arXiv:2611.32871v1 [math.RA] 24 Nov 2026

Gorenstein 对称性可能在诺特环中失效

LIRAN SHAUL

摘要。我们构造了一个双侧诺特环 A，它作为自身的左模时内射维数为 1，作为自身的右模时内射维数为无穷大。这表明，Gorenstein 对称性可能在双侧诺特环中失效。我们还证明，对任意特征不为 2 的域，都存在这样的例子；该环具有对偶化复形，且其右模的导出范畴不满足 Rickard-Keller 意义下的内射生成。

目录

0. 引言 1
1. 一个违反 Gorenstein 对称性的一般构造 3
2. 一个四元数除环 9
3. 理想化子的交集 16
4. 对偶化复形 29
5. Rickard-Keller 条件的失效 43
R
ef 参考文献 45

0. 引言

本文中，所有环都是结合且含单位元的，模默认指左模。因此， A-模是左 A-模，而右 A-模是 A^{op}-模。

在交换代数的语境中，有限 Krull 维数的交换诺特环 A 若作为自身上的模具有有限内射维数，则称其为 Gorenstein 环。对 Gorenstein 性质的研究涵盖了现代交换代数和代数几何中的一个重要领域。交换代数中一类重要的 Gorenstein 环是正则环。有限 Krull 维数的交换诺特环若具有有限整体维数，则称其为正则环。

转向非交换情形时，会出现一个对称性问题：

问题 I。 设 A 是一个环，并且假设 内射维数$_A({}_AA) < \infty$。是否可以推出内射维数$_A(A_A) < \infty$?

数学主题分类 2020：16E65、16P40、16E10、16S36、16K40、18G80。

对于整体维数，也可以提出类似的问题。整体维数问题有一个众所周知的经典答案：存在一些环，其左侧整体维数有限，而右侧整体维数无限。参见 [13]。然而，当将关注范围限定在**双侧诺特** 环这一类中时，Auslander 证明了 [2,推论 5]左侧和右侧整体维数相等。特别地，如果其中一个有限，那么另一个也有限。

回到本文的主要关注点——内射维数的对称性，Zaks 在 [34, 引理 A] 中证明：如果 A 是一个双侧诺特环，并且 $\operatorname{inj\,dim}_A({}_AA) < \infty$ 与 $\operatorname{inj\,dim}_A(A_A) < \infty$，那么 $\operatorname{inj\,dim}_A({}_AA) = \operatorname{inj\,dim}_A(A_A)$。在这种情况下，根据 Iwanaga 关于这类环的奠基性工作[10, 11]， A 被称为双侧 Gorenstein，或双侧 Iwanaga-Gorenstein。

在 [16, 第 2], 节中，作者表示，他们不知道有任何一个双侧诺特环会使这种对称性失效。本文旨在构造这样一个例子。因此，我们的主要贡献是证明，在非交换诺特领域中，左 Gorenstein 与双侧 Gorenstein 并不相同。这里，左 Gorenstein 是指一个作为自身左模时具有有限内射维数的双侧诺特环。

我们的主要结果如下：

定理 II. 存在一个双侧诺特环 A，满足

$$\operatorname{inj\,dim}_A({}_AA) = 1, \quad \operatorname{inj\,dim}_A(A_A) = +\infty.$$

对于 Artin 代数，左侧与右侧的内射维数是否相等这一问题称为 Gorenstein 对称性猜想，参见 [3, 4, 5]。对于 Artin 代数，乃至更一般的 Artin 环，定理II 的结论不可能成立，因为根据 Hoshino 的一个结果 [9], ，左侧内射维数至多为 1 的 Artin 环都是双侧 Gorenstein。

下面更详细地介绍本文的内容。定理 A II 中的环将是某个环 $A = R[x$上的扭曲对偶数环；$\sigma]/(x^2)$ 。要求环 R是遗传环，并配备一个非满射的单射环同态 R ； σ : $R \to R$ 第 1节中，我们考虑这样的 R 和这样的 σ，并且它们还满足

$$1 \in (R : \sigma(R))_r \cdot R, \tag{0.1}$$

其中

$$(R : \sigma(R))_r = \{x \in R \mid R \cdot x \subseteq \sigma(R)\},$$

是包含映射的右导子，包含的环为 $\sigma(R) \subseteq R$，这是第 1 节回顾的概念。接着，我们在定理 1.10 中证明 $R[x;\sigma]/(x^2)$ 满足定理 II 的结论。注意，如果 R 是交换的，那么方程 (0.1)将推出 σ 是满射。因此，本文的主要技术核心在于，能够构造这样的 R 和这样的 σ： $R \to R$它们满足方程(0.1)，但 σ 不是满射。

环 R 是某个多项式环的子环 $D[t]$ ，该多项式环定义在某个除环 D上，而该除环还需要满足各种技术条件。 D 的构造将在第 2节中完成，我们需要 D 满足的确切条件列于定理 2.1中。

有了 D 之后，我们着手构造 R 和 σ。这项工作将在第 3节中完成，其主要结果定理 3.40 指出，对于任意满足 $\Bbbk$ 且 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$的域，都存在一个双侧诺特遗传 $\Bbbk$-代数 R，以及一个单射 $\Bbbk$-代数同态σ： $R \to R$ 该同态不是满射，并且满足方程 (0.1)。

接下来，第4 节专门证明代数 A 具有对偶化复形（按 Yekutieli 的意义） [30]。这由定理4.35证明。综合以上结果，我们得到定理II的如下加强形式：

定理 III。设 $\Bbbk$ 是任意一个满足 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$的域。那么存在一个 $\Bbbk$-代数 A，满足以下性质：

(1) A 是一个双侧诺特环。*(2)* A 不是双侧 *Artin* 环。*(3)* A 具有对偶化复形。*(4)* 以下结论成立：

$$\mathrm{inj\,dim}_A({}_AA) = 1, \quad \mathrm{inj\,dim}_A(A_A) = +\infty.$$

构造对偶化复形是为了使 A 满足协变 Grothendieck 对偶性 [12, 21], ，而这又意味着我们最近关于 [27]用 A 的导出范畴的行为刻画 Gorenstein 对称性的结果5成立。最后的第 A节将对此进行详细讨论。我们将在该节研究与5.1 相关的导出范畴中的内射生成和投射余生成问题。该节回顾了这些概念，其主要结果定理

定理 IV。 设 $\Bbbk$ 是任意一个特征为 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ 的域，并设 A 是 $\Bbbk$-代数，由推论 *3.41* 构造得到。那么， A 还具有以下性质：

(1) 对于左侧的 A，内射模生成范畴。*(2)* 对于右侧的 A，内射模不能生成范畴。也就是说，$\mathit{Loc}_{\mathrm{D}(\mathrm{Mod}\,A)}(\mathit{Inj}_A) \neq \mathit{D}(\mathit{Mod}\,A)$。*(3)* $\mathit{Coloc}_{\mathrm{D}({}_A\mathit{Mod})}({}_A\mathit{Proj}) \neq \mathit{D}({}_A\mathit{Mod})$。也就是说，对于左侧的 A，投射模不能余生成范畴。*(4)* $\mathit{Coloc}_{\mathrm{D}({}_A\mathit{Mod})}({}_A\mathit{Flat}) \neq \mathit{D}({}_A\mathit{Mod})$。也就是说，对于左侧的 A，平坦对象不能余生成范畴。*(5)* 存在一个由内射左侧 A-模组成的上有界余链复形 J，它无挠但不可缩。*(6)* 存在一个由投射右侧 A-模组成的下有界余链复形 P，它无挠但不可缩。*(7)* 存在一个平坦维数无限的内射左侧 A-模 I。*(8)* 存在一个 A 上的对偶化复形 ω'，作为左侧 A-模的复形，它具有无限平坦维数。

1. 一个违反 Gorenstein 对称性的一般构造

在本节中， R 是一个任意的结合单位环，而 σ： $R \to R$ 是一个环同态（特别地，$\sigma(1) = 1$）。我们还将假设 σ 是单射但不是

满射。 R 和 σ 的具体实例将在下一节中构造，但目前我们将在这一一般性框架下进行讨论。

接下来 [19, 第 1.2 节。3], 我们考虑斜多项式环 $B = R[x;\ \sigma]$。让我们回顾一下其构造。 的一个元素可以唯一地表示为有限和

$$\sum_{k=0}^{n} x^k a_k, \quad a_k \in R.$$

且乘法对所有 $a \in R$ 都满足 $a \cdot x = x \cdot \sigma(a)$。令

$$A = B/(x^2) = R[x;\sigma]/(x^2). \tag{1.1}$$

环 A 将是本节的主要研究对象。

我们还可以用平凡扩张来描述环 A。令 M 为 R-R-双模，其底层集合等于 R, 且 R 的作用定义为

$$r \circ m := \sigma(r) \cdot m, \quad r \in R, m \in M$$

and

$$m \circ r := m \cdot r \quad m \in M, r \in R$$

~我们有时将 M 记作 ${}_\sigma R$。接着，我们考虑平凡扩张环 $A = R \ltimes M$, ~，其含义见 [6]。根据定义，作为集合， $A = R \times R$。我们将~ ~ 元素 $(0,\ 1) \in A$ 记作 ϵ。因此， A 的一个元素形如 $x_1 + \epsilon y_1$，其中 $x_1,\ y_1 \in R$、$\sim M = \epsilon \cdot R$，而 A 上的乘法定义为

$$(x_1 + \epsilon y_1) \cdot (x_2 + \epsilon y_2) = x_1 \cdot x_2 + \epsilon(\sigma(x_1) \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2). \tag{1.2}$$

~存在一个环同构 $A \to A$，由 $x \mapsto \epsilon$ 给出，并且在 R 上限制为恒等映射。我们将利用它来识别这两个构造，并滥用记号，将它们都记作 A。

注意， R 通过映射 $r \mapsto (r,0)$是 A 的一个子环；该映射是环同态，因为 A 的单位元是 $(1,0)$。利用方程 (1.2)，可知 $\epsilon^2 = 0$。我们注意到，在 σ 不是满射的假设下， $\sigma(R)$ 是 R 的真子环。

我们的第一个目标是证明，在上述假设下， A 作为自身上的右模的内射维数是无限的。为此，我们考虑 $N = A/(\epsilon \cdot R) \cong R$。我们将其视为一个右 A-模，其作用由 $r \cdot (x + \epsilon y) = r \cdot x$ 给出，其中 $r \in N$、 $x + \epsilon y \in A$。

命题 1.3。 设 R 是一个环，设 $\sigma\colon R \to R$ 是一个单射环同态，并设 $A = R[x;\sigma]/(x^2)$ 如方程 *(1.1)*所示。那么对于任意 $n \geq 1$，存在阿贝尔群的一个同构

$$\mathrm{Ext}^n_{A^{\mathrm{op}}}(N, A) \cong R/\sigma(R).$$

因此，假设 σ 不是满射，我们可以推得 内射维数$_A(A_A) = +\infty$。

证明。 我们将通过使用右侧 A-模N的投射分解来计算这些 Ext。为此，我们考虑映射 $\varphi\colon A \to A$，其定义为 $\varphi(x + \epsilon y) = \epsilon \cdot (x + \epsilon y) = \epsilon x$。这是一个右侧 A-模映射，其像与核均等于 ϵR。因此，它给出了右侧 A-模 N的一个投射分解：

$$\ldots \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} A \to N \to 0$$

利用同态集 $\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(A,A) \cong A$的识别，映射 $\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(\varphi,A)$ 等于映射$\psi\colon A\to A$，其定义为 $\psi(x+\epsilon y) = (x+\epsilon y)\cdot\epsilon = \epsilon\sigma(x)$。利用这个投射分解及此识别，我们由此可知，对所有 $n\geq 1$，均有

$$\mathrm{Ext}^n_{A^{\mathrm{op}}}(N,A) \cong \ker(\psi)/\operatorname{Im}(\psi).$$

但由于 σ 是单射

$$\ker(\psi) = \{x+\epsilon y\in A \mid \epsilon\sigma(x)=0\} = \{x+\epsilon y\in A \mid x=0\} \cong R,$$

而

$$\operatorname{Im}(\psi) = \{\epsilon\sigma(x) \mid x+\epsilon y\in A\} \cong \sigma(R),$$

这表明

$$\mathrm{Ext}^n_{A^{\mathrm{op}}}(N,A) \cong R/\sigma(R).$$

最后，假设 σ 不是满射，则有 $R/\sigma(R)\neq 0$，因此对所有 $n\geq 1$，$\mathrm{Ext}^n_{A^{\mathrm{op}}}(N,A)\neq 0$，这意味着 $\mathrm{inj\,dim}_A(A_A) = +\infty$。□

本节下一个也是最后一个目标比较困难，即证明在某些附加假设下，我们有 $\mathrm{injdim}_A({}_AA) = 1$。
根据 [22, 定义 2，6], 环的包含映射 $\sigma(R)\subseteq R$ 的右导子是 R 给出的

$$(R:\sigma(R))_r = \{x\in R \mid R\cdot x\subseteq\sigma(R)\},$$

根据定义，它是包含于 $\sigma(R)$中的最大左理想 R。
在下文中，我们常常需要假设 $1\in(R:\sigma(R))_r\cdot R$，即由右导子生成的右理想。注意，若 R 是交换的，则$(R:\sigma(R))_r\cdot R = (R:\sigma(R))_r$；并且，1属于该理想当且仅当 σ 是满射，而这在我们的设定中是不可能的。

更明确地说，假设 $1\in(R:\sigma(R))_r\cdot R$ 意味着存在元素r_1、……、r_n、s_1、……、$s_n\in R$，满足对 $1\leq i\leq n$，有 $R\cdot r_i\subseteq\sigma(R)$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\cdot s_i = 1. \tag{1.4}$$

引理 1.5。令 R 为结合环，令 $\sigma\colon R\to R$ 为环同态，并假设 σ 是单射。令 r_1、…、r_n、s_1、…、$s_n\in R$ 为满足性质 $R\cdot r_i\subseteq\sigma(R)$ 的元素，其中 $1\leq i\leq n$，使得 $\sum_{i=1}^n r_i\cdot s_i = 1$。则有如下结论：

（1）作为左模，R 是由 s_1、…、s_n生成的有限生成投射左 $\sigma(R)$-模。（2）任意左 $\sigma(R)$-模的同态 $\varphi\colon R\to R$ 都满足 $\varphi(x) = x\cdot\varphi(1)$ 对所有 $x\in R$成立。

证明。

(1) 对任意 $1\leq i\leq n$，令 $\phi_i\colon R\to\sigma(R)$，$\phi_i(x) = x\cdot r_i$。关于 r_i 的假设表明，这确实是一个映射 $R\to\sigma(R)$，并且显然它是一个左侧$\sigma(R)$-模映射。假设 $\sum_{i=1}^n r_i\cdot s_i = 1$ 意味着对所有 $x\in R$，均有

：

$$x = x \cdot 1 = x \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot s_i = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) \cdot s_i.$$

根据对偶基引理， [19,引理 3.5。2],我们推 deduce 得 R 作为 $\sigma(R)$上的左模是投射的，并且 s_1、……、 s_n 生成它。

(2) 设 φ： $R \to R$ 是左侧 $\sigma(R)$-模的一个同态，并设 $x \in R$。则

$$\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi\left(x \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi((x \cdot r_i) \cdot s_i).$$

由于对每个 $1 \leq i \leq n$ 都有 $x \cdot r_i \in \sigma(R)$成立， φ的左侧 $\sigma(R)$-线性表明， $\varphi((x \cdot r_i) \cdot s_i) = (x \cdot r_i) \cdot \varphi(s_i)$，这说明

$$\varphi(x) = x \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \varphi(s_i).$$

特别地，对于 $x = 1$，我们得到 $\varphi(1) = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \varphi(s_i)$，这说明 $\varphi(x) = x \cdot \varphi(1)$。

□

现在我们利用这个引理证明，该导子条件使我们能够从左侧界定 A 的内射维数。

引理 1.6. 设 R 是一个环，设 $\sigma\colon R \to R$ 是一个非满射的单射环同态，并设 $A = R[x; \sigma]/(x^2)$ 如方程 *(1.1)*所示。假设 $1 \in (R\colon \sigma(R))_r \cdot R$。那么存在一个左侧 A-模的同构

$$\mathrm{Hom}_R({}_R A_A, {}_\sigma R) \cong {}_A A.$$

证明。 回忆一下，我们将 A 的元素写成和 $x + \epsilon y$，其中 x， $y \in R$。用这种记法，定义一个左侧 R-模的映射 φ： $A \to {}_\sigma R$，使得 $\varphi(x + \epsilon y) = y$。确实， φ 是左侧R-线性的，因为对于 $r \in R$，有

$$\varphi(r \cdot (x + \epsilon y)) = \varphi(r \cdot x + r \cdot \epsilon \cdot y) = \varphi(r \cdot x + \epsilon\sigma(r) \cdot y) = \sigma(r) \cdot y = \sigma(r) \cdot \varphi(x + \epsilon y),$$

因为乘以 r 在 ${}_\sigma R$ 中通过 σ 扭曲。

利用 φ，我们将定义一个显式同构 Ψ： ${}_A A \to$ 同态集$_R({}_R A_A,$ ${}_\sigma R)$，定义如下

$$\Psi(a)(b) = \varphi(b \cdot a).$$

首先，验证 $b \mapsto \varphi(b \cdot a)$ 是左侧 R-模的映射。确实，对于 $r \in R$，我们有 $r \cdot b$ 映射为

$$\varphi(r \cdot b \cdot a) = r \cdot \varphi(b \cdot a)$$

由于我们已经看到 φ 是 R-线性的。接下来，我们来证明 Ψ 本身是左侧 A-模的映射。回忆一下， $\mathrm{Hom}_R({}_R A_A, {}_\sigma R)$ 上的左侧 A-模结构由 $(a \cdot \psi)(b) = \psi(b \cdot a)$ 给出，其中 $a, b \in A$, $\psi \in \mathrm{Hom}_R({}_R A_A, {}_\sigma R)$。于是，对于 $a_1, a_2, b \in A$，我们有

$$\Psi(a_1 \cdot a_2)(b) = \varphi(b \cdot a_1 \cdot a_2) = \Psi(a_2)(b \cdot a_1) = (a_1 \cdot \Psi(a_2))(b).$$

我们来证明 Ψ 是单射。取 $a \in A$ 使得 $\Psi(a) = 0$，并记 $a = x + \epsilon y$。$\Psi(a) = 0$ 的假设意味着，对于所有 $b \in A$，$\Psi(a)(b) = 0$。令 $b = 1$，得到

$$0 = \Psi(a)(1) = \varphi(a) = y,$$

而取 $b = \epsilon$ 得到

$$0 = \Psi(a)(\epsilon) = \varphi(\epsilon(x + \epsilon y)) = \varphi(\epsilon \cdot x) = x,$$

所以 $a = 0$。最后，我们来证明 Ψ 是满射。设 $\beta \in$ 同态集$_R(_RA_A, {}_\sigma R)$，并取$a = \beta(\epsilon) + \epsilon \cdot \beta(1)$。我们将证明 $\Psi(a) = \beta$，从而完成证明。设$\alpha = \beta - \Psi(a)$。那么

$$\alpha(1) = \beta(1) - \Psi(a)(1) = \beta(1) - \phi(\beta(\epsilon) + \epsilon \cdot \beta(1)) = \beta(1) - \beta(1) = 0,$$

and

$$\alpha(\epsilon) = \beta(\epsilon) - \Psi(a)(\epsilon) = \beta(\epsilon) - \phi(\epsilon \cdot a) = \beta(\epsilon) - \phi(\epsilon \cdot \beta(\epsilon)) = \beta(\epsilon) - \beta(\epsilon) = 0.$$

现在，任取一个元素 $x + \epsilon y \in A$，满足 $x,\ y \in R$，只需证明$\alpha(x) = 0$且 $\alpha(\epsilon y) = 0$。首先，

$$\alpha(x) = \beta(x) - \Psi(a)(x) = \sigma(x) \cdot \beta(1) - \sigma(x) \cdot \Psi(a)(1) = \sigma(x) \cdot \alpha(1) = 0,$$

因为 β 和 $\Psi(a)$ 都是左侧 R-线性的，其中目标上的作用通过 σ 扭曲给出。定义映射 $\gamma: R \to R$，使得 $\gamma(y) = \alpha(\epsilon \cdot y)$。将 R 视为左侧 $\sigma(R)$- 模，我们断言 γ 是 $\sigma(R)$- 线性的，因为对任意 $r \in R$,

$$\gamma(\sigma(r) \cdot y) = \alpha(\epsilon \cdot \sigma(r) \cdot y) = \alpha(r \cdot \epsilon \cdot y) = \sigma(r) \cdot \alpha(\epsilon \cdot y) = \sigma(r) \cdot \gamma(y).$$

根据引理 1.5(2)，我们推得对任意 $y \in R$，均有

$$\gamma(y) = y \cdot \gamma(1) = y \cdot \alpha(\epsilon) = 0,$$

这就完成了证明。 □

利用上述结果，我们最终可以界定 A 作为自身上的左模时的内射维数:

命题 1.7。设 R 为一个环，设 $\sigma: R \to R$ 为一个非满射的单射环同态，并设 $A = R[x;\ \sigma]/(x^2)$ 如方程 *(1.1)*所示。假设$1 \in (R: \sigma(R))_r \cdot R$。则 内射维数 $_A(_AA)$ 内射维数$_R(_RR)$。

证明。注意到 $\sigma: R \to \sigma(R)$ 是一个环同构，因此遗忘函子 $\sigma^*: {}_{\sigma(R)}\text{Mod} \to {}_R\text{Mod}$ 是范畴等价。由引理 1.5(1)，R 是一个有限生成投射左 $\sigma(R)$-模；又由于有限生成投射性质在模范畴的等价下保持不变，因此可知 $\sigma^*(R) = {}_\sigma R$ 是一个有限生成投射左 R-模。接下来，注意到作为左 R-模，我们有 $A \cong R \oplus {}_\sigma R$；由于这两个都是有限生成投射左 R-模，因此可推出A 也是一个有限生成投射左 R-模。令 $n = \text{inj dim}_R({}_RR)$。不妨假设 $n < \infty$，否则便无须证明。注意，由于 ${}_\sigma R$ 是一个有限生成投射左 R-模，因此它是某个k的直和项 R^k，从而有 $\text{inj dim}_R({}_\sigma R) \leq \text{inj dim}_R({}_RR^k) = \text{inj dim}_R({}_RR) = n$。取一个

左 R-模 ${}_\sigma R$的内射分解：

$$0 \to {}_\sigma R \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^n \to 0.$$

将函子 $\mathrm{Hom}_R({}_R A_A, -) : {}_R\mathrm{Mod} \to {}_A\mathrm{Mod}$ 应用于这个正合序列。注意，由于 A 作为左侧 R-模是投射的，这个函子是正合的，因此我们得到一个左侧 A-模的正合序列：

$$0 \to \mathrm{Hom}_R({}_R A_A, {}_\sigma R) \to \mathrm{Hom}_R({}_R A_A, I^0) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R({}_R A_A, I^n) \to 0.$$

对于每个 $0 \le i \le n$，左侧 A-模 同态集$_R({}_R A_A, I^i)$ 都是单射的，因此这是一个长度至多为 n 的 同态集$_R({}_R A_A, {}_\sigma R)$ 的单射解消。由引理 1.6，我们有左侧 A-模的同构

$$\mathrm{Hom}_R({}_R A_A, {}_\sigma R) \cong {}_A A,$$

这表明 $\mathrm{inj\,dim}_A({}_A A) \le n = \mathrm{inj\,dim}_R({}_R R)$。 □

上述内容已经足以表明 Gorenstein 对称性不成立，但我们希望准确确定内射维数，因此继续深入讨论。回顾一下，一个不一定是交换的非零环 A 称为整环，如果它没有零因子。

引理 1.8。 设 R 是一个非除环的整环，设 $\sigma : R \to R$ 是一个非满射的单射环同态，并设 $A = R[x;\sigma]/(x^2)$ 如方程 *(1.1)*所示。那么 内射维数$_A({}_A A) > 0$。

证明。 由于作为右侧 R-模， A 是秩为 2 的自由模，因此函子 $A \otimes_R -$ 是正合的。若 J 是任意单射左侧 A-模，则同构

$$\mathrm{Hom}_R(-, J) \cong \mathrm{Hom}_A(A \otimes_R -, J)$$

表明，将 J 视为左侧 R-模时，它也是单射的。反设 A 作为左侧 A-模是单射的，则它作为左侧 R-模也同样是单射的。然而， R作为自身上的左模，是 A的一个直和项，因此我们可推出 R 从左侧也是自内射的。但对于不是除环的整环而言，这是不可能的，因为根据 Baer 判别准则，若 R 是自内射的，则对任意 $0 \ne a \in R$，映射 $R \cdot a \to R$，$r \cdot a \mapsto r$（由于 R 是整环，该映射是良定义的）可以延拓为映射 $R \to R$，这表明a 是右可逆的。因此，存在 $c \in R$ 使得 $a \cdot c = 1$，从而 $(c \cdot a - 1) \cdot c = 0$ 推出$c \cdot a = 1$，这与 R 不是除环这一事实矛盾。因此，$\mathrm{inj\,dim}_A({}_A A) > 0$。□

最后，我们在本节中证明，在我们的假设下，如果 R 是双侧诺特的，那么 A 也是如此。

命题 1.9. 设 R 是一个环，设 $\sigma : R \to R$ 是一个非满射的单射环同态，并设 $A = R[x;\sigma]/(x^2)$ 如方程 *(1.1)*所示。假设$1 \in (R : \sigma(R))_r \cdot R$。假设 R 既是左侧诺特的，也是右侧诺特的。那么 A 也既是左侧诺特的，也是右侧诺特的。

证明。 我们知道 A 按定义是有限生成的右侧 R-模。 A。我们还知道 A 是有限生成的左侧 R-模，因为 R 和 ${}_\sigma R$ 都是有限生成的（后者由引理 1.5 及命题 1.7证明中的论证可知），并且

作为左侧 R-模， $A \cong R \oplus {}_{\sigma}R$。由 [19, 引理 1.13],可知，作为右诺特环上的有限模的环是右诺特的，这就证明了结论。 □

回顾一下，若一个环 R 的左全局维数至多为 1，则称其为左遗传环。以下是本节的主要结果。

定理 1.10。 设 R 是一个左遗传且非除环的双侧诺特整环。设 σ： $R \to R$ 是一个非满射的单射环同态，并令 $A = R[x;\ \sigma]/(x^2)$ 如方程 （*1.1*） 所示。假设 $1 \in （R：\ \sigma（R））_r \cdot R$。则 A是一个满足下式的双侧诺特环

$$\operatorname{inj\,dim}_A({}_AA) = 1, \quad \operatorname{inj\,dim}_A(A_A) = +\infty.$$

证明。 根据命题 1.9，环 A 是双侧诺特环。在右侧，根据命题 1.3 ，我们有 内射维数$_A$（A_A） $= +\infty$。在左侧，根据命题 1.7、引理 1.8 以及遗传性的定义，我们得到:

$$0 < \operatorname{inj\,dim}_A({}_AA) \leq \operatorname{inj\,dim}_R({}_RR) \leq 1,$$

由于这些都是整数，我们便可推出 inj dim$_A$($_A$$A$) $= 1$。 □

接下来的几节将专门构造一个满足定理 R 条件的环1.10。

2. 四元数除环

本节旨在构造一个具有某些特殊性质的类四元数除环 D ，并将在下一节中使用。它是对 [28, 第 13 页引理 4.3] 之后构造的一个除环的变体。在那里，该环用于 [28, 定理 4.11], ，以构造具有指定 Grothendieck 群的单遗传诺特整环。

构造的基本思路是取一族无限多个较小除环的并，而其中每个除环都是通过局部化一个量子环面得到的。
在构造它之前，我们先陈述一个定理——本节的主要结果；它实质上列出了我们要求 D 具备的性质。这些将是本文余下部分中使用 D 的唯一性质。

定理 2.1。 设 $\Bbbk$ 为一个特征不为 2 的域。存在一个除环 D ，具有以下性质:

(1) D 是一个 $\Bbbk$-代数。*(2)* 对任意 $n \in \mathbb{Z}$，存在非零的类四元数元素 u_n、$v_n \in D$，使得$u_n \cdot v_n = -v_n \cdot u_n$，并且每个 u_n^2 都属于 D的中心。*(3)* 对任意有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，存在一个子 $\Bbbk$-代数 $D_F \subseteq D$和一个子域$Z_F \subseteq D_F$，使得 Z_F 包含于 D的中心，并且满足以下条件：*(a)* 对所有 $n \in F$，都有 u_n、u_n^{-1}、v_n、$v_n^{-1} \in D_F$。*(b)* 作为向量空间， D_F 是 Z_F上的有限维向量空间。*(c)* 对任意 $x \in D_F$以及任意 $n \notin F$、 $x \cdot u_n = u_n \cdot x$ 和 $x \cdot v_n = v_n \cdot x$。*(d)* 若 $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \mathbb{Z}$ 是整数的有限集，则 $D_{F_1} \subseteq D_{F_2}$。*(e)* 有等式 $D = \bigcup_F D_F$。

(4) 存在一个 $\Bbbk$-线性自同构 $\beta\colon D \to D$，满足对所有 $n \in \mathbb{Z}$，$\beta(u_n) = u_{n-1}$ 且 $\beta(v_n) = v_{n-1}$。*(5)* 存在一个双射的 $\Bbbk$-线性函数 $\iota\colon D \to D$，使得对所有 x、$y \in D$，$\iota(x \cdot y) = \iota(y) \cdot \iota(x)$，并且满足 $\iota \circ \iota = 1_D$，且对所有$n \in \mathbb{Z}$，$\iota(u_n) = -u_n$、$\iota(v_n) = v_n$。

固定一个特征不等于 2 的域 $\Bbbk$。我们首先构造一个量子环面。在代数几何中，n 维环面 $(\Bbbk^\times)^n$ 的坐标环为

$$\Bbbk[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}].$$

现在，取一个有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，它将作为两族变量的索引集。根据 [19, 例 1.5.10(ii)], ，量子环面 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 的系数取为 ± 1 将定义为由元素 $\Bbbk$生成的 u_n-代数，v_n、u_n^{-1}、v_n^{-1}对所有$n \in F$均成立，并且仅满足以下关系

$$u_n \cdot v_m = v_m \cdot u_n, \quad u_n \cdot u_m = u_m \cdot u_n, \quad v_n \cdot v_m = v_m \cdot v_n$$

对于 n，$m \in F$当 $n \neq m$时，以及

$$u_n \cdot u_n^{-1} = u_n^{-1} \cdot u_n = v_n \cdot v_n^{-1} = v_n^{-1} \cdot v_n = 1$$

对于所有 $n \in F$，最重要的是量子关系

$$u_n \cdot v_n = -v_n \cdot u_n, \tag{2.2}$$

对于所有 $n \in F$。

环 D_F 的并集将成为我们试图构造的除环 D，它们将通过在量子环面中进一步对元素求逆而从量子环面得到。为此，我们确定量子环面的一个较大的中心子环，这将使我们能够对量子环面进行局部化。

对量子环面进行平方运算得到一个普通环面，具体如下：定义$\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$为 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$的由形如$u_n^{\pm 2}, v_n^{\pm 2}$的元素（对所有 $n \in F$）生成的 $\Bbbk$-子代数。下面给出 $\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 的一些基本性质。

命题 2.3。对 $\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$，以下结论成立：

(1) $\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$包含于 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 的中心中。*(2)* $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$是一个有限生成的 $\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$-模。

证明。

(1) 只需证明形如 u_n^2 和 v_n^2 for $n \in F$ 的元素属于 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$的中心（因为它们的逆元也会自动属于中心）。再次将问题化归到生成元及其逆元，只需证明这些元素与每个 v_m, u_m for all $m \in F$可交换。对于所有 $m \in F$，每个 u_n（分别地，对于所有 $m \in F$，每个 v_n）都与 u_m可交换。如果 $m \neq n$，那么 u_n 本身已经与 v_m可交换，因此显然 u_n^2 与每个u_m, v_m 可交换，而 v_n^2 与每个 u_m, v_m可交换。因此，我们只需验证u_n^2（分别地，v_n^2）与 v_n（分别地，u_n）可交换，这直接由方程 (2.2) 得出。

(2) 利用 u_n's 和 v_n's 之间的关系， $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$中的任意元素都可以写成 $\Bbbk$-线性组合，其单项式具有如下形式

$$\prod_{n\in F} u_n^{a_n}\cdot v_n^{b_n},$$

其中每个 a_n， $b_n\in\mathbb{Z}$。由于任意整数不是偶数就是奇数，我们可以写成 $a_n=2\cdot\alpha_n+\epsilon_n$ 和 $b_n=2\cdot\beta_n+\delta_n$，其中 α_n， $\beta_n\in\mathbb{Z}$，且 δ_n， $\epsilon_n\in\{0,1\}$。因此我们只需生成这些单项式

$$\prod_{n\in F} u_n^{2\cdot\alpha_n}\cdot v_n^{2\cdot\beta_n}\cdot u_n^{\epsilon_n}\cdot v_n^{\delta_n}.$$

但是由于 $\prod_{n\in F} u_n^{2\cdot\alpha_n}\cdot v_n^{2\cdot\beta_n}\in\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$，我们看到

$$\prod_{n\in F} u_n^{\epsilon_n}\cdot v_n^{\delta_n}$$

对于所有 ϵ_n， $\delta_n\in\{0,1\}$，生成 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 作为 $\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$-模；由于 F是一个有限集，这就是一个有限生成元集，其大小至多为 $4^{|F|}$。

□

注记 2.4。可以证明， $\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 作为一个 $\Bbbk$-代数，自然同构于普通 $2\cdot|F|$ 维代数环面的坐标环，即 $\Bbbk[x_i^{\pm 1},y_i^{\pm 1}]_{i\in F}$。一个同构

$$\Bbbk[x_i^{\pm 1},y_i^{\pm 1}]_{i\in F}\to\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$$

由下式给出 $x_i^{\pm 1}\mapsto u_i^{\pm 2}$，且 $y_i^{\pm 1}\mapsto v_i^{\pm 2}$。该映射显然是满射，其单射性可由以下事实推出： u_i中的 v_i 单项式构成 k-基 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(k^\times)$，参见 [19, 例 1.5.10(ii)]。

命题 2.5。环 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 是一个整环，而环 $\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 是一个整性环。

证明。由命题 2.3可知，环 $\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 是 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$的一个交换子环，因此第二个结论由第一个结论推出。第一个结论由 [19, 例 1.5.10(ii)], 得出，其中 $\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 构造为迭代斜 Laurent 多项式环，并反复应用[19, 定理 1.2.9(i)、定理 1.4。5] ，对每个变量各应用一次。□

为简化记号，下文中我们还将写作 $\mathcal{O}_F:=\mathcal{O}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$ 和 $\mathcal{P}_F:=\mathcal{P}^{2F}_{(\pm 1)}(\Bbbk^\times)$。我们用 $Z_F:=\mathrm{Frac}(\mathcal{P}_F)$ 表示整性环$\mathcal{P}_F$的分式域。然后，我们定义

$$D_F:=\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{P}_F} Z_F \tag{2.6}$$

对任意有限子集 $F\subseteq\mathbb{Z}$。因此， D_F 是通过将平方量子环面 $\mathcal{P}_F$ 的所有非零元素取逆，从量子环面 $\mathcal{O}_F$ 得到的。
下一个结果总结了 D_F 的一些基本性质：

命题 2.7。环 D_F 满足以下性质：

(1) 它是一个 $\Bbbk$代数。

(2) 自然映射 $\mathcal{O}_F \to D_F$ 是单射。*(3)* 环 D_F 是整环。*(4)* 环 Z_F 包含于 D_F的中心中。*(5)* D_F 是 Z_F上的有限维向量空间。*(6)* 环 D_F 是除环。

证明。

(1) 根据 D_F 的定义，这是显然的，因为 $\mathcal{O}_F$ 是一个 $\Bbbk$-代数。(2) 映射 $\mathcal{O}_F \to D_F$ 是一个局部化映射，因此其核为 $\{x \in \mathcal{O}_F \mid \exists 0 \neq z \in \mathcal{P}_F, x \cdot z = 0\}$，但根据命题 2.5，$\mathcal{O}_F$ 是一个整环，所以该核为 0。(3) 根据定义，D_F 的一个元素具有 $x \cdot z^{-1}$ 的形式，其中 $x \in \mathcal{O}_F$，且 $0 \neq z \in \mathcal{P}_F$。因此，取两个这样的元素 $x_1 \cdot z_1^{-1}$、$x_2 \cdot z_2^{-1}$，其中 x_1、$x_2 \in \mathcal{O}_F$ 且 $0 \neq z_1$、$z_2 \in \mathcal{P}_F$，由于根据命题 2.3，我们知道 z_1、z_2 位于 $\mathcal{O}_F$ 的中心中，于是得到：

$$x_1 \cdot z_1^{-1} \cdot x_2 \cdot z_2^{-1} = (x_1 \cdot x_2) \cdot (z_1 \cdot z_2)^{-1}.$$

由于 $\mathcal{O}_F$ 是一个整环，D_F 中的局部化中该元素为零意味着 $x_1 \cdot x_2 = 0$ 在 $\mathcal{O}_F$ 中成立，因此要么 $x_1 \cdot z_1^{-1} = 0$，要么 $x_2 \cdot z_2^{-1} = 0$，这表明 D_F 是一个整环。（4）取元素 $x \cdot z^{-1} \in D_F$，其中 $x \in \mathcal{O}_F$，且 $0 \neq z \in \mathcal{P}_F$。接着取 $a \cdot b^{-1} \in Z_F$，满足 a，$b \in \mathcal{P}_F$且 $b \neq 0$。由于 a，b和 z属于$\mathcal{O}_F$的中心，b，z 的逆元在 D_F 中与 $\mathcal{O}_F$ 的元素交换，这意味着

$$(x \cdot z^{-1}) \cdot (a \cdot b^{-1}) = (a \cdot b^{-1}) \cdot (x \cdot z^{-1}).$$

（5）这由命题 2.3以及交换代数中的标准事实推出：如果 B 是交换环，M 是有限生成的 B-模，并且 $S \subseteq B$ 是乘法封闭集，那么 $S^{-1}M$ 是有限生成的 $S^{-1}B$-模。

（6）取非零元素 $a \in D_F$。根据（3），映射 $a \cdot - \colon D_F \to D_F$是单射；根据（4），它是 Z_F-线性的。因此，它是有限维向量空间之间的单射（由（5）知），所以它是满射，这表明 a 有一个右逆元。同样的论证表明，$- \cdot a \colon D_F \to D_F$是满射，因此 a 是可逆的，而 D_F是一个除环。

□

对于不同的有限集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，相应的环 D_F 之间的关系如下：

命题 2.8。

(1) 若 $F_1 \subseteq F_2$ 是 $\mathbb{Z}$ 的有限子集，则存在唯一的 $\Bbbk$-代数映射 $\varphi_{1,2} \colon D_{F_1} \to D_{F_2}$，使得对于所有 $n \in F_1$，$\varphi_{1,2}(u_n) = u_n$ 且 $\varphi_{1,2}(v_n) = v_n$。映射 $\varphi_{1,2}$ 是单射；当 $F_2 = F_1$ 时，映射 $\varphi_{1,1}$ 是 D_{F_1} 的恒等映射。*(2)* 若 $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3$ 是两个这样的包含关系，则 $\varphi_{1,3} = \varphi_{2,3} \circ \varphi_{1,2}$。

证明。

(1) 我们定义一个 $\Bbbk$-代数映射 $\psi_{1,2} \colon \mathcal{O}_{F_1} \to \mathcal{O}_{F_2}$，令 $\psi_{1,2}(u_n^{\pm 1}) = u_n^{\pm 1}$，且$\psi_{1,2}(v_n^{\pm 1}) = v_n^{\pm 1}$，对所有 $n \in F_1$ 均如此。由于这些

元素生成 $\mathcal{O}_{F_1}$，且根据定义， $\mathcal{O}_{F_1}$ 中这些生成元之间的任何定义关系也存在于 $\mathcal{O}_{F_2}$。此外，$\psi_{1,2}$ 是量子环面的一个包含映射， [19, 1.5.9 和例 1.5.10(ii)], ，因此映射 $\psi_{1,2}$ 实际上是单射。根据定义，映射 $\psi_{1,2}$ 将 $\mathcal{P}_{F_1}$ 映入 $\mathcal{P}_{F_2}$，并且由于它是单射，这类非零元素会被映至 $\mathcal{P}_{F_2}$中的非零元素。根据局部化的泛性质，它唯一地延拓为局部化上的映射 $\varphi_{1,2}$ $D_{F_1} \to D_{F_2}$。由于 D_{F_1} 是一个除环且该映射非零，所以它是单射。特别地，由唯一性可知，$\varphi_{1,1}$ 是恒等映射。

(2) 这由相应的性质$\psi_{i,\ j}$ 以及局部化映射的唯一性得出。

□

上述结果表明， D_F 构成一个 $\Bbbk$-代数的直系。取其余极限，我们得到本节的主要构造：

$$D := \varinjlim_{F\subseteq\mathbb{Z},|F|<\infty} D_F. \tag{2.9}$$

由于过渡映射 $\varphi_{1,\ 2}$： $D_{F_1} \to D_{F_2}$ 都是单射，因此对每个这样的 F，自然映射 $D_F \to D$ 也都是单射。因此，我们将 D_F 视为 D的一个子 $\Bbbk$-代数。这也立即给出：

命题 2.10。 代数 D 满足以下性质：

(1) D 的任意元素都属于某个有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$对应的 D_F。

(2) $\Bbbk$-代数 D 是一个除环。

证明。

（1）这是因为定义 D 的余极限是在一个有向集上取的。（2）若 $x \in D$ 是任意一个非零元素，取某个有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，使得 $0 \neq x \in D_F$。由于 D_F 是一个除环， x 有一个逆元 y，它也属于 D，因此 D 中任意非零元素都是可逆的。

□

在证明主要结果之前，我们还需要说明 D 的最后一个性质，即 D 满足的一个泛性质：

命题 2.11. 设 E 是一个除环，同时也是一个 $\Bbbk$-代数，并假设对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，都存在非零元素 a_n、 $b_n \in E$ 满足：

（*1*）对于所有 $n \in \mathbb{Z}$、 $a_n \cdot b_n = -b_n \cdot a_n$。

（*2*）对于所有满足 $n \neq m$ 的 n、 $m \in \mathbb{Z}$，有

$$a_n \cdot b_m = b_m \cdot a_n, \quad a_n \cdot a_m = a_m \cdot a_n, \quad b_n \cdot b_m = b_m \cdot b_n.$$

则有如下结论：

(1) 对于任意有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，存在唯一的 $\Bbbk$-代数映射 $\alpha_F\colon \mathcal{O}_F \to E$，满足 $\alpha_F(u_n) = a_n$，且对于所有 $n \in F$，都有 $\alpha_F(v_n) = b_n$。*(2)* 假设对于任意有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，α_F 到交换子环 $\mathcal{P}_F \subseteq \mathcal{O}_F$ 的限制映射是单射。那么存在唯一的 $\Bbbk$-代数映射 $\alpha\colon D \to E$，使得 $\alpha(u_n) = a_n$，且对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $\alpha(v_n) = b_n$。

证明。

（1）这直接源于关于以生成元与关系表示 $\mathcal{O}_F$ 的泛性质。（2）首先，我们证明唯一性。假设 α，$\beta\colon D \to E$ 是两个这样的映射，并考虑 T：$= \{x \in D \mid \alpha(x) = \beta(x)\}$。那么 T 是 $\Bbbk$-子代数，且根据定义包含所有 u_n，v_n，对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 均如此。但由于除环的映射保持逆元，我们可以推出 T 也是一个除环。最后，由于 D 作为除环由 $\Bbbk$ 以及 u_n 和 v_n 生成（因为这对 D_F 成立，且 D 的任意元素都属于某个 D_F），我们得到 $T = D$，因此 $\alpha = \beta$。接下来，我们证明存在性。由于映射 α_F 在 $\mathcal{P}_F$ 上是单射，且 E 是一个除环，局部化使我们可以将其扩展为映射 $D_F \to E$，我们仍将其记为 α_F。此外，利用证明唯一性部分中的相同论证，对于 $F_1 \subseteq F_2$，并在将每个 D_F 与其在 D 中的像相识别后，我们有 α_{F_2} 是 α_{F_1} 的扩展。因此，沿所有有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$ 取直极限，我们得到所需的 α。

□

现在我们可以证明除环 D 满足定理 2.1 中的条件，这也是本节的主要结果：

证明。

(1) 这是因为 D 是由 $\Bbbk$ 代数构成的直极限，且过渡映射是 $\Bbbk$ 代数映射。(2) 由于我们将 D_F 视为 D 的子代数，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，都存在非零元素 u_n、$v_n \in D$，使得 $u_n \cdot v_n = -v_n \cdot u_n$。接下来只需证明 u_n^2 属于 D 的中心。令 $x \in D$ 为任意元素。根据命题 2.10，存在有限子集 $F_1 \subseteq \mathbb{Z}$，使得 $x \in D_{F_1}$。令 $F = F_1 \cup \{n\}$。那么 x、$u_n^2 \in D_F$，并且由于 $u_n^2 \in Z_F$，根据命题 2.7(4)，我们知道 u_n^2 属于 D_F 的中心。因此，$x \cdot u_n^2 = u_n^2 \cdot x$，且此关系在 D 中仍然成立，这表明 u_n^2 属于 D 的中心。(3) 我们已经确立了 $Z_F \subseteq D_F \subseteq D$ 的存在性。(2) 中的相同论证表明，Z_F 包含于 D 的中心。现在证明本条中的其余结论：(a) 我们已经看到，对于所有 $n \in F$，都有 u_n、u_n^{-1}、v_n、$v_n^{-1} \in D_F$。(b) D_F 在 Z_F 上有限维这一事实即为命题 2.7(5)。(c) 若 $x \in D_F$ 且 $n \notin F$，则可将 x 写成有限和

$$x = \sum a_i \cdot z_i^{-1} \cdot \prod_{j \in F} u_j^{m_j} \cdot \prod_{k \in F} v_k^{l_k}$$

其中 $a_i \in \Bbbk$、m_j，$l_k \in \mathbb{Z}$，且 $z_i \in Z_F$。但是，由于 $n \notin F$，$u_j^{m_j}$ 中的每个元素以及 $v_k^{l_k}$ 中的每个元素都与 u_n 可交换。至于 z_i，我们有 $z_i \in Z_F \subseteq Z_{F\cup\{n\}}$，它包含于 $D_{F\cup\{n\}}$ 的中心，因此 z_i 与 u_n 可交换，从而 z_i^{-1} 也与 u_n 可交换。因此，我们推出 $x \cdot u_n = u_n \cdot x$。同样的论证也表明 $x \cdot v_n = v_n \cdot x$。

（d）对于 $F_1 \subseteq F_2$ 我们有 $D_{F_1} \subseteq D_{F_2}$ 这是命题2.8（1），再结合将 D_F 与其在 D中的像相对应的识别。

（e）等式 $D = \bigcup_F D_F$ 是我们对 D的定义。

（4）我们将利用命题 2.11 的泛性质构造一个 $\Bbbk$-线性自同构 β：$D \to D$，其满足 $\beta(u_n) = u_{n-1}$ 以及 $\beta(v_n) = v_{n-1}$对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立。为此，对所有 $n \in \mathbb{Z}$，应用命题 2.11，其中取 $E = D$、$a_n = u_{n-1}$ 和$b_n = v_{n-1}$。对于有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，我们如下定义 α_F：$\mathcal{O}_F \to E$。首先，令 $F' = \{n-1 \mid n \in F\}$。接着，令 α'_F：$\mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_{F'}$为满足 $\alpha'_F(u_n) = u_{n-1}$ 和 $\alpha'_F(v_n) = v_{n-1}$的映射。由于 $\mathcal{O}_F$和 $\mathcal{O}_{F'}$ 的生成元与关系除了名称变更外完全相同，显然 α'_F是一个$\Bbbk$-代数同构。然后，令 α_F为 α'_F与包含映射$\mathcal{O}_{F'} \hookrightarrow E$ 的复合。因此它是单射，特别地，其对 $\mathcal{P}_F$的限制映射也是单射。此外，根据构造，它满足：对所有$n \in F$，$\alpha_F(u_n) = a_n$ 且 $\alpha_F(v_n) = b_n$。于是，根据命题 2.11，我们得到一个 $\Bbbk$-代数映射 β：$D \to E = D$，其满足对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 均有 $\beta(u_n) = u_{n-1}$ 且 $\beta(v_n) = v_{n-1}$。用 -1 替换 $+1$ 重复同样的论证，将得到一个 $\Bbbk$-代数映射γ：$D \to D$，其满足对所有 $n \in \mathbb{Z}$均有 $\gamma(u_n) = u_{n+1}$ 且 $\gamma(v_n) = v_{n+1}$。最后，$\beta \circ \gamma$和 $\gamma \circ \beta$各自都是除环的 $\Bbbk$-代数映射，并且在 u_n 和 v_n上是恒等映射，因此，正如命题 2.11 的证明中那样，我们可推出 β 和γ互为逆元，因而都是自同构。

（5）我们希望构造一个双射的 $\Bbbk$-线性函数 ι：$D \to D$，使得对于所有 $x, y \in D$，都有 $\iota(x \cdot y) = \iota(y) \cdot \iota(x)$，并且 $\iota \circ \iota = 1_D$，且对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $\iota(u_n) = -u_n$，$\iota(v_n) = v_n$。为此，我们再次使用泛性质命题 2.11。令$E = D^{\mathrm{op}}$，令 $a_n = -u_n$，并令对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，$b_n = v_n$。注意，这些数据仍然满足 D 的泛性质条件。对于任意有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，我们按如下方式定义 α_F：$\mathcal{O}_F \to E$。首先，考虑由 $u_n \mapsto -u_n$ 和 $v_n \mapsto v_n$给出的映射 $\mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_F^{\mathrm{op}}$。这个映射显然是双射。将其与包含映射 $\mathcal{O}_F^{\mathrm{op}} \hookrightarrow E$ 复合，得到一个单射映射 α_F。特别地，它在$\mathcal{P}_F$上是单射。因此，根据命题 2.11，我们得到一个诱导的 $\Bbbk$-代数映射 ι：$D \to E$，它满足：$\iota(u_n) = -u_n$，且对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，$\iota(v_n) = v_n$。将其视为映射 ι：$D \to D$，可知 ι 是一个 $\Bbbk$-线性映射，并且对于所有 $x, y \in D$，都有 $\iota(x \cdot y) = \iota(y) \cdot \iota(x)$。最后，由于 $\iota \circ \iota$ 是除环的一个 $\Bbbk$- 代数映射，且在 u_n 和 v_n 上是恒等映射，因此可知它在整个 D上都是恒等映射。这意味着 ι 是双射。

□

3. 理想化子的交集

本节将构造一个环 R，并证明它满足定理 1.10的条件。在本节中，固定一个特征不为 $\mathbb{k}$ 2的域 D，并令 $\mathbb{k}$为一个具有定理 2.1所述性质的 -代数除环。

3.1. 环 R。设 $S = D[t]$ 是 D 上的多项式代数，其中 t 是不定元；特别地，t 是中心元素。关于除环上的多项式环，可参阅 [18, 第 16] 节。我们的目标环 R 将是 S 的某个子 $\mathbb{k}$-代数。

稍有不同的是，我们采用与 [18], 中约定左右镜像的方式：给定多项式 $f \in S$，按定义，它是一个有限和

$$f = \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot a_k \in S,$$

其中每个 $a_k \in D$，并给定某个 $b \in D$，我们将考虑 f 在 b 处的左代入，其定义为元素

$$f_\ell(b) = \sum_{k=0}^{n} b^k \cdot a_k \in D.$$

下面给出一个关于这一概念的初等事实，我们将频繁用到：

引理 3.1。设 $f \in S$ 且设 $b \in D$。则有以下结论：

(1) 有 $f - f_\ell(b) \in (t-b) \cdot S$。
(2) 有 $(t-b) \cdot S \cap D = 0$。

证明。

(1) 这立即由 [18, 命题 16.2] 第一部分的左侧版本得到。（2）这立即由 [18, 命题 16.2] 第二部分的左侧版本得到。

□

对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，我们经常需要 S中的以下元素，因此为它们命名。设 $g_n = t - u_n \in S$及其共轭元 $h_n = t + u_n \in S$。用 $C_D(u_n)$ 表示 u_n 在 D中的中心化子。根据定义，

$$C_D(u_n) = \{x \in D \mid x \cdot u_n = u_n \cdot x\}.$$

这是 D 的一个子 $\mathbb{k}$ 代数，其中包含 D的中心。对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，令

$$\mathcal{I}_n := \{f \in S \mid f_\ell(u_n) \in C_D(u_n)\}, \tag{3.2}$$

或者更明确地说

$$\mathcal{I}_n = \{f \in S \mid f_\ell(u_n) \cdot u_n = u_n \cdot f_\ell(u_n)\}.$$

或者，也可以使用理想化子的概念来定义 $\mathcal{I}_n$：回顾 [19, 1.1.11 和第 5 节5]，如果 B 是一个环，且 J 是 B 中的右侧理想，那么 J 在 B 中的理想化子是

由下式给出的 B 的子环 $\mathcal{I}_B(J)$:

$$\mathcal{I}_B(J) = \{b \in B \mid b \cdot J \subseteq J\}.$$

因此，理想化子是 B 中最大的子环，在该子环中， J 成为双边理想。回到我们的语境，有如下连接这些定义的结果:

命题 3.3。 以下结论对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立:

(1) 集合 $\mathcal{I}_n$ 在方程 *(3.2)* 中定义，等于右理想 $g_n \cdot S$在 S中的理想化子。*(2)* 集合 $\mathcal{I}_n$ 是 $\Bbbk$的子代数，包含 S 的中心，并且 S是其中的 $g_n \cdot S \subseteq \mathcal{I}_n$双边理想。

证明。

(1) 设 $J = g_n \cdot S$，其为 S的右理想。元素 $f \in S$ 属于 J的理想化子， $\mathcal{I}_S(J)$，当且仅当 $f \cdot g_n \cdot S \subseteq g_n \cdot S$，当且仅当

$$f \cdot g_n \in g_n \cdot S = (t - u_n) \cdot S.$$

由引理 3.1，这等价于 $(f \cdot g_n)_\ell(u_n) = 0$。记 $f = \sum_{k=0}^{m} t^k \cdot a_k$。那么

$$f \cdot g_n = f \cdot (t - u_n) = \sum_{k=0}^{m} t^{k+1} \cdot a_k - \sum_{k=0}^{m} t^k \cdot a_k \cdot u_n.$$

代入 u_n，我们得到

$$(f \cdot g_n)_\ell(u_n) = \sum_{k=0}^{m} u_n^{k+1} \cdot a_k - \sum_{k=0}^{m} u_n^k \cdot a_k \cdot u_n = u_n \cdot f_\ell(u_n) - f_\ell(u_n) \cdot u_n.$$

因此，我们看到 $f \in \mathcal{I}_S(J)$ 当且仅当 $f_\ell(u_n) \in C_D(u_n)$，这恰好是集合 $\mathcal{I}_n$ 在方程 (3.2)中定义的。

(2) 这由 (1) 得出，因为理想化子满足这些性质。

□

现在我们可以将目标 $\Bbbk$-代数 R 定义为这些理想化子的交集。注意，虽然我们对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都定义了 $\mathcal{I}_n$，但在下面的定义中，我们只对 $n \geq 1$ 取这些对象的交集。定义如下:

$$R := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n. \tag{3.4}$$

命题3.5。 对象 R 在方程 *(3.4)*中定义，是一个 $\Bbbk$-代数 S。此外，R 是一个非除环的整环，并且包含 S的中心。

证明。由于根据命题 3.3(2)，每个 $\mathcal{I}_n$ 都是 $\Bbbk$的子代数，故可知 R 也是 $\Bbbk$的子代数。由于 S 是除环上的多项式环，因此它是整环；所以作为其子环的 R也是整环。根据命题 3.3(2)，我们知道每个$\mathcal{I}_n$ 都包含 S的中心，因此 R 也包含 S的中心。最后，根据定义， $t \in S$ 属于 S 的中心，因此 $t \in R$；但 t 甚至在 S中都不可逆，所以它在 R中也不可逆。因此， R 不是除环。□

3.2. **自同态** $\sigma\colon\ R \to R$。我们的下一个目标是构造一个单射环同态 $\sigma\colon\ R \to R$ 它不是满射，并且满足 $1 \in (R\colon\ \sigma(R))_r \cdot R$，正如定理 1.10所要求的那样。我们还将确保 σ 是一个 $\Bbbk$-代数同态，这意味着我们最终构造的 A，如第 1节中所述，也将是一个 $\Bbbk$-代数。

在本节的其余部分，令 $\beta\colon\ D \to D$ 为一个 $\Bbbk$-线性自同构，满足$\beta(u_n) = u_{n-1}$ 以及 $\beta(v_n) = v_{n-1}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立。这样的 β 由定理2.1（4）保证存在。我们将 β 扩展为一个映射 $S \to S$，同样记作 β，定义为

$$\beta\left(\sum_{k=0}^{n} t^k \cdot a_k\right) = \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot \beta(a_k), \quad a_k \in D. \tag{3.6}$$

那么显然，$\beta\colon\ S \to S$ 是 $\Bbbk$-线性自同构 S。

引理 3.7。对于任意 $f \in S$ 以及任意 $d \in D$，在方程 (3.6) 中定义的自同构 $\beta\colon\ S \to S$ 满足

$$\Big(\beta(f)_\ell\Big)(\beta(d)) = \beta(f_\ell(d)).$$

证明。假设$f = \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot a_k$ 对每个 $a_k \in D$均成立。于是我们计算得:

$$\Big(\beta(f)_\ell\Big)(\beta(d)) = \sum_{k=0}^{n} \beta(d)^k \cdot \beta(a_k).$$

由于 β 是环同态，它与加法和乘法可交换，因此有:

$$\sum_{k=0}^{n} \beta(d)^k \cdot \beta(a_k) = \beta\Big(\sum_{k=0}^{n} d^k \cdot a_k\Big) = \beta\Big(f_\ell(d)\Big).$$

□

引理 3.8。对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，自同构 $\beta\colon\ D \to D$ 满足

$$\beta\big(C_D(u_n)\big) = C_D(u_{n-1}).$$

证明。若 $x \in C_D(u_n)$，则根据定义，$x \cdot u_n = u_n \cdot x$。将 β 作用于该方程，并利用 $\beta(u_n) = u_{n-1}$，且 β 是环同态这一事实，可得$\beta(x) \cdot u_{n-1} = u_{n-1} \cdot \beta(x)$，因此 $\beta(x) \in C_D(u_{n-1})$。反之，若 $x \in C_D(u_{n-1})$，由于 β 是同构，取 $y = \beta^{-1}(x)$，并将 β 替换为β^{-1}后重复相同的论证，可得 $y \in C_D(u_n)$。□

我们在下一个结果中，将自同构 β 与理想化子 $\mathcal{I}_n$联系起来，它们定义于方程(3.2)中:

引理 3.9。对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，有 $\beta(\mathcal{I}_n) = \mathcal{I}_{n-1}$。

证明。根据定义，对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，$f \in \mathcal{I}_n$ 当且仅当 $f_\ell(u_n) \in C_D(u_n)$。由引理3.8，这等价于 $\beta(f_\ell(u_n)) \in C_D(u_{n-1})$。根据引理 3.7 和 β的定义，我们有

$$\beta(f_\ell(u_n)) = \big(\beta(f)\big)_\ell(\beta(u_n)) = \big(\beta(f)\big)_\ell(u_{n-1}).$$

因此，我们看到，$f \in \mathcal{I}_n$ 当且仅当 $\big(\beta(f)\big)_\ell(u_{n-1}) \in C_D(u_{n-1})$；根据定义，这等价于 $\beta(f) \in \mathcal{I}_{n-1}$。由于 β 是双射，这就证明了该结果。

□

由此结果可推得:

命题 3.10. 自同构 $\beta\colon S\to S$ 定义于公式*(3.6)* 限制后得到一个$\Bbbk$-代数同态 $\beta|_R\colon R\to R$ 它是单射但不是满射。

证明。设 $x\in R$。由公式 (3.4)，这等价于对所有 $n\geq 1$，$x\in\mathcal{I}_n$。对于任意$n\geq 1$，$n+1\geq 1$，因此 $x\in\mathcal{I}_{n+1}$。由引理 3.9 可知，这意味着 $\beta(x)\in\mathcal{I}_n$。由于这对所有 $n\geq 1$ 都成立，我们可推得 $\beta(x)\in R$。由于 $\beta\colon S\to S$ 是一个单射的 $\Bbbk$-代数同态，将其限制到 R 后，仍是一个单射的 $\Bbbk$-代数同态。接下来证明 $\beta|_R\colon R\to R$ 不是满射。为此，考虑常数多项式 $f=v_0+t\cdot 0$。由于它是常数，对于任意 n，有 $f_\ell(u_n)=v_0$。而对于$n\neq 0$，由定理 2.1(3c)，v_0 与 u_n 可交换。因此，对所有 $n\geq 1$，都有$f\in\mathcal{I}_n$，从而 $f\in R$。然而，由于 $0\neq u_0\cdot v_0=-v_0\cdot u_0$，且 $\mathrm{char}(\Bbbk)\neq 2$，$v_0$与 u_0 不可交换。因此我们看到 $f\notin\mathcal{I}_0$。由于 $\beta\colon S\to S$ 是一个自同构，存在唯一的 $x\in S$ 使得 $\beta(x)=f$。由引理 3.9，事实 $f\notin\mathcal{I}_0$ 意味着 $x\notin\mathcal{I}_1$，从而 $x\notin R$。因此，$f\notin\mathrm{Im}(\beta|_R)$，所以 $\beta|_R$ 不是满射。□

我们定义

$$\sigma:R\to R,\quad \sigma:=\beta|_R. \tag{3.11}$$

3.3. **导子条件**。我们的下一个目标是证明 $1\in(R\colon\sigma(R))_r\cdot R$。为此，我们首先明确描述 σ 的像:

命题 3.12。该 $\Bbbk$-代数同态 $\sigma\colon R\to R$ 在方程 *(3.11)*中定义，满足:

$$\sigma(R)=R\cap\mathcal{I}_0,$$

其中 $\mathcal{I}_0$ 是方程 *(3.2)*中定义的理想化子。

证明。若 $x\in R$，则根据 R 的定义，对所有 $n\geq 1$，$x\in\mathcal{I}_n$，因此根据引理 3.9，有 $\sigma(x)\in\mathcal{I}_{n-1}$。于是，

$$\sigma(x)\in\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{I}_n=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{I}_n\right)\cap\mathcal{I}_0=R\cap\mathcal{I}_0.$$

反之，若 $y\in R\cap\mathcal{I}_0$，上述计算表明 $y\in\mathcal{I}_n$ 对所有 $n\geq 0$均成立，并令 $x=\beta^{-1}(y)\in S$，再次应用引理 3.9，我们看到 $x\in\mathcal{I}_n$ 对所有 $n\geq 1$均成立，因此 $x\in R$，并且 $\sigma(x)=\beta(x)=y$。□

回顾一下，$h_0=t+u_0\in S$。接下来，我们定义 S 的另外四个元素，它们将用于下面的计算:

$$r_1=\frac{1}{2}\cdot u_0^{-1}\cdot h_0,\quad s_1=1,\quad r_2=-\frac{1}{2}\cdot u_0^{-1}\cdot v_0^{-1}\cdot h_0,\quad s_2=v_0. \tag{3.13}$$

这些元素将分别充当 r_i和 s_i，如方程(1.4)所示。首先，为了证明这些元素属于 R，我们先证明一个关于属于理想化子 $\mathcal{I}_n$的一般结果:

引理 3.14. 设 $F\subseteq\mathbb{Z}$ 是一个有限集，设 $n\in\mathbb{Z}$，并假设 $n\notin F$。设 $f=\sum_{k=0}^{m}t^k\cdot a_k\in S$，并假设对于任意 $0\leq k\leq m$，都有 $a_k\in D_F$。那么 $f\in\mathcal{I}_n$。

证明。 这是因为根据定理 2.1(3)(c)，由于 $n \notin F$， D_F 的元素与u_n可交换，而且显然，如果 a_k 与 u_n可交换，那么 $u_n^k \cdot a_k$也如此。 □

取 $F = \{0\}$，我们有 r_1， s_1， r_2， s_2 的系数属于 D_F，因此由引理可知，对于所有 $n \neq 0$，都有 r_1， s_1， r_2， $s_2 \in \mathcal{I}_n$，特别是，

$$r_1, s_1, r_2, s_2 \in R. \tag{3.15}$$

引理 3.16。 元素 $h_0 = t + u_0 \in S$ 满足 $S \cdot h_0 \subseteq \mathcal{I}_0$。

证明。 任取 $f \in S$。我们可以写成 $f = a_0 + t \cdot a_1 + \cdots + t^n \cdot a_n$，其中 $a_i \in D$。令 $c = f_\ell(u_0)$。为检验 $f \cdot h_0 \in \mathcal{I}_0$，我们计算：

$$\begin{aligned}(f \cdot h_0)_\ell(u_0) &= \left((\sum_{k=0}^{n} t^k \cdot a_k) \cdot (t + u_0) \right)_\ell (u_0) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} t^{k+1} \cdot a_k + \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot a_k \cdot u_0 \right)_\ell (u_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_0^{k+1} \cdot a_k + \sum_{k=0}^{n} u_0^k \cdot a_k \cdot u_0 = u_0 \cdot c + c \cdot u_0.\end{aligned}$$

那么 $f \cdot h_0 \in \mathcal{I}_0$ 当且仅当 $u_0 \cdot c + c \cdot u_0$ 与 u_0 可交换，事实上：

$$u_0 \cdot (u_0 \cdot c + c \cdot u_0) = u_0^2 \cdot c + u_0 \cdot c \cdot u_0,$$

而

$$(u_0 \cdot c + c \cdot u_0) \cdot u_0 = u_0 \cdot c \cdot u_0 + c \cdot u_0^2.$$

由定理2.1(2)，元素 u_0^2 属于 D的中心，因此结论成立。 □

引理 3.17。 方程 r_1， r_2 中定义的元素*(3.13)*满足

$$R \cdot r_1 \subseteq \sigma(R), \quad R \cdot r_2 \subseteq \sigma(R).$$

证明。 如果 $r \in \{r_1, r_2\}$，根据它们的定义，我们有 $r \in D \cdot h_0$。因此，

$$R \cdot r \subseteq R \cdot D \cdot h_0 \subseteq S \cdot h_0 \subseteq \mathcal{I}_0,$$

其中，最后一个包含关系由引理 3.16得出。另一方面，由于 R 是一个环，且由方程 (3.15)， $r \in R$，显然 $R \cdot r \subseteq R$，因此我们得到

$$R \cdot r \subseteq R \cap \mathcal{I}_0 = \sigma(R),$$

其中，最后一个等式是命题 3.12。 □

现在我们可以实现关于 σ 的最终目标：

命题 3.18。 元素 r_1、 s_1、 r_2、 s_2 在方程 *(3.13)* 中定义，并满足以下性质：

(1) $r_1, s_1, r_2, s_2 \in R$. *(2)* $R \cdot r_1 \subseteq \sigma(R)$ 以及 $R \cdot r_2 \subseteq \sigma(R)$。*(3)* 存在等式 $r_1 \cdot s_1 + r_2 \cdot s_2 = 1$。

因此，按照方程 *(1.4)*之前讨论中使用的记号，有

$$1 \in (R : \sigma(R))_r \cdot R.$$

证明。（1）已在方程 （3.15）中得到证明，而（2）已在引理 3.17中得到证明。对于（3），我们计算：

$$\begin{aligned} r_1 \cdot s_1 + r_2 \cdot s_2 &= \frac{1}{2} \cdot u_0^{-1} \cdot h_0 - \frac{1}{2} \cdot u_0^{-1} \cdot v_0^{-1} \cdot h_0 \cdot v_0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot u_0^{-1} \cdot \left(h_0 - v_0^{-1} \cdot h_0 \cdot v_0\right). \end{aligned}$$

由于 $h_0 = t + u_0$，并且由于 t 位于 R 的中心，且 u_0 与 v_0 反交换，因此我们有

$$v_0^{-1} \cdot h_0 \cdot v_0 = v_0^{-1} \cdot (t + u_0) \cdot v_0 = t - u_0,$$

这表明

$$r_1 \cdot s_1 + r_2 \cdot s_2 = \frac{1}{2} \cdot u_0^{-1} \cdot (t + u_0 - t + u_0) = 1,$$

正如所述。最后，这意味着 $1 \in （R： \sigma（R））_r \cdot R$ 这一事实已在方程（1.4）之前的讨论中得到说明。□

3.4. 环 R的对称性。 我们的下一个目标是证明 $R \cong R^{\mathrm{op}}$ 作为 $\Bbbk$-代数彼此同构。这将是一个非平凡同构，而不是恒等映射，因为 R 当然不是交换的。这将使我们之后能够直接根据 R 是右诺特这一事实（我们将予以证明）推出它是左诺特的。

为构造这样的同构，回顾定理 2.1(5)，存在一个双射 $\Bbbk$-线性函数 $\iota\colon D \to D$，使得对于所有 x、$y \in D$，有 $\iota(x \cdot y) = \iota(y) \cdot \iota(x)$，并且 $\iota \circ \iota = 1_D$，以及对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，有 $\iota(u_n) = -u_n$，$\iota(v_n) = v_n$。如前所述，我们通过令 ι 为 $S \to S$上的映射（同样记为 ι）来延拓它

$$\iota\left(\sum_{k=0}^{n} t^k \cdot a_k\right) = \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot \iota(a_k). \tag{3.19}$$

那么，很明显，仍然有 $\iota\colon S \to S$ 是 $\Bbbk$-线性的，并且 $\iota \circ \iota = 1_S$，因此特别地，ι 是双射。为验证对于所有 x，$y \in S$都有 $\iota(x \cdot y) = \iota(y) \cdot \iota(x)$，只需在单项式上验证：若 $x = t^n \cdot a$，且 $y = t^m \cdot b$，其中 a，$b \in D$，则由于 t 是中心的，

$$\iota(x \cdot y) = \iota(t^n \cdot a \cdot t^m \cdot b) = t^{n+m} \cdot \iota(a \cdot b) = t^{n+m} \cdot \iota(b) \cdot \iota(a) = \iota(t^m \cdot b) \cdot \iota(t^n \cdot a) = \iota(y) \cdot \iota(x).$$

回顾一下，$g_n = t - u_n$ 和 $h_n = t + u_n$。对这些元素计算 ι 可得：

$$\iota(g_n) = t - \iota(u_n) = t + u_n = h_n, \quad \iota(h_n) = t + \iota(u_n) = t - u_n = g_n. \tag{3.20}$$

将这两个元素相乘，我们得到

$$g_n \cdot h_n = (t - u_n) \cdot (t + u_n) = t^2 - u_n^2 = h_n \cdot g_n, \tag{3.21}$$

并且由于 u_n^2 属于 D的中心，$g_n \cdot h_n = h_n \cdot g_n$ 是 S中心中的一个元素。这些计算将在下一个引理中使用：

引理 3.22. 对所有 $n \in \mathbb{Z}$，映射 $\iota\colon S \to S$ 在方程*(3.19)*中定义，且满足：

$$\iota(\mathcal{I}_n) = \mathcal{I}_n.$$

证明。 取 $f \in \mathcal{I}_n$。 根据命题3.3(1)，这意味着 $f \cdot g_n \cdot S \subseteq g_n \cdot S$。 因此，存在 $s \in S$，使得 $f \cdot g_n = g_n \cdot s$。 将 ι 应用于此等式，并利用 ι 反转乘法以及方程(3.20)，可得

$$h_n \cdot \iota(f) = \iota(s) \cdot h_n.$$

由此我们得到：

$$g_n \cdot (h_n \cdot \iota(f)) \cdot g_n = g_n \cdot (\iota(s) \cdot h_n) \cdot g_n.$$

由方程 (3.21) 可知， $g_n \cdot h_n = h_n \cdot g_n$ 是一个非零中心元；又由于 S 是一个整环，我们可以推得

$$\iota(f) \cdot g_n = g_n \cdot \iota(s).$$

这意味着 $\iota(f) \cdot g_n \cdot S \subseteq g_n \cdot S$；由命题 3.3(1) 可知， $\iota(f) \in \mathcal{I}_n$。 由于 $\iota \circ \iota = 1_S$，这意味着 $\iota(\mathcal{I}_n) = \mathcal{I}_n$。 □

现在我们可以证明所述的关于 R的对称关系：

命题 3.23。 映射 ι 是一个 $\Bbbk$-代数同构 $\iota: R \to R^{\mathrm{op}}$。

证明。 由于 ι 是一个 $\Bbbk$-代数同构 $\iota: S \to S^{\mathrm{op}}$，只需证明 ι 限制后给出一个双射 $R \to R$。 然而，由于$R = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n$，我们看到

$$\iota(R) = \iota(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \iota(\mathcal{I}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n = R,$$

其中第二个等式是因为 ι 是单射，而第三个等式由引理 3.22得出。 □

3.5. **诺特性**。 接下来，我们将证明 R 是双侧诺特的。

命题 3.24。 环 $S = D[t]$ 是双侧诺特的。

证明。 由于 D 是一个除环，它是双侧诺特的，因此这就是非交换希尔伯特基定理，它是定理 1.2.9(iv)]的一个特例。 □

回顾命题 3.3指出， $\mathcal{I}_n$ 是右理想 $g_n \cdot S$的理想化子。事实证明，这些右理想是极大的：

引理 3.25。 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，元素 $g_n = t - u_n \in S$ 满足 $g_n \cdot S$ 是 S的极大右理想。

证明。 由引理 3.1 的两部分可知，存在一个右 D-线性分解

$$S = g_n \cdot S \oplus D.$$

因此， $S/g_n \cdot S$ 是一个一维右 D-模，因而是单的。 □

理想化子 $\mathcal{I}_n$ 本身是右诺特的：

命题 3.26。 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，理想化子 $\mathcal{I}_n$ 是一个右诺特环。

证明。 根据命题 3.3， $\mathcal{I}_n$ 是右理想 $g_n \cdot S$的理想化子，而根据引理 3.25，这是一个极大右理想。由于根据命题3.24，环 S 是右诺特的， [19,定理 1.1.12(iii)]表明 $\mathcal{I}_n$ 是右诺特的。 □

我们希望分析 R 的右理想。下面的引理是实现这一目标时很快就会用到的工具。

引理 3.27. 设 $F \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个有限子集， $s \in S$ 是一个系数取自 D_F 的多项式。对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，考虑元素

$$q_m := \left(\prod_{n \in F, n \geq 1, n \neq m} g_n \cdot h_n \right) \in S.$$

那么，对于所有满足 $n \neq m$ 的 $n \geq 1$ ，都有 $q_m \cdot s \in \mathcal{I}_n$。此外，若 $s \in \mathcal{I}_m$，则 $q_m \cdot s \in R$。特别地，若 $m \leq 0$ ，则 $q_m \cdot s \in R$。

证明。 令 $n \geq 1$，并假设 $n \neq m$。若 $n \in F$，利用方程 (3.21) 中得到的 $g_n \cdot h_n = h_n \cdot g_n$ 在 S中为中心元素这一事实，我们可以写成

$$q_m \cdot s = g_n \cdot h_n \cdot q'_m \cdot s \in g_n \cdot S \subseteq \mathcal{I}_n,$$

其中 q'_m 是将 F 替换为 $F \setminus \{n\}$ 后得到的元素。另一方面，若 $n \notin F$，由于 $q_m \cdot s$ 的所有系数都属于 D_F，因此根据引理 3.14，有 $q_m \cdot s \in \mathcal{I}_n$。若 $s \in \mathcal{I}_m$，由于 q_m 在 S 中为中心元素，根据命题 3.3(2)， $q_m \in \mathcal{I}_m$，故 $q_m \cdot s \in \mathcal{I}_m$。因此，在这种情况下，对于所有 $n \geq 1$，都有 $q_m \cdot s \in \mathcal{I}_n$ ，故 $q_m \cdot s \in R$。最后，若 $m \leq 0$，则任意 $n \geq 1$ 都满足 $n \neq m$，所以我们已经证明，对于所有 $n \geq 1$，都有 $q_m \cdot s \in \mathcal{I}_n$ ，这表明 $q_m \cdot s \in R$。 □

我们用 $Z(D)$表示 D的中心，它是除环 D的一个子域。于是$Z(D)[t] \subseteq S$ 是 S的中心。事实证明， R 的每个右理想都与它相交：

引理 3.28. 设 J 是 R的一个非零右理想。那么 $J \cap Z(D)[t] \neq 0$。换言之， R 的任意非零右理想都包含一个系数属于 $Z(D)$的非零多项式。

证明。任取一个非零元素 $0 \neq f \in J$。接下来我们将自由使用定理 2.1 中记录的 D的若干性质。由于 f 是一个有限和，我们可以找到一个有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，使得 $f \in D_F[t]$。由于 D_F 是 Z_F上的有限维向量空间，因此 $D_F[t]$ 是一个有限生成自由 $Z_F[t]$-模。设 N为它的秩。由于$Z_F[t]$ 包含于 S的中心，映射 $\lambda\colon\ D_F[t] \to D_F[t]$ 由 $\lambda(-) = f \cdot -$给出，是 $Z_F[t]$-线性的；又由于 S 是一个整环， λ 是单射。因此 $c = \det(\lambda) \neq 0$。现在我们要在 λ上使用 Cayley–Hamilton 定理，它适用于交换整环 $Z_F[t]$。若 $x^N + \alpha_{N-1}x^{N-1} + \cdots + (-1)^N \cdot c$ 是 λ的特征多项式，我们便可推出元素 $y = f^{N-1} + \alpha_{N-1} \cdot f^{N-2} + \cdots + \alpha_1 \in D_F[t]$ 满足 $f \cdot y = (-1)^{N+1} \cdot c$。令

$$q_0 = \prod_{n \in F, n \geq 1} g_n \cdot h_n,$$

如引理 3.27所述。于是根据引理 3.27 以及 $m = 0$，我们有 $q_0 \cdot y \in R$。因此，由于 J 是 R的右理想，并且 $f \in J$，我们得出 $f \cdot q_0 \cdot y \in J$。但是 q_0 属于

R的中心，因此

$$f \cdot q_0 \cdot y = q_0 \cdot f \cdot y = q_0 \cdot (-1)^{N+1} \cdot c,$$

并且由于 $c \in Z_F[t]$ 和 $q_0 \in Z(D)[t]$ 都是非零元素，而 $Z(D)[t]$ 是整性环，我们得到 J 中所需的非零元素，该元素属于 $Z(D)[t]$。□

为了证明 R 是右诺特的，我们将在其中心子环 $Z(D)[t]$上进行局部到整体论证。这是一个域上的多项式环，因此 Krull 维数为 1。特别地，其素谱由零理想和极大理想组成，而这些极大理想恰好是 (f)，其中 f's 是 $Z(D)$上的所有不可约首一多项式。下一条结果将分析这类不可约多项式中的一个重要类别：

引理 3.29。对于每个 $n \geq 1$，元素 $g_n \cdot h_n = t^2 - u_n^2 \in Z(D)[t]$ 是一个不可约首一多项式。此外，如果 $n \neq m$、n、$m \geq 1$，则 $Z(D)[t]$ 中的素理想 $(g_n \cdot h_n)$ 和$(g_m \cdot h_m)$ 不相等。

证明。如果 $t^2 - u_n^2$ 可约，那么它应有某个根 $z \in Z(D)$，满足 $z^2 = u_n^2$。由于这样的 z 是一个中心元，这将意味着 $(u_n - z) \cdot (u_n + z) = 0$；而由于这是整环中的一个方程，我们便有 $z = \pm u_n$，这是不可能的，因为 u_n 不在 D 的中心中：它与 v_n 不可交换。接下来，令 n，$m \geq 1$，并假设 $(t^2 - u_n^2) = (t^2 - u_m^2)$ 是素理想。由于这两个都是首一多项式，这意味着 $u_n^2 = u_m^2$。由于 u_n 和 u_m 可交换，我们推得 $(u_n - u_m) \cdot (u_n + u_m) = 0$，从而 $u_n = \pm u_m$。对于 $n \neq m$ 而言这是不可能的，因为这样一来 u_n 与 v_m 可交换，却不与 v_n 可交换；而 $\pm u_m$ 与 v_n 可交换，却不与 v_m 可交换。因此，$n = m$。□

现在我们可以计算 R 在其中心子环 $Z(D)[t]$ 的每个非零素理想处的局部化。根据定义，若 T 是任意一个 $Z(D)[t]$-代数，且 $Z(D)[t]$ 包含于其中心，并且 $\mathfrak{p} \in \in$谱$(Z(D)[t])$，则令 $T_{\mathfrak{p}} := T \otimes_{Z(D)[t]} Z(D)[t]_{\mathfrak{p}}$。若 $T \subset U$ 是两个这样的 $Z(D)[t]$-代数，我们将利用局部化的平坦性，把 $T_{\mathfrak{p}}$ 视为 $U_{\mathfrak{p}}$ 的子环。

引理 3.30. 设 $0 \neq \mathfrak{p} \in$谱$(Z(D)[t])$。则以下结论成立：

(1) 若对所有 $n \geq 1$ 都有 $\mathfrak{p} \neq (t^2 - u_n^2)$，则 $R_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}$。
(2) 若对某个 $n \geq 1$ 有 $\mathfrak{p} = (t^2 - u_n^2)$，则 $R_{\mathfrak{p}} = (\mathcal{I}_n)_{\mathfrak{p}}$。

证明。

（1）由于 $R \subseteq S$，我们知道 $R_{\mathfrak{p}} \subseteq S_{\mathfrak{p}}$。为证明反向结论，只需证明 $S \subseteq R_{\mathfrak{p}}$。任取 $0 \neq s \in S$，并取某个有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，使得$s \in D_F[t]$。如引理 3.27 中，令

$$q_0 = \prod_{n \in F, n \geq 1} g_n \cdot h_n.$$

应用引理 3.27，$m = 0$，我们看到 $q_0 \cdot s \in R$。我们知道，对于任意$1 \leq n \in F$，$g_n \cdot h_n = t^2 - u_n^2 \notin \mathfrak{p}$，这是因为引理 3.29 证明了 $(t^2 - u_n^2)$ 是一个极大理想，而 $\mathfrak{p}$ 是另一个不同的极大理想。因此，$\mathfrak{p}$ 是素理想这一事实意味着 $q_0 \notin \mathfrak{p}$。我们看到 $s = q_0^{-1} \cdot q_0 \cdot s \in R_{\mathfrak{p}}$。

(2) 假设对于某个 $n \geq 1$， $\mathfrak{p} = (t^2 - u_n^2)$。由于 $R \subseteq \mathcal{I}_n$，我们知道$R_{\mathfrak{p}} \subseteq (\mathcal{I}_n)_{\mathfrak{P}}$。与之前一样，只需证明 $\mathcal{I}_n \subseteq R_{\mathfrak{p}}$。设 $s \in \mathcal{I}_n$，并设$F \subseteq \mathbb{Z}$ 为满足 $s \in D_F[t]$ 的有限集。取

$$q_n = \prod_{k \in F, k \geq 1, k \neq n} g_k \cdot h_k.$$

由于 $s \in \mathcal{I}_n$，根据引理 3.27，我们知道 $q_n \cdot s \in R$。根据引理 3.29，我们知道对于 $k \neq n$， $g_k \cdot h_k \notin \mathfrak{p}$，因为 $\mathfrak{p}$ 和 $(g_k \cdot h_k)$ 是两个不同的极大理想。因此，事实 $\mathfrak{p}$ 是素理想意味着 $q_n \notin \mathfrak{p}$，这说明 $s = (q_n)^{-1} \cdot q_n \cdot s \in R_{\mathfrak{p}}$。

□

现在我们可以证明 R 是局部右诺特的：

命题 3.31。对于每个极大理想 $0 \neq \mathfrak{p} \in$ 谱$(Z(D)[t])$，环 $R_{\mathfrak{p}}$ 是右诺特的。

证明。我们考虑引理 3.30 中的两种情形。首先假设对于所有$n \geq 1$都有 $\mathfrak{p} \neq (t^2 - u_n^2)$，因此根据引理 3.30，我们知道 $R_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}$。根据命题 3.24，我们知道 S 是右诺特的。根据 [19,命题 2.1.16(iii)]，$R_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}$的每个右理想 J 都具有 $J = (J \cap S) \cdot S_{\mathfrak{p}}$的形式。由于 $J \cap S$ 是有限生成的，这显然也是有限生成的。接下来，假设对于某个 $n \geq 1$有 $\mathfrak{p} = (t^2 - u_n^2)$。那么引理 3.30 告诉我们 $R_{\mathfrak{p}} = (\mathcal{I}_n)_{\mathfrak{P}}$。由于根据命题 3.26，环 $\mathcal{I}_n$ 是右诺特的，重复本证明第一部分中的相同论证可知，在此情形下 $R_{\mathfrak{p}}$ 同样是右诺特的。□

接下来，我们证明一个适用于当前情形的关于诺特性的局部到整体结论：

命题 3.32。设 B 是一个非域的交换主理想整环，设 C是一个环，并假设 B 包含于 C的中心中。假设对于 B的任意极大理想 $\mathfrak{m}$，都有 $C_{\mathfrak{m}} := C \otimes_B B_{\mathfrak{m}}$ 是右诺特环。进一步假设，对于 C的任意非零右理想 J，都有 $J \cap B \neq 0$。则 C 是右诺特的。

证明。设 J 是 C的一个非零右理想。我们必须证明 J 是有限生成的。根据假设，存在一个非零元素 $b \in J$，使得 $b \in B$。如果 b 是单位元，则 $J = (1)$，从而结论成立。否则，利用 B 是唯一分解整环这一事实，将 b分解为不同素理想的乘积

$$b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}, \quad e_i \geq 1, \quad i \neq j \implies (p_i) \neq (p_j).$$

对于任意 $1 \leq i \leq n$， $\mathfrak{m}_i = (p_i)$，记作.....。注意， $\mathfrak{m}_i$ 是互不相同的极大理想，因此根据 B上的中国剩余定理（[1, 命题 1.10]），存在一个 B-模的同构：

$$B/b \cong \prod_{i=1}^{n} B/(p_i^{e_i}).$$

应用 $-\otimes_B C$，我们得到一个右侧 C-模的同构

$$C/(b\cdot C)\cong\prod_{i=1}^{n}C/(p_i^{e_i}\cdot C). \tag{3.33}$$

对于每个 $1\leq i\leq n$，注意 $B/(p_i^{e_i})$ 是一个 $B_{\mathfrak{m}_i}$-模。事实上，若 $x\notin\mathfrak{m}_i$，则 $\gcd(x,p_i^{e_i})=1$，因此存在 $u,v\in B$，使得 $u\cdot x+v\cdot p_i^{e_i}=1$，这表明 x 在 $B/(p_i^{e_i})$ 中可逆。这意味着

$$C/(p_i^{e_i}\cdot C)=C_{\mathfrak{m}_i}/(p_i^{e_i}\cdot C_{\mathfrak{m}_i})$$

是 $C_{\mathfrak{m}_i}=B_{\mathfrak{m}_i}\otimes_B C$ 上的右模，并且显然它在其上有限生成。由于根据假设 $C_{\mathfrak{m}_i}$ 是右诺特的，我们推得 $C/(p_i^{e_i}\cdot C)$ 是诺特右$C_{\mathfrak{m}_i}$-模。但 $C/(p_i^{e_i}\cdot C)$ 的子 C-模与子 $C_{\mathfrak{m}_i}$-模相同，因为上面的元素 u 在它们上的作用是 x^{-1}，因此我们推得 $C/(p_i^{e_i}\cdot C)$ 是诺特右 C-模。因此，方程 (3.33) 表明 $C/(b\cdot C)$ 作为右C-模也是诺特的。这意味着其子模 $J/(b\cdot C)$ 是有限生成右 C-模。右 C-模的正合序列

$$0\to b\cdot C\to J\to J/(b\cdot C)\to 0$$

那么可推出， J 作为 C上的右模是有限生成的。因此， C 是右诺特的。□

最后，我们可以证明 R 是诺特的：

定理 3.34。 环 R 由方程 *(3.4)* 构造，是一个双侧诺特环。

证明。 首先，我们证明 R 是右诺特的。为此，我们来检验环R 是否满足命题 3.32中的条件。该命题中的非域主理想整环 B将取为 $B=Z(D)[t]$，我们知道它是 R 的子环，且包含于其中心。关于 R 在 B 的极大理想处的所有局部化均为右诺特的事实，见命题 3.31；关于 R 的任意非零右理想都与B 有非平凡交的事实，见引理 3.28。因此，我们可推得 R 是右诺特的。根据命题 3.23，存在环同构 $R\cong R^{\mathrm{op}}$，由此可推得 R 也是左诺特的。□

3.6. **遗传性质**。 本节的最终目标是证明 R 是一个遗传环，也就是说，其整体维数至多为 1。由于我们已经证明 R 是双侧诺特环，根据 Auslander 定理 [2, 推论 5], 的整体维数具有左右对称性，因此只需证明 R 是右遗传的。基本策略将与诺特性一节中的策略相同：我们将证明该结论在 $Z(D)[t]$的极大谱上局部成立，然后证明一个局部到整体的结果。该策略的优势在于，我们已经在引理 3.30中计算出了 R 在这些极大理想处的所有局部化。

命题 3.35. 环 S 是右遗传的。

证明. 环 S 是除环 D上的多项式环。 D作为除环，其右整体维数为 0，因此根据 [19, 定理 7.5.3(iii)](应用于 $\sigma = 1_D$)，可知 S 的右整体维数为 1。 □

接下来，我们证明这些理想化子是右遗传的。

命题 3.36. 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，理想化子 $\mathcal{I}_n$ 是一个右遗传环。

证明. 令 $J = (t - u_n) \cdot S$。根据引理 3.25， J是 S的极大右理想。我们刚刚在命题 3.35 中看到 S 是右遗传的。根据 [19, 定理 5.5.8],，这意味着相对于任意同极大右理想， S 的理想化子也是右遗传的。同极大右理想的概念定义于 [19, 5.5。2], 其中说明了极大右理想是同极大的。因此我们推得，相对于 J， S的理想化子是右遗传的，并且根据命题 3.3，这恰好就是 $\mathcal{I}_n$。 □

现在我们可以证明，在 $Z(D)[t]$ 的极大理想处局部化 R 是右遗传的:

命题 3.37。 对于每个极大理想 $0 \neq \mathfrak{p} \in$ 谱$(Z(D)[t])$，环 $R_{\mathfrak{p}}$ 都是右遗传的。

证明。 根据引理 3.30，环 $R_{\mathfrak{p}}$ 是以下二者之一的中心局部化： S 或 $\mathcal{I}_n$。 S 和 $\mathcal{I}_n$ 都由命题 3.35 和命题 3.36 可知是右遗传的。因此，结合 [19, 推论 7.4。3], （该推论指出，中心局部化不会增加右整体维数），即可得到结论。 □

现在给出局部到整体的结果:

命题 3.38。 设 B 是一个交换环， C 是一个右诺特环，并假设 B 包含于 C 的中心中。若对于 B 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，都有 $C_{\mathfrak{m}} := C \otimes_B B_{\mathfrak{m}}$ 是右遗传的，则 C 是右遗传的。

证明。 设 J 是 C 的一个右理想。根据 [17, 命题 5.14], , 只需证明 J 是 C 上的投射模。等价地，即证明 $\mathrm{Ext}^1_C(J, -) = 0$。设 M 是任意一个右 C-模。下面的论证是标准的局部化论证，但由于在这种非交换情形下很难找到参考文献，我们给出完整的论证。为了计算 $\mathrm{Ext}^1(J, M)$，我们取 J 在 C 上的一个投射分解。 C 是右诺特的且 J 是有限生成的，这一事实意味着我们可以找到这样的分解

$$\cdots \to P^{-1} \to P^0 \to J \to 0$$

使得每个 P^i 都是有限生成投射的右 C-模。将函子 $\mathrm{Hom}_C(-, M)$ 应用于该分解，得到一个复形

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(P^0, M) \to \mathrm{Hom}_C(P^{-1}, M) \to \dots$$

B-模。取一个极大理想 $\mathfrak{m} \subseteq B$。对于每个 $i \leq 0$， P^i 是有限生成的这一事实意味着存在自然同构

$$\mathrm{Hom}_C(P^i, M) \otimes_B B_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Hom}_{C_{\mathfrak{m}}}(P^i_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}).$$

事实上，如果 $P^i = C^n$ 对于某个 n 成立，这一点显然；一般情形则由以下事实推出：这两个函子都是可加的，并且 P^i 是某个 C^n的直和项。取上同调，并利用 $B_{\mathfrak{m}}$ 在 B上是平坦的这一事实，我们由此得到 B-模 $\mathrm{Ext}^1_C(J,\ M)$ 满足：

$$\left(\mathrm{Ext}^1_C(J,M)\right)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Ext}^1_{C_{\mathfrak{m}}}(J_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}).$$

根据假设，环 $C_{\mathfrak{m}}$ 是右遗传的，因此其右理想 $J_{\mathfrak{m}}$ 是其上的投射模。因此，$\mathrm{Ext}^1_{C_{\mathfrak{m}}}(J_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) = 0$。由此，$B$-模 $\mathrm{Ext}^1_C(J,M)$ 在极大理想处的所有局部化都为零，所以根据 [1, 命题 3.8], , 我们可推得 $\mathrm{Ext}^1_C(J,M) = 0$。因此，$J$ 在 C上是投射的，这意味着 C 是右遗传的。□

最后，R 本身是一个遗传环：

定理 3.39。 由方程 R 构造的环 *(3.4)* 是一个遗传环。

证明。 根据命题 R 是右遗传的这一事实可由命题 3.38 和命题 3.37，取 $B = Z(D)[t]$。根据定理 3.34，R 是诺特的，因此根据 Auslander 定理，[2,推论 5], 其左整体维数和右整体维数相同，因此 R 也是左遗传的。□

3.7. **主要结果**。 所有准备工作均已完成，现在终于可以证明本节的主要结果：

定理 3.40。 设 $\Bbbk$ 为任意一个满足 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ 的域。则存在一个 $\Bbbk$-代数 R，满足以下条件：

(1) R 是一个非除环的整环。*(2)* R 是一个双侧诺特环。*(3)* R 是遗传的。*(4)* 存在一个单射 $\Bbbk$-代数同态 $\sigma\colon R \to R$，它不是满射，并且满足 $1 \in (R\colon \sigma(R))_r \cdot R$。

证明。取 R 为公式 (3.4) 中构造的环。由命题 3.5，R 是一个$\Bbbk$-代数，且为整环而非除环。由定理 3.34，R 是双侧诺特环；由定理 3.39，R 是左遗传且右遗传的。取 $\sigma\colon R \to R$为公式 (3.11) 中定义的 $\Bbbk$-代数同态。由命题 3.10，σ是单射但不是满射；最后一个条件 $1 \in (R\colon \sigma(R))_r \cdot R$ 已在命题 3.18 中证明。□

推论 3.41。 令 $\Bbbk$ 为任意域，且满足 特征$(\Bbbk) \neq 2$。则存在一个 $\Bbbk$-代数 A，满足：

(1) A 是双侧诺特环。*(2)* 存在等式

$$\mathrm{inj\,dim}_A({}_AA) = 1, \quad \mathrm{inj\,dim}_A(A_A) = +\infty.$$

证明。 取一个 $\Bbbk$-代数 R 以及一个 $\Bbbk$-代数映射 $\sigma\colon R \to R$ 如定理3.40中所述。令 $A = R[x;\ \sigma]/(x^2)$ 如方程 (1.1)所示。由于 σ 是 $\Bbbk$-线性的，因此 A 是一个$\Bbbk$-代数，结论现由定理 1.10 和定理 3.40得出。□

推论 3.42。 推论 A 中的代数 *3.41* 不是双侧 *Artin* 环。

证明。 根据 [9, 推论], , 一个 A 双侧 Artin 环$_A$若其内射维数为$_AA(\leq 1)$，则其内射维数为$_A(A_A)$ $\leq$1。由于内射维数为$_A(A_A)$ $=+\infty$， A 不可能是双侧 Artin 环。□

注 3.43。 可以直接证明 A 既不是左侧 Artin 环，也不是右侧 Artin 环，但这并非必要，因此省略证明。

4. 对偶化复形

对偶化复形最初由 Grothendieck 引入，并由 Hartshorne 在[7] 交换代数和代数几何的背景下加以记录。后来，Yekutieli 将其引入非交换代数 [30], , 并由 Yekutieli-Zhang [32, 33], 、Van den Bergh [29], 、Iyengar-Krause [12], 、Neeman [21] 和 Positselski [23]在该背景下进行了实质性发展。本节的目标是说明，代数 A 由推论 3.41给出，具有一个对偶化复形。这将在下一节中用于获得关于A的进一步结果。

对偶化复形是导出范畴中的对象。关于导出范畴的基础知识，请参阅 [14, 31] 。对于环 B，我们用 D($_B$Mod) 表示左侧 B-模的无界导出范畴。特别地，若 B 是域 $\Bbbk$ 上的 $\Bbbk$-代数，则 D($_{B\otimes_\Bbbk B^{\mathrm{op}}}$ Mod) 中的对象是 B-B 双模复形。

我们将限制函子定义为

$$(4.1)\qquad {}_B\operatorname{Rest} : {}_{B\otimes_\Bbbk B^{\mathrm{op}}}\operatorname{Mod} \to {}_B\operatorname{Mod}, \quad \operatorname{Rest}_B : {}_{B\otimes_\Bbbk B^{\mathrm{op}}}\operatorname{Mod} \to \operatorname{Mod}_B$$

分别忘却双模的右侧和左侧结构的函子。这些函子自然地扩展到双模复形以及 D($_{B\otimes_\Bbbk B^{\mathrm{op}}}$ Mod) 上（因为它们是正合的）。

对于假设为双侧诺特的 $\Bbbk$-代数 B，我们将对偶化复形 ω 定义为 D($_{B\otimes_\Bbbk B^{\mathrm{op}}}$ Mod) 中满足以下条件的对象：

(1) 限制映射 ${}_B\operatorname{Rest}(\omega)$ 和 $\operatorname{Rest}_B(\omega)$ 的上同调有界。(2) 对所有 $n\in\mathbb{Z}$，左侧 B-模 $\mathrm{H}^n({}_B\operatorname{Rest}(\omega))$ 都是有限生成的左侧 B-模。(3) 对所有 $n\in\mathbb{Z}$，右侧 B-模 $\mathrm{H}^n(\operatorname{Rest}_B(\omega))$ 都是有限生成的右侧 B-模。(4) 有 $\operatorname{inj\,dim}_B({}_B\operatorname{Rest}(\omega)) < \infty$, 且 $\operatorname{inj\,dim}_B(\operatorname{Rest}_B(\omega)) < \infty$。(5) 齐次映射

$$B \to \mathrm{R}\operatorname{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(\omega,\omega), \quad B^{\mathrm{op}} \to \mathrm{R}\operatorname{Hom}_B(\omega,\omega)$$

是 D($_{B\otimes_\Bbbk B^{\mathrm{op}}}$ 模) 中的同构。

该定义的要点在于：如果 ω 是 $\Bbbk$-代数 B 上的对偶化复形，那么根据[32, 命题 1.3], , 对于任意左侧 B-模的复形 M，若对所有 n，$\mathrm{H}^n(M)$ 都是有限生成的，则导出对偶映射

$$M \to \mathrm{R}\operatorname{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(\mathrm{R}\operatorname{Hom}_B(M,\omega),\omega)$$

是 D($_B$ 模) 中的同构。对于右侧 B-模的复形，也有类似结果。

在证明推论 A中的代数 3.41 具有对偶化复形之前，我们必须先收集关于定理 R 中构造的环 3.40的更多事实。

4.1. **导子** $(R:\ \sigma(R))_r$**.** 本小节可视为第 3.3 节的延续。特别是，我们将直接使用该节中设定的记号。我们的目标是证明左理想

$$(R:\sigma(R))_r=\{x\in R\mid R\cdot x\subseteq\sigma(R)\}$$

是由.....生成的主左理想

$$\pi_0=g_0\cdot v_0=(t-u_0)\cdot v_0=t\cdot v_0-u_0\cdot v_0. \tag{4.2}$$

映射 $\beta,\iota:\ S\to S$ 分别在第 3.2 节和第 3.4 节中定义。

引理 4.3。 作为映射，有等式 $\iota\circ\beta=\beta\circ\iota$ *as* $S\to S$。

证明。 我们可以将 $\iota\circ\beta$ 和 $\beta\circ\iota$ 视为 $\Bbbk$-代数映射 $S\to S^{\mathrm{op}}$。令

$$T=\{x\in S\mid \iota\circ\beta(x)=\beta\circ\iota(x)\}.$$

显然， T 是 S的一个子 $\Bbbk$-代数。对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\iota(\beta(u_n))=\iota(u_{n-1})=-u_{n-1},\quad \beta(\iota(u_n))=\beta(-u_n)=-u_{n-1},$$

类似地

$$\iota(\beta(v_n))=\iota(v_{n-1})=v_{n-1},\quad \beta(\iota(v_n))=\beta(v_n)=v_{n-1}.$$

因此，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$、 u_n， $v_n\in T$。由于 $\iota\circ\beta$和 $\beta\circ\iota$都反转积，它们保持逆元，因此 $T\cap D$ 是一个除环。由于 D 作为一个除环由 u_n、 v_n 生成，我们推出 $D\subseteq T$。 β、 ι 的构造进一步表明:

$$\iota(\beta(t))=t=\beta(\iota(t)),$$

因此 $t\in T$。由于 S 由 D 和 t作为代数生成，我们推出 $T=S$。 □

命题 4.4。 设 f、 $g\in S$，并设 $d\in D$。假设 $f_\ell(d)\ \cdot d=d\cdot f_\ell(d)$。则

$$(f\cdot g)_\ell(d)=f_\ell(d)\cdot g_\ell(d).$$

证明。 设 $c=f_\ell(d)$。首先假设 $c\neq 0$。那么根据 [18, 的左侧版本， 命题 16.3], ， 我们有

$$(f\cdot g)_\ell(d)=f_\ell(d)\cdot g_\ell(c^{-1}\cdot d\cdot c).$$

由于假设 $c\cdot d=d\cdot c$， 我们推得 $c^{-1}\cdot d\cdot c=d$， 从而得到结论。另一方面，如果 $c=0$， 根据 [18, 命题 16.2] 的左侧版本， $f\in(t-d)\cdot S$， 因此 $f\cdot g\in(t-d)\ \cdot S$。所以， 再次利用 [18, 命题 16.2] ， 我们看到 $(f\cdot g)_\ell(d)$ 也为 0。□

延伸方程 (4.2)， 对于 $n\in\mathbb{Z}$， 令

$$\pi_n:=g_n\cdot v_n=(t-u_n)\cdot v_n\in S. \tag{4.5}$$

下面给出关于这个元素的一些初等计算:

引理 4.6。 上面定义的元素 π_n 满足:

(1) 有等式： $\pi_n = v_n \cdot h_n = v_n \cdot (t + u_n)$。*(2)* 右理想 $g_n \cdot S = (t - u_n) \cdot S$ 与 $\pi_n \cdot S$ 重合。*(3)* 对所有 $n \geq 0$，元素 π_n 属于 R。

证明。

(1) 确实，由于 t 位于 S 的中心，且 u_n， v_n 反交换：

$$(t - u_n) \cdot v_n = t \cdot v_n - u_n \cdot v_n = v_n \cdot t + v_n \cdot u_n = v_n \cdot (t + u_n).$$

(2) 右理想 $g_n \cdot S$ 和 $g_n \cdot v_n \cdot S$ 重合，因为 v_n 是 S 中的单位元。
(3) 如果 $n \geq 1$，那么 $\pi_n \in D_{\{n\}}[t]$，因此由引理 3.14， $\pi_n \in \mathcal{I}_m$ 对所有 $m \neq n$成立。由命题 3.3(2)， $g_n \cdot S \subseteq \mathcal{I}_n$，所以 (2) 表明 $\pi_n \in \mathcal{I}_n$。因此，根据R的定义， $\pi_n \in R$。最后，如果 $n = 0$，那么 $\pi_0 \in D_{\{0\}}[t]$ ，而引理3.14 推出 $\pi_0 \in \mathcal{I}_n$对所有 $n \geq 1$成立，因此 $\pi_0 \in R$。

□

特殊元素 π_m 满足消去性质：

引理 4.7。 对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，给定 $s \in S$，如果 $\pi_m \cdot s \in R$，那么 $s \in \mathcal{I}_n$ 对于所有满足 $n \neq m$的 $n \geq 1$ 均成立。此外，如果 $m \leq 0$，那么 $s \in R$。

证明。 根据 π_m的定义，对于所有满足 $n \neq m$的 $n \geq 1$ ，我们有：

$$(\pi_m)_\ell(u_n) = (t \cdot v_m - u_m \cdot v_m)_\ell(u_n) = u_n \cdot v_m - u_m \cdot v_m = (u_n - u_m) \cdot v_m.$$

该元素非零，因为 u_n 与 v_m 可交换，但 u_m 不与之可交换。此外，它与 u_n 可交换，因为 u_m 和 v_m 都与 u_n可交换，因为 $n \neq m$。令 $f = \pi_m$， $g = s$以及 $d = u_n$。于是根据命题 4.4：

$$(\pi_m \cdot s)_\ell(u_n) = (\pi_m)_\ell(u_n) \cdot s_\ell(u_n). \tag{4.8}$$

$\pi_m \cdot s \in R$ 的假设特别意味着 $\pi_m \cdot s \in \mathcal{I}_n$，因此 $\mathcal{I}_n$ 的定义告诉我们

$$(\pi_m \cdot s)_\ell(u_n) \in C_D(u_n).$$

我们已经看到 $(\pi_m)_\ell(u_n)$ 是除环 $C_D(u_n)$中的非零元素，因此由方程 (4.8)可得

$$s_\ell(u_n) = ((\pi_m)_\ell(u_n))^{-1} \cdot (\pi_m \cdot s)_\ell(u_n)$$

也属于 $C_D(u_n)$。根据 $\mathcal{I}_n$ 的定义，这意味着 $s \in \mathcal{I}_n$。由于这对所有满足 $n \neq m$ 的 $n \geq 1$ 都成立，第一个结论得证。若 $m \leq 0$，则每个 $n \geq 1$ 都满足 $n \neq m$，这意味着对所有 $n \geq 1$， $s \in \mathcal{I}_n$ 。因此， $s \in R$。□

以上内容足以计算 $(R : \sigma(R))$ 的左导体：

命题 4.9。 对于元素 π_0 由方程*(4.2)*定义，右理想有如下等式：

$$\{r \in R \mid r \cdot R \subseteq \sigma(R)\} = \pi_0 \cdot R.$$

证明。 注意，由引理 4.6(2, 3),

$$\pi_0 \cdot R \subseteq R \cap \pi_0 \cdot S = R \cap g_0 \cdot S.$$

根据命题 3.3（2），我们知道 $g_0 \cdot S \subseteq \mathcal{I}_0$，因此得到

$$\pi_0 \cdot R \subseteq R \cap \mathcal{I}_0 = \sigma(R),$$

其中等式是命题 3.12。因此，若 $r \in R$ 满足 $r \in \pi_0 \cdot R$，则

$$r \cdot R \subseteq \pi_0 \cdot R \subseteq \sigma(R),$$

这就得到

$$\pi_0 \cdot R \subseteq \{r \in R \mid r \cdot R \subseteq \sigma(R)\}.$$

反过来，取 $r \in R$ 使得 $r \cdot R \subseteq \sigma(R)$。特别地，由于 $1, v_0 \in R$，我们推得 $r, r \cdot v_0 \in \sigma(R) = R \cap \mathcal{I}_0$。因此， $r, r \cdot v_0 \in \mathcal{I}_0$。令 $e = r_\ell(u_0)$。由 $r \in \mathcal{I}_0$这一事实可知， e 与 u_0可交换。现在我们对 $f = r$、 $g = v_0$ 和$d = u_0$应用命题 4.4。这给出：

$$(r \cdot v_0)_\ell(u_0) = r_\ell(u_0) \cdot v_0 = e \cdot v_0.$$

但是 $r \cdot v_0$ 也属于 $\mathcal{I}_0$，因此我们推得 $e \cdot v_0$ 与 u_0可交换。另一方面，直接计算得到：

$$(e \cdot v_0) \cdot u_0 = -e \cdot u_0 \cdot v_0 = -u_0 \cdot (e \cdot v_0).$$

由于 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$，这意味着 $e \cdot (v_0 \cdot u_0) = 0$；又由于 D 是整环且$v_0 \cdot u_0 \neq 0$，我们推得 $e = 0$。由引理 3.1， $e = r_\ell(u_0) = 0$ 这一事实意味着$r \in g_0 \cdot S = \pi_0 \cdot S$，其中右理想相等是引理 4.6(2) 的结论。我们得到存在某个 $s \in S$ 使得 $r = \pi_0 \cdot s$。由于 $\pi_0 \cdot s = r \in R$，根据引理 4.7 的消去性质，我们可知 $s \in R$。这表明 $r = \pi_0 \cdot s \in \pi_0 \cdot R$，证毕。□

我们利用这一点来计算右导子，这是本小节的主要结果：

命题 4.10. 对于 π_0 中定义的元素 *(4.2)*，有如下左理想等式：

$$\{r \in R \mid R \cdot r \subseteq \sigma(R)\} = R \cdot \pi_0.$$

证明。 考虑等式

$$\{r \in R \mid r \cdot R \subseteq \sigma(R)\} = \pi_0 \cdot R, \tag{4.11}$$

在命题 4.9中证明了这一点，并将映射 ι 应用于等式两边。首先注意到

$$\iota(\pi_0) = \iota(t \cdot v_0 - u_0 \cdot v_0) = t \cdot v_0 - u_0 \cdot v_0 = \pi_0.$$

由于 ι 是可加的且反转乘法，我们可以推出

$$\iota(\pi_0 \cdot R) = \iota(R) \cdot \iota(\pi_0) = R \cdot \pi_0, \tag{4.12}$$

其中最后一个等号成立是因为 $\iota : R \to R$ 是满射。取 $r \in R$ 使得$R \cdot r \subseteq \sigma(R)$。应用 ι，我们得到

$$\iota(r) \cdot R \subseteq \iota(\sigma(R)) = \sigma(\iota(R)) = \sigma(R).$$

这里，第一个包含映射成立是因为 ι 反转了乘法，第二个等号由引理4.3以及 σ 是 β的限制映射这一事实得出，最后一个则是因为 $\iota: R \to R$ 是满射。反过来，若 $\iota(r) \cdot R \subseteq \sigma(R)$，应用 ι，并利用 $\iota \circ \iota = 1_R$这一事实，我们看到

$$R \cdot r \subseteq \iota(\sigma(R)) = \sigma(R).$$

这表明 ι 将 $\{r \in R \mid r \cdot R \subseteq \sigma(R)\}$ 映到 $\{r \in R \mid R \cdot r \subseteq \sigma(R)\}$上。由此以及方程 (4.11) 和方程 (4.12) 可得该结果。□

4.2. 自同构 $\tau: R \to R$**.** 我们的下一个目标是构造一个 $\Bbbk$-线性自同构$\tau: R \to R$，使其具有特殊性质：对所有 $r \in R$，$\tau(\sigma(r)) \cdot \pi_0 = \pi_0 \cdot \sigma(\tau(r))$。这是我们构造代数 $A = R[x; \sigma]/(x^2)$上的对偶化复形所需的最后一个关于 R的条件。

对于 $n \geq 0$，元素 $\pi_n \in R$ 是在方程 (4.5)中定义的。对于任意 $N \geq 1$，现在定义一个新元素：

$$P_N := \pi_1 \cdot \cdots \cdot \pi_N \in R, \tag{4.13}$$

并且也设为 $P_0 = 1$。以下是我们需要的关于 π_n 和 P_N 的一些基本性质：

引理 4.14. 对所有 $n \geq 0$，以下结论成立：

(1) 有 $\beta(\pi_n) = \pi_{n-1}$。*(2)* 若 $F \subseteq \mathbb{Z}$ 是满足 $n \notin F$的任意有限集，则 π_n 与$D_F[t]$的每个元素都可交换。*(3)* 对于 $n \neq m$、n、$m \geq 0$，元素 π_n和 π_m 可交换。*(4)* 若 $n \geq 1$，则有 $\beta(P_n) = \pi_0 \cdot P_{n-1}$，且 π_0 与 P_{n-1}可交换。

证明。

(1) 根据定义，

$$\beta(\pi_n) = \beta(t \cdot v_n - u_n \cdot v_n) = t \cdot \beta(v_n) - \beta(u_n) \cdot \beta(v_n) = t \cdot v_{n-1} - u_{n-1} \cdot v_{n-1} = \pi_{n-1}.$$

(2) 根据定理2.1(3)(c)，我们知道 u_n 和 v_n 各自与 $D_F[t]$的每个元素可交换，并且 t属于 $D_F[t]$的中心，因此我们推得 $\pi_n = t \cdot v_n - u_n \cdot v_n$也与 $D_F[t]$的每个元素可交换。

(3) 取 $F = \{m\}$，我们有 $\pi_m \in D_F[t]$，因此 (3) 由 (2) 得出。

(4) 利用 β 的乘法性和 (1)，计算：

$$\beta(P_n) = \beta(\pi_1 \cdot \cdots \cdot \pi_n) = \beta(\pi_1) \cdot \cdots \cdot \beta(\pi_n) = \pi_0 \cdot \pi_1 \cdot \cdots \cdot \pi_{n-1} = \pi_0 \cdot P_{n-1}.$$

π_0 与 P_{n-1} 可交换这一事实由 (3) 得出。

□

元素 g_n，h_n 满足一个交换性质，很快将会用到：

引理 4.15。 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和任意 $s \in S$，$s \cdot g_n \in g_n \cdot S$ 当且仅当 $h_n \cdot s \in S \cdot h_n$。

证明。 由方程 (3.21) 可知 $g_n \cdot h_n = h_n \cdot g_n$ 是 S中的中心元素。首先假设 $s \cdot g_n \in g_n \cdot S$。于是 $s \cdot g_n = g_n \cdot s'$ 对某个 $s' \in S$成立。将其与 h_n 左侧相乘，

利用 $g_n \cdot h_n$的中心性，我们可以约去 g_n 并得到 $h_n \cdot s = s' \cdot h_n$，因此 $h_n \cdot s \in S \cdot h_n$。逆向蕴含的证明完全相同，只需将 g_n 和 h_n的角色互换即可。□

接下来，我们确定由 π_n 生成的单侧理想。这需要一些简单但冗长的计算：

引理 4.16. 对于任意 $n \geq 1$，有如下等式：

$$\pi_n \cdot R = R \cap g_n \cdot S \cap S \cdot h_n = R \cdot \pi_n.$$

证明. 令 $J := R \cap g_n \cdot S \cap S \cdot h_n$。步骤 1： $\pi_n \cdot R \subseteq J$：由于 $\pi_n \in R$，我们知道 $\pi_n \cdot R \subseteq R$。其次， $R \subseteq S$ 推出 $\pi_n \cdot R \subseteq \pi_n \cdot S = g_n \cdot S$，其中最后一个等式由引理 4.6(2) 得出。最后，我们证明 $\pi_n \cdot R \subseteq S \cdot h_n$：取 $r \in R$。特别地，$r \in \mathcal{I}_n$。由引理 4.15，$h_n \cdot r \in S \cdot h_n$。由于 $\pi_n = v_n \cdot h_n$ 由引理 4.6(1) 得出，因此有$\pi_n \cdot r = v_n \cdot h_n \cdot r \in S \cdot h_n$。这表明 $\pi_n \cdot R \subseteq S \cdot h_n$。

步骤 2： $J \subseteq \pi_n \cdot R$：取 $a \in J$。 $a \in g_n \cdot S$这一事实意味着，对于某个$s \in S$，有 $a = \pi_n \cdot s$。由引理 4.7 可知，对于所有满足 $m \neq n$的 $m \geq 1$ ，都有 $s \in \mathcal{I}_m$。这里可以应用引理 4.7，因为 $\pi_n \cdot s = a \in R$。此外，由于 $a = \pi_n \cdot s = v_n \cdot h_n \cdot s$ 且$a \in S \cdot h_n$，我们得到 $h_n \cdot s = v_n^{-1} \cdot a \in S \cdot h_n$，因此由引理 4.15 可得 $s \in \mathcal{I}_n$。于是，对于所有 $m \geq 1$，都有 $s \in \mathcal{I}_m$，从而得到 $s \in R$，所以 $a = \pi_n \cdot s \in \pi_n \cdot R$。

步骤 3： $R \cdot \pi_n = J$：由命题 3.23， $\iota(R) = R$。由于 ι 反转乘法，并且$\iota(g_n) = h_n$，$\iota(h_n) = g_n$，它将 $g_n \cdot S$映到 $S \cdot h_n$，反之亦然，因此 $\iota(J) = J$。此外，

$$\iota(\pi_n) = \iota(v_n) \cdot \iota(g_n) = v_n \cdot h_n = \pi_n.$$

因此，根据步骤 1 和 2，我们得到 $R \cdot \pi_n = \iota(\pi_n \cdot R) = \iota(J) = J$。 □

上述结果使我们能够定义一个 $\Bbbk$-代数自同构 $R \to R$，它是对某个特定 π_n 的一种共轭：

引理 4.17。设 $n \geq 1$。

(1) 对于任意 $x \in R$，存在唯一的 $y \in R$ 使得 $x \cdot \pi_n = \pi_n \cdot y$。我们将其记作 $y = c_n(x)$。*(2)* 在 *(1)* 中定义的映射 c_n： $R \to R$ 是一个 $\Bbbk$-代数自同构。
(3) 给定任意有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$ 使得 $n \notin F$，若 $x \in R \cap D_F[t]$，则 $c_n(x) = x$。

证明。

(1) 根据引理 4.16，我们有 $x \cdot \pi_n \in R \cdot \pi_n = \pi_n \cdot R$。因此，存在 $y \in R$ 使得 $x \cdot \pi_n = \pi_n \cdot y$。对于唯一性，若 $\pi_n \cdot y_1 = \pi_n \cdot y_2$，则 $\pi_n \cdot (y_1 - y_2) = 0$；又因为 R 是整环且 $\pi_n \neq 0$，我们可推得 $y_1 = y_2$。(2) 显然， c_n 是一个 $\Bbbk$-代数同态。若 $c_n(x) = 0$，则 $x \cdot \pi_n = 0$；又因为 $\pi_n \neq 0$ 且 R 是整环，所以 $x = 0$。最后，若 $y \in R$，则根据引理 4.16 有 $\pi_n \cdot y \in \pi_n \cdot R = R \cdot \pi_n$。因此，存在 $x \in R$ 使得 $x \cdot \pi_n = \pi_n \cdot y$，这意味着 $c_n(x) = y$。因此， c_n 是双射。(3) 根据引理 4.14(2)，我们知道 $x \cdot \pi_n = \pi_n \cdot x$，所以根据 c_n 的定义可得 $c_n(x) = x$。

□

接下来，我们将复合不同的 c_n，以定义所需的映射 τ：$R \to R$。对于任意 $N \geq 1$，令

$$C^N := c_N \circ c_{N-1} \circ \cdots \circ c_2 \circ c_1 : R \to R.$$

引理 4.18。对于所有 $N \geq 1$ 以及所有 $x \in R$，都有 $P_N \cdot C^N(x) = x \cdot P_N$，其中 P_N 在方程 (4.13) 中定义。

证明。我们对 N 使用归纳法来证明这一点。如果 $N = 1$，则要证明的是 $\pi_1 \cdot c_1(x) = x \cdot \pi_1$，这正是 c_1 的定义。假设对所有 $n < N$ 结论都成立。那么

$$\begin{aligned} P_N \cdot C^N(x) &= (\pi_1 \cdot \cdots \cdot \pi_{N-1}) \cdot \pi_N \cdot c_N(C^{N-1}(x)) \\ &= (\pi_1 \cdot \cdots \cdot \pi_{N-1}) \cdot C^{N-1}(x) \cdot \pi_N \\ &= x \cdot (\pi_1 \cdot \cdots \cdot \pi_{N-1}) \cdot \pi_N = x \cdot P_N. \end{aligned}$$

这里，第一个等式来自定义，第二个等式来自 c_N 的定义性质，第三个等式则来自归纳假设。□

我们将利用这一点证明一个独立性结果：

引理 4.19。设 $x \in R$，并设 $F \subseteq \mathbb{Z}$ 是满足 $x \in D_F[t] \cap R$ 的非空有限集。设 N、$M \geq 1$ 满足 $N \geq \max(F)$ 以及 $M \geq \max(F)$。则有等式 $C^N(x) = C^M(x)$。

证明。我们不妨假设 $M > N$，并取一个 $n > N$。注意，由引理 4.14(3)，π_n 彼此可交换，因此 π_n 与 P_N 可交换。由于 $n \notin F$，根据引理 4.14(2)，我们还知道 π_n 与 x 可交换。这意味着：

$$P_N \cdot C^N(x) \cdot \pi_n = x \cdot P_N \cdot \pi_n = x \cdot \pi_n \cdot P_N = \pi_n \cdot x \cdot P_N = \pi_n \cdot P_N \cdot C^N(x) = P_N \cdot \pi_n \cdot C^N(x),$$

这里我们两次用到了引理 4.18。在左侧约去非零元素 P_N，可得

$$C^N(x) \cdot \pi_n = \pi_n \cdot C^N(x) \tag{4.20}$$

对所有 $n > N$ 均成立。由此可计算：

$$\begin{aligned} P_M \cdot C^N(x) &= P_N \cdot (\pi_{N+1} \cdot \cdots \cdot \pi_M) \cdot C^N(x) \\ &= P_N \cdot C^N(x) \cdot (\pi_{N+1} \cdot \cdots \cdot \pi_M) \\ &= x \cdot P_N \cdot (\pi_{N+1} \cdot \cdots \cdot \pi_M) = x \cdot P_M. \end{aligned}$$

这里我们用到了方程 (4.20) 和引理 4.18。因此可知

$$P_M \cdot C^M(x) = x \cdot P_M = P_M \cdot C^N(x),$$

并在左侧约去 P_M，得到 $C^M(x) = C^N(x)$。□

现在我们定义 τ：$R \to R$ 如下。对于任意 $x \in R$，由定理 2.1(3) 以及 R 是 $S = D[t]$ 的子环这一事实，可知存在一个非空有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，使得 $x \in D_F[t] \cap R$。任取 $N > \max(F)$，满足 $N \geq 1$，令：

$$\tau(x) = C^N(x) \in R. \tag{4.21}$$

这与任何选择无关。事实上，若 F_1，$F_2 \subseteq \mathbb{Z}$ 是两个满足 $x \in D_{F_1}[t] \cap R$ 和 $x \in D_{F_2}[t] \cap R$的非空集合，并且若 $N_1 > \max(F_1)$、$N_1 \geq 1$ 以及$N_2 > \max(F_2)$，$N_2 \geq 1$，取 $M \geq \max(N_1, N_2)$，由引理 4.19可得：

$$C^{N_1}(x) = C^M(x) = C^{N_2}(x),$$

因此我们得到一个良定义函数 $\tau\colon R \to R$。

引理 4.22. 映射 $\tau\colon R \to R$ 在方程 *(4.21)* 中定义，是一个单射 $\Bbbk$-代数同态。

证明。设 $x, y \in R$，并取某个非空有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}$，使得$x, y \in D_F[t] \cap R$。令 $N \geq 1$，使得 $N > \max(F)$。于是 $x \cdot y \in D_F[t]$，所以

$$\tau(x \cdot y) = C^N(x \cdot y) = C^N(x) \cdot C^N(y) = \tau(x) \cdot \tau(y).$$

类似地，可以证明 $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$，且 τ是 $\Bbbk$-线性的。因此，τ是一个 $\Bbbk$-代数同态。最后，若 $\tau(x) = 0$，则 $C^N(x) = 0$，但 C^N是单射映射的复合，因此是单射，所以 $x = 0$，且 τ是单射。□

在证明 τ是自同构之前，我们还需要一个关于 c_n 的结果：

引理 4.23。设 $F \subseteq \mathbb{Z}$ 是非空有限集，且 $n \in F$满足 $n \geq 1$。那么对任意 $x \in R \cap D_F[t]$，都有 $c_n(x) \in D_F[t]$ 且 $c_n^{-1}(x) \in D_F[t]$。

证明。记 $c_n(x) = \sum_{k=0}^{m} t^k \cdot a_k$。于是：

$$\pi_n \cdot c_n(x) = (t \cdot v_n - u_n \cdot v_n) \cdot \sum_{k=0}^{m} t^k \cdot a_k = \sum_{k=0}^{m} (t^{k+1} \cdot v_n \cdot a_k - t^k \cdot u_n \cdot v_n \cdot a_k). \tag{4.24}$$

另一方面，根据 c_n的定义，我们知道 $\pi_n \cdot c_n(x) = x \cdot \pi_n$。由于$n \in F$，我们知道 $\pi_n \in D_F[t]$。因此，$\pi_n \cdot c_n(x) = x \cdot \pi_n \in D_F[t]$。由此可知，方程 (4.24) 中多项式的每个系数都属于 D_F。特别地，$x \cdot \pi_n$中 t^{m+1}的系数为 $v_n \cdot a_m \in D_F$，因此 $a_m = v_n^{-1} \cdot (v_n \cdot a_m) \in D_F$。接下来，$t^m$ 的系数为 $v_n \cdot a_{m-1} - u_n \cdot v_n \cdot a_m \in D_F$，而我们已经知道$u_n \cdot v_n \cdot a_m \in D_F$，所以可得 $v_n \cdot a_{m-1} \in D_F$，进而有 $a_{m-1} \in D_F$。以同样的方式继续推导，可得 a_0，……，$a_m \in D_F$，这意味着 $c_n(x) \in D_F[t]$。几乎完全相同的论证也能证明关于 c_n^{-1}的断言。□

由此，我们得到：

引理 4.25。映射 $\tau\colon R \to R$ 在方程 *(4.21)*中定义，是一个 $\Bbbk$-代数自同构。

证明。由引理 4.22 可知，接下来只需证明 τ是满射。令 $y \in R$，并取一个有限集$F' \subseteq \mathbb{Z}$，使得 $y \in D_{F'}[t]$。取某个 $N \geq 1$，使得 $N \geq \max(F')$，并令 $F = F' \cup \{1, \ldots, N\}$，以此修改 F'。于是，根据定理 2.1(3)(d)，有 $N = \max(F)$，且 $y \in D_F[t]$。令 $x = (c_1^{-1} \circ c_2^{-1} \circ \cdots \circ c_N^{-1})(y)$，于是 $x \in R$。此外，由于$y \in R \cap D_F[t]$，反复应用引理 4.23 可得 $x \in D_F[t]$。由 τ 的定义以及 $N = \max(F)$ 这一事实可知，

$$\tau(x) = C^{N+1}(x) = c_{N+1} \circ c_N \circ \cdots \circ c_1(x) = c_{N+1}(y).$$

由于 $N+1 \notin F$，且 $y \in D_F[t]$，根据引理 4.17(3)，我们得到 $c_{N+1}(y) = y$，这表明 $\tau(x) = y$，因此 τ 是满射。□

本小节的主要结果如下：

命题 4.26。存在一个 $\Bbbk$-代数自同构 $\tau\colon\ R \to R$，满足对所有 $r \in R$，

$$\tau(\sigma(r)) \cdot \pi_0 = \pi_0 \cdot \sigma(\tau(r)),$$

其中 π_0 在方程 *(4.2)*中定义。

证明。令 τ 为方程 (4.21)中定义的映射。那么 τ 是一个 $\Bbbk$-线性自同构，根据引理 4.25。令 $r \in R$，并且也考虑 $\sigma(r) \in R$。令 $F \subseteq \mathbb{Z}$ 为满足以下条件的有限集r，$\sigma(r) \in D_F[t] \cap R$，并令 $N \geq 1$ 满足 $N > \max(F)$。于是

$$\tau(r) = C^{N+1}(r), \quad \tau(\sigma(r)) = C^N(\sigma(r)).$$

因此，根据引理 4.18，我们得到等式

$$P_{N+1} \cdot \tau(r) = r \cdot P_{N+1}, \quad P_N \cdot \tau(\sigma(r)) = \sigma(r) \cdot P_N. \tag{4.27}$$

根据引理 4.14(4)，我们知道 $\beta(P_{N+1}) = \pi_0 \cdot P_N$。由于 σ 由 β的限制映射给出，因此将 β 应用于 $P_{N+1} \cdot \tau(r)$ 可得：

$$\sigma(P_{N+1} \cdot \tau(r)) = \beta(P_{N+1} \cdot \tau(r)) = \beta(r \cdot P_{N+1}).$$

因此，利用 β 保持乘法且扩张了 σ 这一事实，可得：

$$\pi_0 \cdot P_N \cdot \sigma(\tau(r)) = \sigma(r) \cdot \pi_0 \cdot P_N. \tag{4.28}$$

回到方程 (4.27)，由此可得

$$P_N \cdot \tau(\sigma(r)) \cdot \pi_0 = \sigma(r) \cdot P_N \cdot \pi_0.$$

由于根据引理 4.14(4)，π_0 与 P_N可交换，因此可得

$$P_N \cdot \tau(\sigma(r)) \cdot \pi_0 = \sigma(r) \cdot P_N \cdot \pi_0 = \sigma(r) \cdot \pi_0 \cdot P_N = \pi_0 \cdot P_N \cdot \sigma(\tau(r)) = P_N \cdot \pi_0 \cdot \sigma(\tau(r)),$$

其中第三个等号即为方程(4.28)。从左侧约去非零元素 P_N，可得 $\tau(\sigma(r)) \cdot \pi_0 = \pi_0 \cdot \sigma(\tau(r))$。□

4.3. 平凡扩张上的对偶化复形。我们的下一个目标是证明一个关于某些环 R 上的平凡扩张环存在对偶化复形的一般性结果。

4.3.1. 假设。在本小节中，我们始终假设 R 是一个结合环，并满足以下条件：

(1) R 是一个 $\Bbbk$-代数。(2) R 是双侧诺特的。(3) R 是双侧 Gorenstein 的，即 $\operatorname{injdim}_R({}_R R) = \operatorname{injdim}_R(R_R) < \infty$。(4) 存在一个单射的 $\Bbbk$-代数同态 $\sigma\colon\ R \to R$，使得 $1 \in (R : \sigma(R))_r \cdot R$；并且存在一个不是右零因子的元素 $q_0 \in R$，使得

$$\{r \in R \mid R \cdot r \subseteq \sigma(R)\} = R \cdot q_0.$$

(5) 存在一个 $\Bbbk$-代数自同构 $\tau\colon R \to R$，使得对所有 $r \in R$， $\tau(\sigma(r))\cdot q_0 = q_0 \cdot \sigma(\tau(r))$。

注意，由命题 4.10 和命题 4.26可知，定理 R 3.40中的环满足这些条件，其中 $q_0 = \pi_0$。元素 q_0 不是右零因子，因为 R 也是一个整环，但在下文中将不再用到整环这一假设。此外，R 是双侧 Gorenstein 的，因为它是遗传的。请注意，本文的核心观点是，对于诺特环而言，Gorenstein 性质并不具有左右对称性，这就是我们明确使用“双侧 Gorenstein”一词的原因。

还要注意，双侧 Gorenstein 性质意味着平凡双模 ${}_R R_R$ 是 R上的对偶化复形。这很容易由对偶化复形的定义推出。
首先，我们用 τ扭曲 R。定义 R_τ 为一个 R-R-双模，其作为集合等于 R，左作用和右作用定义如下：

$$x \circ r := x \cdot r, \quad r \circ x := r \cdot \tau(x), \quad r \in R_\tau, x \in R.$$

因此，作为左侧 R-模， R_τ 就是 ${}_R R$，但右侧的作用则被 τ扭曲。注意，由于 τ 是 $\Bbbk$-线性的， $\Bbbk$ 在 R_τ上中心地作用。
在下文中，我们将随意使用 ${}_R$ 限制函子，限制函子$_R$，它们在方程 (4.1)中引入。

命题 4.29. 双模 R_τ 是 R上的对偶化复形。

证明。 左侧 R-模 ${}_R\operatorname{Rest}(R_\tau)$就是 ${}_R R$，显然有限生成且自由，并且根据假设，它在 R上的内射维数有限。因此，

$$\operatorname{Ext}^i_R({}_R\operatorname{Rest}(R_\tau), {}_R\operatorname{Rest}(R_\tau)) = \operatorname{Ext}^i_R(R, R) = 0$$

对所有 $i > 0$均成立。齐次映射 $R^{\mathrm{op}} \to \operatorname{Hom}_R({}_R\operatorname{Rest}(R_\tau)\ {}_R\operatorname{Rest}(R_\tau))$由$r \mapsto (a \mapsto a \circ r = a \cdot \tau(r))$给出。由于 τ是同构，该映射显然是双射。接下来，我们转向右侧。在那里，齐次映射 $R \to \operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Rest}_R(R_\tau), \operatorname{Rest}_R(R_\tau))$是左乘法，因此显然是双射。 τ是同构这一事实意味着，沿着 τ的遗忘函子（记作 $\tau^*\colon \operatorname{Mod}_R \to \operatorname{Mod}_R$）是一个范畴等价，并且

$$\tau^*(R_R) = \operatorname{Rest}_R(R_\tau).$$

由于 R_R 是有限生成投射且具有有限内射维数，并且这些性质在模范畴的等价下保持不变，我们推得 $\operatorname{Rest}_R(R_\tau)$ 也是有限生成投射的，并且具有有限内射维数。因此，

$$\operatorname{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Rest}_R(R_\tau), \operatorname{Rest}_R(R_\tau)) = 0$$

对所有 $i > 0$均成立，并且 R_τ 是 R上的对偶化复形。 □

我们令 $A = R[x;\ \sigma]/(x^2) = R \ltimes_\sigma R$如方程 (1.1) 所示。特别地， A中的元素具有 $x + \epsilon \cdot y$的形式，其中 $x,\ y \in R$，以及 $\epsilon^2 = 0$。我们的目标是在 A上构造一个对偶化复形。

回顾第1 节中的讨论， $\epsilon \cdot R \cong {}_\sigma R$ 自然地是一个 R-R-双模。在下一个引理中，读者应将 ω 视为上的对偶化复形 R，在这种情况下， K最终将成为上的对偶化复形 A。

引理 4.30。 令 ω 和 N 为两个 R-R-双模，在这两个双模上 $\Bbbk$ 中心地作用，并配备两个 $\Bbbk$-线性 R-R-双模映射

$$\lambda : \epsilon \cdot R \otimes_R N \to \omega, \quad \mu : N \otimes_R \epsilon \cdot R \to \omega.$$

那么以下结论成立：

(1) 配备如下 A-作用的 R-R-双模 $K = \omega \oplus N$：

$$(x + \epsilon \cdot y) \circ (w, n) = (x \cdot w + \lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n), x \cdot n),$$

and

$$(w, n) \circ (x + \epsilon \cdot y) = (w \cdot x + \mu(n \otimes_R \epsilon \cdot y), n \cdot x)$$

是一个 A-A-双模，并且 $\Bbbk$ 在其上中心地作用。

(2) 由 $p(w, n) = w$ 给出的投影映射 $p : K \to \omega$ 是一个 $\Bbbk$-线性映射，且为 R-R-双模映射。

证明。 所有这些事实都可通过常规计算得到，它们源自 λ, μ 的 R-线性以及张量积。 $\epsilon^2 = 0$ 这一事实意味着 λ, μ 之间不需要任何相容条件。□

请注意， ω 最终将被取为 R上的对偶化复形；我们的目标是证明，关于 ω， K 既是 A 在 R 上的左对偶，也是右对偶。

引理 4.31。 沿用引理 *4.30*中的记号。

(1) 映射

$$\theta_\ell : K \to \mathrm{Hom}_R({}_R A_A, \omega)$$

定义为

$$\theta_\ell(k)(a) = p(a \circ k)$$

是一个 A-R-双模同态。此外，若映射

$$\lambda^* : N \to \mathrm{Hom}_R({}_R \epsilon \cdot R, \omega), \quad \lambda^*(n)(\epsilon \cdot y) = \lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n)$$

是双射的，那么 θ_ℓ 也是双射的。

(2) 映射

$$\theta_r : K \to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_A A_R, \omega)$$

给定为

$$\theta_r(k)(a) = p(k \circ a)$$

是一个 R-A-双模同态。此外，如果映射

$$\mu^* : N \to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\epsilon \cdot R_R, \omega), \quad \mu^*(n)(\epsilon \cdot y) = \mu(n \otimes_R \epsilon \cdot y)$$

是双射的，那么 θ_r 也是双射的。

证明。 我们只证明（1），因为第二个断言的证明几乎完全相同。首先，对于 $k \in K$，我们证明如上所定义的 $\theta_\ell(k)$ 确实是 $\mathrm{Hom}_R({}_R A_A, \omega)$ 中的一个元素。取 $r \in R$ 和 $a \in A$。由于 $p : K \to \omega$ 是左侧 R-线性的，因此有：

$$\theta_\ell(k)(r \cdot a) = p((r \cdot a) \circ k) = p(r \circ (a \circ k)) = r \cdot p(a \circ k) = r \cdot \theta_\ell(k)(a).$$

接下来，我们证明 θ_ℓ 是 A-R-双模的映射。再取一个元素 $a' \in A$。则

$$\theta_\ell(a' \circ k)(a) = p(a \circ a' \circ k) = \theta_\ell(k)(a \cdot a') = (a' \cdot \theta_\ell(k))(a),$$

其中，最后一个等式源于左侧 A-结构在 $\mathrm{Hom}_R({}_RA_A, \omega)$ 上的定义。现在，取任意 $r \in R$。于是

$$\theta_\ell(k \circ r)(a) = p(a \circ k \circ r) = p(a \circ k) \cdot r,$$

因为 p 是右侧 R-线性的。最后，设 λ^* 是双射。作为左侧 R-模，我们知道 ${}_RA = R \oplus \epsilon \cdot R$。这意味着 θ_ℓ 的目标可以分解为

$$\mathrm{Hom}_R({}_RA, \omega) = \omega \oplus \mathrm{Hom}_R(\epsilon \cdot R, \omega).$$

利用这一分解，同态集 $\mathrm{Hom}_R({}_RA, \omega)$ 中的一个元素 $f \in$ 可分解为 $(f(1)\ f|_{\epsilon \cdot R})$。于是，$\theta_\ell$ 分解为

$$\theta_\ell = 1_\omega \oplus \lambda^*.$$

事实上，对于 $k = (w, n) \in K$，我们有

$$\theta_\ell(w, n)(1) = p(1 \circ (w, n)) = p(w, n) = w,$$

而

$$\theta_\ell(w, n)(\epsilon \cdot y) = p(\epsilon \cdot y \circ (w, n)) = p(\lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n), 0) = \lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n) = \lambda^*(n)(\epsilon \cdot y).$$

由此表示可 स्पष्ट看出，如果 λ^* 是双射的，那么 θ_ℓ也是双射的。 □

既是对偶化复形的双模称为对偶化双模。现在，给定 R上的一个对偶化双模，我们可以得到 A 上的一个对偶化双模：

引理 4.32。 沿用引理 *4.30* 和引理 *4.31*中的记号，并假设映射 λ^* 和 μ^* 是双射的。设 ω 是 R上的对偶化双模。那么 K 是 A上的对偶化双模，此外，

$$\mathrm{inj\,dim}_A({}_AK) \leq \mathrm{inj\,dim}_R({}_R\omega), \quad \mathrm{inj\,dim}_A(K_A) \leq \mathrm{inj\,dim}_R(\omega_R).$$

证明。 首先，我们注意到 A 在 R 上作为左侧和右侧的模都是有限生成投射的：作为左侧 R-模，我们显然有 ${}_RA = R \oplus {}_\sigma R$，并且在命题 1.7的证明中已证明这是有限生成投射的。作为右侧 R-模，我们有 $A_R = R \oplus \epsilon \cdot R$，因此 A 显然是秩为2的有限生成自由模。映射 θ_ℓ 给出了左侧 A-模的一个同构：

$${}_AK \cong \mathrm{Hom}_R({}_RA_A, \omega).$$

假设 $\mathrm{inj\,dim}_R({}_R\omega) = d$，并令 $J = 0 \to I^0 \to \cdots \to I^d \to 0$ 为 ω 作为 R 上的左模的内射分解。将正合函子 $\mathrm{Hom}_R({}_RA_A, -)$ 应用于拟同构 $\omega \to J$，我们得到以下左 A-模的拟同构序列：

$${}_AK \cong \mathrm{Hom}_R({}_RA_A, \omega) \cong \mathrm{Hom}_R({}_RA_A, J).$$

由于 $\mathrm{Hom}_R({}_RA_A, J)$ 是一个单射左 A-模复形，且集中在上同调次数 $[0, d]$，我们可推出 $\mathrm{inj\,dim}_A({}_AK) \leq d$。右侧的不等式 $\mathrm{inj\,dim}_A(K_A) \leq \mathrm{inj\,dim}_R(\omega_R)$ 可用类似方法证明，所依据的是 θ_r 是一个同构。接下来，我们证明 K 在 A 上有限生成。同构 $\theta_r\colon K \to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_AA_R, \omega)$

这说明，作为左 R-模， K 是某个 ω^n 的直和项，因为 A 本身是有限生成投射模，因而是某个 R^n 的直和项。因此， K 作为左模在 R 上有限生成，故也必然在更大的环 A 上有限生成。证明其在右侧有限生成的方法是对称的。剩下要计算 $\mathbf{RHom}_A(K, K)$（以及在 A^{op} 上的情形）。首先，我们计算高阶 Ext。对于 $i > 0$, 利用同构 θ 和伴随（因 A 在 R 上是投射的，故伴随成立），可得

$$\mathrm{Ext}^i_A(K, K) \cong \mathrm{Ext}^i_A(K, \mathrm{Hom}_R(A, \omega)) \cong \mathrm{Ext}^i_R(K, \omega),$$

但我们已经看到， K 是 ω^n 作为左侧 R-模的一个直和项，并且 $\mathbf{Ext}^i_R(\omega, \omega) = 0$, 因为 ω 是一个对偶化双模。因此，对于所有 $i > 0$, $\mathbf{Ext}^i_A(K, K) = 0$ ，右侧同理。接下来只需证明齐次映射是双射。我们首先利用映射 θ进行计算:

$\mathbf{Hom}_A(K, K) \cong \mathbf{Hom}_A(K, \mathbf{Hom}_R(A, \omega)) \cong \mathbf{Hom}_R(K, \omega) \cong \mathbf{Hom}_R(\mathbf{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(A_R, \omega)\, \omega)$。

利用这一对应，齐次映射 $A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Hom}_A(K, K)$同构于映射

$$A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(A_R, \omega), \omega).$$

事实上，在对应 $\mathbf{Hom}_A(K, K) \cong \mathbf{Hom}_R(K, \omega)$ 下， $\varphi \mapsto p \circ \varphi$， $a \in A$ 的齐次映射被送到映射 $k \mapsto p(k \circ a) = \theta_r(k)(a)$。通过 θ_r将 K 与 $\mathbf{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(A_R, \omega)$ 对应后，它变成求值映射 $f \mapsto f(a)$。

但 A 是投射的，因此 $\mathbf{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(A_R, \omega) = \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(A_R, \omega)$, 而

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(A_R, \omega), \omega) = \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(A_R, \omega), \omega),$$

因为我们已经看到，高阶Ext群均消失。因此，所得映射正是从右侧 R-模 A_R 到其关于对偶化双模 ω 的导出双对偶的对偶映射，因此它是双射（[32, 命题 1。3]）。另一个齐次映射的证明完全相同。 □

剩下的就是构造一个 R-双模 N 和映射 λ, μ ，使其满足上述条件。令 $N := R_{\tau\circ\sigma\circ}$ 于是， N 是一个 R-R-双模，它作为阿贝尔群等于 R ，且作用定义如下:

$$r \circ n = r \cdot n, \quad n \circ r = n \cdot \tau(\sigma(r)), \quad r \in R, n \in N.$$

令 $\omega = R_\tau$。根据命题 4.29， ω 是 R 上的对偶化双模。

引理 4.33。 定义映射 $\mu\colon N \otimes_R \epsilon \cdot R \to R_\tau$ ，令 $\mu(n \otimes_R \epsilon \cdot y) = n \cdot \tau(y)$。则 μ 是良定义的 $\Bbbk$-线性 R-R-双模映射，且诱导映射

$$\mu^* : N \to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\epsilon \cdot R_R, \omega), \quad \mu^*(n)(\epsilon \cdot y) = \mu(n \otimes_R \epsilon \cdot y)$$

是双射的。

证明。 映射 μ 是良定义的，因为相应的映射 $N \times \epsilon \cdot R \to R_\tau$ 是 R-双加性的。事实上，注意到对于 $n \otimes_R \epsilon \cdot y \in N \otimes_R \epsilon \cdot R$ 和 $r \in R$，我们有:

$\mu(n \circ r \otimes_R \epsilon \cdot y) = n \cdot \tau(\sigma(r)) \cdot \tau(y) = n \cdot \tau(\sigma(r) \cdot y) = \mu(n \otimes_R \epsilon \cdot \sigma(r) \cdot y) = \mu(n \otimes_R r \cdot \epsilon \cdot y)$,

其中最后一个等号依据方程 (1.2)。

由于 τ 是 $\Bbbk$-线性的，因此 μ 也是如此。我们来验证 μ 是一个 R-R-双模映射。首先考察左侧：取 $r \in R$ 和 $n \otimes_R \epsilon \cdot y \in N \otimes_R \epsilon \cdot R$。则：

$$\mu(r \circ (n \otimes_R \epsilon \cdot y)) = r \cdot n \cdot \tau(y) = r \circ \mu(n \otimes_R \epsilon \cdot y).$$

更有意思的是右侧，扭曲发生于此处。在那里，取 $r \in R$ 和 $n \otimes_R \epsilon \cdot y \in N \otimes_R \epsilon \cdot R$，我们得到：

$$\mu((n \otimes_R \epsilon \cdot y) \circ r) = n \cdot \tau(y \cdot r) = n \cdot \tau(y) \cdot \tau(r) = (n \cdot \tau(y)) \circ r = \mu(n \otimes_R \epsilon \cdot y) \circ r.$$

还需证明 μ^* 是双射。注意到 $\epsilon \cdot R$ 是一个秩 1 的自由右侧 R-模，这意味着映射 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(\epsilon \cdot R_R, \omega) \to \omega$ 由 $f \mapsto f(\epsilon)$ 给出，是双射。将 μ^* 与此双射复合，我们得到 $\mu^*(n)(\epsilon) = \mu(n \otimes_R \epsilon) = n \cdot \tau(1) = n$，这正是集合 R 上的恒等映射。因此，μ^* 也是双射。□

接下来，我们定义 λ。元素 $q_0 \in R$ 是在第 4.3.1节（4）中引入的。

引理 4.34。定义映射 $\lambda : \epsilon \cdot R \otimes_R N \to R_\tau$，使得 $\lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n) = \sigma^{-1}(y \cdot n \cdot q_0)$。则 λ 是一个良定义的 $\Bbbk$-线性 R-R-双模映射，且诱导映射

$$\lambda^* : N \to \mathrm{Hom}_R({}_R\epsilon \cdot R, \omega), \quad \lambda^*(n)(\epsilon \cdot y) = \lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n)$$

是双射。

证明。首先，我们必须解释为什么写作 $\sigma^{-1}(y \cdot n \cdot q_0)$ 是有意义的。这是因为

$$y \cdot n \cdot q_0 \in R \cdot q_0 = \{r \in R \mid R \cdot r \subseteq \sigma(R)\} \subseteq \sigma(R).$$

因此，存在 $z \in R$，使得 $\sigma(z) = y \cdot n \cdot q_0$；由于 σ 是单射，z 是唯一的，并且 $z = \sigma^{-1}(y \cdot n \cdot q_0)$。显然，$\lambda$ 对两个张量变量都是可加的。我们检查 λ 是 R-双可加的，因此可以在张量积上定义这样的映射：对于 $r \in R$、$\epsilon \cdot y \in \epsilon \cdot R$ 和 $n \in N$，有：

$$\lambda(\epsilon \cdot y \cdot r \otimes_R n) = \sigma^{-1}(y \cdot r \cdot n \cdot q_0) = \lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R r \circ n).$$

接下来，我们检查 λ 是 R-R-双模的映射。首先，考虑左侧：

$$\begin{aligned}\lambda(r \cdot (\epsilon \cdot y) \otimes_R n) &= \lambda(\epsilon \cdot \sigma(r) \cdot y \otimes_R n) \\ &= \sigma^{-1}(\sigma(r) \cdot y \cdot n \cdot q_0) = r \cdot \sigma^{-1}(y \cdot n \cdot q_0) = r \cdot \lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n).\end{aligned}$$

现在，考虑右侧：

$$\begin{aligned}&\lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n \circ r) = \sigma^{-1}(y \cdot n \circ r \cdot q_0) \\ &= \sigma^{-1}(y \cdot n \cdot \tau(\sigma(r)) \cdot q_0) = \sigma^{-1}(y \cdot n \cdot q_0 \cdot \sigma(\tau(r))) \\ &= \sigma^{-1}(y \cdot n \cdot q_0) \cdot \tau(r) = \lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n) \circ r.\end{aligned}$$

这里，第二个等式是 N上右作用的定义，第三个等式来自第4.3.1(5)，第五个等式则是 R_τ上右作用的定义。由于 σ，τ都是 $\Bbbk$-线性的，因此可知 λ 是一个良定义的 $\Bbbk$-线性 R-R-双模映射，剩下只需证明 λ^* 是双射。首先，λ^* 是单射：若 $\lambda^*(n) = 0$，特别地

$$0 = \lambda^*(n)(\epsilon \cdot 1) = \lambda(\epsilon \cdot 1 \otimes_R n) = \sigma^{-1}(n \cdot q_0).$$

应用 σ，可推出 $n \cdot q_0 = 0$；但 q_0 不是右零因子，因此 $n = 0$，且λ^* 是单射。为证明 λ^* 是满射，取一个 $f \in$ 同态集$_R(_R\epsilon \cdot R,\ \omega)$。定义映射$g\colon R \to R$，使得 $g(y) = \sigma(f(\epsilon \cdot y))$。将 R 视为左侧 $\sigma(R)$-模，注意到 g 是左侧 $\sigma(R)$-模的映射，因为对于 $r,\ y \in R$，有：

$$\begin{aligned} g(\sigma(r) \cdot y) &= \sigma(f(\epsilon \cdot \sigma(r) \cdot y)) = \sigma(f(r \cdot \epsilon \cdot y)) \\ &= \sigma(r \cdot f(\epsilon \cdot y)) = \sigma(r) \cdot \sigma(f(\epsilon \cdot y)) = \sigma(r) \cdot g(y). \end{aligned}$$

令 $q\colon = g(1) = \sigma(f(\epsilon))$。由于 g 是 $\sigma(R)$-线性的，我们可以应用引理 1.5(2)，并推出

$$g(y) = y \cdot g(1) = y \cdot q$$

对所有 $y \in R$。由于 $\mathrm{Im}(g) \subseteq \sigma(R)$，我们得到 $R \cdot q \subseteq \sigma(R)$，因此根据第 4.3.1(4) 节，存在 $n \in R$ 使得 $q = n \cdot q_0$。然后，我们可以计算：

$$f(\epsilon \cdot y) = \sigma^{-1}(g(y)) = \sigma^{-1}(y \cdot q) = \sigma^{-1}(y \cdot n \cdot q_0) = \lambda(\epsilon \cdot y \otimes_R n),$$

这表明 $\lambda^*(n) = f$，所以 λ^* 是双射。 □

下面给出本节的主要结果：

定理 4.35. 设 $\Bbbk$ 是一个特征满足 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$的域，并设 A 是推论 $\Bbbk$中构造的 *3.41*-代数。那么 A 具有一个对偶化复形 K。此外，K 满足：

(1) K 是一个集中于度0的单个 A-A-双模，即对偶化双模。*(2)* 内射维数$_A(_AK) \leq 1$，且内射维数$_A(K_A) \leq 1$。*(3)* 域 $\Bbbk$ 在 K 上中心地作用。

证明。我们在第 4.3.1 节中注意到，定理 3.40 中的环 R 满足第 4.3.1 节的所有假设。因此，本小节的结果适用于 R。由于 R 是遗传的，内射维数$_R(_RR) \leq 1$，内射维数$_R(R_R) \leq 1$。令 $\omega = R_\tau$。根据命题 4.29，它是 R上的对偶化复形；又由于遗忘函子 τ^* 是一个范畴等价，并将 R_R 映至 ω_R，我们由此推出内射维数$_R(\omega_R) \leq 1$。作为左侧 R-模，$_R\omega = {}_RR$，因此我们已经知道内射维数$_R(_R\omega) \leq 1$。应用引理 4.32（它由引理 4.33 和引理 4.34 保证成立），我们得到，引理 4.30 中构造的 A-A-双模 K 是 A 上的对偶化双模，并满足本定理的所有结论。□

5. Rickard-Keller 条件的失效

设 $\mathcal{T}$ 是一个对余积和积封闭的三角范畴。在我们的应用中，$\mathcal{T}$ 总是 $\mathbf{D}(_B\,\mathbf{Mod})$ 或 $\mathbf{D}(\mathbf{Mod}_B)$，其中 B 是某个环。

给定一个非空对象集$\mathbf{S} \subseteq \mathcal{T}$，由$\mathbf{S}$生成的 $\mathcal{T}$局部化子范畴记作 $\mathbf{Loc}_{\mathcal{T}}(\mathbf{S})$，它是包含$\mathbf{S}$且对任意余积封闭的 $\mathcal{T}$最小三角子范畴。如果 $\mathbf{Loc}_{\mathcal{T}}(\mathbf{S}) = \mathcal{T}$，则称$\mathbf{S}$ 生成 $\mathcal{T}$。对偶地，将余积替换为积，包含$\mathbf{S}$ 且对任意积封闭的 $\mathcal{T}$最小三角子范畴记作 $\mathbf{Coloc}_{\mathcal{T}}(\mathbf{S})$；当其等于 $\mathcal{T}$时，称$\mathbf{S}$余生成 $\mathcal{T}$。

对于环 B，如果内射模生成 B（在左侧），即集合 ${}_B\operatorname{Inj}$ 中的左侧内射 B-模生成$\mathsf{D}({}_B\operatorname{Mod})$，则称其具有内射生成性质。同样地，如果投射模余生成 B，即集合 ${}_B\operatorname{Proj}$ 中的左侧投射 B-模余生成$\mathsf{D}({}_B\operatorname{Mod})$，则称其具有投射余生成性质。内射余生成和投射生成的定义类似，并且对任意环都成立（投射生成结果见 [25, 命题 2。2]内射余生成可类似证明）。

任何交换诺特环都满足内射生成 [25, 定理 3.3], 这一事实源于 Hopkins-Neeman 关于 $\mathsf{D}({}_B\mathrm{Mod})$ 的局部化子范畴 [8, 20] 分类，其中 B 为交换诺特环。此外，根据 [25, 定理 3.2], ，如果 B 是满足 $\operatorname{injdim}_B({}_BB) < \infty$ 的任意环，那么对于 B，内射模生成。

2001 年，Keller [15] 观察到，对于有限维代数，内射生成蕴含若干经典同调猜想，并提出这对有限维数猜想是否也成立。Rickard 在 [25, 定理 4.3], 中对此作出了肯定回答，后来在 [35], 中将其推广到具有对偶化复形的 Artin 代数；最近， [26], 作者又将其推广到所有具有对偶化复形的双侧诺特环。因此，我们现在知道，对于具有对偶化复形的双侧诺特环 B，如果内射模为 B 生成（在左侧），那么 B 的大有限投射维数

$$\operatorname{FPD}(B) := \sup_{M\in B\,\mathrm{Mod},\operatorname{proj\,dim}_B(M)<\infty} (\operatorname{proj\,dim}_B(M))$$

有限。类似地，Rickard 在 [25, 命题 5.2]中证明，对于有限维代数，右侧的投射余生成意味着左侧的有限维数有限。作者也将这一结果推广至所有带有对偶化复形的双侧诺特环，见 [27, 定理 5.1]。根据 [3, 命题 6.10], 相反侧具有有限内射维数和有限维数的环，其两侧的内射维数均为有限。

Rickard-Keller 条件指内射生成和投射余生成。在 [27, 定理 6.3], 中，我们利用上述结果给出了充分必要条件：带有对偶化复形且左侧内射维数有限的双侧诺特环，其右侧内射维数也有限。由于本文构造的代数 A不满足这一条件，我们得到：

定理 5.1。设 $\Bbbk$ 是任意一个特征为 $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$，并设 A 是 $\Bbbk$-代数，它是在推论 *3.41* 中构造的。那么， A还具有以下附加性质：

(1) 内射模在左侧为 A 生成。*(2)* 内射模在右侧不为 A 生成。也就是说，$\mathit{Loc}_{\mathsf{D}(\mathrm{Mod}\,A)}(\mathit{Inj}_A) \neq \mathit{D}(\mathit{Mod}_A)$。*(3)* $\mathit{Coloc}_{\mathsf{D}({}_A\mathit{Mod})}({}_A\mathit{Proj}) \neq \mathit{D}({}_A\mathit{Mod})$。也就是说，投射模在左侧不余生成$A$ 。*(4)* $\mathit{Coloc}_{\mathsf{D}({}_A\mathit{Mod})}({}_A\mathit{Flat}) \neq \mathit{D}({}_A\mathit{Mod})$。也就是说，平坦对象在左侧不余生成 A 。*(5)* 存在一个由单射左侧 A-模组成的上有界余链复形 J，它是无挠的，但不可缩。*(6)* 存在一个由投射右侧 A-模组成的下有界余链复形 P，它是无挠的，但不可缩。

(7) 存在一个平坦维数无限的单射左侧 A-模 I。*(8)* 存在一个对偶化复形 ω'，它在 A 上的平坦维数无限，视为左侧 A-模的复形时亦然。

证明。 由推论3.41，我们知道

$$\operatorname{inj\,dim}_A({}_AA) = 1, \quad \operatorname{inj\,dim}_A(A_A) = +\infty,$$

并且由定理 4.35， A 具有一个对偶化复形，因此除 (1)、(2) 和 (6) 之外的所有条件都可由 [27, 定理 6。3]立即推出。(1) 由 [25, 定理 3。2],推出，而根据 [27,定理 5。1]，(5) 等价于 (6)。最后，根据 [27,定理 5。1]，(2) 也可由 (3) 推出。□

注 5.2。 [26, 27] 中使用的对偶化复形定义略强于本文中使用的定义。这是因为其中的证明使用了协变 Grothendieck 对偶 [12, 21], ，而这还要求环 B 上的对偶化复形 ω 同构于一个由 B-B-双模组成的复形，并且同时满足 ${}_B\mathrm{Rest}(\omega)$ 是由单射左侧 B-模组成的复形，$\mathrm{Rest}_B(\omega)$ 是由单射右侧 B-模组成的复形。然而，若进一步假设 B 是域上的一个 $\Bbbk$-代数（我们的代数 A便是如此），那么用包络代数 $B \otimes_{\Bbbk} B^{\mathrm{op}}$ 上的一个内射分解替换 ω，就能得到所需的更强版本的对偶化复形，因此我们可以直接使用上述关于 A 的结果。

注 5.3。 关于定理 5.1中的条件 (5) 和 (6)，需要指出的是，根据[27, 定理 5。1], 任意有界上方无挠的单射左侧B-模复形是可缩的这一条件等价于$\mathrm{FPD}(B^{\mathrm{op}}) < \infty$ 对于任意具有对偶化复形的双侧诺特环 B。等价地，任意有界下方无挠的投射右侧 B-模复形都是可缩的。这些是相当新的同调条件，最早由 [27]提出。在附录中，[27], Nakamura 和 Thompson 证明了 [27,推论 A.2 和推论 A。8] 这些条件对任意交换诺特环都成立。在 [24], 中构造了违反这些条件的复形，但所有这些复形都定义在非交换非诺特环上。这一结果表明，这类违反不仅存在于双侧诺特环上，甚至在左侧内射维数有限时也可能存在。

关于人工智能使用的声明。 定理3.40 所用的构造源自作者与 Claude Fable 5.1 和 Claude Opus 5.5 的互动。论文正文完全由人类撰写。

参考文献

[1] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald。《交换代数导论》。Addison-Wesley Publishing Co.，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1969 年。[2] M. Auslander。模与代数的维数。III. 整体维数。《名古屋数学杂志》，9：67–77，1955 年。[3] M. Auslander 和 I. Reiten。反变有限子范畴的应用。《数学进展》，86(1)：111–152，1991 年。[4] A. Beligiannis 和 H. Krause。厚子范畴与虚Gorenstein代数。《伊利诺伊数学杂志》，52(2)：551–562，2008 年。

[5] A. Beligiannis 和 I. Reiten。挠理论的同调与同伦方面。《美国数学会回忆录》，188(883)：viii+207，2007 年。[6] R. M. Fossum、P. A. Griffith 和 I. Reiten。阿贝尔范畴的平凡扩张，《数学讲义》第 456 卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1975 年。阿贝尔范畴平凡扩张的同调代数及其在环论中的应用。[7] R. Hartshorne。剩余与对偶性。《数学讲义》第 20 号。Springer-Verlag，柏林—纽约，1966 年。关于 A. Grothendieck 工作的研讨班讲义，研讨班于 1963/64 年在哈佛大学举行，附录由 P. Deligne 撰写。[8] M. J. Hopkins。同伦论中的整体方法。载于《同伦论》（达勒姆，1985），《伦敦数学会讲义丛书》第 117 卷，第 73–96 页。剑桥大学出版社，剑桥，1987 年。[9] M. Hoshino。关于 Artin 环的自内射维数。《筑波数学杂志》，18(1)：1–8，1994 年。[10] Y. I wanaga。关于有限自内射维数的环。《交换代数通讯》，7(4)：393–414，1979 年。[11] Y. Iwanaga。关于有限自内射维数的环。II。《筑波数学杂志》，4(1)：107–113，1980 年。[12] S. Iyengar 和 H. Krause。诺特环上复形的正合性与完全无环性。《文献数学》，11：207–240，2006 年。[13] A. V. Jategaonkar。环论与同调代数中的一个反例。《代数杂志》，12：418–440，1969 年。[14] B. Keller。导出范畴及其用途。载于《代数手册》第 1 卷，《代数手册》第 1 卷，第 671–701 页。Elsevier/North-Holland，阿姆斯特丹，1996 年。[15] B. Keller。无界导出范畴与同调猜想。在“有限维代数的同调猜想”暑期学校上的报告，诺德菲尤尔埃德，2001 年。[16] E. Kirkman、J. Kuzmanovich 和 L. Small。诺特环的有限维数。《代数杂志》，147(2)：350–364，1992 年。[17] T. Y. Lam。模与环讲义，《研究生数学教材》第 189 卷。Springer-Verlag，纽约，1999 年。[18] T. Y. Lam。非交换环入门课程，《研究生数学教材》第 131 卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，2001 年。[19] J. C. McConnell 和 J. C. Robson。非交换诺特环，《数学研究丛书》第 30 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，修订版，2001 年。L. W. Small 协助编写。[20] A. Neeman。 $D(R)$的色塔。《Topology》，31(3)：519–532，1992 年。附录由 Marcel B¨okstedt 撰写。[21] A. Neeman。平坦模的同伦范畴与 Grothendieck 对偶性。《数学发明》，174(2)：255–308，2008 年。[22] A. Nickel。完备群代数的导子公式。《文献数学》，19：601–627，2014 年。[23] L. Positselski。相干环、fp-内射模、对偶化复形与协变 Serre-Grothendieck 对偶性。《精选数学》，新辑，23(2)：1279–1307，2017 年。[24] L. Positselski。一个有下界、不可缩且正合的投射模复形。《匈牙利数学学报》，172(2)：324–345，2024 年。[25] J. Rickard。无界导出范畴与有限维数猜想。《数学进展》，354：106735，21 页，2019 年。[26]L. Shaul。通过 DG 环研究有限维数猜想。《纯粹与应用数学杂志》，即将发表。arXiv:2209.02068，2022 年。[27] L. Shaul。内射模的正合复形与有限维数，附录由 Tsutomu Nakamura 和 Peder Thompson 撰写。arxiv:2303.08756v2，2023 年。[28] J. T. Stafford 和 R. B. Warfield, Jr. 遗传诺特环与单环的构造。《伦敦数学会会刊》（第三辑），51(1)：1–20，1985 年。[29] M. van den Bergh。非交换分次环与滤环上的对偶化复形存在性定理。《代数杂志》，195(2)：662–679，1997 年。[30] A. Yekutieli。非交换分次代数上的对偶化复形。《代数杂志》，153(1)：41–84，1992 年。[31] A. Yekutieli。导出范畴，《剑桥高等数学研究》第 183 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2020 年。[32] A. Yekutieli 和 J. J. Zhang。具有 Auslander 对偶化复形的环。《代数杂志》，213(1)：1–51，1999 年。

[33] A. Yekutieli 和 J. J. Zhang. 微分代数上的对偶化复形与 perverse 模。*Compos.Math.*，141(3):620–654，2005.[34] A. Zaks. 半初等环的内射维数。*J.Algebra*，13:73–86，1969.[35] Y. Zhang. 具有对偶化复形的 Artin 环的有限维数与整体维数。*Front.Math.*，18(4):953–960，2023。

海法大学数学系，以色列海法 3498838电子邮箱：shaul@math.haifa.ac.il