透镜偏移，而源偏移和剪切偏差仍接近其先验；在最高源红移处存在轻微的自校准，且优化后的样本中这一效应稍强。

[1] DESI 合作组，M. Abdul-Karim、A. G. Adame、等，《DESI DR2 结果 II：重子声学振荡测量与宇宙学约束》，《物理评论 D》 112， 083515 2025 2503 14738 [ ] （），arXiv: . 天体物理学.CO。[2] B. Popovic、P. Shah、W. D. Kenworthy、R. Kessler、等，《暗能量巡天超新星计划：宇宙学结果的重新分析，以及采用更新的 Ia 型超新星标定后演化暗能量的证据》，《皇家天文学会月报》**548**，stag632（2026），arXiv:2511.07517 [天体物理学.CO]。[3] DES 合作组，T. M. C. Abbott、等，关于.....的约束 完整暗能量巡天中的多种探针对动力学暗能量的研究，arXiv电子预印本，arXiv:2605.27221 (2026)，arXiv:2605.27221 [astro-ph.CO]。[4] J. Lee、R. Camilleri、T. M. Davis、D. Rubin，等，超新星联合：Ia型超新星的宿主星系质量测量及其对宇宙学的影响，arXiv电子预印本，arXiv:2609.05321 (2026)，arXiv:2609.05321 [astro-ph.CO]。[5] S. Hannestad，中微子质量与暗能量状态方程：放宽宇宙学中微子质量上限，Phys. Rev. Lett. **95**，221301 (2005)，arXiv:astro-ph/0505551 [astro-

ph]。 [6] C. Clarkson、M. Cortês 和 B. Bassett，动力学暗能量，还是仅仅是宇宙曲率？，J. Cosmology Astropart. Phys. 2007, 011 (2007), arXiv:astro-ph/0702670 [astro-ph]。 [7] S.-F. Chen 和 M. Zaldarriaga，一切安好：基于 DESI DR2重子声学振荡考察曲率，JCAP 2025, 014 (2025), arXiv:2505.00659 [astro-ph.CO]。 [8] K. Lodha、R. Calderon、W. L. Matthewson 等，利用 DESI DR2重子声学振荡测量进行扩展暗能量分析，Phys. Rev. D 112, 083511 (2025), arXiv:2503.14743 [astro- ph.CO]。 [9] B. Jain 和 A. Taylor，互相关层析：利用弱引力透镜测量暗能量演化，Physical Review Letters 91, 141302 (2003), arXiv:astro-ph/0306046。 [10] G. Bernstein 和 B. Jain，基于弱引力透镜互相关宇宙学测距的暗能量约束，Astrophys. J. 600, 17 (2004), arXiv:astro-ph/0309332。 [11] G. Bernstein，基于弱引力透镜和重子声学振荡的曲率度规检验，Astrophys. J. 637, 598 (2006), arXiv:astro-ph/0503276 [astro-ph]。 [12] A. N. Taylor、T. D. Kitching、D. J. Bacon 和 A. F. Heavens，利用剪切比几何检验探测暗能量，MNRAS 374, 1377 (2007), arXiv:astro-ph/0606416 [astro-ph]。 [13] W. Hu、D. E. Holz 和 C. Vale，宇宙微波背景星系团引力透镜：利用最长的观测基线进行宇宙学测距，Phys. Rev. D 76, 127301 (2007), arXiv:0708.4391 [astro-ph]。 [14] S. Das 和 D. N. Spergel，利用宇宙微波背景—星系引力透镜互相关测量距离比，Physical Review D 79, 10 1103 79 043509 2009 . /physrevd. . ( )。 [15] J. Prat、C. Sánchez、Y. Fang、D. Gruen、J. Elvin-Poole、N. Kokron、L. F. Secco、B. Jain、R. Miquel、N. MacCrann、M. A. Troxel 和 DES 合作组，暗能量巡天第一年结果：星系-星系透镜，Phys. Rev. D 98, 042005 (2018), arXiv:1708.01537 [astro-ph.CO]。 [16] C. Sánchez、J. Prat、G. Zacharegkas、S. Pandey、E. Baxter 等，暗能量巡天第三年结果：利用引力透镜剪切比提取小尺度信息，Phys. Rev. D 105, 083529 (2022), arXiv:2105.13542 [astro-ph.CO]。 [17] G. Giannini、G. Camacho-Ciurana、A. Whyley、J. Prat、J. Blazek 等，暗能量巡天第六年结果：星系-星系透镜，Phys. Rev. D 113, 103503 (2026), arXiv:2601.15175 [astro-ph.CO]。 [18] H. Miyatake、M. S. Madhavacheril、N. Sehgal、A. Slosar、D. N. Spergel、B. Sherwin 和 A. van Engelen，利用星系与宇宙微波背景引力透镜测量宇宙学测距比，Phys. Rev. Lett. 118, 161301 (2017), arXiv:1605.05337 [astro-ph.CO]。 [19] S. Singh、R. Mandelbaum 和 J. R. Brownstein，Planck宇宙微波背景引力透镜与SDSS的交叉相关：透镜-透镜及星系—引力透镜互相关，MNRAS 464, 2120 (2017), arXiv:1606.08841 [astro-ph.CO]。 [20] J. Prat、E. Baxter、T. Shin、C. Sánchez、C. Chang 等，利用 DES Y1、SPT 和 Planck测量宇宙学透镜比，MNRAS 487, 1363 (2019), arXiv:1810.02212 [astro-ph.CO]。 [21] J. R. Bermejo-Climent、M. Ballardini、F. Finelli 和 V. F. Cardone，利用未来宇宙学巡天测量透镜比，Phys. Rev. D **102**, 023502 2020 1911 11766 ( ), [ ] arXiv: . astro-ph.CO . [22] Q. Li，运动学引力透镜比：让弱引力透镜宇宙学测距重获新生，成为几何暗能量探针，arXiv电子预印本，arXiv:2604.26015 (2026), arXiv:2604.26015 [astro-ph.CO]。 [23] D. N. Limber，以涨落密度场为基础分析河外星云计数，Astrophys. J. 117, 134 1953( )。

[24] N. Kaiser，《遥远星系的弱引力透镜》，天体物理学杂志 388，272（1992）。[25] Planck合作组，《普朗克2018年结果》VI. 宇宙学参数，《天文学与天体物理学》641，A6（2020），arXiv:1807.06209 [astro- ph.CO]。[26] Z. Zhang、C. Chang、P. Larsen、L. F. Secco、J. Zuntz和LSST 暗能量科学合作组，《从第三阶段过渡到第四阶段：来自星系×宇宙微波背景透镜和剪切×宇宙微波背景透镜的宇宙学》，《皇家天文学会月刊》514, 2181（2022），arXiv:2111.04917。[27] P. Ade等，《Simons Observatory：科学目标与预报》，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》2019，056（2019），arXiv:1808.07445 [astro- ph.CO]。[28] S. Unruh、P. Schneider和S. Hilbert，《剪切比检验中的放大偏差：一种可行的缓解策略》，《天文学与天体物理学》623, A94（2019），arXiv:1808.09516 [astro-ph.CO]。[29] J. Elvin-Poole、N. MacCrann等，《暗能量巡天第三年结果：放大建模及其对星系聚类和星系-星系透镜宇宙学分析的影响》，《皇家天文学会月刊》523，3649（2023），arXiv:2209.09782 [astro-ph.CO]。[30] E. Legnani、J. Elvin-Poole、D. Anbajagane、D. Sanchez Cid、A. Ferté等，《暗能量巡天第六年结果：放大建模及其对星系聚类和星系-星系透镜宇宙学的影响》，《物理评论D》113，123520（2026），arXiv:2601.14833 [astro-ph.CO]。[31] J. Zuntz、M. Paterno、E. Jennings、D. Rudd、A. Manzotti、S. Dodelson、S. Bridle、S. Sehrish和J. Kowalkowski，《CosmoSIS：模块化宇宙学参数估计》，《天文学与计算》12，45（2015），arXiv:1409.3409 [astro-ph.CO]。[32] J. A. Blazek、N. MacCrann、M. A. Troxel和X. Fang，《超越线性星系排列》，《物理评论D》100，103506（2019），arXiv:1708.09247 [astro-ph.CO]。[33] M. Chevallier和D. Polarski，《具有标度暗物质的加速宇宙》，《国际现代物理学杂志D》10，213（2001），arXiv:gr-qc/0009008 [gr-qc]。[34] E. V. Linder，《探索宇宙的膨胀历史》，《物理评论快报》**90**, 091301 2003 0208512 ( ), [ ] arXiv:astro-ph/ astro-ph 。[35] R. Mandelbaum等，《LSST 暗能量科学合作组（DESC）科学需求文档》，arXiv电子预印本，arXiv:1809.01669（2018），arXiv:1809.01669 [astro- ph.CO]。[36] Ž. Ivezi´c等，《LSST：从科学驱动因素到参考设计及预期数据产品》，《天体物理学杂志》873，111（2019），arXiv:0805.2366 [astro-ph]。[37] J. R. Weaver、O. B. Kauffmann、O. Ilbert、H. J. McCracken、A. Moneti等，《Cosmos2020：从两个互补目录 $z \sim 10$ 到宇宙的全波段视图》，《天体物理学杂志增刊》258，11（2022）。[38] C. Sánchez、M. Raveri、A. Alarcon和G. M. Bernstein，《在红移标定中传播样本方差不确定性：模拟、理论及其在cosmos2015数据中的应用》，《皇家天文学会月刊》498，2984（2020）。[39] A. Alarcon和C. Sánchez，《弱引力透镜，Big Magnification：从星系位置中恢复隐藏的透镜信息》，arXiv电子预印本，arXiv: 2610 03913 2026 2610 03913 。（ ），[ ] arXiv: 。astro-ph.CO。[40] R. S. de Jong等，《4MOST：项目概述及首轮提案征集信息》，《信使》175，3（2019），arXiv:1903.02464 [astro-ph.IM]。[41] DESI合作组、A. Aghamousa、J. Aguilar、S. Ahlen等，《DESI实验第一部分：科学、目标选择与巡天设计》，arXiv电子预印本，arXiv:1611.00036（2016年），

arXiv:1611.00036 [astro-ph.IM]。[42] Euclid 合作组、Y. Mellier 等，《Euclid。I. Euclid 任务概述》，A&A **697**，1 2025 2405 13491 A（），[ ] arXiv：。astro-ph.CO。[43] Simons Observatory 合作组，《Simons Observatory：增强型大口径望远镜的科学目标和预报》，JCAP 2025，034（2025），arXiv:2503.00636 [astro- ph.CO]。[44] D. Alonso、J. Sanchez、A. Slosar 和 LSST 暗能量科学合作组，《统一的伪-C_ℓ 框架》，MNRAS 484，4127（2019），arXiv:1809.09603。[45]LSST 暗能量科学合作组，《TJPCov：两点联合协方差计算器》，https://github.com/LSSTDESC/TJPCov（2023）。[46] DES 合作组、T. M. C. Abbott、M. Acevedo 等，《暗能量巡天：利用完整五年数据集中的1500颗新高红移Ia型超新星获得的宇宙学结果》，ApJ 973，L14（2024），arXiv:2401.02929 [astro-ph.CO]。[47] A. Lewis、A. Challinor 和 A. Lasenby，《闭合 FRW 模型中宇宙微波背景辐射各向异性的高效计算》，ApJ 538，473（2000），arXiv:astro-ph/9911177。[48] P. Lemos 和 A. Lewis，《分离宇宙微波背景辐射功率谱中早期宇宙和晚期宇宙的贡献》，Phys. Rev. D 107，103505（2023），arXiv:2302.12911 [astro-ph.CO]。[49] J. U. Lange，《nautilus：利用深度学习提升贝叶斯重要性嵌套采样》，MNRAS 525，3181（2023），arXiv:2306.16923 [astro-ph.IM]。[50] D. A. Kessler、E. Di Valentino、L. A. Escamilla 和 D. Huterer，《以更少的假设重建暗能量》，arXiv 电子预印本，arXiv:2606.05853（2026），arXiv:2606.05853 [astro- ph.CO]。[51] M. Lochner、D. Scolnic、H. Almoubayyed 等，《观测策略对利用 LSST 进行宇宙学约束的影响》，ApJS 259，58（2022），arXiv:2104.05676 [astro-ph.CO]。[52] A. Verdier、A. Rocher、B. Bandi 等，《4MOST-宇宙学红移巡天：高光度星系和高光度红星系的目标选择》，MNRAS 545，staf2116（2026），arXiv:2508.07311 [astro-ph.CO]。[53] C. Hahn、M. J. Wilson、O. Ruiz-Macias 等，《DESI 亮星系巡天：最终目标选择、设计与验证》，《天文杂志》165, 253 (2023), arXiv:2208.08512 [astro-ph.CO]. [54] DESI合作组, A. G. Adame, J. Aguilar 等，《暗能量光谱仪科学计划的验证》，《天文杂志》**167**, 62 2024 2306 06307 ( ), [ ] arXiv: . astro-ph.CO . [55] D. J. Schlegel, S. Ferraro, G. Aldering 等，《宇宙学前沿光谱巡天路线图：DESI、DESI-II、第五阶段》，arXiv电子预印本，arXiv:2209.03585 (2022), arXiv:2209.03585 [astro- ph.CO]. [56] Euclid 合作组, A. Blanchard, S. Camera 等，《Euclid准备工作。VII. Euclid宇宙学探测的预测验证》，A&A 642, A191 (2020), arXiv:1910.09273 [astro- ph.CO]. [57] L. Pozzetti, C. M. Hirata, J. E. Geach, A. Cimatti, C. Baugh, O. Cucciati, A. Merson, P. Norberg 和 D. Shi，《为未来的光谱近红外空间任务模拟Hα 发射体的数密度》，A&A **590**, 3 2016 1603 01453 [ ] A ( ), arXiv: . astro-ph.GA . [58] S. Yuan, H. Zhang, A. J. Ross 等，《DESI百分之一巡天：利用AbacusSummit探索高光度红星系和类星体的晕占据分布》，MNRAS 530, 947 (2024), arXiv:2306.06314 [astro-ph.CO]. [59] O. Doré 等，《利用SPHEREX全天光谱巡天开展宇宙学研究》，arXiv电子预印本 (2014), arXiv:1412.4872 [astro-ph.CO]. [60] DES 合作组, T. M. C. Abbott 等，《暗能量巡天第六年结果：来自星系聚类和弱引力透镜的宇宙学约束》，arXiv电子预印本，arXiv:2601.14559 (2026), arXiv:2601.14559 [astro-ph.CO]. [61] M. S. Madhavacheril 和 J. C. Hill，《利用清理后的梯度减轻宇宙微波背景辐射透镜重建中的前景偏差》，Phys. Rev. D 98, 023534 (2018), arXiv:1802.08230 [astro- ph.CO]. [62] N. Sailer, E. Schaan 和 S. Ferraro，《利用前景免疫估计量实现更低偏差、更低噪声的CMB透镜》，Phys. Rev. D 102, 063517 (2020), arXiv:2007.04325 [astro-ph.CO]. [63] O. Darwish, M. S. Madhavacheril, B. D. Sherwin 等，《阿塔卡马宇宙学望远镜：覆盖2100平方度天区的宇宙微波背景辐射透镜图及其与BOSS-CMASS星系的交叉相关》，MNRAS 500, 2250 (2021), arXiv:2004.01139 [astro-ph.CO].