西摩第二邻域猜想的简短证明

Romain Bourneuf[1],Pierre Charbit[2],Samuel Coulomb[2],和 Stéphan Thomassé[3]

[1]波尔多大学、法国国家科学研究中心、波尔多国立综合理工学院、波尔多计算机科学研究实验室、UMR 5800，法国塔朗斯 F-33400。[2]巴黎西岱大学、法国国家科学研究中心、巴黎跨学科研究所，法国巴黎 F-75013。[3]里昂高等师范学院、克洛德·贝尔纳里昂第一大学、法国国家科学研究中心、法国国家信息与自动化研究所、里昂计算机科学实验室 UMR 5668，法国里昂。

arXiv:2611.32872v1 [cs.DM] 24 Nov 2026

摘要

我们给出了西摩第二邻域猜想的一个简短替代证明，该猜想最近由 OpenAI 证明。我们的证明结合了他们的约化方法与一种不同的论证，证明每个非平凡定向图 G 都包含一个非空集合 X，使得 $X^+ \neq V(G)$ 和 $|(X^+)^+ \setminus X^+| \geq |X^+ \setminus X|$，其中 $X^+ = N_G^+[X]$。

1 引言

在一个定向图中[1] G，顶点 $N_G^+(v)$ 和 $N_G^{++}(v)$ 的第一和第二出邻域v 分别由与 v的有向距离恰为一和二的顶点组成。西摩第二邻域猜想（SNC）断言，每个定向图都包含一个顶点，其第二出邻域至少与第一出邻域一样大。因此，SNC 是一个局部扩张命题：定向图不可能在每个顶点处都收缩。

Dean 和 Latka 记录了这一猜想 [DL95], ，并将其归于 Seymour，且研究了它在竞赛图上的限制情形[2]。这一特殊情形称为 Dean 猜想，Fisher [Fis96] 利用一种劣势概率分布证明了它；该分布的存在性可由 Farkas 引理推出，并结合了平均论证。随后，Havet 和 Thomassé [HT00] 基于中位序给出了一个简短的组合证明。

后续研究从多个方向探讨了一般猜想。对于稠密定向图，Fidler 和 Yuster [FY07], 以及 Ghazal 后来给出的修正和推广 [Gha12], 证明了当缺失边构成匹配、星或团时，SNC 成立。最近，Brukhman [Bru26] 证明了只要 $n \leq 2\delta^+ + 2$，SNC 就成立，其中 n 是顶点数，而 δ^+ 是最小出度。另一条研究路线考察了最小出度较小的情形：Kaneko 和 Locke [KL01] 解决了 $\delta^+ \leq 6$的情形，而 Sadhukhan 和 Sen [SS26]将结果推广到 $\delta^+ \leq 7$。

另一个自然的目标是证明该猜想的近似形式。Chen、Shen 和 Yuster [CSY03] 证明了，每个定向图 G 都有一个顶点 v 满足 $|N_G^{++}(v)| \geq c|N_G^+(v)|$，其中 $c = 0.657298\ldots$。二十多年来，这一直是最佳普适常数，直到 Huang 和 Peng [HP24] 将其提升至0.715538
。关于该猜想的更多背景和早期结果，请参阅 Sullivan 的综述 [Sul06，第 3]节。

Seacrest [Sea19] 证明了，SNC 等价于关于顶点集的相应命题。在此约化的基础上，OpenAI [Ope26] 加强了由此得到的集合不等式，并利用它在 2026年10月发布的一篇预印本中证明了 SNC。

在这 在本文中，我们使用 OpenAI 不等式的一个较弱形式给出了 SNC 的另一种证明 y.

[1]定向图是指没有环且不存在一对相反弧的有向图。[2]竞赛图是完全图的一种定向。

证明概述。对于有向图 G 和集合 $X \subseteq V(G)$，令 $X^+ = N_G^+[X]$ 为其闭外邻域，令 $\partial^+ X = N_G^+[X] \setminus X$ 为其外边界。我们将 $b(X) = |\partial^+ X| = |X^+| - |X|$ 称为 X 的扩张。在全文中，X^+、$\partial^+ X$ 和 $b(X)$ 均在固定的环境图 G 中计算。OpenAI 的加强不等式 [Ope26，引理 2。2] 表明，如果 SNC 不成立，那么将存在一个非平凡的定向图 G，其中每个非空真集合 $X \subseteq V(G)$ 都满足

$$b(X^+) < b(X). \tag{$*$}$$

我们证明这样的图不存在。

要导出 $(*)$ 的矛盾，一个自然的做法是从一个集合 X 开始，并反复将其替换为X^+。只要 X 仍是其真子集，量 $b(X)$ 就会严格递减。但仅凭这一点无法导出矛盾，因为 X 可能只会不断增大，直到达到整个 $V(G)$。我们的想法是从每个顶点同时运行这一过程，为每个 $v \in V(G)$ 维持一个包含 v 的集合 X_v，并利用这些集合彼此施加约束，使它们始终为真子集。

我们将族 $(X_v)_{v \in V(G)}$ 视为以 $V(G)$ 为顶点集的有向图：对于不同的顶点 u, v，只要满足 $v \in X_u$，我们就加入一条弧 $u \to v$。我们通过要求该有向图始终是 G的定向超图来约束这些集合。我们称这样的图为 G的扩张。对于有向图 H，我们用 H_v 表示图 H中 v 的闭外邻域。容易看出，$(*)$意味着每个顶点 v 都有一个入邻点 u，且该入邻点属于 G。由于 $u \to v$ 属于每个扩张H，定向性迫使 $u \notin H_v$成立，因此每个 H_v 始终是真子集。我们从扩张$H = G$开始。

将每个集合 H_v 替换为 H_v^+，不一定会得到另一个扩张，因为两个扩张后的集合可能产生相反弧。为避免这种情况，我们先收缩这些集合，再将它们扩张。给定 G的一个扩张 H，将其剩余图 R 定义为

$$R_v = \bigcap_{u \in N_G^-[v]} H_u, \qquad \text{for every } v \in V(G).$$

R 的定义保证，先在 G 中、再在 R中取闭外邻域，只会到达 H中起始顶点的闭外邻域内的顶点。我们将此记为 $GR \subseteq H$。注意，剩余图是满足 $GR \subseteq H$的 H 的最大子有向图。这个条件的原因很简单。如果扩张后的集合 R_v^+产生了一对相反弧，那么它们的见证将构成一个 $RGRG$类型的闭交替构型。从下一个顶点读起，这是一个闭 $GRGR$ 构型。由于 $GR \subseteq H$，其两个 GR 段构成一个闭HH 构型。由于 H 是定向的，这两个段都必须是环。但每个 GR 环都是平凡的：由于 G，$R \subseteq H$，非平凡环会在 H中形成一个二圈。因此，原构型是平凡的，这与它见证了一个二圈相矛盾。由此，族$(R_v^+)_{v \in V(G)}$ 定义了 G的另一个扩张。

这表明，可以反复将一个扩张 H 替换为相应的扩张 R^+。收缩可能会增加某些集合的扩张，因此我们需要控制其总体影响。我们希望减小的量是总扩张，定义为

$$\Phi(H) = \sum_{v \in V(G)} b(H_v).$$

我们不逐步执行这一过程，而是直接进入终止状态：选择使 $\Phi(H)$ 最小的扩张 H。我们的主要结果是，在这样的极小化元处，收缩不会增加总扩张：

$$\Phi(R) \le \Phi(H).$$

每个 R_v 都非空且为真子集，因此由 $(*)$ 可得，对于每个 v，$b(R_v^+) < b(R_v)$。于是

$$\Phi(R^+) < \Phi(R) \le \Phi(H).$$

但 R^+ 再次是一个扩张，这与选择 H 作为使 Φ 最小的扩张相矛盾。这就证明了该定理。

2 个证明

为得到矛盾，我们想证明，使 Φ 最小的扩张 H 满足 $\Phi(R) \leq \Phi(H)$。为了获得更强的归纳假设，我们在以下较弱的极小性假设下证明这一不等式。

如果对于每个扩展 $H' \supseteq H$， $\Phi(H') \geq \Phi(H)$，则称扩展 H 是饱和的。等价地，对于每个顶点 u，在保持定向的情况下，从 u 添加任意一组弧，都不会使$b(H_u)$减小。

定理 1。 设 H 是定向图 G的饱和扩展， R 是其剩余图。则 $\Phi(R) \leq \Phi(H)$。

我们通过 定理 1 关于中非邻接顶点对数量的归纳来证明。我们首先处理竞赛图扩展，这是归纳的基础情形。

引理 2。 设 H 是定向图 G的扩展， R 是其剩余图。如果 H 是竞赛图，则 $\Phi(R) \leq \Phi(H)$。

证明。 令 $\mathcal{B}_R = \{(v, y) : y \in \partial^+ R_v\}$ 以及 $\mathcal{B}_H = \{(v, y) : y \in \partial^+ H_v\}$。固定 $(v, y) \in \mathcal{B}_R$。由于 H是竞赛图， $y \to v$ 和 $v \to y$ 中恰有一个属于 H。

如果 $y \to v \in H$，那么 $R_v \subseteq H_v$ 给出 $y \in R_v^+ \subseteq H_v^+$，而 $y \notin H_v$，因为 H 是有向的。因此 $(v, y) \in \mathcal{B}_H$。

反之，假设 $v \to y \in H$。由于 $y \in H_v \setminus R_v$， v 在 G 中的某个入邻点 u 满足$y \notin H_u$。由于 H是一个竞赛图， $y \to u \in H$，因此 $v \in \partial^+ H_y$。于是 $(y, v) \in \mathcal{B}_H$。

由于 R^+ 是有向的，这给出了从 $\mathcal{B}_R$ 到 $\mathcal{B}_H$的一个单射，由此可得

$$\Phi(R) = |\mathcal{B}_R| \leq |\mathcal{B}_H| = \Phi(H). \qquad \square$$

现在我们可以完成定理 1的证明。

定理 1 的证明。我们对 H中的非邻接顶点对数量作归纳。若H 是一个竞赛图，则结论由定理 2 得出。否则，选取一个顶点 z，使其在 H中有一个非邻点，并令 $U \subseteq V(G) \setminus \{z\}$ 为在 H 中与 z 非邻接的顶点集合。在满足对每个 $v \notin U$ 都有 $H'_v = H_v$，且对每个 $u \in U$都有 $z \in H'_u$ 的扩张 $H' \supseteq H$ 中，选取一个使 $\Phi(H')$ 最小的扩张。由于 H 是饱和的， H' 的极小性意味着 H'是饱和的。令 R' 表示其剩余图。由于 H' 的非邻接顶点对数量少于 H，归纳假设给出 $\Phi(R') \leq \Phi(H')$。剩下要证明 $\Phi(R') - \Phi(R) \geq \Phi(H') - \Phi(H)$。

对于每个顶点 $u \in U$，我们必须计入从 H 到 H'时 $b(H'_u) - b(H_u)$ 的增量。我们使用霍尔定理，为每个 $u \in U$ 关联一个不同的顶点 x_u，使得从 R 到 R' 时相应的增量 $b(R'_{x_u}) - b(R_{x_u})$ 至少同样大。

对于每个 $S \subseteq U$，由于 S 与 H_z不相交， H 在 z 处的饱和性给出

$$|S^+ \setminus (H_z)^+| = |(H_z \cup S)^+| - |(H_z)^+| = |S| + b(H_z \cup S) - b(H_z) \geq |S|.$$

因此，霍尔定理给出不同的顶点 $x_u \in N_G^+[u] \setminus (H_z)^+$，每个 $u \in U$对应一个 .

对于所有 $X, Y \subseteq V(G)$，我们有 $(X \cap Y)^+ \subseteq X^+ \cap Y^+$ 和 $(X \cup Y)^+ = X^+ \cup Y^+$，因此函数 b 是次模的： $b(X \cap Y) + b(X \cup Y) \leq b(X) + b(Y)$。

我们断言，对于每个 $x \in V(G)$ 以及每个满足 $R_x \subseteq T \subseteq R'_x$ 的集合 T，都有$b(R_x) \leq b(T)$。事实上，取一个包含极小极小值解 T。对于每个 $y \in N_G^-[x]$，都有$T \subseteq H'_y$，因此利用 H 在 y 处的次模性和饱和性，可得

$$b(T \cap H_y) \leq b(T) + b(H_y) - b(T \cup H_y) \leq b(T).$$

由于 $T \cap H_y$ 仍处于区间内，包含意义下的极小性迫使 $T \subseteq H_y$ 成立。由于这对所有 $y \in N_G^-[x]$ 都成立，根据 R_x 的定义，我们有 $T \subseteq R_x$，从而得到 $T = R_x$。

对于 $u \in U$，选择 x_u 可得

$$N_G^-[x_u] \subseteq V(G) \setminus H_z = N_H^-(z) \cup U = N_{H'}^-(z).$$

因此 $z \in R'_{x_u}$。由于 $u \in N_G^-[x_u]$，我们有 $R_{x_u} \subseteq H_u$ 和 $R'_{x_u} \subseteq H'_u$。由该断言可得$b(R'_{x_u} \cap H_u) \geq b(R_{x_u})$。由于 $H_u \cup \{z\} \subseteq H_u \cup R'_{x_u} \subseteq H'_u$，$H'$ 的极小性给出 $b(H_u \cup R'_{x_u}) \geq b(H'_u)$。因此，次模性得到

$$b(R'_{x_u}) + b(H_u) \geq b(R'_{x_u} \cap H_u) + b(H_u \cup R'_{x_u}) \geq b(R_{x_u}) + b(H'_u),$$

重新整理即得所需的界。

根据该断言，每个差值 $b(R'_x) - b(R_x)$ 都是非负的。由于顶点 x_u 各不相同，我们得到

$$\begin{aligned}\Phi(R') - \Phi(R) &= \sum_{x \in V(G)} \big(b(R'_x) - b(R_x)\big) \geq \sum_{u \in U} \big(b(R'_{x_u}) - b(R_{x_u})\big) \\ &\geq \sum_{u \in U} \big(b(H'_u) - b(H_u)\big) = \Phi(H') - \Phi(H).\end{aligned}$$

结合 $\Phi(R') \leq \Phi(H')$，可得 $\Phi(R) \leq \Phi(H)$。 □

现在我们可以证明第二邻域猜想。

推论 3. 每个非空定向图都包含一个顶点 v使得 $|N_G^{++}(v)| \geq |N_G^+(v)|$。

证明。 反设不然。于是，根据 [Ope26，引理 2。2], 存在一个至少含有两个顶点的定向图 G，使得对于每个非空真子集 $b(X^+) < b(X)$。图 $X \subseteq V(G)$ 是强连通的：否则，一个汇强连通分量 G 将是非空真子集，并满足 X，这与 $X^+ = X$矛盾。 $b(X^+) < b(X)$特别地， G的每个顶点都有一个入邻点。

选择一个 H 的扩张，使 G 最小化 $\Phi(H)$，并令 R 为其剩余图。该扩张 H 是饱和的，因此定理 1 给出 $\Phi(R) \leq \Phi(H)$。此外，根据定义， R^+ 是 G 的扩张。

每个 R_v 都包含 v，并且省略了 v 在 G中的每个入邻点，因为 $R_v \subseteq H_v$ 且 H 是定向的。因此，每个 R_v 都非空且为真子集，所以 $b(R_v^+) < b(R_v)$。对所有顶点求和，我们得到

$$\Phi(R^+) < \Phi(R) \leq \Phi(H).$$

这与将 H 选作使 Φ最小的 G 扩张相矛盾。 □

运用类似的论证，我们还可以证明，每个非空的无汇有向图 G至少包含两个顶点 v，满足 $|N_G^{++}(v)| \geq |N_G^+(v)|$。

人工智能声明。从 OpenAI 的证明出发，我们通过与 ChatGPT Astra（OpenAI）和 Claude Fable（Anthropic）的多轮交流，探索并比较了几种方法。在我们建议采用向下归纳法，并以竞赛图作为基础情形后，Claude Fable 找到了本文所呈现的证明。随后，ChatGPT Sol（OpenAI）协助起草和修改了稿件。作者对数学论证、参考文献的准确性以及最终文本承担全部责任。

参考文献

[Bru26] Jake Brukhman. 关于 Seymour 第二邻域猜想稠密情形的一个定理，2026年。 arXiv:2608.11530.[CSY03] Guantao Chen、Jian Shen 和 Raphael Yuster. 在有向图中通过第一邻域研究第二邻域。组合年刊，7(1):15–20，2003年6月。 doi:10.1007/s000260300001.[DL95] Nathaniel Dean 和 Brenda J Latka. 竞赛图的平方——一个开放问题。数论会议，第73–80页，1995年。[Fis96] David C. Fisher. 竞赛图的平方：Dean 猜想的一个证明。图论杂志，23(1):43–48，1996年。 doi:10.1002/(SICI)1097-0118(199609)23:1<43::AID-JGT4>3.0.CO;2-K.[FY07] D. Fidler 和 R. Yuster. 关于第二邻域问题的评述。图论杂志，55(3):208–220，2007年。 doi:10.1002/jgt.20229.[Gha12] Salman Ghazal. 缺少一个广义星的竞赛图中的 Seymour 第二邻域猜想。图论杂志，71(1):89–94，2012年9月。 doi:10.1002/jgt.20634.[HP24] Hao Huang 和 Fei Peng. 对 Seymour 第二邻域猜想的一个改进界，2024年。 arXiv:2412.20234.[HT00] Frédéric Havet 和 Stéphan Thomassé. 竞赛图的中位序：研究第二邻域问题和 Sumner 猜想的一种工具。图论杂志，35(4):244–256，2000年。 doi:10.1002/1097-0118(200012)35:4<244::AID-JGT2>3.0.CO;2-H.[KL01] Yoshihiro Kaneko 和 Stephen C Locke. Paul Seymour 距离 2 猜想的最小度方法。数论会议，第201–206页，2001年。[Ope26] OpenAI. Seymour 第二邻域猜想的一个证明。 https://github.com/openai/math，2026年9月。预印本，已在 Lean 中形式化。[Sea19] Tyler Seacrest. 关于顶点子集的 Seymour 第二邻域猜想，2019年。arXiv:1808.06293.[SS26] Arpan Sadhukhan 和 Sagnik Sen. 在最小出度至多为 7 的定向图中定位 Seymour 顶点，2026年。 arXiv:2606.30588.[Sul06] Blair Dowling Sullivan. 与 Caccetta-Haggkvist 猜想相关的问题和结果综述，2006年。 arXiv:math/0605646。