arXiv:2611.32875v1 [math.DS] 24 Nov 2026

射影簇有理自映射的周期点计数

XIAO LI

摘要。我们研究光滑射影簇的主导有理自映射的孤立周期点数量的渐近行为。首先，我们根据该映射各次迭代的次数，给出这一数量的上界，从而将 Dinh–Nguyen–Truong 的一个定理推广到任意特征。我们的方法纯粹是代数性的，无须借助正闭流的密度理论。

随后，我们确定特征为 0 的域上的曲面双有理自映射的孤立周期点的精确渐近增长。为此，我们运用 Moriwaki 的高度理论，将 Jonsson–Reschke 的论证推广到任意有限生成域上 $\mathbb{Q}$ 。

1. 引言

周期点计数是动力系统中的一个基本问题。它提供了动力学复杂度的一个定量不变量，并且与熵及上同调数据的增长密切相关。

在本文中，我们在代数框架下研究这个问题。设 X 是定义在代数闭域 K 上、维数为 m 的正规射影簇，并设 $f\colon X \dashrightarrow X$ 是一个主导有理自映射。回忆一下，f 由其图 $\Gamma(f) \subset X \times X$ 确定，使得第一投影 $\pi_1\colon \Gamma(f) \to X$ 是一个双有理态射。逆映射 π_1^{-1} 未定义良好的点的轨迹称为不定 locus $\mathrm{Ind}(f) \subset X$：它是一个余维至少为 2 的闭子集。设 Δ 为 $X \times X$ 的对角线，我们定义交概形 $F_n(f) := \Gamma(f^n) \times_{X\times X} \Delta$，其支集为 $\Gamma(f^n) \cap \Delta$ 的交。

一般而言，不定 locus 非空，且周期点集合具有无限基数，因此考虑孤立的实际周期点集合是自然的。令 U_n 为在 f 作用下长度为 n 的轨道有定义的开子集。更准确地说，我们可以通过归纳法定义 U_n ，

$$U_1 = X \setminus \mathrm{Ind}(f), \qquad U_{n+1} = \{x \in U_n, f^n(x) \notin \mathrm{Ind}(f)\}\,.$$

周期为 n 的孤立周期点概形，记作 $\mathrm{IPer}_n(f)$，是 $\mathrm{Per}_n(f)$ 中由其包含于 U_n 的零维不可约分支之并支集所支撑的既开又闭子概形。

日期：2026年11月24日。

我们介绍计数 $\mathrm{IPer}_n(f)(K)$的方法：不计重数，记作 $\mathrm{P}_n(f)$；计入重数，记作 $\mathrm{N}_n(f)$。定义和详细说明请参见第 3 节。我们关注计数的渐近行为。

问题 1.1。 当 $n \to \infty$ 时，P_n（f）（分别为 N_n（f））的增长率是多少？

当 X 足够正则时，例如当其光滑时，我们可以利用交理论，将 $\mathrm{P}_n(f)$ 与 f^n 的 Lefschetz数联系起来，其定义为交叉数

$$L(f^n) := \Gamma(f^n) \cdot \Delta \in \mathbb{Z} .$$

接下来，我们将利用过量公式，把 $L(f^n)$ 写成赋予 $\Gamma(f^n) \cap \Delta$ 的每个不可约分支的适当定义的重数之和。

格罗莫夫的一项计算使我们能够利用 f 的动力学次数（定义如下）来控制交叉数$\Gamma(f^n)\cdot \Delta$。这些数控制着代数动力系统的动力学复杂性；当基域带有度量时，它们还与熵密切相关。

因此，只要我们能够证明 $\mathrm{P}_n(f) \sim L(f^n)$，就可以实现我们的目标。证明这样的比较需要克服若干困难。

(i) $\Gamma(f^n)$ 的分量的重数 $\cap \Delta$ 可能非常高，并且会随着 n 不受控制地增长。(ii) $\Gamma(f^n)$ 的正维分量 $\cap \Delta$ 会参与 $L(f^n)$ 的计算；除非处于有利情形（例如 X 是齐性空间），这些贡献可能为正，也可能为负。(iii) $\pi_1(\Gamma(f^n) \cap \Delta)$ 的某些分量可能与不定 locus 相交，因此还需要给它们的重数加以界定。

我们的第一个结果是给出 $\mathrm{P}_n(f)$ 关于 f^n 的次数的一个一般上界。为陈述定理，固定一个丰线丛 $L \to X$，并回顾一下，对于任意 $p \in \{0, \ldots\ldots, m\}$， f 关于 L 的次数定义为

$$\deg_{L,p}(f) = \pi_1^* c_1(L)^{m-p} \cdot \pi_2^* c_1(L)^p \cdot \Gamma(f).$$

Dinh–Sibony 在零特征下的一个定理，以及 [Dan20]和 [Tru20]在任意域上的一个定理表明，序列 $\deg_{L,\ p}(f^n)$ 在相差一个一致常数的意义下具有次乘性，因此可以定义动力学次数

$$\lambda_p(f) := \lim_{n\to\infty} \deg_{L,p}(f^n)^{1/n}$$

根据 Fekete 引理。回顾一下，改变极化至多会使次数乘以一个与迭代无关的常数，因此动力学次数不依赖于这一选择。

完美点（它推广了孤立周期点）数量的研究可追溯至 Fulton。 [Vu22] 将完美但非周期的点称为奇异周期点，并利用流的密度研究了复动力学中相关计数的增长。为了陈述我们定理的一般形式，我们先引入完美点的概念。假设 X 是光滑的。遵循

Fulton，我们考虑对角线 π 的爆炸： $X \times X \to X \times X$ 并考察例外除子 $E := \pi^{-1}(\Delta)$ 与图的严格变换 $\Gamma(f^n)$ 的概形交。关键的观察是， E 是一个超曲面，因此交 $E \cap \Gamma(f^n)$ 具有纯维数 $m-1$。如果纤维 $E \cap \Gamma(f^n) \to \Delta$ 在 P 上的维数为满维，即包含 $E_P = \pi^{-1}(P)$，我们就称 $P = (x, x) \in \Delta(K)$ 是一个周期为 n 的完美点 。我们强调，所有孤立点都是完美点。记 $\widetilde{\mathrm{P}}_n(f)$ 为 $\Gamma(f^n)$ 中 E_P 在 $E \cap \Gamma(f^n)$ 上的几何重数所对应的完美点数。我们有

$$\mathrm{N}_n(f) \leq \widetilde{\mathrm{P}}_n(f).$$

详情请参见第 3 节。

定理 A. 设 X 是定义在代数闭域上的 m 维光滑射影簇。则存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意优势有理映射 $f\colon\ X \dashrightarrow X$ 以及任意整数 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n(f) \leq C \max_{0 \leq p \leq m} \deg_{L,p}(f^n). \tag{1.1}$$

特别地，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \widetilde{\mathrm{P}}_n(f) \leq \log \max_{0 \leq p \leq m} \lambda_p(f). \tag{1.2}$$

由于

$$\mathrm{P}_n(f) \leq \mathrm{N}_n(f) = N_n^{\mathrm{geom}}(f) \leq \widetilde{\mathrm{P}}_n(f),$$

因此，我们得到所有这些量的一个上界。对于不等式（1.2）中计重数的孤立周期点计数的一个版本，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{N}_n(f) \leq \log \max_{0 \leq p \leq m} \lambda_p(f),$$

最初由 Dinh、Nguyen 和 Truong 证明， [DNT17] 针对紧Kähler流形上的亚纯自映射，使用正闭流的稠密性理论。Vu [Vu22], [Vu19] 证明了（1.1），其方法是利用局部解析估计，界定流在爆炸下严格变换的质量。他更进一步，运用流的稠密性理论，为$\mathrm{P}_n(f)$在某些特殊类的亚纯映射（包括具有主导拓扑次数的映射）情形下得到了下界。

我们的证明完全依赖于 Fulton交理论，适用于任意特征的代数闭域。

数量 $\log \max_{0 \leq p \leq m} \lambda_p(f)$ 通常称为 f的代数熵；参见 [DNT17、BV99]。当基域赋予度量且完备时，它已知是映射的拓扑熵的一个上界 f，该映射诱导于 X的解析化上：在阿基米德情形下，这是 Dinh和Sibony 的定理 [DS05], ；在非阿基米德情形下，则归功于 Favre、Truong 和 Xie [FTX26]。孤立周期点的数量能否与拓扑熵直接联系起来，是一个微妙的问题。

定理A (定理 2.8 和命题 2.7) 的关键步骤是证明$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$在 $E \cap \Gamma(f^n)$ 中的体积 $X \times X$可由 $\Gamma(f^n)$ 在$X \times X$中的体积一致控制。

现在我们转而研究如何求得 $\mathrm{P}_n(f)$ 的下界。这个问题更为微妙，因为必须构造出足够多的孤立周期点。标准方法高度依赖多复势理论，且仅适用于复数域。我们的第二个主要结果给出了零特征下曲面双有理映射的精确渐近增长。

定理 B. 设 $f\colon X \dashrightarrow X$ 是定义在代数闭域上、正规射影曲面上的双有理映射，该域的特征为 0。假设 $\lambda_1(f) > 1$。设 Q_n 是 $\mathrm{P}_n(f)$、$\mathrm{N}_n(f)$ 之一。那么

$$Q_n(f) = \lambda_1(f)^n + o(\lambda_1(f)^n).$$

我们首先证明图周期点数量的上界

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{N}_n(f)}{\lambda_1(f)^n} \leq 1$$

(定理 4.1)，方法是改进导出定理 A 的论证。沿用上文的记号，我们需要求出$\widetilde{\quad}$ 的分量重数之和的上界，其中这些分量相对于纤维化 $\Gamma(f^n) \cap E$ 是水平的$\pi\colon E \to \Delta$。注意，任何这样的分量都映射到 X 中的一条周期点曲线上。我们结合 Cantat 关于周期曲线的有限性定理 [Can10]，以及一项明确计算（该计算表明这些水平曲线的重数可由迭代次数给出界），从而得到这个上界。另外，还请注意 Saito 公式以及文献 [IU10]中的相关研究。

下界的证明（定理5.13）

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathrm{P}_n(f)}{\lambda_1(f)^n} \geq 1$$

需要两个相互独立的步骤。首先，设基域为复数域。Bedford 和 Diller [BD05] 引入了一个“能量”条件，用于量化不定点趋近 f^{-1}的速度，并在该条件下构造了一个不变测度。后来，Diller、Dujardin 和 Guedj [DDG10] 证明了鞍周期点关于此测度等分布，他们的论证还给出了所需的下界。Jonsson 和 Reschke [JR18]证明了，如果 f 定义在某个数域上，那么 f 到 $\mathbb{C}$ 的每个基变换都满足 Bedford–Diller能量条件。利用 Moriwaki 高度理论，我们将他们的论证推广到任意零特征有限生成域，并证明可以找到到 $\mathbb{C}$ 的一个特化，使得所诱导的映射满足 Bedford–Diller能量条件。

虽然存在不满足 Bedford-Diller 能量条件的复双有理映射的例子，参见 [DG09] 以及 [Fav98]。Jonsson 和 Reschke

[JR18] 证明了，当 f 定义在数域上时，其到f 的任意基变换 $\mathbb{C}$ 都满足该条件。我们的论证建立在他们的结果之上，并运用了森胁高度理论。我们首先选取一个有限生成域 K'，使得 X 和 f 都定义在该域上；然后证明，对于 K' 到$\mathbb{C}$的“绝大多数”（就可测性而言）嵌入，所诱导的复映射满足 Bedford–Diller 能量条件。

注释与参考文献。从一般观点来看，动力学ζ函数应由周期点的数量来刻画，[AM65] 这表明研究计数问题颇有价值。

对于一维情形，尤其是 $\mathbb{P}^1$上的映射，我们可参阅 Silverman 的著作 [Sil10]。在正特征域上，必须将纯不可分现象与可分动力学区分开来。

对于极化自同态，情形要严格得多。若 $f^*L \simeq L^{\otimes q}$ 且$q > 1$，那么迭代的次数由单一缩放因子 q控制。Fakhruddin 特别证明了，在代数闭域上，射影簇的可极化自映射的周期点是 Zariski 稠密的 [Fak03]。在 $\mathbb{C}$复数域上，基本模型是射影空间的全纯自同态情形；Briend–Duval 证明了周期点的等分布结果 [BD99]。

对于一般的主导有理自映射或亚纯自映射，主要困难在于，迭代映射的不动点轨迹可能包含正维分量。在紧Kähler情形下，Dinh–Nguyen–Truong 证明了，按重数计数的孤立周期点的指数增长率受代数熵 [DNT17] 的上界所控制。他们的证明使用了 Dinh–Sibony [DS18] 所发展出的正闭流密度理论。在这一一般的交理论情形下，Vu [Vu22] 研究了完美周期点或奇异周期点。

当拓扑度主导其他动力学次数时，可以得到更强的结果。对于具有主导拓扑次数的紧Kähler流形上的亚纯自映射，Dinh–Nguyen–Truong 证明了排斥周期点的等分布结果，并给出了关于拓扑度的渐近公式[DNT15]。这一情形在精神上更接近经典的膨胀情形。

对于曲面的双有理映射，第一动力学次数是指数增长的主要来源。对于 $\mathbb{C}^2$上的多项式微分同胚，Bedford–Lyubich– Smillie 证明了周期点的等分布结果 [BLS93]。对于 $\mathbb{P}^2$上的双有理映射，Favre 研究了非临界周期点的增长 [Fav98]。Diller– Favre 系统地发展了双亚纯曲面映射的动力学 [DF01]。Xie 证明，对于第一动力学次数为 > 1的光滑射影曲面上的双有理映射，非临界周期点是 Zariski稠密的 [Xie15]；另见他的学位论文 [Xie14]。周期曲线在这一背景下发挥着特殊作用：Cantat 证明了不变超曲面的有限性结果 [Can10], ，而在双亚纯 Kähler 情形中，Lefschetz数与孤立周期点之间的比较可通过 Saito–Iwasaki–Uehara公式表示；参见 [DNT17、IU10]。对于拓扑度较小的曲面映射，Diller–Dujardin–Guedj 构造了不变测度，并在满足一个

能量条件 [DDG10]下证明了鞍周期点的等分布。多个情形下，鞍周期点的等分布问题也由 [LZ26a],[LZ26b] 和 [LZ25]进行了研究。

论文结构。 本文的组织结构如下。在第 2节中，我们回顾交理论工具，并发展体积不等式。在第 3节中，我们介绍计数问题的设定。第 4节证明定理 A 以及双有理曲面映射的上界。在第 5节中，我们回顾森脇高度理论的相关内容，建立所需的高度估计，并证明定理B中的下界。

致谢。 我要感谢我的导师 Charles Favre 对我的指导以及在本文写作过程中给予的帮助。我还要感谢 CMLS 实验室的支持。我要感谢中国国家留学基金管理委员会（CSC）和中国科学技术大学（USTC）提供的资金支持。

人工智能使用声明。 本文使用了 Chat-GPT Sol 6.1 生成校对报告。附录中的构想也由 Chat-GPT.Astra 提出。本项目属于作者的博士研究，并于2025年启动。引言中的所有结果均未借助任何人工智能获得。整篇稿件均由人工撰写。

2. 交叉理论与体积

2.1. **Chow群与Fulton交理论。**

我们假设簇是整的，并且定义在代数闭域 K上。我们采用Fulton交理论 [Ful98第1–2]章的约定。

2.1.1. *Chow*群。 设 X 是维数为 m的正规射影簇。对任意整数 k， k-代数循环群 $Z_k(X)$是由 X的k维子簇生成的自由阿贝尔群。设 $W \subset X$ 是整的$(k+1)$维子簇，并设 $r \in K(W)^\times$。对每个素除子 $D \subset W$，将 $r = a/b$写在一维局部整环$\mathcal{O}_{W,\,\eta_D}$ 中，并令

$$\operatorname{ord}_D(r) := \ell_{\mathcal{O}_{W,\eta_D}}\Big(\mathcal{O}_{W,\eta_D}/(a)\Big) - \ell_{\mathcal{O}_{W,\eta_D}}\Big(\mathcal{O}_{W,\eta_D}/(b)\Big).$$

该整数与表示 $r = a/b$无关。 r在 W 上的主除子是有限和

$$\operatorname{div}_W(r) := \sum_{\substack{D\subset W\\ \operatorname{codim}_W(D)=1}} \operatorname{ord}_D(r)[D] \in Z_k(W),$$

我们也将其视为 X上的一个循环。两个代数循环 α， $\beta \in Z_k(X)$称为有理等价，记作 $\alpha \sim \beta$，如果存在有限多个$(k+1)$维子簇$W_i \subset X$ 以及有理函数 $r_i \in K(W_i)^\times$ ，使得

$$\alpha - \beta = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(r_i).$$

周群 $A_k(X)$ 是 $Z_k(X)$ 关于有理等价所得到的商群。若 $Z \subset X$ 是一个维数为 k 的子簇，我们用 $[Z]$ 表示其在 $A_k(X)$ 中的类。

由于 X 是整的，映射 $n \mapsto n[X]$ 诱导出一个同构 $A_m(X) \simeq \mathbb{Z}$。群 $A_{m-1}(X)$ 是 Weil 除子模有理等价所得到的群。当 X 为正规时，它可与除子类群 $\mathrm{Cl}(X)$ 识别。任意线丛 $L \to X$ 都定义了一个类 $c_1(L) \in A_{m-1}(X)$。当 X 光滑时，这与通常的识别 $A_{m-1}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$ 一致。

任意 0-循环 α 都可以写成 $\alpha = \sum a_i[p_i]$的形式，其中 p_i 是闭点。我们令 $\deg(\alpha) := \sum_i a_i$。于是得到一个态射 $\deg\colon Z_0(X) \to \mathbb{Z}$，它下降为一个态射 $\deg\colon A_0(X) \to \mathbb{Z}$。

设 Z是 X的纯 k维闭子概形，并设 $Z_1, \cdots Z_t$ 是底层拓扑空间 $|Z|$的所有不可约分支。 Z_i 在 Z 中的几何重数 是 Artin局部环 $\mathcal{O}_{Z,\eta_i}$的长度：

$$\ell(Z_i, Z) := \ell_{\mathcal{O}_{Z,\eta_i}}(\mathcal{O}_{Z,\eta_i}),$$

其中 η_i 是 Z_i的一般点。

令 $K(Z_i)$为其剩余域。由于 $\mathcal{O}_{Z,\eta_i}$ 的极大理想 $\mathfrak{m}_i$ 是幂零的，由长度的可加性可得

$$\ell(Z_i, Z) = \sum_{s \geq 0} \dim_{K(Z_i)} \left(\mathfrak{m}_i^s / \mathfrak{m}_i^{s+1} \right),$$

其中求和是有限的；参见 [Sta26, Tags 00IVand 00IY]。于是， Z的基本循环为

$$[Z] = \sum_{i=1}^{t} \ell(Z_i, Z)[Z_i] \in A_k(X).$$

2.1.2. 适当推前与平坦拉回。设 X 和 Y 为射影簇，且 $f\colon X \to Y$是一个态射。由于 f 是适当的，对于任意不可约子簇$V \subset X$，其像 $f(V)$是 Y的一个子簇。我们定义

$$f_*[V] = \begin{cases} 0 & \text{if } \dim f(V) < \dim V, \\ [K(V) : K(f(V))]\,[f(V)] & \text{if } \dim f(V) = \dim V. \end{cases}$$

这在代数循环上定义了一个推前态射，并且该态射下降到 Chow 群[Ful98，第 1],

$$f_*\colon A_k(X) \longrightarrow A_k(Y).$$

现在假设 $f\colon X \to Y$是相对维数为 e的平坦态射。对于任意子簇$V \subset Y$，概形论逆像 $f^{-1}(V)$的维数为 $\dim\ V + e$，我们定义

$$f^*[V] := [f^{-1}(V)].$$

由线性性将其扩展，并下降为一个态射

$$f^*\colon A_k(Y) \longrightarrow A_{k+e}(X).$$

详见 [Ful98第 1] 章。

2.1.3. 与除子的交。设 X 是一个维数为m的正规射影簇，且 D 是 X上的一个 Cartier 除子。设 $W \subset X$ 是一个维数为 k的子簇，并设 $j\colon W, \to X$ 是包含映射。我们定义

$$D \cdot W \coloneqq j_*\Big[\mathrm{div}_W(s)\Big] \in A_{k-1}(X),$$

其中 s 是 $\mathcal{O}_X(D)|_W$ 的任意非零有理截面。这个类与截面 s 的选取无关。态射 $D \cdot -\colon Z_k(X) \to A_{k-1}(X)$ 下降为一个 Chow 群之间的态射。可以证明，该态射仅取决于 D 的线性等价类，因此我们可以记作

$$[D] \cdot -\colon A_k(X) \longrightarrow A_{k-1}(X),$$

其中 $[D] \in A_{m-1}(X)$ 对应于 D 的线性等价类。

若 $f\colon X' \to X$ 是射影簇之间的一个态射，那么对于任意循环 $\alpha \in A_*(X')$，投影公式成立

$$f_*(f^*D \cdot \alpha) = D \cdot f_*\alpha.$$

若 f 是平坦的，那么

$$f^*(D \cdot \beta) = f^*D \cdot f^*\beta$$

对每个 $\beta \in A_*(X)$。这两个恒等式都可由 Cartier 除子与适当推前和平坦拉回的相容性推出 [Ful98，第 2 节。3]。

2.1.4. 向量丛与陈类。我们回顾下文将用到的关于射影丛的事实；参见 [Ful98，第 3] 章，以及 [EH16，第 9.3]节。设 $N \to X$是秩为 r的向量丛，并记 $E = \mathbb{P}(N)$ 为 N中直线的射影丛。令 $e = r-1$为 E的纤维维数。记 $E \to X\colon p$为投影，并用 $E_x = p^{-1}(x)$ 表示 x上的纤维。我们约定 $\mathsf{O}_E(-1)$ 是 p^*N的典范直线子丛。其对偶线丛 $\mathsf{O}_E(1)$ 在X上相对充足。特别地，若 $C \subset E_x$ 是包含在 $p\colon E \to X$的某个纤维中的整曲线，则

$$h \cdot C = \deg\Big(\mathcal{O}_E(1)|_C\Big) > 0, \qquad h = c_1\Big(\mathcal{O}_E(1)\Big).$$

注意， p 是适当且平坦的；因此推前和拉回都有定义。

引理 2.1. 对于 X上的任意丰线丛 L，存在足够大的 $N \in \mathbb{N}$，使得对于 $n \geq N$，线丛 $\mathcal{O}_E(1) + np^*L$ 是丰沛的。

证明。该论证是 [Laz17 中例 1.7.2 和命题 1.7 的射影丛情形。10]。

由于 L 是丰沛的，存在一个整数 n 以及一个满射

$$\mathcal{O}_X^{\oplus s} \twoheadrightarrow N^\vee \otimes L^{\otimes n}.$$

对偶化给出一个向量丛嵌入

$$N \otimes L^{\otimes(-n)} \hookrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus s}.$$

它诱导出直线的射影丛之间的闭浸入

$$j\colon E=\mathbb{P}(N)\cong\mathbb{P}(N\otimes L^{\otimes(-n)})\hookrightarrow\mathbb{P}^{s-1}\times X.$$

在此同一化下， $\mathbb{P}(N\otimes L^{\otimes(-n)})$ 上的典范线为 $\mathcal{O}_E(-1)\otimes p^*L^{\otimes(-n)}$。因此

$$j^*\operatorname{pr}_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{s-1}}(1)\cong\mathcal{O}_E(1)\otimes p^*L^{\otimes n}.$$

外积

$$\operatorname{pr}_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{s-1}}(1)\otimes\operatorname{pr}_2^*L$$

在 $\mathbb{P}^{s-1}\times X$ 上是丰沛的。它经由 j 的限制为 $\mathcal{O}_E(1)\otimes p^*L^{\otimes n+1}$，因此这个线丛是丰沛的。故 $N=n+1$ 足够。□

引理 2.2。对于任意类 $\alpha\in A_*(X)$，有

$$p_*(p^*\alpha\cdot h^j)=\begin{cases}0 & \text{if } j<e,\\ \alpha & \text{if } j=e.\end{cases}$$

证明。根据投影公式，有

$$p_*(p^*\alpha\cdot h^j)=\alpha\cdot p_*(h^j),$$

so 只需证明 $p_*(h^j)=0$ 当 $j<e$ 且 $p_*(h^e)=[X]\in A_m(X)$ 时即可。

如果 $j<e$，那么 h^j 由一个维数为 $\dim X+e-j>\dim X$ 的循环表示，而其在 p 下的像包含于 X中。根据适当推前的定义，我们有 $p_*(h^j)=0$。

当 $j=e$ 时，记 $p_*(h^e)=a[X]$ 为某个 $a\in\mathbb{Z}$。只需在一个闭点 $x\in X$ 上验证：

$$a[x]=p_*\left(h^e\cdot[p^{-1}(x)]\right)=p_*\left(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^e}(1))^e\right)=[x].$$

这就得到 $a=1$。 □

我们回顾射影丛的 Chow群的以下分解定理。

定理 2.3 ([Ful98，定理 3.3])。对于每个 $k\in\mathbb{N}$，平坦拉回态射p^*： $A_k(X)\to A_{k+e}(E)$ 都是单射，并且存在一个典范同构

$$A_k(E)\simeq\bigoplus_{i=0}^{e}A_{k-e+i}(X).$$

Mor更准确地说，每个元素 $\beta\in A_k(E)$ 都可以唯一地表示为

$$\beta=\sum_{i=0}^{e}p^*(\alpha_i)h^i,$$

其中 $\alpha_i\in A_{k-e+i}(X)$。

定义 2.4。 N 的塞格雷类定义为

$$s_i(N) = p_*(h^{e+i}) \in A_{m-i}(X), \qquad i \geq 0.$$

总 Segre 类为

$$s(N) = \sum_{i\geq 0} s_i(N) \in A_*(X).$$

注意，与 Segre 类的交是良定义的。对于任意 $\alpha \in A_*(X)$，我们令

$$s_i(N) \cdot \alpha = p_*(h^{e+i} \cdot p^*\alpha).$$

然后通过恒等式定义陈类

$$c_t(N)s_t(N) = 1,$$

其中 $s_t(N) = \sum_{i\geq 0} s_i(N)t^i$ 和 $c_t(N) = \sum_{i\geq 0} c_i(N)t^i$ 是形式幂级数。因此 $c_0(N) = 1$，$c_1(N) = -s_1(N)$，并且对于 $n \geq 1$，

$$c_n(N) = -\sum_{i=1}^{n} s_i(N)c_{n-i}(N).$$

I特别地，我们有 $c_i(N) = 0$ 当 $i > r = e + 1$ 且 $s_i(N) = 0$ 当 $i > m$.

由于陈类是塞格雷类的多项式，因此它们的交也定义良好。事实上，它们可描述如下。对于 X 的不可约子簇 Z，有 $c_i(N) \cdot [Z] = j_*c_i(N|_Z)$，其中 $j\colon Z, \to X$ 是包含映射。

陈类与平坦拉回相容：

$$c_i(f^*N) \cdot f^*\alpha = f^*(c_i(N) \cdot \alpha)$$

对于任意平坦态射 $f\colon X' \to X$。它们还满足惠特尼公式：对于每个向量丛的正合列

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

有如下形式多项式关系

$$c_t(N) = c_t(N')c_t(N'').$$

2.1.5. 法锥与塞格雷类。 锥是向量丛的推广。尽管一般的锥不具有通常意义下向量丛的陈类，但其射影完备化带有一个典范线丛，可用来定义其塞格雷类；参见 [Ful98，第 4.1–4 节。3]。

设 X 是一个维数为 m 的正规射影簇。如果 $Z \subset X$ 是由理想层 $\mathcal{I}$ 定义的闭子概形，那么

$$C_ZX \coloneqq \operatorname{Spec}_Z \left(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \right)$$

是 Z 在 X的法锥。它是一个纯维数为 m 的锥，定义在 Z上；参见 [Ful98，附录 B.6.1 和 B.6。6]。

对于一个在 Z 上的锥 $C = \text{谱}_Z(\mathcal{S}^\bullet)$，令

$$\overline{C} = \mathbb{P}(C \oplus 1) \coloneqq \operatorname{Proj}_Z(\mathcal{S}^\bullet[u]), \qquad q\colon \overline{C} \longrightarrow Z,$$

令其为射影完备化，其中 u 的次数为 1 且1 表示平凡线丛。令 $h = c_1(\mathcal{O}_C(1))$。遵循 [Ful98，第 4.1–4 节。2], 我们定义

$$s(C) \coloneqq q_* \left(\sum_{i \geq 0} \overline{h}^i \cdot [\overline{C}] \right), \qquad s(Z, X) \coloneqq s(C_Z X) \in A_*(Z).$$

由于维数的限制，该和是有限的。我们将其在 $A_k(Z)$ 中的分量记为 $\{s(Z, X)\}_k$。若 Z具有纯维数 z，则令 $s_i(Z, X) \coloneqq \{s(Z, X)\}_{z-i}$，这样 i度量了 Z上的余维，正如上文的向量丛塞格雷类一样。特别地， $C_X X$ 是零锥，且 $s(X, X) = [X]$。

若 $Z \neq X$，则沿 Z 对 X 进行爆炸所得的簇为

$$\pi\colon \widetilde{X} = \operatorname{Proj}_X \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n \right) \longrightarrow X.$$

其例外除子为 $E = \mathbb{P}(C_Z X)$；参见 [Ful98，附录 B.6。3]。将其投影记为 $p\colon E \to Z$ 并令 $h = c_1(\mathcal{O}_E(1))$。则 $\mathcal{O}_E(1) = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)|_E$，而[Ful98，推论 4.22] 给出了等价公式

$$s(Z, X) = p_* \left(\sum_{i \geq 0} h^i \cdot [E] \right).$$

回顾一下，闭嵌入 Z ，$\to X$由理想层 $\mathcal{I}$ 定义，若 d 满足 $\mathcal{I}$ 在局部由正则序列 f_1，……， f_d生成；也就是说，每个 f_j 模 $(f_1$，……， $f_{j-1})$ 都是非零因子；参见 [Ful98，附录 B。7]在此情形下，$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ 是秩为 d的局部自由层，且法锥 $C_Z X$ 是法丛 $N_{Z/X}$。因此，

$$s(Z, X) = c(N_{Z/X})^{-1} \cdot [Z],$$

根据 $N_{Z/X}$ ，这与向量丛 [的 Segre 类相符；参见 Ful98，命题 4.1(a)]。

2.1.6. 沿子簇的重数。对于一个余维为 d 的不可约子簇 $V \subsetneq X$ ， X 沿 V 的重数记为 $e_V(X)$，定义如下：

$$\{s(V, X)\}_{m-d} = e_V(X)[V] = p_* \left(h^{d-1} \cdot [\mathbb{P}(C_V X)] \right),$$

其中， p 和 h 现在指 $\mathbb{P}(C_V X)$。等价地，若 $A = \mathcal{O}_{X,\ \eta_V}$ 且 $\mathfrak{m}_A$ 是其极大理想，则 $e_V(X) = e_{\mathfrak{m}_A}(A)$ 是由下式定义的希尔伯特 – 塞缪尔重数：

$$\ell_A(A/\mathfrak{m}_A^t) = \frac{e_{\mathfrak{m}_A}(A)}{d!} t^d + O(t^{d-1}) \qquad (t \to \infty).$$

参见 [Ful98，第 4.3 节和例 4.3。1]。

更一般地，若 V 是真闭子概形 $Z \subset X$ 的不可约分支，则 X 沿 Z 在 V 处的重数，是 $[V]$ 在 $s(Z,\ X)$ 中 η_V 附近的系数，

记作$(e_Z X)_V$；见 [Ful98，例 4.3。4]这应与几何重数 $\ell(V,\ Z)$ 区分开来，该几何重数定义于第2.1.1节。Lech不等式 [MS23]给出$(e_Z X)_V \le m!\ \ell(V,\ Z)e_V(X)$。

2.1.7. 交积。 设 X 是维数为 m的正规射影簇。设$i\colon V\hookrightarrow X$是余维为 d的正则嵌入，其法丛为 $N_{V/X}$。设W 是维数为 n的正规射影簇，且 $f\colon W\to X$ 是一个态射。构造纤维方块

$$(\star)\qquad \begin{array}{ccc} Z = V\times_X W & \xrightarrow{\ j\ } & W \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & \xrightarrow[\ i\ ]{} & X. \end{array}$$

可以验证，法锥 $C_Z W$ 自然地是秩为d 的向量丛 $N := g^* N_{V/X}$ 的一个闭子锥。Fulton 将 W 与 V在 X 上的交积定义为

$$V\cdot_X W = \{c(N)\cdot s(Z,W)\}_{n-d}\in A_{n-d}(Z),$$

其中 $\{-\}_{n-d}\colon\ \ A_*(Z)=\bigoplus_k A_k(Z)\to A_{n-d}(Z)$ 是到第 $n-d$ 个因子的投影。参见 [Ful98，第 6.1–6 节。2]。注意，乘积类仅取决于有理等价类 $[W]$。

更一般地，Fulton 定义了一个精化 Gysin 同态

$$i^!\colon A_k(W)\longrightarrow A_{k-d}(Z),$$

使得

$$V\cdot_X W = i^![W].$$

令 C_1、$\cdots$ C_r 为 $C_Z W$ 的带有几何重数的不可约分支l_1、$\cdots$ l_r。则 Segre 类为 $s(Z,\ W)=\sum l_i s(C_i)$。可以写成

$$V\cdot_X W = \sum l_i\,\{c(N)\cdot s(C_i)\}_{n-d}.$$

当 W 是 X 的子簇时，我们简单地将 $V\cdot W$ 记作 $A_{n-d}(Z)$ 中的交积类 $V\cdot_X W$。

假设 $V=D$ 是一个有效 Cartier 除子。则交积与上面介绍的与除子的交一致。

2.1.8. 适当交。我们使用记号 $(\star)$。交 $Z=V\cap W$ 的一个不可约分支 C 称为适当的，如果 $\dim C = n-d$。如果每个分量都是适当的，那么

$$V\cdot W=\sum_C i(C,V\cdot W;X)[C]\in A_{n-d}(Z),$$

其中求和遍历 Z 的不可约分支，且交重数

$$i(C,V\cdot W;X)=(e_Z W)_C$$

是 W 沿 Z 在 C处的重数；参见 [Ful98，第 7 节。1]。

交叉重数可表示为 Serre交叉重数公式。一般而言，我们有

$$1 \leq i(C, V \cdot W; X) \leq \ell(C, Z)$$

其中 $\ell(C,\ Z)$ 是几何重数。

交叉重数与几何重数 $i\ (C,\ V \cdot W;\ X)\ =\ell\ (C,\ Z)$ 相同，当 W 在 的一般点处是 Cohen–Macaulay 的；参见 [Ful98，命题 7。1]。

令 $A = \mathcal{O}_{Z,\ \eta_C}$ 以及 J 为 A 中由 X 内的 W 的理想生成的理想。则 $i(C,\ V \cdot W;\ X)\ = 1$ 当且仅当 $\ell(C,\ Z)\ = 1$ 当且仅当 A 是正则的且 $J = \mathfrak{m}_A$。当 X 光滑时，这等价于 C 是一个横截分支。在这里，适当分量 C 称为横截的，如果在一个一般点 $x \in C$处， V 和 W 都是光滑的，并且

$$T_x V + T_x W = T_x X.$$

2.1.9. *Chow*环结构。 设 X 是一个维数为 m 的光滑射影簇。对每个 $d \in \{0,\ \cdots\ m\}$，置 $A^d(X)\ = A_{m-d}(X)$。则对角嵌入 $\Delta\colon\ X,\ \to X \times X$ 是余维为 m 的正则嵌入，其法丛为 $N_{\Delta/X\times X} \simeq T_X$。令 $p_1,\ p_2\colon\ X \times X \to X$ 为两个投影。外积是如下同态

$$\boxtimes\colon\ A^d(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A^e(X) \longrightarrow A^{d+e}(X \times X)$$

定义在子簇类上如下：

$$[Z] \boxtimes [W] \coloneqq [Z \times W] = p_1^*[Z] \cdot p_2^*[W].$$

交积是以下复合：

$$A^d(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A^e(X) \xrightarrow{\boxtimes} A^{d+e}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^!} A^{d+e}(X),$$

它使 $A^*(X)\ = \oplus_d A^d(X)$ 成为一个分次交换环。单位是基本类 $[X]\ \in\ A^0(X)$。此乘积与上文定义的和 Cartier 除子的交相一致；当代数循环适当相交时，也与交积一致。

射影丛的 Chow 环可视为 X 的 Chow 环的扩张；参见 [EH16，定理 9。6]。定理 2.3 有一个加强版。

定理 2.5 (射影丛公式)。 设 X 为光滑簇， $N \to X$ 为秩为 r 的向量丛。对于 $E = \mathbb{P}(N)$，存在一个分次环的典范同构

$$A^*(E) \simeq A^*(X)[h]/(h^r + c_1 h^e + \cdots + c_r),$$

其中 $c_i = c_i\ (N)\ \in A^i\ (X)$ 是 N 的第 i 个陈类。

2.1.10. *Chow*群上的拉回运算。设 $f\colon X \to Y$ 是维数分别为 m 和 n 的光滑射影簇之间的一个态射。存在一个分次环的拉回

$$f^*\colon A^*(Y) \longrightarrow A^*(X).$$

为构造它，令 $\Gamma_f\colon X, \to X \times Y$为图嵌入，并令 $p_2\colon X \times Y \to Y$为第二投影。由于 Γ_f 是余维为 n 的正则嵌入，可以定义

$$f^*\alpha \coloneqq \Gamma_f^!\big(p_2^*\alpha\big), \qquad \alpha \in A^*(Y),$$

其中 p_2^* 是平坦拉回， $\Gamma_f^!$ 是精化 Gysin 同态。如果 f 是平坦的，则该拉回与上文定义的平坦拉回一致，并且对于 Y上的每个 Cartier 除子 D ，它满足

$$f^*c_1(\mathcal{O}_Y(D)) = c_1(\mathcal{O}_X(f^*D)).$$

因此，该构造与前面引入的两种拉回运算兼容。对于通过精化 Gysin 映射进行的构造，我们引用 [Ful98，第 8] 以及 [EH16，定理 1。23]

这些运算满足投影公式。更准确地说，如果 $\alpha \in A^d(Y)$ 且$\beta \in A^e(X)$，那么

$$f_*\Big(f^*\alpha \cdot \beta\Big) = \alpha \cdot f_*\beta \in A^{d+e+n-m}(Y).$$

2.2. **数值等价类与正性**。 设 X 是一个维数为 m 的光滑射影簇。

2.2.1. 数值等价类。我们主要关注交数，因此在模数值等价的代数循环空间中进行研究是很自然的。若对于每个 d维子簇$Z \subset X$都有 $[Z] \cdot \alpha = 0$ ，则类$\alpha \in A^d(X)$是数值平凡的。在此情形下，我们记 $Z^d(X) = Z_{m-d}(X)$。令 $N^d(X)$ 表示 $A^d(X)$关于数值等价的商，并令

$$Z^d_{\mathbb{R}}(X) \coloneqq Z^d(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \qquad N^d_{\mathbb{R}}(X) \coloneqq N^d(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

空间 $N^d_{\mathbb{R}}(X)$ 是有限维的，且 $N^0(X) \simeq A^0(X) \simeq \mathbb{Z}$；参见 [Dan20，第 2.5 定理。1]以及 [Mil12，第 23 定理6]。次数映射诱导出一个同构$N^m(X) \simeq \mathbb{Z}$。 $A^*(X)$ 上的交积诱导出一个非退化配对$N^d_{\mathbb{R}}(X) \times N^{m-d}_{\mathbb{R}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.2.2. 正类。下面按照[Laz17、Ful17]，讨论代数循环上的一些正性概念。

对于任意 i，若循环 $\alpha = \sum_i a_i[Z_i]$ 满足 $a_i \geq 0$ ，则称其为有效循环。若类 $\alpha \in N^d_{\mathbb{R}}(X)$可由一个有效循环表示，则称其为有效类。由所有有效类生成的凸锥记为 $\mathrm{Eff}^d(X)$，其闭包 $\overline{\mathrm{Eff}}^d(X)$为伪有效锥。它的内部非空且为尖锥，即， $\pm\alpha \in \overline{\mathrm{Eff}}^d(X)$蕴含 $\alpha = 0$。若一个类位于 $\underline{\mathrm{Eff}}^d(X)$的内部，则称其为大类。对于任意 $\alpha, \beta \in N^d_{\mathbb{R}}(X)$，若 $\alpha \geq \beta$if$\alpha - \beta \in \mathrm{Eff}^d(X)$，我们记作 $\alpha \geq \beta$。

根据对偶性，若类 $\alpha \in N^d_{\mathbb{R}}(X)$满足：对于每个伪有效类 $\beta \in N^{m-d}_{\mathbb{R}}(X)$，都有 $\alpha\cdot\beta \geq 0$，则称其为数值有效类。数值有效类的集合 $\mathrm{Nef}^d(X)$是一个闭的尖锥，并且是 $\mathrm{Eff}^{m-d}(X)$的对偶锥。当 $d = 1$时，有 $\mathrm{Nef}^1(X) \subset \mathrm{Eff}^1(X)$；$\mathrm{Nef}^1(X)$的内部由丰类组成，即，它是由所有满足 L 丰沛的类 $c_1(L)$生成的正锥。

这些锥在上述定义的函子性运算下表现良好。适当推前将有效循环映射为有效循环，因此也将伪有效类映射为伪有效类。平坦拉回同样将有效循环映射为有效循环，因此保持伪有效性。当拉回态射存在且满足投影公式时，对于任意 $\alpha \in$ 数值有效$^d(Y)$，类 $f^*\alpha$ 在 X上是数值有效的：事实上，对于每个伪有效类 $\beta \in N^{m-d}_{\mathbb{R}}(X)$，投影公式给出

$$f^*\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot f_*\beta \geq 0,$$

因为 $f_*\beta$ 是伪有效的。

2.2.3. 体积。 固定一个丰线丛 $L \to X$。注意函数

$$\overline{\mathrm{Eff}}^d(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \alpha \mapsto \alpha \cdot c_1(L)^{m-d},$$

是 $\mathrm{Eff}^d(X)$ 上的一个范数在 $N^d_{\mathbb{R}}(X)$上的限制，参见 [DF21，第 2 节。3]，[FL17，定理 1。4] 由此可知，对于 $\|\cdot\|$ 上的任意范数 $N^d_{\mathbb{R}}(X)$，存在一个正的常数 $C > 1$ 使得

$$C^{-1}\|\alpha\| \leq \alpha \cdot c_1(L)^{m-d} \leq C\|\alpha\| \tag{2.1}$$

对任意 $\alpha \in \overline{\mathrm{Eff}}^d(X)$。为简化记号，对于任意 $\alpha \in \mathrm{Eff}^d(X)$，我们记

$$\mathrm{Vol}_L(\alpha) \coloneqq \alpha \cdot c_1(L)^{m-d} \geq 0.$$

我们称这个数为 α 关于 L的体积。

当 $Z \subset X$ 是一个子概形时，我们用 $\mathrm{Vol}_L(Z)$ 表示 Z的基本循环的体积。若 Z 具有纯余维数 d，则 $\mathrm{Vol}_L(Z) = [Z]\cdot c_1(L)^{m-d}$。

在复射影情形下，当 $c_1(L)$ 由一个 Kähler形式 ω表示时，对于子簇 Z，Wirtinger定理将 $\frac{1}{m!}\mathrm{Vol}_L(Z)$ 与 Z 光滑轨迹相对于由黎曼度量诱导的典范体积形式的体积$\omega|_Z$等同起来；参见 [Dem97，第三章，1.D节]。

引理2.6。 存在一个常数 $C > 0$，其仅取决于 $(X, L, \|\cdot\|)$，使得如果 $\beta \in$ 有效$^d(X)$ 和 $\alpha \in \overline{N^d_{\mathbb{R}}}(X)$ 满足

$$-\beta \leq \alpha \leq \beta,$$

then

$$\|\alpha\| \leq C\|\beta\|.$$

证明。 令 $C_0 > 1$ 为（2.1）中的常数。假设表明， $\beta+\alpha$ 和 $\beta-\alpha$均为伪有效。因此，

$$\begin{aligned}\|\alpha\| &\leq \frac{1}{2}\Big(\|\beta+\alpha\| + \|\beta-\alpha\|\Big)\\ &\leq \frac{C_0}{2}\Big(\mathrm{Vol}_L(\beta+\alpha) + \mathrm{Vol}_L(\beta-\alpha)\Big)\\ &= C_0\,\mathrm{Vol}_L(\beta) \leq C_0^2\|\beta\|.\end{aligned}$$

因此可以取 $C = C_0^2$。 □

2.3. 体积不等式。 设 X 是一个维数为 m的光滑射影簇，且 L 是 X上的丰线丛。设 V 是一个光滑不可约子簇， ~的余维为 e，则 $i\colon V, \to X$ 是一个正则嵌入。令 $\pi\colon X \to X$ 为沿 V对 X 的爆炸。例外除子 E 是射影正规丛$\mathbb{P}(N_{V/X})$。

(∗)
$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{j} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ V & \xhookrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

设 T 是 X 的一个不可约子簇，其余维为 d，并假设 $T \not\subset V$。我们将 T的严格变换记为 $\widetilde{T}$，即 $\pi^{-1}(T\backslash V)$ 在⌣X中的扎里斯基闭包。根据爆炸闭包引理 [Vak 22] 或 [Sta26，标签 080E], ，严格变换⌣T 可典范地识别为沿子概形 $T \cap V$ 对 T 的爆炸，并具有纯维数 $m-d$。因此，我们得到如下交换图。

(◇)
$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{T}\cap E & \longrightarrow & \widetilde{T} & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & E & \longrightarrow & \widetilde{X} & \\ T\cap V & \longrightarrow & T & \downarrow & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & & V & \longrightarrow & X \end{array}$$

~由于 E 是光滑簇中的一个超曲面，且不包含 T，因此 ~~交 $T \cap E$ 是适当的。由此可知， $T \cap E$ 具有纯维数 $m-d-1$，~因而在 E内定义了一个余维为 d的有效循环。 $T\cap E \to T\cap V$在点 $p \in T \cap V$上的纤维的维数可以是从 0 到 $e-1$之间的任意值。当 T与⌣V适当相交时，$T \cap E \to T \cap V$的每个纤维都具有维数 $e-1$，事实上是一个射影空间 $\mathbb{P}^{e-1}$。

~根据定理 2.3， $T \cap E$ 的基本类可以唯一地写成如下形式

$$[\widetilde{T} \cap E] = \sum_{\ell=0}^{e-1} p^*(a_\ell) h^\ell, \qquad a_\ell \in A^{d-\ell}(V). \tag{2.2}$$

我们采用如下约定： $A^q(V) = 0$ 当且仅当 $q < 0$ 或 $q >$ 维数 V。

令 $C = C_{T\cap V} T$ 为 T 中 $T \cap V$ 的法锥，令 $\mathbb{P}(C)$ 为其射影化。那么存在一个典范同构

$$\mathbb{P}(C) \simeq \widetilde{T} \cap E.$$

令 $\iota_T \colon T \cap V, \to V$ 为包含映射。那么我们有

$$s_V(T \cap V, T) \coloneqq (\iota_T)_* s(T \cap V, T) = p_* \left(\sum_{i \geq 0} h^i \cdot [\widetilde{T} \cap E] \right) \in A_*(V).$$

为了测量周类的范数，我们可以将 $A^*(V)$ 中的类与其在数值空间 $N^*_{\mathbb{R}}(V)$ 中的像等同起来。

命题 2.7。 固定一个整数 d，在空间 $N^*_{\mathbb{R}}(V)$ 上取一个范数，并取 X 上的一个丰沛线~ ~丛 L 。以下一致估计等价：

(i) 存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有不包含于 V 中的、余维为 d 的不可约子簇 $T \subset X$，

$$\max_{0 \leq \ell \leq e-1} \|a_\ell\| \leq C \operatorname{Vol}_L(T).$$

(ii) 存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有不包含于 V 中的、余维为 d 的不可约子簇 $T \subset X$，

$$\|s_V(T \cap V, T)\| \leq C \operatorname{Vol}_L(T).$$

(iii) 存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有不包含于 V 中的、余维为 d 的不可约子簇 $T \subset X$，

$$\operatorname{Vol}_{\widetilde{L}}(\widetilde{T}) \leq C \operatorname{Vol}_L(T).$$

这三个 co 常数不必相等，并且可以依赖于固定数据，但不依赖于 T。

~证明。 令 $R_T = [T \cap E]$。射影丛公式将 R_T 与其系数向量 $(a_0, \ldots, a_{e-1})$ 通过（2.2）相对应

$$R_T = \sum_{\ell=0}^{e-1} p^*(a_\ell) h^\ell \in N^d_{\mathbb{R}}(E).$$

计算可得

$$p_*(h^q R_T) = \sum_{\ell+q \geq e-1} a_\ell \, s_{\ell+q-e+1} \in N^{d+q-e+1}_{\mathbb{R}}(V), \qquad q \geq 0,$$

其中， $s_{\ell+q-e+1} = s_{\ell+q-e+1}(N_{V/X}) \coloneqq p_*(h^{\ell+q})$ 表示 $N_{V/X}$ 的相应 Segre 类。

记 $S_j := \{s_V(T\cap V,T)\}_{m-e-j}\in N^j_{\mathbb{R}}(V)$。根据定义，当 $j<d-e+1$ 时，$S_j=0$；而当 $j\geq d-e+1$ 时，

$$S_j = p_*(h^{j-d+e-1}R_T) = \sum_{\ell=\max\{0,d-j\}}^{e-1} a_\ell\, s_{\ell+j-d}.$$

具体而言，从 (a_ℓ) 到 (S_{d-r}) 的变换由以下上三角矩阵描述

$$\begin{pmatrix} S_d\\ S_{d-1}\\ \vdots\\ S_{d-e+2}\\ S_{d-e+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{e-1}\\ 0 & 1 & s_1 & \cdots & s_{e-2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & s_1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{e-2}\\ a_{e-1}\end{pmatrix}, \qquad s_k = s_k(N_{V/X}),$$

该矩阵是对角线上为单位元的上三角矩阵。由归纳法可证

$$\|s_V(T\cap V,T)\| \leq e\sum_{k=0}^{e-1}||s_k||\max_{0\leq\ell\leq e-1}\|a_\ell\|$$

and

$$\max_{0\leq\ell\leq e-1}\|a_\ell\| \leq \sum_{k=0}^{e-1}||s_k||\,\|s_V(T\cap V,T)\|.$$

因此，(1) 和 (2) 等价。

根据（2.1），当 $\epsilon>0$足够小时，线丛 $L=\pi^*L-\epsilon E$是丰沛的 [Laz17，命题 1.7。10]。展开 $c_1(\widetilde{L})^{m-d}\cdot[\widetilde{T}]$，得到

$$\pi^*\left(c_1(L)^{m-d}\cdot[T]\right)+j_*\left(\sum_{q=1}^{m-d}\binom{m-d}{q}(-\epsilon)^q(j^*\pi^*L)^{m-d-q}(j^*E)^{q-1}\cdot R_T\right).$$

第二项为

$$-j_*p^*\left(\sum_{q=1}^{m-d}\binom{m-d}{q}\epsilon^q(i^*L)^{m-d-q}\,S_{d+q-e}\right).$$

它是 S_{d-e+1}、S_{d-e+2}、……、S_d的一个固定线性组合。第一项恰好是体积$_L(T)$，因此（2.1）表明 (2) 和 (3) 等价。□

定理 2.8。在空间 $N^*_{\mathbb{R}}(V)$上固定一个范数。存在一个常数 $C>0$，它仅依赖于(X, V, L)。对于每个不可约子簇 $T\subset X$ 不包含于V且 $a_\ell\in A^{d-\ell}(V)$ 满足

$$[\widetilde{T}\cap E] = \sum_{\ell=0}^{e-1}p^*(a_\ell)h^\ell,$$

我们有

$$\|a_\ell\|\leq C\,\mathrm{Vol}_L(T).$$

为方便起见，我们将求和的索引顺序反转，

$$(\circledast) \qquad [\widetilde{T}\cap E]=\sum_{\ell=0}^{e-1}p^*(b_\ell)h^{e-1-\ell},\qquad b_\ell=a_{e-1-\ell}\in A^{d-e+1+\ell}(V).$$

我们首先建立几个有用的引理。

引理 2.9。对于每个 $\ell\in\{0,\dots,e-1\}$，存在系数 $p_j\in A^{l-1-j}(V)$，其与 T 无关，使得

$$b_\ell+\sum_{j=0}^{\ell-1}p_j\cdot b_j$$

在 $A^{d-e+1+\ell}(V)$ 中是伪有效的，其中 b_j 由 $(\circledast)$定义。

证明。令 $\omega=c_1(L|_V)$。根据引理 2.1，选取整数 $C_0>0$ 使得 $h+C_0p^*\omega$在 E上是丰沛的。该类

$$p_*\Big((h+C_0p^*\omega)^\ell[\widetilde{T}\cap E]\Big)$$

是伪有效的。射影丛公式给出

$$p_*\Big((h+C_0p^*\omega)^\ell[\widetilde{T}\cap E]\Big)=b_\ell+B_\ell,\qquad B_\ell=\sum_{j=0}^{\ell-1}b_j\,p_*\Big(h^{e-1-j}(h+C_0p^*\omega)^\ell\Big).$$

含有 $j>\ell$ 的项在 p_*下消失，而 b_ℓ 的系数为 $p_*(h^{e-1})=1$。每个系数

$$p_j=p_*\Big(h^{e-1-j}(h+C_0p^*\omega)^\ell\Big)$$

都不依赖于 T。 □

引理 2.10. 存在一个整数 $M>0$，使得对于每个不包含在 V中的不可约子簇$T\subset X$，都可以找到包含 V的超平面截面 $H_1,\dots,H_e\in|ML|^{\sim}$，满足 $\pi^*H_i=H_i+E$，并且对于每个 $1\le r\le e$，$H_1\cap\cdots\cap H_r^{\sim}$ $^{\sim}$ $^{\sim}$和 $T\cap H_1\cap\cdots\cap H_r$ 都是适当交。

证明. 选取足够大的 $M\in\mathbb{N}$，且其选取与 T无关，使得 $\mathcal{I}_V\otimes ML$ 整体生成，并且 $A_M=M\pi^*L+\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$ 非常丰沛。根据 $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)=\mathcal{I}_V$，空间

$$\Lambda=H^0(X,\mathcal{I}_V\otimes ML)\simeq H^0(\widetilde{X},A_M)$$

$^{\sim}$在 $U=X\setminus V$ 上给出一个无基点线性系，而在 X上给出 A_M 的完全线性系。因此，每个截面 $s\in\Lambda$ 都给出一个包含 V的超曲面 H_s（位于 X 上），以及一个超曲面$_\sim D_s$（位于 X上）。

然后我们依次选取 s_1、……、$s_e\in\Lambda$。对于每个 $1\le r\le e-1$，假设已选取 $_\sim$ $_\sim$ $_\sim H_1$、……、H_r，使得 $H_1\cap\cdots\cap H_r$ 和 $T\cap H_1\cap\cdots\cap H_r$ 都是适当的。我们对 $H_1\cap\cdots\cap H_r\cap U$ 的每个不可约分支应用任意特征下的贝尔蒂尼定理 [Jel13，定理 3.2] 。对于一般截面 $s\in\Lambda$，$s|_C$ 的零点轨迹为空，或具有维数 dim $C-1$。接着我们验证，这样的截面适当地截取了 $H_1\cap\cdots\cap H_r$ 中包含 V 的不可约分支。设 C 是这些不可约分支之一。那么，$s|_{C\setminus V}$ 的零点轨迹为空，或者具有

维数 $\dim\ C-1$，且 s 沿 V 消失。由于 $\dim C>\dim V$，我们有 H_s 适当地截取了 C。

我们对的每个不可约分支应用相同的贝尔蒂尼定理 $\widetilde{T}\cap\widetilde{H_1}\cap\cdots\cap\widetilde{H_r}$。对于一般截面 $s\in\Lambda$，交 $D_s\cap C$ 要么为空，要么维数为 $\dim\ C-1$。因此 $T\cap H_1\cap\cdots\cap H_r\cap D_s$ 是适当的。

由于 M 是非常丰沛的，我们还可以要求除子 D_s 在 X 中不包含 V，于是 $D_s=H_s$，而定义恒等式 $\mathcal{I}_V\mathcal{O}_{\tilde{X}}=\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$ 给出 $\pi^*H_s=H_s+E$。

最后，令 $H_{r+1}=H_s$。我们找到了所需的第 $r+1$ 个超曲面。由归纳法可得该引理。□

引理 2.11. 固定 $\ell\in\{0,\dots,e-1\}$。存在超平面 $H_1,\dots,H_r\in|ML|$ 如引理 所述。存在系数 $q_j\in N^{\ell-j}_{\mathbb{R}}(V)$，其与 T 和 H_i 相互独立，使得

$$i_*b_\ell=T\cdot H_1\cdots H_{\ell+1}-\pi_*(\widetilde{T}\cdot\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_{\ell+1})+i_*\left(\sum_{j=0}^{\ell-1}q_jb_j\right).$$

其中 i_* 是（$*$）中的推前。

证明。令 $\omega=c_1(L|_V)$ 且 $r=\ell+1$。我们回顾交换图（$*$）：

$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{j} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ V & \xhookrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

在 E 上有 $j^*E=-h$ 且 $j^*\pi^*H_i=p^*i^*H_i=Mp^*\omega$。因此 $j^*H_i=h+Mp^*\omega$。由（2.2），有 $j^*(\widetilde{T})=[\widetilde{T}\cap E]=\sum b_\ell h^{e-1-\ell}$。

现在考虑交

$$\Xi:=T\cdot H_1\cdots H_r=\pi_*\left(\widetilde{T}\cdot\pi^*H_1\cdots\pi^*H_r\right).$$

展开 $\pi^*H_1=H_1+E$ 一个因子，我们得到

$$\Xi=\pi_*\left(\widetilde{T}\cdot\widetilde{H}_1\cdot\pi^*H_2\cdots\pi^*H_r\right)+\pi_*\left(\widetilde{T}\cdot E\cdot\pi^*H_2\cdots\pi^*H_r\right).$$

继续每次展开一个因子，我们得到

$$\Xi=\pi_*\left(\widetilde{T}\cdot\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_r\right)+\sum_{t=1}^{r}\pi_*\left(\widetilde{T}\cdot\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_{t-1}\cdot E\cdot\pi^*H_{t+1}\cdots\pi^*H_r\right)$$

应用投影公式，并在 $A^*(E)$ 中展开，前一个公式中的第 t 项等于

$$\begin{aligned}&\pi_*\left(j_*[\widetilde{T}\cap E]\cdot\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_{t-1}\cdot\pi^*H_{t+1}\cdots\pi^*H_r\right)\\&=\pi_*j_*\left([\widetilde{T}\cap E]\cdot j^*\left(\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_{t-1}\cdot\pi^*H_{t+1}\cdots\pi^*H_r\right)\right)\\&=i_*p_*\left(\sum_{\ell=0}^{e-1}p^*(b_\ell)h^{e-1-\ell}\cdot(h+Mp^*\omega)^{t-1}\cdot(Mp^*\omega)^{r-t}\right).\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\Xi = \pi_*\left(\widetilde{T}\cdot\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_r\right) + i_*p_*\left(\left(\sum_{\ell=0}^{e-1}p^*(b_\ell)h^{e-1-\ell}\right)P_r(h,M\omega)\right),$$

其中， P_r 是 h和 x的多项式，

$$P_r(h,x)=\sum_{t=1}^{r}(h+x)^{t-1}x^{r-t}=\sum_{t=0}^{r-1}\binom{r}{t+1}h^t x^{r-1-t}.$$

由引理 2.2，类 $p_*\left(h^{e-1-j}P_r(h,x)\right)$ 在 $j>r-1$ 时消失，并且当 $p_*\left(h^{e-1-j}P_r(h,x)\right)=1$ 时，我们有 $j=r-1$。对于 $j<r-1$，令

$$c_{\ell,j}=p_*\Big(h^{e-1-j}P_r(h,Mp^*\omega)\Big)\in N^{\ell-j}_{\mathbb{R}}(V).$$

这些是固定类，可用 ω 和 $N_{V/X}$的塞格雷类表示。由此得到所需结论

$$T\cdot H_1\cdots H_r=\pi_*\left(\widetilde{T}\cdot\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_r\right)+i_*\left(b_\ell+\sum_{j=0}^{\ell-1}b_j\cdot c_{\ell,j}\right).$$

□

定理 *2.8* 的证明。 我们对 ℓ 作归纳，证明存在某个常数 $||b_\ell||\le C\,\mathrm{Vol}_L(T)$ 。我们首先考虑基例 C_0。若 b_0位于 $d-e+1+\ell$ 之外，[0,维 V]，则 $b_0=0$。否则，引理 2.11 表明 b_0是伪有效的。我们将引理 2.11 应用于 $\ell=0$ ，得到

$$i_*b_0\le T\cdot H_1.$$

因此 $||b_0||\le M$ 体积$_L$(*T*)。

对于 $\ell>1$，假设所需的估计对每个满足 $j<\ell$ 的 b_j 都成立。为方便起见，令 $r=\ell+1$ 且 $k=$维$V-q=m-d-r\ge 0$。

引理 2.9 给出一个伪有效类

$$\beta=b_\ell+B_\ell$$

对于 $B_\ell=\sum_{j=0}^{\ell-1}p_j\cdot b_j$。归纳假设给出

$$\|B_\ell\|\le C_1\,\mathrm{Vol}_L(T).$$

根据引理 2.11，存在超曲面 $H_1,\dots,H_{\ell+1}$，如引理 2.10 所述，并且我们得到 $A_\ell=\sum_{j=0}^{\ell-1}q_jb_j$ 使得

$$i_*b_\ell=T\cdot H_1\cdots H_r-\pi_*(\widetilde{T}\cdot\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_r)+i_*A_\ell.$$

我们有 $\|A_\ell\|\le C_2\mathrm{Vol}_L(T)$，其中 C_2仅取决于 $(X,\ V,\ L)$。

适当交意味着 $\pi_*(T\cdot H_1\cdots H_r)$ 是有效的。将此恒等式与 $c_1(L)^k$ 相交，并利用投影公式可得

$$\begin{aligned} b_\ell\cdot\omega^k &= (T\cdot H_1\cdots H_r - \pi_*(\widetilde{T}\cdot\widetilde{H}_1\cdots\widetilde{H}_r) + i_*A_\ell)\cdot c_1(L)^k \\ &\le M^r\operatorname{Vol}_L(T) + i_*(A_\ell\cdot c_1(L|_V)^k). \end{aligned}$$

这将导出 $b_\ell\cdot\omega^k\le C_3\operatorname{Vol}_L(T)$，其中 C_3 为一个与之无关的常数。

范数–体积比较（2.1）在 V 给出了一个常数 C'。于是，我们有

$$\|b_\ell\|\le\|\beta\|+\|B_\ell\|\le C'\left(\beta\cdot\omega^k\right)+\|B_\ell\|.$$

结合这些不等式，我们得出

$$\|b_\ell\|\le C'C_3\operatorname{Vol}_L(T)+C_1\operatorname{Vol}_L(T).$$

取一个与之无关的常数 $C=C'C_3+C_1$。这就证明了归纳步骤。由于次数 d 和指标 ℓ 只有有限多个，因此可以统一选取这些常数。□

2.4. **体积不等式的推论**。

定理 2.12。 设 $\varphi\colon\ Y\to X$ 是特征为 0 的域上的光滑射影簇之间的双有理态射。固定丰线丛 $L_X\to X$和 $L_Y\to Y$。

则存在一个常数 $C>0$，使得若 $T\subset X$ 是一个不包含于 $\operatorname{Ind}(\varphi^{-1})$ 中的子簇，且 $\widetilde{T}$ 表示其在 φ下的严格变换，则

$$\operatorname{Vol}_{L_Y}(\widetilde{T})\le C\operatorname{Vol}_{L_X}(T).$$

关于 [Vu22，引理 2。5] 我们将其作为解析版本。

证明。 首先，假设 φ 是沿光滑中心进行爆炸的复合。该断言立即由定理 2.8 和命题 2.7得出。

现在考虑任意双有理态射 $\varphi\colon\ Y\to X$。由于 φ 是射影且双有理的，因此它是凝聚理想层 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{O}_X$的爆炸；例如参见[Har13，定理 II.7。17]。

根据 [Kol05，定理 19]，存在一系列沿光滑中心进行的爆破的复合

$$f\colon X'\longrightarrow X$$

使得 X' 光滑且$\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$ 可逆。因此，爆炸的泛性质给出一个双有理态射 $\psi\colon X'\to Y$，满足 $f=\varphi\circ\psi$。

令 $T'\subset X'$为 T在 f下的严格变换。则 $\psi(T')=T$。取 X'上的一个丰线丛 $L_{X'}$。对于某个整数 $M\gg0$，线丛

$$H:=ML_{X'}-\psi^*L_Y$$

是丰沛的。

令 $r=$维数 $T=$维数 $T_{\prime}$。由于 $T'\subset X'$未被 ψ压缩，投影公式以及 ψ^*L_Y 的数值有效性给出

$$\mathrm{Vol}_{L_Y}(\widetilde{T})\leq \mathrm{Vol}_{\psi^*L_Y}(T')\leq M^r\,\mathrm{Vol}_{L_{X'}}(T').$$

由于 f 是由沿光滑中心进行的一系列爆炸构成的，我们得出 t

$$\mathrm{Vol}_{L_{X'}}(T')\leq C\,\mathrm{Vol}_{L_X}(T).$$

对某个常数 C成立。 □

设 X 是一个光滑射影簇，并在 X上固定一个丰线丛 L 。给定 X的一个子概形 Z，我们定义 $n(Z)\in\mathbb{N}$ 为Z的不可约分量个数。

定理 2.13。 存在一个常数 $C>0$ ，使得对于任意两个不可约子簇 $Z_1,Z_2\subset X$，

$$n(Z_1\cap Z_2)\leq C\,\mathrm{Vol}_L(Z_1)\,\mathrm{Vol}_L(Z_2),$$

其中 $Z_1\cap Z_2$ 为概形论交。

我们首先证明以下引理:

引理 2.14。 在定理 *2.8*的假设和记号下，存在一个常数 $C>0$，与 T无关，使得

$$n(T\cap V)\leq C\,\mathrm{Vol}_L(T).$$

证明。 固定 A上的一个丰线丛。我们考虑 D_1、..... D_r闭子概形 $T\cap E$的所有不可约~分量。令 $D_i'=\pi(D_i)$，则 D_i'是覆盖 $T\cap V=\pi(T\cap E)$ 的不可约闭~子集。因此，

$$n(T\cap V)\leq r=n(\widetilde{T}\cap E).$$

每个不可约分支的 A-体积至少为 1。因此

$$n(T\cap V)\leq \mathrm{Vol}_A(\widetilde{T}\cap E)\leq C\,\mathrm{Vol}_L(T),$$

其中最后一个不等式由定理 2.8和命题 2.7推出。 □

定理 *2.13*的证明。 当 Z_1 和 Z_2 的维数为 0时，定理显然成立。对于剩余情形，我们有 $Z_1\times Z_2\not\subset\Delta$。将前述引理应用于 $X\times X$、对角线 $\Delta\subset X\times X$以及 $T=Z_1\times Z_2$。令 $L=\pi_1^*L+\pi_2^*L$，则有

$$\mathrm{Vol}_{\overline{L}}(Z_1\times Z_2)=\binom{\dim Z_1+\dim Z_2}{\dim Z_1}\mathrm{Vol}_L(Z_1)\,\mathrm{Vol}_L(Z_2).$$

二项式系数可由 X 控制，因此结论得证 . □

注记 2.15. 如果我们将 $e(Z)$ 替换为带几何重数的不可约分支数目，该定理便不再成立。

3. 周期点与重数

设 $K = \overline{K}$ 为代数闭域。

3.1. 孤立周期点与重数。 设 X 是定义在 K上的 m 维正规射影簇，并设 f: $X \dashrightarrow X$ 是一个主导有理自映射。回忆一下， f 由其图 $\Gamma(f) \subset X \times X$ 确定，使得第一投影 $\pi_1 \colon \Gamma(f) \to X$ 是一个双有理态射。逆映射 π_1^{-1}未定义的轨迹是其不定 locus $\mathrm{Ind}(f) \subset X$：它是一个余维至少为 2 的闭子集。 f^n的图固定概形为 $F_n(f) := \Gamma(f^n) \times_{X\times X} \Delta$

定义 3.1。 周期为 n 的周期轨迹概形为

$$\mathrm{Per}_n(f) = \pi_1(F_n(f)).$$

一般而言，不定 locus 非空，且周期点集合的基数为无限，因此考虑孤立周期点集合是自然的。

令 U_n 为在其上关于 f 的长度为n 的轨道定义良好的开子集。更确切地说，我们可以用归纳法定义 U_n ，

$$U_0 = X, \qquad U_{n+1} = \{x \in U_n, f^n(x) \notin \mathrm{Ind}(f)\}.$$

定义 3.2. 孤立（真正）周期点的概形为

$$\mathrm{IPer}_n(f) = \mathrm{Per}_n(f)^{\mathrm{iso}} \times_X U_n,$$

其中，$\mathrm{Per}_n(f)^{\mathrm{iso}}$ 是由零维不可约分支构成的子概形。

全文中，“周期为 n”表示被 f^n固定，而不一定具有最小周期 n。

定义 3.3. 我们在 $\mathrm{IPer}_n(f)$ 中引入两种计数。

(i) 不计重数的孤立周期点的数量，记作

$$\mathrm{P}_n(f) := \#\left(\mathrm{IPer}_n(f)(K)\right) = \deg_K(\mathrm{IPer}_n(f)_{\mathrm{red}}).$$

(ii) 计重数的孤立周期点的数量记为 b y

$$\mathrm{N}_n(f) := \sum_{x \in \mathrm{IPer}_n(f)} l_x(f^n) = \deg_K(\mathrm{IPer}_n(f))$$

其中 $l_x(f^n)$ 表示 $P = (x, x)$ 在 $F_n(f)$中的几何重数；定义见（2.1.1）。

注 3.4。 (i) 可以使用塞缪尔重数进行计数，这一数量为

$$e_x(f^n) := \left(e_{F_n(f)}(\Gamma(f^n))\right)_P$$

的重数 Γ（f^n）沿概形 F_n（f）在不可约分支 $P =$（x， x）；详见第2.1.6 节。

(ii) 当 X 光滑时，重数 $e_x(f^n)$ 实际上是交叉重数$i(P, \Gamma(f^n)\cdot\Delta; X\times X)$。因此，我们可以使用记号 $i_x(f^n) = e_x(f^n)$ 表示交叉重数。于是，具有几何重数和交叉重数的计数实际上相同，因为 f^n 在 x附近是正则的，所以 $A_{P}=\mathcal{O}_{\Gamma(f^n)}$ 是正则的，因而是 Cohen–Macaulay 的；参见 [SH06，第 11.1 号命题10]。

3.2. **Lefschetz数与完美点**。 我们进一步假设 X 是光滑的。注意，对角线 Δ，$\to X\times X$ 是正则嵌入，当且仅当 X 是光滑的。

于是可以利用交叉理论定义 f^n的*Lefschetz*数，即交叉数

$$L(f^n) := \Gamma(f^n)\cdot\Delta \in \mathbb{Z}\ .$$

Lefschetz数的增长可能通过Lefschetz不动点定理与上同调数据（正特征下的étale上同调数据）相关联。

一般而言，我们无法轻易比较 $L(f^n)$与$\mathrm{P}_n(f)$，也难以与其他有重数或无重数的计数进行比较。这是因为高维分支和重数可能会对交叉数产生很大影响。

按照Fulton的方法，我们考虑对角线 π的爆炸： $X\times X \to X\times X$，并考察例外除子 $E := \pi^{-1}(\Delta)$与图的严格变换 $\Gamma(f^n)$之间的概形交。关键的观察是，E 是一个超曲面，因此交 $E\cap\Gamma(f^n)$具有纯维数 $m-1$。

定义 3.5. 若纤维$E\cap\Gamma(f^n)$在 P上具有满维数，即包含 E在 P上的整个纤维，则称 $P=(x,x)\in\Delta(K)$为周期为 n 的完美点。

记$\mathrm{P}_n(f)$表示 $E\cap\Gamma(f^n)$中 E_P的几何重数为的 $\Gamma(f^n)$完美点的个数。

引理 3.6. 所有孤立点都是完美点，并且有

$$\mathrm{P}_n(f) \le \mathrm{N}_n(f) \le \widetilde{\mathrm{P}}_n(f).$$

证明。 设 $\Gamma=\Gamma(f^n)$、 $Z=\Gamma\cap\Delta$ 和 $R=E\cap\Gamma$，并令 $P=(x,x)$为 Z的一个孤立点。严格变换 Γ 是沿 Z对 Γ 作的爆炸，其例外除子为

$$R = \mathbb{P}(C_Z\Gamma);$$

参见 [Ful98，第 16 节。2]。法锥 $C_Z\Gamma$ 是纯的，维数为 m，并嵌入到$N_{\Delta/(X\times X)}|_Z$中。由于 P是孤立的，因此其在 P上的支集就是整个向量空间$N_{\Delta/(X\times X)}|_P \simeq \mathbb{A}^m$。射影化可知， $E_P\simeq\mathbb{P}^{m-1}$ 是 R的一个不可约分支，因此 P 是完美的。

根据 [Ful98，定义 7。1]， $i_x(f^n)$是该分量在 $[C_Z\Gamma]$中的系数。射影化保持其一般重数不变，因此

$$\ell(E_P, R) = i_x(f^n).$$

因此，每个孤立的图周期点对$\widetilde{\mathrm{P}}_n(f)$贡献其交叉重数。所有其他完美点的重数均为正，因此求和得到 $\mathrm{N}_n(f) \leq \widetilde{\mathrm{P}}_n(f)$。□

描述	记号	Type
周期轨迹	$\mathrm{Per}_n(f)$	概形
孤立的真正周期点	$\mathrm{IPer}_n(f)$	概形
不计重数的孤立周期点	$\mathrm{P}_n(f)$	计数
按几何重数计数的孤立周期点	$\mathrm{N}_n(f)$	计数
重数		
Lefschetz数	$L(f^n)$	计数
按几何重数计数的完美点	$\widetilde{\mathrm{P}}_n(f)$	计数

表 1. 周期点记法。

3.3. **双有理共轭下。** 设 X 是正规复射影曲面，且 $p \in X$。设 $\pi_p\colon Y \to X$ 是在 p 处的爆炸。对于任意优势有理映射$f\colon X \dashrightarrow X$，令 $g = \pi_p^{-1} \circ f \circ \pi_p\colon Y \dashrightarrow Y$为 f 的提升。我们证明， f 的周期点计数可由 g的计数加以界定。此结果将在第 4 节中使用。

引理 3.7。 存在一个常数 $C = C(f, \pi_p)$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\mathrm{N}_n(f) - \mathrm{N}_n(g) \leq C(f, \pi_p).$$

证明。 f 的每个轨道避开 p 的孤立周期点都提升为 g 的一个具有相同重数的孤立周期点。

若 p是 f的一个孤立周期点，令 r为其确切周期。当 $r \nmid n$时，有 $\mathrm{N}_n(f) \leq \mathrm{N}_n(g)$。当对于某个 $m \in \mathbb{N}$有 $n = rm$ 时，我们有

$$\mathrm{N}_n(f) - \mathrm{N}_n(g) \leq r\, l_p(f^n).$$

因为 p 的轨道有 r 个点。

根据引理 3.8，我们有 $l_p(f^n)$ 是有界的。证明完毕。 □

当 p 是上的一个光滑点时，重数的有界性由[SS74]给出。对于 p 是奇异点的情形，我们将沿用 [SS74]中的局部计算给出证明。

引理 3.8。 令 $h\colon (Z, p) \to (Z, p)$ 为复解析芽的全纯自映射，且 p 是一个孤立不动点。重数 $l_p(h^n)$ 是有界的。

证明。 将 (Z, p) 嵌入到 $(\mathbb{C}^N, 0)$ 中，并将 h 延拓为全纯芽 $H\colon (\mathbb{C}^N, 0) \to (\mathbb{C}^N, 0)$。令 $A = DH(0)$，并将 M 设为 A 的单位根特征值的阶的最小公倍数。

对于 $n \geq 1$，令 $k = \gcd(n, M)$。于是，对 $s \in \mathbb{N}$，有 $n = sk$。我们断言

$$H^n(z) - z = Q(z)\left(H^k(z) - z\right) \tag{3.1}$$

对于 $Q(z)$这个可逆全纯矩阵芽。事实上，可以写成

$$H^n(z) - z = \sum_{t=0}^{s-1} H^{tk}\left(H^k(z)\right) - H^{tk}(z)$$

其中 $H^{tk}(w) - H^{tk}(z) = B_t(w, z)(w - z)$，且 $B_t(0, 0) = DH^{tk}(0)$。于是

$$Q(z) = \sum_{t=0}^{s-1} B_t(H^k(z), z), \qquad Q(0) = \sum_{t=0}^{s-1} DH^{tk}(0) = \sum_{t=0}^{s-1} A^{tk}.$$

设 α 是 A的任意一个特征值，则 $q(\alpha) := 1 + \alpha^k + \cdots + \alpha^{(s-1)k}$ 是 $Q(0)$的一个特征值。当 $\alpha^k = 1$ 时，$q(\alpha) = s \neq 0$。当 $\alpha^k \neq 1$时，我们有 $\alpha^n = \alpha^{sk} \neq 1$。事实上，设 α的阶为 r，若 $r|n$，则 $r|\gcd(n, M) = k$，这就矛盾了。于是 $q(\alpha) = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha^k} \neq 0$。我们得出 $Q(0)$可逆。因此 Q 可逆。

设 $J_k \subset \mathcal{O}_{Z,\,a}$ 是 h^k 的 p 处的概形 $\pi_1(F_k(h))$的不动理想。由（3.1），可得理想

$$(H^n(z) - z) = \left(H^k(z) - z\right) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0}.$$

限制到 Z 上，得到$\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_k$。由此可得

$$l_p(h^n) = l_p\left(h^{\gcd(n,M)}\right),$$

并且它们以 $\max\{l_p(h^k)\ k|M\}$为上界。

□

4. 周期点个数的上界

4.1. 有理映射。设 X 是一个维数为 m 的光滑射影簇，定义在$K = \overline{K}$上，且 L 是 X上的丰线丛。令 π_1 和 π_2 分别为到第一和第二个因子的投影。

我们考虑沿对角线 Δ对 $X \times X$ 进行爆炸：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & \widetilde{X \times X} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \Delta & \xrightarrow[i]{} & X \times X \end{array}$$

例外除子 E 是 Δ上的一个射影丛，并且同构于射影化切丛 $\mathbb{P}T_X$。令 $f: X \dashrightarrow X$ 为 X的一个主导有理自映射。令 $\Gamma(f)$表示图 $\Gamma(f)$在爆炸下的严格变换。

定理 A 的证明。我们固定一个丰线丛 L 在 $X \times X$ 上，并考虑丰线丛 $L = \pi_1^* L + \pi_2^* L$ 在 $X \times X$上。

令 $P(f)$ 表示 $\Gamma(f) \cap \Delta$ 中按几何重数计数的完美点的数量。令 $P = (x, x) \in \Delta(K)$ 为一个完美点。因此，我们得到以下有效循环不等式：

$$[\widetilde{\Gamma(f)} \cap E] \geq P(f)[E_P].$$

因此，我们得到

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{L}}\left(P(f)[E_P]\right) \leq \mathrm{Vol}_{\widetilde{L}}([\widetilde{\Gamma(f)} \cap E]).$$

~定理 2.8 和命题 2.7应用于 $(X \times X, \ \Delta, \ L, \ L)$，得到一个常数 C_1使得

$$P(f) \leq \mathrm{Vol}_{\widetilde{L}}([\widetilde{\Gamma(f)} \cap E]) \leq C_1 \cdot \mathrm{Vol}_{\overline{L}}(\Gamma(f)).$$

相对于 L ，图 $\Gamma(f)$ 的体积为

$$\mathrm{Vol}_{\overline{L}}(\Gamma(f)) = \Gamma(f) \cdot (\pi_1^* L + \pi_2^* L)^m = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \deg_{L,p}(f) \leq 2^m \max_{0 \leq p \leq m} \deg_{L,p}(f).$$

由此可得

$$P(f) \leq 2^m C_1 \max_{0 \leq p \leq m} \deg_{L,p}(f).$$

将 f 替换为其 n 次迭代 f^n，我们推得

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n(f) \leq C \max_{0 \leq p \leq m} \lambda_p(f^n).$$

其中 $C = 2^m C_1$。这就完成了证明。 □

4.2. **双有理曲面映射**。 现在我们证明定理B的上界部分。事实上，我们将证明下述更强的定理，并给出 $\mathrm{N}_n(f)$ 的上界。

定理 4.1。 设 X 是特征为 0 的代数闭域上的正规射影曲面。则对于任意双有理映射 $f\colon \ X \dashrightarrow X$，其中 $\lambda_1(f) > 1$，我们属于以下两种情形之一：

(i) 曲面 X 与一个阿贝尔曲面双有理同构，并且

$$\mathrm{N}_n(f) \leq \lambda_1(f)^n + O\Big(\lambda_1(f)^{n/2}\Big).$$

(ii) 曲面 X 不与任何阿贝尔曲面双有理同构，并且

$$\mathrm{N}_n(f) \leq \lambda_1(f)^n + O(1).$$

设 $\lambda_1 = \lambda_1(f)$。选取一个有限生成子域 $k_0/\mathbb{Q}$ ，使得 X 和 f 均在其上有定义。通过将其代数闭包嵌入 $\mathbb{C}$，我们可以假设 X 和 f 都定义在 $\mathbb{C}$上。

我们断言，要证明定理 4.1，只需在以下假设下证明它： X 是光滑的，且 f 是代数稳定的。

为满足这一假设，我们对 X 进行奇点消解，然后应用⌣[DF01，定理 0。1]我们得到一个双有理态射 $\pi\colon \ X \to X$ 其中

$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$射影簇 X 以及一个代数稳定提升$f\colon\ X \dashrightarrow X$。根据引理3.7，存在一个常数 $C = C(f, \pi)$ 使得

$$\mathrm{N}_n(f) \le \mathrm{N}_n(\widetilde{f}) + C.$$

此外，第一动力学次数在双有理共轭下保持不变。因此，只需在光滑性和代数稳定性的假设下证明该定理。

我们将比较 Lefschetz数 $\Gamma(f^n)\cdot\Delta$与孤立周期点的数量 $\mathrm{P}_n(f)$。我们首先估计Lefschetz数。

引理 4.2。 设 X 为光滑复射影曲面， $f\colon\ X \dashrightarrow X$ 为代数稳定双有理映射。则有

(i) 当曲面 X 与阿贝尔曲面双有理等价时，则

$$\Gamma(f^n)\cdot\Delta = \lambda_1^n + O\left(\lambda_1^{n/2}\right).$$

(ii) 如果曲面 X 不与阿贝尔曲面双有理等价，则

$$\Gamma(f^n)\cdot\Delta = \lambda_1^n + O(1).$$

证明。 根据Lefschetz不动点公式，对于每个 $n \ge 1$ 我们有

$$\Gamma(f^n)\cdot\Delta = \sum_{i=0}^{4}(-1)^i \operatorname{Trace}\left((f^n)^*\colon H^i(X,\mathbb{C}) \to H^i(X,\mathbb{C})\right).$$

代数稳定性给出（f^n）* = （f^*）^{n}在 $H^{1,\,1}(X)$ 上。根据 [DF01，定理 5.1]，， H^1 上的 f^* 的谱在单位圆盘外仅由单个单特征值λ_1组成。另一方面，对图进行消解表明，双有理拉回保持 $H^{2,\,0}(X)$ 和 $H^{0,\,2}(X)$ 上的 Hodge范数，因此这两个空间上的所有特征值的模均为 1。由此可得

$$\operatorname{Trace}\left((f^n)^*\colon H^2(X,\mathbb{C}) \to H^2(X,\mathbb{C})\right) = \lambda_1^n + O(1).$$

根据 [Can01][BC16，定理 B]， X 与有理曲面、阿贝尔曲面、K3曲面或Enriques曲面中的一种双有理等价。在第一、第三和第四种情形下， H^1（X， $\mathbb{C}$） $= H^3$（X， $\mathbb{C}$） $= 0$。在阿贝尔情形下，这两个上同调群是双有理不变量，可以在阿贝尔极小模型上计算。其在该处诱导的自同构在 $\lambda_1^{1/2}$ 和 H^1 上的谱半径均为 H^3。因此

$$\left|\operatorname{Trace}\left((f^n)^*\colon H^1(X,\mathbb{C}) \oplus H^3(X,\mathbb{C})\right)\right| = O\left(\lambda_1^{n/2}\right).$$

最后， H^0(X， $\mathbb{C}$) 和 H^4(X， $\mathbb{C}$) 的迹均为 1。结合前面的估计可得

$$\Gamma(f^n)\cdot\Delta = \begin{cases} \lambda_1^n + O\left(\lambda_1^{n/2}\right), & \text{若 } X \text{ 与阿贝尔曲面} \\ 1, & \\ \lambda_1^n + O & . \qquad\qquad \text{双有理，否则} \end{cases}$$

□

接下来，我们考察以下例子，它使我们能够计算交叉数中的垂直贡献和水平贡献。

例 4.3。考虑一个 4维光滑簇 X，以及其中一个 2 维光滑子簇 $V \subset X$。我们考虑沿着 V 的爆炸：

$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{j} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ V & \xhookrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

其中 $N = \mathcal{N}_{V,\ X}$ 是 V 的秩2法丛，而 $E = \mathbb{P}N$ 是一个 $\mathbb{P}^1$-丛。

设 T 是 X 的一个维数为2且可能奇异的不包含 V的子簇，并且~令 T 为其严格变换。

~设 C 是 $T \cap E$ 的一个不可约分支，几何重数为 $\ell_C \geq 1$。我们描述 C 对交叉数$(T \cdot V)$ 的贡献，记作 $(T \cdot V)^C$。根据 [Ful98], 的定义 6.1.2 和例 6.1.8，我们可以写成

$$T \cdot V = \sum (T \cdot V)^C,$$

其中 $(T \cdot V)^C = \ell_C \{p_*(c_1(\xi) \cdot [C])\}_0$，且 $\xi = p^* N / \mathcal{O}_E(-1)$是泛商线丛。

如果 $Z = p(C)$ 的维数为 0，则称 C 为垂直分支。于是，$C = p^{-1}(Z)$ 是射影丛的一个纤维。因此，我们有

$$(T \cdot V)^C = \ell_C \in \mathbb{N}.$$

如果 $Z = p(C)$ 的维数为 1，则称 C 为水平分支。记 $p_*[C] = k_C[Z]$，其中 $k_C \in \mathbb{N}^*$。由于 $c_1(\xi) = p^* c_1(N) + h$，其中 $h = c_1(\mathcal{O}_E(1))$，由投影公式可得

$$(T \cdot V)^C = \ell_C \Big(k_C [Z] \cdot c_1(N) + [C] \cdot h \Big).$$

命题 4.4。设 X 是一个光滑复射影曲面，设 $f\colon\ X \dashrightarrow X$ 是双有理的，且 $\lambda_1(f) > 1$，并设 $Z \subset X$ 是一条在 f 作用下逐点固定、且除 $\mathrm{Ind}(f)$ 外的不可约曲线。将 $X \times X$ 的对角线吹起，并将例外除子记为 E，将其到对角线的投影记为 p。对于每个 $n \geq 1$，存在唯一的不可约曲线

$$C_n \subset \widetilde{\Gamma(f^n)} \cap E$$

~使得 $p(C_n) = Z$。此外，几何重数 $\ell_{C_n}(f^n) := \ell(C_n, \Gamma(f^n) \cap E)$ 有界，且其界与 n 和 $p_*[C_n] = [Z]$ 无关。

定理 *4.1* 的证明。令 $\Delta\colon\ X \hookrightarrow X \times X$ 为对角嵌入。我们沿对角线进行爆破，并将例外除子记为 E，将 $p\colon\ E \to \Delta \simeq X$ 的~自然投影记为 $\Gamma(f^n)$，将 $\Gamma(f^n)$的严格变换记为此。

现在我们分析沿着 E的交复数域$_n$ 是不可约~分量 $\Gamma(f^n) \cap E$的有限集。对于水平分支 $C \in$ 复数域$_n$，令 $Z = p(C) \subset \Delta \simeq X$。则 Z是一条被 f^n逐点固定的不可约曲线，除去 $\mathrm{Ind}(f^n)$。根据 [Can10]

以及 [Xie15，定理 5。5], 周期曲线只有有限多条；因此集合

$$\mathcal{Z} = \{Z = p(C) \mid C \in \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{C}_n \text{ and } C \text{ is horizontal}\}$$

是有限的。

令 $N = N_{\Delta/(X\times X)} \simeq T_X$ 和 $h = c_1(\mathcal{O}_E(1))$。根据例4.3， C 对 $\Gamma(f^n)\cdot\Delta$ 的贡献为

$$(\Gamma(f^n)\cdot\Delta)^C = \ell_C(f^n)\,(k_C\,[Z]\cdot c_1(N) + m_C)$$

其中 $\ell_C(f^n) = \ell(C,\ \Gamma(f^n)\cap E)$ 是几何重数， $p_*[C] = k_C[Z]$ 且 $k_C \in \mathbb{N}^*$，以及

$$m_C = [C]\cdot h \in \mathbb{Z}.$$

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，可以写成

$$\Gamma(f^n)\cdot\Delta = \sum_{C\in\mathcal{C}_n,\dim p(C)=0} (\Gamma(f^n)\cdot\Delta)^C + \sum_{Z\in\mathcal{Z}}\sum_{C\in\mathcal{C}_n,p(C)=Z} (\Gamma(f^n)\cdot\Delta)^C = A_n + B_n.$$

这里， A_n 是垂直分支的贡献，而 B_n 是水平分支的贡献。前者恰好是按重数计数的完美点数。特别地，由引理3.6，可得

$$\mathrm{N}_n(f) \leq \widetilde{\mathrm{P}}_n = A_n.$$

还需证明 B_n 有统一的下界。对每个 $Z\in\mathcal{Z}$，令 q_Z 为其最小逐点周期。若 $q_Z \nmid n$，则 $\Gamma(f^n)$ 的水平分支没有一个 $\cap E$ 位于 Z 之上。若 $n = q_Z m$，将命题 4.4 应用于 f^{q_Z}，可得到 Z 之上的唯一分量 $C_{Z,\,n}$，使得 $p_*[C_{Z,n}] = [Z]$，且其重数与 n 无关。因此

$$B_n = \sum_{\substack{Z\in\mathcal{Z}\\ q_Z\mid n}} \ell_{C_{Z,n}}(f^n)\Big([Z]\cdot c_1(N) + [C_{Z,n}]\cdot h\Big).$$

在 Δ 上取一个丰线丛 L，令 $\omega = c_1(L)$，并取 $A \gg 0$ 使得 $h + Ap^*\omega$ 在 E 上是丰的。于是

$$[C_{Z,n}]\cdot h > -A[C_{Z,n}]\cdot p^*\omega = -A[Z]\cdot\omega.$$

由于 $\mathcal{Z}$ 是有限集，且上述重数具有统一上界， B_n 具有统一的下界。因此，

$$\mathrm{N}_n(f) \leq \Gamma(f^n)\cdot\Delta - B_n \leq \Gamma(f^n)\cdot\Delta + O(1).$$

将此估计与引理 4.2 结合即可证明该定理。 □

命题 4.4的证明。 考虑一个一般的光滑点 $x \in Z\setminus \mathrm{Ind}(f)$，其中 f 是一个局部双全纯映射，并取以 x 为中心的解析坐标 (z_1, z_2)，满足 $Z = \{z_1 = 0\}$。由于 f 逐点固定 Z，存在最大的整数 $t \geq 1$ 使得

$$f(z_1, z_2) = \Big(z_1 + z_1^t g(z_1, z_2), z_2 + z_1^t h(z_1, z_2)\Big),$$

其中，在 Z 的一般点处， g, h 中至少有一个是单位。我们定义 $\nu_Z(f) = t$。

在 $(x,x) \in X \times X$ 附近，对角线的膨胀表示为

$$\Big\{(z,w,[l_0:l_1]) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{P}^1 \mid (z_1-w_1)l_1 = (z_2-w_2)l_0\Big\}.$$

首先假设 g 是一个单位，并使用坐标图 $\{l_0 \neq 0\}$ ，其中

$$(z_1,z_2,a,u) \mapsto (z_1,z_2,z_1+a,z_2+au,[1:u]).$$

图的严格变换由理想给出

$$(a - z_1^t g, u - h/g).$$

它与 $E=\{a=0\}$ 的交由理想给出

$$(z_1^t, u-h/g).$$

这是一个只有一个不可约分支且重数为 t 的子概形。由此可知，存在唯一的不可约分支 C，其重数为 $\nu_Z(f)$。进一步， C 由下式给出

$$z_1 = 0, \qquad a = 0, \qquad u = \frac{h(0,z_2)}{g(0,z_2)}.$$

并且投影 p 推出一个同构

$$\left(0,z_2,0,\frac{h(0,z_2)}{g(0,z_2)}\right) \longmapsto (0,z_2).$$

因此 $p_*[C]=[Z]$。

当 h 为一个单位时，坐标图 $\{l_1 \neq 0\}$ 给出相同的结论。

将此计算应用于每个迭代，得到不可约曲线 C_n 及其重数$\ell_{C_n}(f^n) = \nu_Z(f^n)$ 和 $p_*[C_n]=[Z]$.

还需对 $\nu_Z(f^n)$ 进行界定。对于任意光滑点 $z=(0,z_2) \in Z\backslash \mathrm{Ind}(f)$， f 的微分具有如下形式

$$df|_z = \begin{pmatrix} \lambda(z_2) & 0 \\ \mu(z_2) & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda(z_2) \in \mathbb{C}(Z)\backslash\{0\}, \quad \mu(z_2) \in \mathbb{C}(Z).$$

可以写成

$$f(z_1,z_2) = \left(\lambda(z_2)z_1 + O(z_1^2), z_2 + \mu(z_2)z_1 + O(z_1^2)\right).$$

如果对于某个 z_2， $\lambda(z_2)$ 不是单位根，那么对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $\nu_Z(f^n)=1$。事实上， n 次迭代 f^n 具有如下形式

$$f^n(z_1,z_2) = \left(\lambda(z_2)^n z_1 + O(z_1^2), z_2 + \mu(z_2)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\lambda(z_2)^j\right)z_1 + O(z_1^2)\right).$$

因此，我们可以假设 λ 是一个常数单位根，那么当 $\lambda^n \neq 1$ 时， $\nu_Z(f^n)=1$。因此，通过将 f 替换为一个迭代，我们可以假设 $\lambda = 1$。若 $\mu \neq 0$，则有 $\nu_Z(f^n)=1$。

因此，我们还可以进一步假设 $\mu = 0$，那么 $\nu_Z(f^n) \geq 2$。接着，我们将 f 改写为以下形式

$$f(z_1, z_2) = (z_1 + P(z_1, z_2), z_2 + Q(z_1, z_2)) = (z_1 + \sum_{n\geq 2} P_n(z_1, z_2), z_2 + \sum_{n\geq 2} Q_n(z_1, z_2)),$$

其中 P，Q 是形式多项式，而 P_n，Q_n 是次数为n的齐次多项式。根据假设，$\nu_Z(f) = \min\{\mathrm{ord}_{z_1}(P), \mathrm{ord}_{z_1}(Q)\} \geq 2$。

根据 [BMCLH08], ，存在唯一的形式向量场

$$\mathcal{X} = a(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + b(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} = \sum_{n\geq 2} a_n(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{n\geq 2} b_n(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2},$$

使得

$$f(z_1, z_2) = (\exp(\mathcal{X})(z_1), \exp(\mathcal{X})(z_2)),$$

其中 a_n，b_n 是次数为 n 的齐次多项式，且 $\exp(\mathcal{X})(g) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\mathcal{X}^j(g)$，对 $g \in \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$ 成立。对于 $q \geq 2$，我们令 $\mathcal{X}_q = \sum_{2\leq n\leq q} a_n(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{2\leq n\leq q} b_n(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}$。于是我们有 $P_2 = a_2$，并且有 $Q_2 = b_2$；对于 $q \geq 2$,

$$P_{q+1} = a_{q+1} + \mathrm{HT}_{q+1}\left(\sum_{j=2}^{q} \frac{1}{j!}\mathcal{X}_q^j(z_1)\right), \tag{4.1}$$

$$Q_{q+1} = b_{q+1} + \mathrm{HT}_{q+1}\left(\sum_{j=2}^{q} \frac{1}{j!}\mathcal{X}_q^j(z_2)\right), \tag{4.2}$$

其中 $\mathrm{HT}_{q+1}(h)$ 表示 h 的 $q+1$阶齐次项。

我们断言

$$\min\{\mathrm{ord}_{z_1}(P), \mathrm{ord}_{z_1}(Q)\} = \min\{\mathrm{ord}_{z_1}(a), \mathrm{ord}_{z_1}(b)\}.$$

令 $t = \min\{\mathrm{ord}_{z_1}(P), \mathrm{ord}_{z_1}(Q)\}$。那么对每个 q，z_1^t 都整除 P_q 和 Q_q。特别地，z_1^t 整除 a_2 和 b_2。利用 (4.1) 和 (4.2)，我们归纳得到，对每个 n，z_1^t都整除 a_n 和 b_n。反过来，令 $s = \min\{\mathrm{ord}_{z_1}(a), \mathrm{ord}_{z_1}(b)\}$。那么对每个 n，z_1^s都整除 a_n 和 b_n。方程 (4.1) 和 (4.2) 推出 z_1^s 整除 P_2 和Q_2，继而归纳得到，对每个 q，P_{q+1} 和 Q_{q+1}。

因此,

$$\nu_Z(f) = \min\{\mathrm{ord}_{z_1}(P), \mathrm{ord}_{z_1}(Q)\} = \min\{\mathrm{ord}_{z_1}(a), \mathrm{ord}_{z_1}(b)\}.$$

Then

$$\nu_Z(f^n) = \nu_Z(n\mathcal{X}) = \min\{\mathrm{ord}_{z_1}(na), \mathrm{ord}_{z_1}(nb)\} = \nu_Z(f).$$

我们得出结论：C_n具有有界重数 $\ell_{C^n}(f^n) = \nu_Z(f^n)$。 □

5. Moriwaki 高度与下界

在本节中，设 K 是 $\mathbb{Q}$上的有限生成域。设 k 是 $\mathbb{Q}$ 在 K中的代数闭包。那么 k 是 $\mathbb{Q}$的有限扩张。详情请参见 [Mor00],[CM20],和 [Zha95]。

5.1. 乘积公式。 设 K 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限生成域，超越次数为 b。设 $\mathscr{B}$ 是 SpecZ 上的正规、射影、平坦整概形，其函数域为 K，且一般纤维光滑。取 $\mathscr{B}$ 上的一个算术丰沛–C^∞-Hermitian 线丛 $\mathscr{H}$，其曲率形式在 $\mathscr{B}$**(复数域)** 上为正。固定 K 的这样一个模型 $(\mathscr{B}, \mathscr{H})$。

令 Ω_K^∞ 表示从 K 到 $\mathbb{C}$的所有嵌入构成的集合。通过复合映射 Spec($\mathbb{C}$) $\to$ Spec(K) $\to \mathscr{B}$，可以将 Ω_K^∞ 视为 $\mathscr{B}(\mathbb{C})$ 的子集。于是

$$\Omega_K^\infty = \mathscr{B}(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{Y \in \mathrm{Div}(\mathscr{B})} Y(\mathbb{C}),$$

其中 Y遍历 $\mathscr{B}$ 上定义在 $\mathbb{Q}$上的所有除子。对于每个 $\sigma \in \Omega_K^\infty$，相应的赋值定义为

$$|\cdot|_\sigma \coloneqq |\sigma(\cdot)|_{\mathbb{C}}.$$

令 Ω_K^{NA}为 $\mathscr{B}$上的所有素除子构成的集合。任意 $\Gamma \in \Omega_K^{\mathrm{NA}}$都通过下式定义一个非阿基米德绝对值:

$$|\cdot|_\Gamma \coloneqq \exp\Big(-\operatorname{ord}_\Gamma(\cdot)\Big).$$

注意，水平除子在 k 上给出的非阿基米德赋值是平凡的，而垂直除子则扩张了 k 的非阿基米德赋值。

K的赋值集合记为 Ω_K （或简称 Ω），是以下不交并

$$\Omega_K \coloneqq \Omega_K^\infty \sqcup \Omega_K^{\mathrm{NA}}.$$

We 在 Ω_K^{NA}上赋予离散拓扑，在 Ω_K^∞ 上赋予解析拓扑。

在 Ω_K上，我们考虑测度

$$\nu = \sum_\Gamma \delta_\Gamma \cdot \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{H}}^b|_\Gamma) + \mathrm{MA}(c_1(\overline{\mathscr{H}})),$$

其中，MA($c_1(\overline{\mathscr{H}})$) $= c_1(\overline{\mathscr{H}})^{\wedge b}$ 是 $\mathscr{B}(\mathbb{C})$上的 Monge–Ampère 测度。由于 $\mathscr{H}$是丰沛的，测度 ν 是非负的。因此乘积公式成立：对任意$a \in K \setminus \{0\}$,

$$\int_{\Omega_K} \log|a|_w \, d\nu(w) = \sum_\Gamma \log|a|_\Gamma \, \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{H}}^b|_\Gamma) + \int_{\mathscr{B}(\mathbb{C})} \log|a|_w \, \mathrm{MA}(c_1(\overline{\mathscr{H}})) = 0.$$

如果存在一个 ν-可积函数 $\tilde{\varphi}$ 使得 $|\varphi| \le \tilde{\varphi}$，则称函数 φ: $\Omega_K \to \mathbb{R}$ 是 ν-支配的 。

5.2. 强阿代尔度量。 设 X 是定义在 K上的射影簇，且 $w \in \Omega_K$是 K的一个赋值。设 K_w 为相应的完备化， X_{K_w} 为基变换。记 X_w 为相应的解析空间：当 w 是阿基米德时， $X_w = X(K_w)$；当 w 是非阿基米德时， X_w 是 X_{K_w} 的 Berkovich 解析空间。对于 X上的线丛 L，记其在 X_w上的解析化为 L_w 。

定义 5.1。 设 L 是 X 上的一个线丛。 L 上的一个度量族 是指解析空间 X_w 上诱导线丛上的连续度量族 $\varphi = \{\|\cdot\|_w\}_{w \in \Omega_K}$ 。

定义 5.2。 (X, L) 的一个 $\mathscr{B}$-模型由数据 $(\mathscr{X}, \mathscr{L}, \|\cdot\|)$ 组成： $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{B}$ 上的射影算术簇， $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{X}$ 上的线丛，满足 $\mathscr{X}_K = X$ 和 $\mathscr{L}_K = L$，且 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{X}(\mathbb{C})$ 上 $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}$ 的连续半正度量。

若度量族由 (X, L) 的某个模型诱导，则称其为模型度量族。

定义 5.3. 若度量族 $\varphi = \{\|\cdot\|_w\}_{w\in\Omega_K}$ 在 L 上满足：对于每个赋值 $w \in \Omega_K$，度量 $\|\cdot\|_w$ 具有如下形式，则称其为 *FS*（*Fubini–Study*）度量

$$\|s\|_w(x) = \frac{|s(x)|}{\max(|\tau_1(x)|, |\tau_2(x)|, \ldots, |\tau_s(x)|)^{1/q}},$$

其中 $q \geq 1$ 是一个整数， τ_i 是 qL 的有限多个截面，且没有公共零点。

定义 5.4. 若存在 (M, φ_1) 和 (N, φ_2)，使得 $L = M - N$、 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$以及 φ_1和 φ_2均为模型度量族和 FS 度量族，则称 φ 在 L 上的度量族为强阿代尔 度量族。

注 5.5. 每个强阿代尔度量族都可测且受 Chen–Moriwaki 的意义下的支配 [CM20，第 6 节。1]。

例 5.6。 设 L 是 X 上的一个无基点线丛。设 $\Sigma = \{\tau_1, \ldots, \tau_s\}$ 是生成 $H^0(X, L)$ 的有限子集。则 Σ 定义了从 X 到某个射影空间的态射。因此， Σ 在 L 上定义了一个 FS 度量族。

事实上，可以证明该度量族也是一个模型度量族。因此，这样的度量族是强阿代尔的。

定义 5.7。 如果 $\varphi = \{\|\cdot\|_w\}_{w\in\Omega_K}$ 和 $\varphi' = \{\|\cdot\|'_w\}_{w\in\Omega_K}$ 是 L 上的两个强阿代尔度量族，则 $\varphi - \varphi'$ 在 $L \otimes L^\vee = \mathcal{O}_X$ 上定义了一个度量族。我们将局部距离定义为

$$d_w(\varphi, \varphi') = \sup_{x\in X_w} \left|\log\|\cdot\|_w(x) - \log\|\cdot\|'_w(x)\right|,$$

φ 与 φ' 之间的全局距离定义为积分

$$\operatorname{dist}(\varphi, \varphi') = \int_{w\in\Omega_K} d_w(\varphi, \varphi')\, d\nu(w) \in [0, +\infty].$$

5.3. **Moriwaki 高度**。 设 L 是一个配备了阿代尔 FS 模型度量的线丛。对于 $x \in X(K)$，Moriwaki 高度为

$$h_{\overline{L}}(x) = \int_{\Omega_K} -\log\|s(x)\|_w d\nu(w),$$

其中， s 是在 x 处不为零的 L 的截面。

该积分定义良好，因为度量由一个模型诱导，而高度可以用算术交数来解释。

将 $h_{L,s,w}(x) = -\log\|s(x)\|_w$ 记为 L 在赋值 w 处的局部高度。

例 5.8。 坐标截面定义了 $(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$ 的朴素高度函数。我们令

$$h_{\mathrm{nv}}([x_0 : \cdots : x_N]) \coloneqq \int_{\Omega_K} \log \max(|x_0|_w, \ldots, |x_N|_w)\, d\nu(w),$$

对于 $[x_0 : \cdots : x_N] \in \mathbb{P}^N(K)$。

定义 5.9 （ X_w上的距离）。 我们固定一个嵌入 $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_K$。对于每个赋值 $w \in \Omega_K$，我们通过将球面距离从 $\mathbb{P}^N(K_w)$（它与标准 FS 度量相关联）拉回到解析空间 X_w 上，定义一个距离 dist_w。更明确地说，球面距离由以下公式定义

$$\mathrm{dist}_w([x_0 : \cdots : x_N], [y_0 : \cdots : y_N]) = \frac{\max_{0\le i<j\le N} |x_i y_j - x_j y_i|_w}{\max_{0\le i\le N} |x_i|_w \, \max_{0\le j\le N} |y_j|_w}.$$

命题 5.10。 设 X 是定义在 K 上的射影簇。设 $D \in \mathrm{Div}(X)$ 是一个有效除子，并在 $\mathcal{O}(D)$ 上配备强阿代尔度量 φ 。那么，高度 $h_{(D,\varphi)}$ 在 $(X|\mathrm{supp}(D))(K)$ 上有下界。

证明。 首先，我们可以如下构造一个强阿代尔度量 φ_0 。写作 $D = D_1 - D_2$，其中 D_1 和 D_2 是非常丰沛线丛。选取 $\Gamma(X, \mathcal{O}(D_2))$ 的一组基 $\Sigma = \{f_1, \ldots, f_s\}$。那么对任意 i ，我们有

$$\mathrm{div}(f_i) + D_1 = D + \mathrm{div}(f_i) + D_2 \ge D \ge 0.$$

因此 $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D_1))$。所以我们可以将 Σ 扩展为 $\Sigma' = \{f_1, \ldots\ldots, f_s, \ldots\ldots, f_t\}$的一个基，属于 $\Gamma(X, \mathcal{O}(D_1))$。由 Σ 和 Σ' 在 $\mathcal{O}(D_2)$ 和 $\mathcal{O}(D_1)$ 上诱导的模型度量族，通过张量积在$\mathcal{O}(D)$上定义了一个阿代尔度量 φ_0 。

关于 φ_0，我们验证局部高度均为非负：对于任意 $w \in \Omega_K$和 $x \notin \mathrm{supp}(D_1)(K)$,

$$\begin{aligned} h_{(D,\varphi_0),w}(x) &= h_{\overline{D}_1,w}(x) - h_{\overline{D}_2,w}(x) \\ &= \log \max\{|f_1(x)|_w, \ldots, |f_t(x)|_w\} - \log \max\{|f_1(x)|_w, \ldots, |f_s(x)|_w\} \\ &\ge 0. \end{aligned}$$

由于测度 ν 为非负，Moriwaki 高度

$$h_{(D,\varphi_0)}(x) = \int_{\Omega_K} h_{(D,\varphi_0),w}(x) d\nu(w) \ge 0.$$

对于 φ 上的任意其他强阿代尔度量 $\mathcal{O}(D)$， [CM的命题 6.1.5 表明，局部距离函数 $(w \in \Omega_K) \mapsto d_w(\varphi, \varphi_0)$ 是 ν-控制的。因此

$$h_{(D,\varphi)}(x) \ge h_{(D,\varphi_0)}(x) - \int_{\Omega_K} d_w(\varphi, \varphi_0)\, d\nu(w),$$

所以，对于 $x \notin \mathrm{supp}(D_1)(K)$， $h_{(D,\varphi)}(x)$ 有下界。

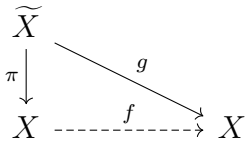
为了得到 $(X\backslash\mathrm{supp}(D))(K)$ 的一致下界，我们考虑一个非常丰沛线丛 A，使得 $A + \mathcal{O}(D)$ 也是非常丰沛的。令 $g_1, \cdots\ g_r$ 为一组基

$H^0(X, A)$ 的。于是每个 g_i 都给出一个分解 $D = (\mathrm{div}(g_i) + D) - \mathrm{div}(g_i)$。重复上述讨论，我们得到一个一致下界

$$\bigcup_{i=1}^{r}\Big(X \setminus \mathrm{supp}(\mathrm{div}(g_i) + D)\Big)(K) = \Big(X \setminus \mathrm{supp}(D)\Big)(K).$$

□

5.4. **高度之差**。设 X 是定义在 K 上的光滑射影曲面，且 L 是 X 上的一个线丛。设 $f\colon X \dashrightarrow X$ 是定义在 K 上的优势有理映射。设 $f = g \circ \pi^{-1}$ 是 f 的最小消解。注意到 $f^*L = \pi_* g^* L$。



命题 5.11。假设 D 是一个数值有效除子。对于 $O(D)$ 和 $O(f^*D)$ 上任意强阿代尔度量，我们有

$$h_{\overline{D}}(f(x)) \le h_{\overline{f^*D}}(x) + O(1),$$

当 $x \notin \mathrm{Ind}(f)$ 且 $x \notin \mathrm{supp}(D)$。

证明。我们取最小光滑消解，使得 $\pi\colon X \to X$ 是若干次爆破的复合，且 $g\colon X \to X$ 是 f 的提升。

根据 [DF01]，$E = \pi^* f^* D - g^* D$ 是有效的。此外，$E = \overline{\pi^*(f^*D) - g^*D}$ 携带一个阿代尔度量。设 y 是 x 在 π 下的唯一原像。

$$h_{\overline{D}}(f(x)) - h_{\overline{f^*D}}(x) = h_{\overline{D}}(g(y)) - h_{\overline{f^*D}}(\pi(y)) = h_{g^*\overline{D}}(y) - h_{\pi^*\overline{f^*D}}(y) = -h_{\overline{E}}(y).$$

由于 E 是有效的，这就得到了所需的上界。

□

令 $U = X \setminus \mathrm{Ind}(f)$。由于 X 是光滑的，且 $\mathrm{Ind}(f)$ 的余维至少为 2，因此存在一个自然的同一化

$$H^0(X, f^*L) \xrightarrow{\sim} H^0(U, f^*L|_U).$$

于是，对于任意截面 $\sigma \in H^0(X, L)$，我们将 $T_f(\sigma) \in H^0(X, f^*L)$ 定义为 $(f|_U)^*\sigma$ 的唯一延拓。这定义了一个态射

$$T_f : H^0(X, L) \to H^0(X, f^*L),$$

并且 $T_f(\sigma)/T_f(\tau) = (\sigma/\tau) \circ f$ 作为有理函数。根据构造，我们还有

$$\mathrm{div}(T_f(\sigma)) = f^* \mathrm{div}(\sigma).$$

定理 5.12. 假设 L 和 f^*L 均为无基点的。设对每个 $x \in \mathrm{Ind}(f)$，都有 $(L \cdot f(x)) > 0$。

那么，存在 L 和 f^*L 上的强阿代尔度量，以及一个常数族 $\{C_w\}_{w \in \Omega_K}$，使得对于任意非零截面 $\sigma \in H^0(X, L)$，令 $\sigma' = T_f(\sigma)$，

(i) 映射 $(w \in \Omega_K^\infty) \mapsto C_w$ 是 ν-支配的，

(ii) 常数 C_w 除了有限多个非阿基米德赋值 $w \in \Omega_K^{\mathrm{NA}}$ 外均为零；*(iii)* 对任意 $x \in (X|\operatorname{Ind}(f))(K)$ 和 $f(x) \notin \operatorname{supp}(\operatorname{div}(\sigma))$，我们有

$$h_{(\overline{L},\sigma),w}(f(x)) - h_{(\overline{f^*L},\sigma'),w}(x) \leq \min\{0, \log \operatorname{dist}_w(x, \operatorname{Ind}(f)) + C_w\}.$$

证明。如果对于某个 $x \in \operatorname{Ind}(f)$，$T_f(\sigma)(x) \neq 0$，那么 $\pi^* T_f(\sigma)$ 不沿着 $\pi^{-1}(x)$ 消失。由于 $\pi^* f^* L - g^* L$ 是有效的，$g^*\sigma$ 不沿着 $\pi^{-1}(x)$ 消失。这意味着 $\sigma \cdot f(x) = 0$，这与 $L \cdot f(x) > 0$ 矛盾。因此，σ' 在 $\operatorname{Ind}(f)$ 处消失。

令 $\Sigma = \{\tau_1, \ldots, \tau_s\}$ 为 $H^0(X, L)$ 的有限生成集。对每个 $i = 1, \ldots, s$，令 $\tau_{\prime i} \coloneqq T_f(\tau_i)$。然后我们将 $\{\tau'_1, \ldots, \tau_{\prime s}\}$ 扩展为

$$\Sigma' = \{\tau'_1, \ldots, \tau'_s, \tau'_{s+1}, \ldots, \tau'_t\}$$

使得 Σ' 生成 $H^0(X, f^*L)$。那么 Σ 和 Σ' 在 L 和 f^*L 上定义强阿代尔度量族。令

$$\varphi_w(x) = h_{(\overline{L},\sigma),w}(f(x)) - h_{(\overline{f^*L},\sigma'),w}(x).$$

根据定义，对于 $x \notin \operatorname{Ind}(f)$ 和 $f(x) \notin \operatorname{supp}(\operatorname{div}(\sigma))$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_w(x) &= \log \max_{i=1,\ldots,s} \left|\frac{\tau_i(f(x))}{\sigma(f(x))}\right|_w - \log \max_{i=1,\ldots,t} \left|\frac{\tau'_i(x)}{\sigma'(x)}\right|_w \\ &= \log \frac{\max_{i=1,\ldots,s} |\tau'_i(x)|_w}{\max_{i=1,\ldots,t} |\tau'_i(x)|_w}\end{aligned}$$

注意，$\tau_{\prime i} = \tau_i \circ f$ 在全局上有定义，并且在 $i = 1, \ldots, s$ 处消失。只需证明，对于每个固定的 i_0，映射 $(w \in \Omega_K) \mapsto \log \sup_{x \in X(K)} \psi_{i_0,w}(x)$ 是 ν-主导的，其中

$$\psi_{i_0,w}(x) \coloneqq \frac{\min_{j=1,\ldots,t} \left|\tau'_{i_0}(x)/\tau'_j(x)\right|_w}{\operatorname{dist}_w(x, \operatorname{Ind}(f))}.$$

令 F 为由除子 $\tau'_1, \ldots, \tau'_s$ 定义的层。那么它的余支撑为 $\operatorname{Ind}(f)$。使用固定的嵌入 $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}_K^N$。选取一个 $\iota^* \mathsf{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ 的截面 s_0，使得 $\operatorname{div}(s_0) \cap \operatorname{Ind}(f) = \emptyset$。对于某个足够大的 $a \in \mathbb{N}$，我们考虑 $\mathsf{F} \to \mathsf{F} \otimes \iota^* \mathsf{O}_{\mathbb{P}^N}(a)$，并将每个 τ'_i 视为 $\mathbb{P}_K^N$ 上次数为 a 的齐次截面 $\rho_i \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathsf{O}_{\mathbb{P}^N}(a))$ 的限制。于是我们可以通过 ρ_i 在 $\mathbb{P}^N$ 上计算 $\psi_{i_0,w}(x)$

$$\psi_{i_0,w}(x) \coloneqq \frac{\min_{j=1,\ldots,t} |\rho_{i_0}(x)/\rho_j(x)|_w}{\operatorname{dist}_w(\iota(x), \iota(\operatorname{Ind}(f)))}.$$

我们首先考虑 w 为非阿基米德的情形。固定一个不定点 $y = [y_0 \colon \cdots \colon y_N] \in \iota(\operatorname{Ind}(f))$，并注意到 ρ_{i_0} 在 y 处消失。设 $y = [1 \colon 0 \colon \cdots \colon 0]$。接下来，我们考虑关于 dist_w 的 y 的一个邻域，该邻域为 $U_y = \{[1 \colon x_1 \colon \cdots \colon x_N], |x_i|_w < 1\}$。对于 $x = [1 \colon x_1 \colon \cdots \colon x_N] \in U_y$，记作

$\rho_{i_0}(x) = \sum_{1\le|\alpha|\le a} c_\alpha (x-y)^\alpha$，其中 $c_\alpha \in K$ 且 $(x-y)^\alpha = \prod_{i=1}^N (x_i - y_i)^{\alpha_i}$。那么对于每个 $w \in \Omega_K^{\mathrm{NA}}$，有

$$|\rho_{i_0}(x)|_w \le \max_{1\le|\alpha|\le a} |c_\alpha|_w |(x-y)^\alpha|_w \le C'_w(i_0, y)\,\mathrm{dist}_w(x,y),$$

其中

$$C'_w(i_0, y) = \max_{1\le|\alpha|\le a} |c_\alpha|_w.$$

于是我们有

$$\log \sup_{x\in X(K)} \psi_{i_0,w}(x) \le \log \max_{y\in \mathrm{Ind}(f)} \{1, C'_w(i_0, y)\},$$

且右端除有限多个非阿基米德赋值 w 外均为零。因此它是 ν-支配的。

现在考虑 w 为阿基米德赋值的情形。设 $\pi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ 是一个射影模型，并设 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{X}$ 上的线丛，使得 $\mathscr{L}_K = L$。态射 ι 延拓为

$$\widetilde{\iota}\colon \mathscr{X} \to \mathbb{P}^N_{\mathscr{B}}.$$

回顾一下，我们将阿基米德赋值的集合视为 $\mathscr{B}(\mathbb{C})$ 的子集，并且 ν 是与 $\mathscr{B}$ 上的带度量的充足线丛相关联的 Monge–Ampère 测度。双有理映射 $f\colon X \dashrightarrow X$ 导出 $F\colon \mathscr{X} \dashrightarrow \mathscr{X}$。截面 ρ_i 诱导 $\mathscr{T}_i$，其中 $i = 1, \cdots t$。注意，对于一般的 $w \in \mathscr{B}(\mathbb{C})$，$F_w\colon \mathscr{X}_w \dashrightarrow \mathscr{X}_w$ 定义良好，并且 $\mathrm{Ind}(F) \supset \mathrm{Ind}(F_w)$，同时 $\mathrm{Ind}(F) \supset \mathrm{Ind}(f)$。

令 $\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{P}^N_{\mathscr{B}}$ 上由 $\mathbb{P}^N_{\mathscr{B}}$ 上的截面 $\mathscr{T}_{i_0}$ 定义的理想层，其中 $i_0 \in$ 为固定的 $\{1, \ldots\ldots, s\}$。令 $\mathcal{G}$ 为 $\mathscr{X}$ 上由 $\mathscr{T}_1, \ldots\ldots, \mathscr{T}_t$ 生成的理想层。置 $\mathrm{Bs}(\mathscr{T}_1, \ldots\ldots, \mathscr{T}_s) = \mathrm{Bs}(\tau'_1, \ldots\ldots, \tau_{\prime s}) \cup R$，其中 R 是 V 的垂直分支。由于 f^*L 由 $\tau_{\prime 1}, \ldots\ldots, \tau_{\prime t}$ 整体生成，我们注意到 $W = \mathrm{Bs}(\mathcal{G})$ 是垂直的，并且 $W \subset R$。

将 Łojasiewicz不等式应用于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$，可得常数 C'' 和 α，使得

$$g_{\mathcal{F}}(p) \le \log \mathrm{dist}_{\mathscr{X}}(p, V) + C'',$$

and

$$\alpha \log \mathrm{dist}_{\mathscr{X}}(p, W) \le g_{\mathcal{G}}(p).$$

注意，对于 $w \in \mathscr{B}(\mathbb{C})$ 和 $p \in \mathscr{X}_w(\mathbb{C})$，

$$\log \mathrm{dist}_{\mathscr{X}}(p, W) \ge \log \mathrm{dist}_{\mathscr{B}}(\pi(p), \pi(W)) + C''',$$

对于某个与 w 无关的常数 C'''，以及

$$\begin{aligned}\log \mathrm{dist}_{\mathscr{X}}(p, V) &\le \log \mathrm{dist}_{\mathscr{X}}(p, \overline{\mathrm{Ind}(f)}) \\ &\le \log \mathrm{dist}_{\mathscr{X}_w}(p, \mathrm{Ind}(f_w)) = \log \mathrm{dist}_w(p, \mathrm{Ind}(f)).\end{aligned}$$

我们得出结论：

$$\begin{aligned}\log \psi_{i_0,w}(x) &= g_{\mathcal{F}} - g_{\mathcal{G}} - \log \mathrm{dist}_w(p, \mathrm{Ind}(f)) \\ &\le C'' - \alpha C''' - \alpha \log \mathrm{dist}_{\mathscr{B}}(w, \pi(W)).\end{aligned}$$

那么，映射 $(w \in \Omega_K^\infty) \mapsto C_w = C'' - \alpha C''' - \alpha \log \operatorname{dist}_{\mathscr{B}}(w, \pi(W))$ 是 ν-支配的。□

5.5. **周期点的下界**。

定理 5.13. 设 $f\colon X \dashrightarrow X$ 是定义在特征为 0 的代数闭域上的光滑射影曲面的双有理自映射。假设第一动力学次数为 $\lambda_1 > 1$。则

$$\mathrm{P}_n(f) \geq \lambda_1^n + o(\lambda_1^n).$$

不妨设 $f\colon X \dashrightarrow X$ 定义在 $\mathbb{C}$上。如果 f 与一个自同构双有理共轭，则结论由 [Can01], [BLS93], 和 [Xie14]得出。因此，只需考虑 f 是严格双有理的情形，即其双有理共轭类中不存在自同构。于是， [DF01] 表明 X 必为有理曲面。再次由 [DF01], 可知，在对 X 进行有限次爆破后， f 的一个共轭映射满足

$$f^j(\mathrm{Ind}(f^{-1})) \cap \mathrm{Ind}(f) = \emptyset, \quad \text{for every } j \geq 0. \tag{AS1}$$

此外，第一动力学次数 λ_1 是 f^*在 $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 上作用的单特征值，其特征空间由一个数值有效类 $\theta^+ \in \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$生成。令 $\theta^{-1} \in \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ 为 f^{-1}所对应的数值有效类。

根据 [BD05，第 4], 节，经过有限次吹下后，可得到一个满足 (AS1) 以及

$$(\theta^+ \cdot f(x)) > 0, \text{ for } x \in \mathrm{Ind}(f) \quad \text{and} \quad (\theta^+ \cdot f^{-1}(x)) > 0, \text{ for } x \in \mathrm{Ind}(f^{-1}) \tag{AS2}$$

注 5.14. 在这些假设下，Jonsson–Reschke 研究了基曲线的动力学；参见 [JR18，第 4]节。基曲线的集合为

$$\mathcal{C}^+ = \{\text{irreducible curve } C \text{ on } X, (C \cdot \theta^+) = 0\}.$$

令 复数域$^{\mathrm{per}} = \{C \in$ 复数域$^+, C$ 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都不是 f^n-例外的$\}$。他们证明，对任意 $C \in$ 复数域^{per}，均有 $C \cap \mathrm{Ind}(f^n) =$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立，并且对任意 $n \in \mathbb{Z}$， C 均不与任何 f^n-例外曲线相交。

通过收集 X 和 f的坐标与系数，我们可以假设这样的双有理映射 $f\colon X \dashrightarrow X$ 定义在一个关于 $\mathbb{Q}$有限生成的域 K 上。此外，通过取一个有限扩张，我们假设不定点轨迹 $\mathrm{Ind}(f)$ 和 $\mathrm{Ind}(f^{-1})$ 也定义在 K上。我们固定 K 的一个模型（$\mathscr{B}$， $\mathscr{H}$），如第 5.1 节所述，并且有赋值空间 $\Omega_K = \Omega_K^{\mathrm{NA}} \sqcup \Omega_K^\infty$ 以及 Ω_K上的一个测度 ν。

定理 5.15。 令 $f\colon X \dashrightarrow X$ 为上文所考虑的双有理映射。对于每个正向轨道定义良好的点 $y \in X(K)$ ，我们有

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^{-j} \log \operatorname{dist}_w(f^j(y), \mathrm{Ind}(f)) > -\infty \tag{5.1}$$

对于几乎所有的 ν 赋值 $w \in \Omega_K$。

特别地，存在一个嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{C}$，使得基变换映射 $f_{\mathbb{C}}$ 满足

$$\text{(BD)} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^{-j} \log \operatorname{dist}(f_{\mathbb{C}}^j(y), \operatorname{Ind}(f_{\mathbb{C}})) > -\infty, \quad \textit{for every } y \in \operatorname{Ind}(f_{\mathbb{C}}^{-1}).$$

证明。若 y 的轨道的扎里斯基闭包与 $\operatorname{Ind}(f)$ 不相交，则对于 K 到 $\mathbb{C}$ 的任意嵌入，(5.1) 都成立。因此，根据 [JR18], 的引理 4.9，我们可以假设该轨道的扎里斯基闭包是一个与 $\operatorname{Ind}(f)$ 相交的无限集，并且对于 $n \gg 0$，$f^n(y)$ 不属于 $\mathbf{C}^+$ 中的任何曲线，其中 $\mathbf{C}^+$ 是 X 上满足 $(C \cdot \theta^+) = 0$ 的不可约曲线 C 所成的集合。

由 [Kaw08], 可将 $\theta^+ = A + [Z]$写为 A 是丰沛的，且 Z 是一个有效除子，其所有分量均属于 $\mathcal{C}^+$。由于 θ^+ 是数值有效的，对于 θ^+上的任意强阿代尔度量 φ，命题 5.10给出一个常数 C_1 使得

$$\frac{1}{\lambda_1^n} h_{\theta^+,\varphi}(f^n(y)) - h_{\theta^+,\varphi}(y) \geq -h_{\theta^+,\varphi}(y) + C_1$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$。

接下来我们使用命题 4.10 中 θ^+ 的分解，该命题出自 [JR18]

$$\theta^+ = \sum_{i=1}^{p} r_i B_i + L + [D_{\mathrm{per}}],$$

使得

(i) 对于每个 i，$r_i > 0$；B_i和 f^*B_i是无基点的；并且对于每个 $x \in \operatorname{Ind}(f)$, $(B_i \cdot f(x)) > 0$；(ii) $L \in \operatorname{Pic}_{\mathbb{R}}(X)$ 是数值有效的；(iii) D_{per} 是一个有效的 $\mathbb{R}$-除子，其支集包含在曲线 $\mathcal{C}_{\mathrm{per}}$ 上。

经过 K 的有限扩张后，不妨设所有类都定义在 K 上。令 $B = \sum_{i=1}^{p} r_i B_i$。根据定理 5.12，我们在 B_i 和 f^*B_i 上得到强阿代尔度量，以及截面 $\sigma_{i,j}$ 和 $\sigma'_{i,j} = T_f(\sigma_{i,j})$，使得

$$h_{\overline{B_i},\sigma_{i,j},w}(f^{j+1}(y)) - h_{\overline{f^*B_i},\sigma'_{i,j},w}(f^j(y)) \leq \log \operatorname{dist}_w(f^j(y), \operatorname{Ind}(f)) + C_w.$$

注意到 C_w 被 ν-支配，这意味着 $\int_{w\in\Omega_K} |C_w| \, d\nu(w) < +\infty$。因此

$$\begin{aligned}
&\sum_i r_i \int_{w\in\Omega_K} \sum_{j=0}^{N} \lambda_1^{-j} \log \operatorname{dist}_w(f^j(y), \operatorname{Ind}(f)) d\nu(w) \\
\geq &\sum_i r_i \int_{w\in\Omega_K} \sum_{j=0}^{N} \lambda_1^{-j} \left(h_{\overline{B_i},\sigma_{i,j},w}(f^{j+1}(y)) - h_{\overline{f^*B_i},\sigma'_{i,j},w}(f^j(y)) \right) d\nu(w) - \int_{w\in\Omega_K} |C_w| \, d\nu(w) \\
= &\sum_i r_i \sum_{j=0}^{N} \lambda_1^{-j} \left(h_{\overline{B_i}}(f^{j+1}(y)) - h_{\overline{f^*B_i}}(f^j(y)) \right) - \int_{w\in\Omega_K} |C_w| \, d\nu(w).
\end{aligned}$$

为 L、f^*L、D_{per} 和 f^*D_{per} 配备阿代尔度量后，我们在 θ^+ 上得到阿代尔度量 φ_1，并在 $f^*\theta^+ = \lambda_1\theta^+$ 上得到阿代尔度量 φ_2。

首先，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N}\lambda_1^{-j}\left(h_{\theta^+,\varphi_1}(f^{j+1}(y))-h_{f^*\theta^+,\varphi_2}(f^j(y))\right)\\
=&\sum_{j=0}^{N}\lambda_1^{-j}\left(h_{\theta^+,\varphi_1}(f^{j+1}(y))-h_{\lambda_1\theta^+,\lambda_1\varphi_1}(f^{j+1}(y))\right)\\
&\qquad\qquad+\sum_{j=0}^{N}\lambda_1^{-j}\left(h_{f^*\theta^+,\lambda_1\varphi_1}(f^{j+1}(y))-h_{f^*\theta^+,\varphi_2}(f^j(y))\right)\\
=&-\operatorname{dist}(\lambda_1\varphi_1,\varphi_2)+\frac{1}{\lambda_1^{N+1}}h_{\theta^+,\varphi_1}(f^{N+1}(y))-h_{\theta^+,\varphi_1}(y)\\
\geq&-\operatorname{dist}(\lambda_1\varphi_1,\varphi_2)+C_1-h_{\theta^+,\varphi_1}(y)>-\infty.
\end{aligned}$$

第二 因此，根据命题 5.11，存在常数 C_2，C_3 与 j 无关，使得 t

$$\left(h_{\overline{L}}(f^{j+1}(y))-h_{\overline{f^*L}}(f^j(y))\right)\geq C_2.$$

引理 5.16。对于 $O(C)$ 和 $O(f^*C)$上的任意强阿代尔度量，存在常数 M 使得对于 $x\notin \operatorname{Ind}(f)$ 满足 $f(x)\notin C$,

$$\left|h_{\overline{C}}(f(x))-h_{\overline{f^*C}}(x)\right|\leq M.$$

因此存在常数 C_3

$$\left|h_{\overline{[D_{\mathrm{per}}]}}(f^{j+1}(y))-h_{\overline{f^*[D_{\mathrm{per}}]}}(f^j(y))\right|\leq C_3.$$

综上，我们得到以下一致估计：

$$\int_{w\in\Omega_K}\sum_{j=0}^{N}\lambda_1^{-j}\log\operatorname{dist}_w(f^j(y),\operatorname{Ind}(f))d\nu(w)\geq C_4.$$

其中

$$C_4=-\frac{1}{\sum r_i}\int_{w\in\Omega_K}|C_w|\,d\nu(w)-\operatorname{dist}(\lambda_1\varphi_1,\varphi_2)+C_1-h_{\theta^+,\varphi_1}(y)-C_2-C_3.$$

这反过来意味着

$$\int_{w\in\Omega_K}\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda_1^{-j}\log\operatorname{dist}_w(f^j(y),\operatorname{Ind}(f))d\nu(w)>-\infty.$$

由此可得，对于 ν-几乎处处的 $w\in\Omega_K^{\infty}$ 以及每个非阿基米德赋值$w\in\Omega_K^{\mathrm{NA}}$，我们有

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda_1^{-j}\log\operatorname{dist}_w(f^j(y),\operatorname{Ind}(f))>-\infty.$$

由于集合 $\operatorname{Ind}(f^{-1})$ 是有限的，条件 BD 对 ν-几乎处处的阿基米德赋值成立。因此，这样的嵌入存在。□

引理 5.16 的证明。我们取 $g \circ \pi^{-1}$ 的最小消解 f。根据 [JR18], , 拉回 $C' := f^*(C)$ 属于复数域 $\mathbf{C}^{\mathrm{per}}$，且 $C' \cap \mathrm{Ind}(f) = C \cap \mathrm{Ind}(f^{-1}) = \emptyset$。因此$g^*C = \pi^*C'$。对于 $x \notin \mathrm{Ind}(f)$, 存在唯一的原像 $y = \pi^{-1}(x)$。于是

$$h_{\overline{[C]}}(f(x)) = h_{\overline{[C]}}(g(y)) = h_{g^*\overline{[C]}}(y) = h_{\pi^*\overline{[C']}}(y) + O(1) = h_{\overline{[C']}}(x) + O(1),$$

由此完成证明。 □

定理 5.13 的证明结束。首先假设 f 满足 (AS1) 和 (AS2)。由定理 5.15，存在一个阿基米德赋值 $w \in \Omega_K^\infty$，使得对于每个 $y \in \mathrm{Ind}(f^{-1})$，条件 5.1 成立。因此，存在一个嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{C}$，使得经过基变换后， $f_{\mathbb{C}}$ 满足 BD 条件 [BD05]。由 [BD05]的主定理以及 [Duj06], 中的定理 2，存在一个 $f_{\mathbb{C}}$-不变测度 μ，定义在 X 上，并且不对任何真代数子集赋予质量。此外，我们有 $f_{\mathbb{C}}$的鞍周期点关于 μ等分布。令 U 为 X的任意扎里斯基开子集。由于μ 在 U上具有满测度，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} \#\{x \in U, x \text{ is a saddle periodic point under } f_{\mathbb{C}}^n\} = 1.$$

因此，对于 f 的任意共轭映射 $f\prime$，我们都考虑与上述相同的嵌入，于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} \#\{x \in U, x \text{ is a saddle periodic point under } f'_{\mathbb{C}}\} = 1$$

由于所有鞍周期点都是孤立的，我们得出

$$\mathrm{P}_n(f') \geq \lambda_1^n + o(\lambda_1^n).$$

□

组合 定理 4.1 和定理5.13，我们立即得到定理 B。

附录 A. 正规射影簇上定理 A的证明

下一个定理的思路由 Chat-GPT 提出。随后，作者撰写了证明的详细内容。

定理 A.1。 设 X 是代数闭域 K 上维数为 m 的正规射影簇，且 X 上有一个丰线丛 L 。存在常数 $C_{X,\,L} > 0$ 使得，对于 X 的每个主导有理自映射 f 以及每个$n \geq 1$,

$$\mathrm{N}_n(f) \leq C_{X,L} \max_{0\leq p\leq m} \deg_{L,p}(f^n).$$

证明。 固定 $n \geq 1$并记 $\Gamma = \Gamma(f^n)$ 和 $Z = \Delta \times_{X\times X} \Gamma$。对于 $m = 0$，计数和次数均等于一。若 $m > 0$ 和 $f^n =$ 为恒等映射，则 $Z = \Delta$ 没有孤立点。因此我们可以假设 $m \geq 1$ 和 $\Gamma \not\subseteq \Delta$。

步骤 1。设 $\pi\colon X\times X=\mathrm{Bl}_\Delta(X\times X)\to X\times X$ 具有例外除子 E，并且令 $\widetilde{\Gamma}$ 为 Γ的严格变换。令 p_1，p_2 为投影 $X\times X\to X$。选择$M\geq 1$，仅取决于（X，L），使得

$$L_1=M(p_1^*L+p_2^*L)\quad\text{and}\quad L_2=\pi^*L_1-E$$

在 $X\times X$ 和 $X\times X$上分别非常丰沛。

我们考虑概形

$$R=E\cap_{\widetilde{X\times X}}\widetilde{\Gamma}.$$

注意，$\widetilde{\Gamma}$ 与 E 的交是适当的，因此 $[\Gamma]\cdot c_1(E)=[R]$ 是有效的。利用$\pi^*L_1-L_2=E$，我们有

$$(\pi^*L_1)^m\cdot[\widetilde{\Gamma}]-{L_2}^m\cdot[\widetilde{\Gamma}]=\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\pi^*L_1)^{m-1-j}L_2^j\right)\cdot(\pi^*L_1-L_2)\cdot[\widetilde{\Gamma}].$$

π^*L_1 和 L_2 都是数值有效的。因此右侧非负。投影公式给出

$$L_1^m\cdot[\Gamma]=(\pi^*L_1)^m\cdot[\widetilde{\Gamma}]\geq{L_2}^m\cdot[\widetilde{\Gamma}].$$

因此我们得出

$$\mathrm{Vol}_{L_2}(\widetilde{\Gamma})\leq\mathrm{Vol}_{L_1}(\Gamma).$$

由于 L_2-E 仍然是数值有效的，我们有

$$\mathrm{Vol}_{L_2}(R)=L_2^{m-1}\cdot[R]=L_2^{m-1}\cdot E\cdot[\widetilde{\Gamma}]\leq L_2^{m-1}\cdot[\widetilde{\Gamma}]=\mathrm{Vol}_{L_1}(\Gamma).$$

步骤 2。严格变换 Γ 与 $\mathrm{Bl}_Z\Gamma$ 沿着子概形 Γ的爆炸 Z 通过爆炸闭包引理 [Sta26，标签 080E]同构。并且 R 是其例外除子。

对于 Z 的每个孤立点 $P=(x,\ x)$，置 $Z_x=\mathrm{Spec}(S/I)$。由于 Z_x 在 Z 中既开又闭，因此 $R_x=R\times_Z Z_x$ 在 R 中也既开又闭。特别地，$[R]-\sum_{P\in Z^{\mathrm{iso}}}[R_x]$ 是有效的。

注意到 R_x 是在 Γ 的 $P=(x,\ x)$ 处爆炸的例外除子。在 Z_x 上，线丛 L_1 是平凡的，因此我们有 $L_2|_{R_x}\simeq\mathcal{O}_{R_x}(1)$。置 $h=c_1(L_2)$。

沿着 P，在第 2.1.6 节中，的重数为

$$e_P(\Gamma)=c_1(\mathcal{O}_{R_x}(1))\cdot[R_x]=h^{m-1}\cdot[R_x].$$

将剩余的有效循环与 h^{m-1} 相交，得到

$$\sum_{P=(x,x)\in Z^{\mathrm{iso}}}e_x(f^n)\leq h^{m-1}\cdot[R]\leq\mathrm{Vol}_{L_1}(\Gamma).$$

步骤3. 我们断言，存在一个只依赖于 X 的常数 c_X，使得对于每个 $x\in\mathrm{IPer}_n(f)(K)$，

$$l_x(f^n)\leq c_X e_x(f^n).$$

事实上，对于这样的点 x，并令 $P=(x,x)$。由于 x 的长度为 n 的轨道有定义，第一投影将 $\mathcal{O}_{\Gamma,P}$ 与 $S=\mathcal{O}_{X,x}$ 等同起来。令 $I\subset S$ 为在此等同关系下 Z 的理想。点 P 在 Z 中是孤立的，因此 I 是 $\mathfrak{m}_x$-初等的。根据定义，

$$l_x(f^n)=\ell_S(S/I),\qquad e_x(f^n)=e(I,S).$$

在 X 的仿射坐标图 $U=\operatorname{Spec}A$ 上，将 [KMQ+19、注记 2.6] 应用于作为自身模的 A。有限型 K-整环 A 局部等维，且是 K 上多项式环的商环。其剩余域均为无限域，并满足一致 Artin–Rees 性质 [KMQ+19、附录 A]。因此存在常数 c_U，使得对于每个 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$ 和每个 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$-初等理想 J，都有 $\ell_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/J)\le c_U e(J,A_{\mathfrak{p}})$。在有限仿射覆盖上取 c_U 的最大值，并专门取 S 和 I，即可证明该断言。

结论。 步骤 2 和步骤3给出

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_n(f)=\sum_{x\in\mathrm{IPer}_n(f)}l_x(f^n)&\le c_X\sum_{x\in\mathrm{IPer}_n(f)}e_x(f^n)\le c_X\sum_{P=(x,x)\in Z^{\mathrm{iso}}}e_x(f^n)\\&\le c_X\,\mathrm{Vol}_{L_1}(\Gamma)\le c_X(2M)^m\max_{0\le p\le m}\deg_{L,p}(f^n).\end{aligned}$$

最后一个不等式来自第 4.1 节。这证明了该断言，其中 $C_{X,\,L}=c_X(2M)^m$。□

参考文献

[AM65] Michael Artin 和 Barry Mazur。关于周期点。《数学年刊》，81(1)：82–99，1965年。[BC16] Jérémy Blanc 和 Serge Cantat。射影曲面双有理变换的动力学次数。《美国数学会杂志》，29(2)：415–471，2016年。[BD99] Jean-Yves Briend 和 Julien Duval。$\mathbb{CP}^k$的一个自同态的李雅普诺夫指数与周期点的分布。《数学学报》，182(2)：143–157，1999年。[BD05] Eric Bedford 和 Jeffrey Diller。双有理曲面映射的能量与不变测度。《杜克数学杂志》，128(2)：331–368，2005年。[BLS93] Eric Bedford、Mikhail Lyubich 和 John Smillie。$\mathbb{C}^2$的多项式微分同胚的周期点分布。《数学新进展》，114(2)：277–288，1993年。[BMCLH08] Fabio Enrique Brochero Martínez、Felipe Cano 和 Lorena López-Hernanz。$\mathbb{C}^2$中微分同胚的抛物曲线。《数学出版物》，52(1)：189–194，2008年。[BV99] Marc P. Bellon 和 Claude-Michel Viallet。代数熵。《数学物理通讯》，204(2)：425–437，1999年。[Can01] Serge Cantat。K3曲面的自同构动力学。《数学学报》，187(1)：1–57，2001年。[Can10] Serge Cantat。全纯动力学中的不变超曲面。《数学研究快报》，17(5)：833–841，2010年。[CM20] Huayi Chen 和 Atsushi Moriwaki。阿代尔曲线上的 *Arakelov* 几何，数学讲义第2258卷。数学讲义。施普林格·自然，2020年。[Dan20] Nguyen-Bac Dang。正规射影簇上有理映射迭代的次数。《伦敦数学会会刊》，121(5)：1268–1310，2020年。[DDG10] Jeffrey Diller、Romain Dujardin 和 Vincent Guedj。具有较小拓扑次数的亚纯映射动力学 III：几何流与遍历理论。《高等师范学校科学年刊》，43(2)：235–278，2010年。

[Dem97] Jean-Pierre Demailly。复解析与微分几何。在线手稿，1997年。[DF01] Jeffrey Diller 和 Charles Favre。曲面双亚纯映射的动力学。《美国数学杂志》，123(6)：1135–1169，2001年。[DF21] Nguyen-Bac Dang 和 Charles Favre。动力学次数的谱解释及其应用。《数学年刊》，194(1)：299–359，2021年。[DG09] Jeffrey Diller 和 Vincent Guedj。动力学格林函数的正则性。《美国数学会汇刊》，361(9)：4783–4805，2009年。[DNT15] Tien-Cuong Dinh、Viêt-Anh Nguyên 和 Tuyen Trung Truong。具有主导拓扑次数的亚纯映射的等分布。《印第安纳大学数学杂志》，64(6)：1805–1828，2015年。[DNT17] Tien-Cuong Dinh、Viêt-Anh Nguyên 和 Tuyen Trung Truong。亚纯映射周期点数量的增长。《伦敦数学会通报》，49(6)：947–964，2017年。[DS05] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony。关于有理映射拓扑熵的一个上界。《数学年刊》，161(3)：1637–1644，2005年。[DS18] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony。正闭流的稠密性：非一般交的理论。《代数几何杂志》，27(3)：497–551，2018年。[Duj06] Romain Dujardin。层状流与双有理动力学。《杜克数学杂志》，131(2)：219–247，2006年。[EH16] David Eisenbud 和 Joe Harris。3264及其他：代数几何的第二课程。剑桥大学出版社，2016年。[Fak03] Najmuddin Fakhruddin。关于代数簇自映射的问题。《拉马努金数学学会杂志》，18(2)：109–122，2003年。[Fav98] Charles Favre。$\mathbb{P}^2$的双有理映射的周期点。傅里叶研究所年刊，48(4)：999–1023，1998年。[FL17] Mihai Fulger 和 Brian Lehmann。对偶循环类的正锥。《代数几何》，4(1)：1–28，2017年。[FTX26] Charles Favre、Tuyen Trung Truong 和 Junyi Xie。完备赋度域上有理映射的拓扑熵。高等师范学校科学年刊，59(1)：67–124，2026年。[Ful98] William Fulton。交叉理论，数学及其交界领域成果第2卷，第3辑。施普林格，第2版，1998年。[Ful17] Mihai Fulger。数值循环类的正锥。《罗马尼亚数学科学学会数学通报》新系列，60(4)：399–415，2017年。[Har13] Robin Hartshorne。代数几何，数学研究生教材第52卷。施普林格，2013年。[IU10] Katsunori Iwasaki 和 Takato Uehara。保面积双有理曲面的周期点。《数学杂志》，266(2)：289–318，2010年。[Jel13] Zbigniew Jelonek。任意特征下的贝尔蒂尼定理。《数学月刊》，171：351–355，2013年。[JR18] Mattias Jonsson 和 Paul Reschke。数域上定义的双有理曲面映射的复动力学。《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志），2018(744)：275–297，2018年。[Kaw08] Shu Kawaguchi。算术视角下具有正拓扑熵的射影曲面自同构。《美国数学杂志》，130(1)：159–186，2008年。[KMQ+19] Patricia Klein、Linquan Ma、Pham Hung Quy、Ilya Smirnov 和 Yongwei Yao。Lech不等式、Stückrad–Vogel猜想与Koszul同调的一致行为。《数学进展》，347：442–472，2019年。

[Kol05] János Kollár. 奇点消解——西雅图讲座。预印本，arXiv:math/0508332，2005年。[Laz17] Robert Kendall Lazarsfeld. 代数几何中的正性 I：经典情形：线丛与线性系，数学及其交界领域成果第48卷。第3辑。施普林格，2017年。[LZ25] 罗慕涵和周琦。Hénon型映射的鞍周期点等分布。arXiv预印本，arXiv:2502.20103，2025年。[LZ26a] 罗慕涵和周琦。紧Kähler流形上自同构的鞍周期点等分布。arXiv预印本，arXiv:2609.30204，2026年。[LZ26b] 罗慕涵和周琦。紧Kähler流形上亚纯映射的最大熵测度。预印本，arXiv:2610.28617v1，2026年。[Mil12] James Stuart Milne. étale上同调讲义。在线讲义，2012年。版本2.20，2012年5月3日。[Mor00] Atsushi Moriwaki. 有限生成域上的算术高度函数。《数学新进展》，140(1):101–142，2000年。[MS23] Linquan Ma和Ilya Smirnov。统一的Lech不等式。《美国数学会会刊》，151(06):2387–2397，2023年。[SH06] Irena Swanson和Craig Huneke。理想、环和模的整闭包，伦敦数学会讲义系列第336卷。剑桥大学出版社，2006年。[Sil10] Joseph Hillel Silverman. 动力系统算术，数学研究生教材第241卷。施普林格科学与商业媒体，2010年。[SS74] Michael Shub和Dennis Sullivan。关于可微映射的Lefschetz不动点公式的一点说明。《拓扑学》，13(2):189–191，1974年。[Sta26] Stacks项目作者。Stacks项目。 https://stacks.math.columbia.edu，2026年。[Tru20] Tuyen Trung Truong. 任意特征域上对应的相对动力次数。《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal），2020(758):139–182，2020年。[Vak22] Ravi Vakil.《渐涨之海》：代数几何基础。在线笔记，2022年。[Vu19] Duc-Viet Vu. 流的密度与复动力学。arXiv预印本，arXiv:1902.00666，2019年。[Vu22] Duc-Viet Vu. 奇异周期点。《当代数学通讯》，24(5):2150029，2022年。[Xie14] Junyi Xie. 曲面有理映射的代数动力学。博士论文，巴黎综合理工学院，2014年。[Xie15] Junyi Xie. 射影曲面上双有理变换的周期点。《杜克数学杂志》，164(5):903–932，2015年。[Zha95] 张寿武。小点与阿代尔度量。《代数几何杂志》，4(2):281–300，1995年。

Laurent Schwartz数学中心，巴黎综合理工学院，法国邮编91128帕莱索 Cedex电子邮箱地址： xiao.li.cmls@polytechnique.edu