arXiv:2611.32879v1 [math.MG] 24 Nov 2026

Lp-和的凸化效应

MATTHIEU FRADELIZI、AUTTAWICH MANUI、MARK MEYER、MAUD SZUSTERMAN 和 ARTEM ZVAVITCH

Abstract. Shapley、Folkman 和 Starr 对一项经典结果给出了定量描述：任意紧集的闵可夫斯基平均在 Hausdorff度量下渐近趋近于其凸包。本文研究紧集的 Firey L_p-和所呈现的类似凸化现象。首先，我们建立了 L_p-和的新结构性质。值得注意的是，我们证明，凸包包含原点的紧集的迭代 L_p-和最终会成为星形集。随后，我们研究三种经典非凸性度量下的 L_p- 凸化：Hausdorff 度量、体积亏损和有效标准差。对于这些度量中的每一种，我们证明，紧集的 k 重 L_p-和平均 A 在 $1 < p < \infty$ 时收敛到 conv(0, A)，而在 $p = \infty$ 时收敛到 conv(A)。在每种情形下，我们都证明收敛到凸包的过程最终是单调的。对于 Hausdorff度量和有效标准差，我们证明了两个紧集的 L_p-和的尖锐上界。

1. Introduction

非空集合 A, $B \subset \mathbb{R}^n$ 的闵可夫斯基和定义为

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

闵可夫斯基求和具有众所周知的凸化效应。尽管集合 $A \subset \mathbb{R}^n$可能不是凸的，但人们已经观察到，其平均值 $k^{-1}\sum_{i=1}^{k} A$ 会收敛到 A 的凸包，当 k 趋于无穷时。这一现象由 Shapley、Folkman 和 Starr 通过 Hausdorff度量进行了量化 [26], ，Emerson 和 Greenleaf 也对此进行了研究 [11]。此后，越来越多的研究从不同角度考察凸化效应。有关这一主题的更多信息，请参阅综述 [16]。

本文旨在研究 Firey L_p-和 [13],的凸化效应，其定义如下。给定一个凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$（即具有非空内部的凸紧集），函数

$$h_K(u) := \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle, \qquad u \in S^{n-1},$$

称为 K 的支撑函数。如果 K, $L \subset \mathbb{R}^n$ 是包含原点的凸体，且如果 $1 \le p < \infty$，那么 K 和 L 的 Firey L_p-和是集合 $K \oplus_p L$，其支撑函数满足

$$h_{K \oplus_p L}(u) = (h_K(u)^p + h_L(u)^p)^{1/p}. \tag{1}$$

令 $p \to \infty$ 趋于极限，便得到 L_∞-和的自然定义

$$h_{K \oplus_\infty L}(u) := \max\{h_K(u), h_L(u)\},$$

因此 $K \oplus_\infty L =$ 凸包(K, L)。在论文 [18], 中，Lutwak、Yang 和 Zhang 将 Firey 加法的定义扩展到非凸情形，并证明如果 A, $B \subset \mathbb{R}^n$ 是

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：52A20，52A21；次要分类:

紧的，但不一定包含原点，那么定义

$$A \oplus_p B := \{t^{1/q}a + (1-t)^{1/q}b : 0 \le t \le 1, a \in A, b \in B\}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2}$$

是定义（1）的自然推广。在特殊情形 $p = 1$下，定义（2）就是通常的闵可夫斯基和。注意，一般来说， $A \oplus_\infty B \subsetneq$ 凸包(A, B)。

受 [16], 启发，我们将证明 Firey L_p-和同时具有星形化和凸化效应。下面从三种测度的角度阐述我们的贡献，以展示这些效应：体积、到凸包的豪斯多夫距离以及有效标准差。

1.1. **L_p-和的星形化效应**。本文将原点处为星形的集合称为星形集。我们用 $A^{\oplus_p k}$: $= A \oplus_p \cdots \oplus_p A$ 表示 A 自身的 k 重 L_p-和。我们证明，若 $0 \in$ 凸包(A)，则对 $k \ge n+1$, $A^{\oplus_p k}$ 是星形的。更一般地，利用 B´ar´any [5], 的彩色 Carath´eodory 定理，假设至少有 $n+1$ 种颜色，我们得到 L_p-和的彩色星形性。

定理 1。 设 $k \ge n+1$。设 A_1，...， $A_k \subset \mathbb{R}^n$ 为满足 $0 \in \cap_{i=1}^k$凸包(A_i)的闭集。那么对于任意 $p \in (1, \infty]$, 和 $A_1 \oplus_p \cdots \oplus_p A_k$ 都是星形的。

特别地，对于任意直线 $\mathbb{R}u$，星形性意味着 $A^{\oplus_p k} \cap \mathbb{R}u$ 是线段。即使去掉 $0 \in$conv(A) 的假设，这一结论仍然成立。

定理 2。 设 $p \in (1, \infty)$，且 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集。设 $k \ge n+1$。那么对于任意单位向量 $u \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}u \cap A^{\oplus_p k}$ 是线段。

注意，对于 $p = \infty$，这一结论同样成立，因为对于 $k \ge n+1$, $A^{\oplus_\infty k} =$ conv(A)。

1.2. **Hausdorff度量**。 对于紧的 $A \subset \mathbb{R}^n$，定义

$$d(A) := d_H(A, \mathrm{conv}(A))$$

为 A 与其凸包之间关于 Hausdorff度量 d_H 的距离。Shapley–Folkman–Starr定理 [26, 附录] 表明

$$\lim_{k\to\infty} d\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k A\right) = 0,$$

其收敛速率为 $1/k$；换言之，紧集 A 的平均序列 $k^{-1}\sum_{i=1}^k A$ 以相同的收敛速率 $1/k$ 在 Hausdorff度量下收敛到 conv(A)。

在 Firey L_p-求和且满足 $p > 1$ 的情形下，鉴于以下定理，自然会考虑 A 与 conv$(0, A)$ 之间的距离，我们将其记为

$$d_0(A) := d_H(A, \mathrm{conv}(0, A)).$$

定理 3。 固定 $1 < p < \infty$。若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是非空紧集，则

$$\lim_{k\to\infty} d_0\left(\frac{1}{k^{1/p}}A^{\oplus_p k}\right) = 0,$$

其收敛速率为 $k^{-1/p}$。该收敛最终是单调的。

请注意，在上述定理中，适当的归一化应为 $k^{-1/p}$，而不是 k^{-1}。事实上，通过注意到以下事实，可以进一步说明选择这种归一化是合理的：如果 A 是一个不一定包含原点的凸集，那么不难看出，当 $1 < p < \infty$时，$k^{-1/p}A^{\oplus_p k} = [k^{-1/p}, 1]A \to [0,1]A =$conv$(0, A)$在豪斯多夫距离下趋于 $k \to +\infty$。在 $p = \infty$的情况下，Carath´eodory 定理意味着 $A^{\oplus_\infty k} =$ conv(A)对于 $k \ge n+1$成立，因此定理3的收敛部分成立，但其中的 d 应替换为 d_0。

定理3的证明具有渐近性，即和集 $A^{\oplus_p k}$ 在 k 充分大于 n时具有便利的性质。因此，我们对定理3的证明尚未回答这样一个问题：如果取两个集合的和，可能得到怎样的紧确界。在论文 [10], 中，Dyn 和 Farkhi 提出了这类问题，他们猜想，如果 A和 $B \subset \mathbb{R}^n$是非空紧集，那么

$$d(A+B)^2 \leq d(A)^2 + d(B)^2.$$

Dyn–Farkhi 猜想在 $n = 1$ 的情形下是平凡的，并由 Fradelizi、Madiman、Marsiglietti 和 Zvavitch [16, 定理 7.3] 在 $n \geq 3$ 时予以否证。最近，van Hintum 在 [27] 中表明，即使在对称情形 $A = B$ 下也存在反例。第三作者证实，当 $n = 2$ 时该猜想 [20] 成立，随后又在 ℓ_p-范数 [24] 以及任意范数 [23]的情形下对其进行了研究。

对于 $n = 2$ 的情形，我们将证明 L_p-和紧集的豪斯多夫距离满足以下界。

定理 4。 固定 $1 < p \leq \infty$。如果 $A\,B \subset \mathbb{R}^2$ 是非空紧集，则

$$d_0(A \oplus_p B) \leq \max\{d_0(A), d_0(B)\}.$$

该界是尖锐的，即存在非凸的 A 和 B 使等号成立。对于 $p = \infty$，我们有以下界

$$d(A \oplus_\infty B) \leq \max\{d(A), d(B)\}.$$

存在非凸 A和 B ，使得等式成立。

在 $n \geq 3$ 的情况下，我们有以下界，它推广了 [16, 定理 71]。

定理 5。 固定 $1 < p < \infty$。如果 A， $B \subset \mathbb{R}^n$ 是非空紧集，则

$$d_0(A \oplus_p B)^p \leq d_0(A)^p + d_0(B)^p.$$

在 $p = \infty$ 的情况下，我们有

$$d_0(A \oplus_\infty B) \leq \max\{d_0(A), d_0(B)\}.$$

此外，在上述定理中，幂 p 是最优的（见命题 27）。

1.3. **有效标准差**。 Cassels 在 [9], 中定义了另一种值得关注的度量，即有效标准差，它给出了非凸性的概率度量。对于紧 $A \subset \mathbb{R}^n$，有效标准差定义为

$$v^2(A) = \sup_{x \in \mathrm{conv}(A)} \inf\{V(X) : \mathrm{supp}(X) \subset A, \mathbb{E}[X] = x\},$$

其中， $V(X)$ 是随机变量 X 的方差。等价地，如果我们设

$$v^2(x, A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^m p_i \|x - a_i\|_2^2 : x = \sum_{i=1}^m p_i a_i, p_i > 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1, a_i \in A, m \in \mathbb{N}\right\},$$

那么我们得到等价的定义

$$v(A) = \sup_{x \in \mathrm{conv}(A)} v(x, A).$$

Cassels 证明了，如果 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 是非空紧集，那么

$$v(A+B)^2 \leq v(A)^2 + v(B)^2. \tag{3}$$

由归纳法可知，(3) 蕴含平均序列 $k^{-1}\sum_{i=1}^k A$ 收敛到凸包(A)，其收敛意义为测度 v。我们将证明以下 L_p-和类比式 (3)。

定理 6. 设 $1 < p \leq \infty$，且 n 为正整数。设 A、$B \subset \mathbb{R}^n$ 为非空紧集，满足 $0 \in$ 凸包$(A) \cap$ 凸包(B)。对于 $n \geq 3$，有

$$v(A \oplus_p B) \leq \begin{cases} (v(A)^{2p/(2-p)} + v(B)^{2p/(2-p)})^{(2-p)/2p}, & \text{if } 1 < p < 2, \\ \max\{v(A), v(B)\}, & \text{if } 2 \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

存在非凸的 A 和 B，使得这些界是紧确界。
对于 $n = 2$，对每个 $p > 1$都有紧确界 v（$A \oplus_p B$）$\leq$最大值$\{v$（A） v（B）$\}$。

由定理 6可知，如果 A 是一个包含 0 的非空紧集，那么 L_p-和平均$k^{-1/p} A^{\oplus_p k}$ 收敛到 conv(A)，且按测度 v收敛。此外，我们将在定理 29 中证明，该收敛最终是单调的。

1.4. **体积。** 令 $|A|$ 表示集合 $A \subset \mathbb{R}^n$的勒贝格测度。体积亏损Δ（A）：$= |\text{conv}(A) \backslash A|$ 是非凸性的自然度量。根据 Emerson 和 Greenleaf [11], 以及 Fradelizi、Madiman、Marsiglietti 和 Zvavitch [16, 的定理 3，7], 如果 A 是具有非空内部的紧集，那么平均值 $k^{-1} \sum_{i=1}^{k} A$ 关于体积亏损收敛到 A的凸包。我们将证明以下关于 L_p-和的类似结果。

定理 7. 设 $1 < p < \infty$。若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，则

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{1}{k^{1/p}} A^{\oplus_p k} \right| = |\text{conv}(0, A)|.$$

自然要问这种收敛是否单调。对于闵可夫斯基和，在论文 [15, 16], 中，Fradelizi、Madiman、Marsiglietti 与 Zvavitch 确定：当 $n = 1$时收敛是单调的，而当 $n \geq 12$时则不单调。后来 Fradelizi、L´angi 与 Zvavitch [14] 证明，当 $n = 2$，3 时，星形集的单调性成立，并且当 $n \geq 4$时，星形集具有最终单调性。对于一般紧集，在情形 $2 \leq n \leq 11$ 下，单调性问题仍然未解决。对于 L_p-和，我们对任意 $n \geq 2 \left\lceil \frac{p}{\ln 2 \ln(9/8)} \right\rceil$ 给出体积单调性的否定回答。对于$1 < p < \infty$，我们证明：对每个非空紧集，归一化体积最终是非递减的。

定理 8。 设 $n \geq 2$、$1 < p < \infty$，且 A 是一个紧集。那么，对于每个$k \geq$最大值$\{n,(n-1)(n-2)\}$，

$$\left| \frac{A^{\oplus_p (k+1)}}{(k+1)^{1/p}} \right| \geq \left| \frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \right|. \tag{4}$$

当且仅当 A 位于某个真线性子空间中，或 $A^{\oplus_p k} = k^{1/p}$ 凸包(0，A) 时，等号成立。

1.5. **相关研究。** Wegmann 的研究（综述 [16] 和论文 [28], 对其进行了介绍）确立了若干非凸性度量之间的关系。我们还要指出 Schneider 的论文 [25], ，该文通过一个集合与其凸包的闵可夫斯基和定义了另一种非凸性度量。另见 [22, 3]。其他度量还包括 Beer 指数 [7], 、凸性比 [17, 4], 和可达集 [12]。

凸化现象也在其他情境下得到了研究。例如， [2, 1]关注的是巴拿赫空间和无限维空间的情境。

致谢。 作者感谢古斯塔夫·埃菲尔大学的LAMA以及Jussieu数学研究所的泛函分析团队给予的热情接待。

资助。 M. MEYER获美国国家科学基金会通过MSPRF项目提供的资助（奖项编号：2502794）。A. MANUI和A. ZVAVITCH部分获美国国家科学基金会DMS-2247771号拨款以及美国-以色列双边科学基金会（BSF）2018115号拨款的资助。A. MANUI获法国驻美国大使馆科学技术办公室提供的夏多布里昂奖学金资助。

人工智能披露声明。 作者使用了大语言模型作为研究辅助工具，用于提出辅助引理、检查印刷错误并改进本文的表述。具体而言，大语言模型对以下内容提供了重要帮助：缩短或改进我们对定理2、定理7和引理 15的证明，完善定理 22的证明，为 $1 < p < 2$在定理 6 中的等号情形提供示例，以及提供注记 9中的示例。此外，它还提出了引理 25。

2. Preliminaries

记 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$. 的标准基。回顾 Lutwak、Yang 和 Zhang [18]给出的 L_p-和紧集的定义：对于 $1 < p \le \infty$ 以及任意紧集 K， $L \subset \mathbb{R}^n$定义

$$K \oplus_p L = \left\{ (1-t)^{1/q} x + t^{1/q} y : x \in K, y \in L, \text{ and } 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\}, \tag{5}$$

其中， q 表示 p 的 H¨older 共轭（即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$）。对于 $p = 1$，我们有 $K \oplus_1 L = K + L$。注意，所考虑的集合可能不包含原点。因此，在这种情况下，基于包含关系的单调性可能会失效：对于 $p_1 < p_2$， $K \oplus_{p_1} L$ 不一定包含于 $K \oplus_{p_2} L$中，如下图所示。

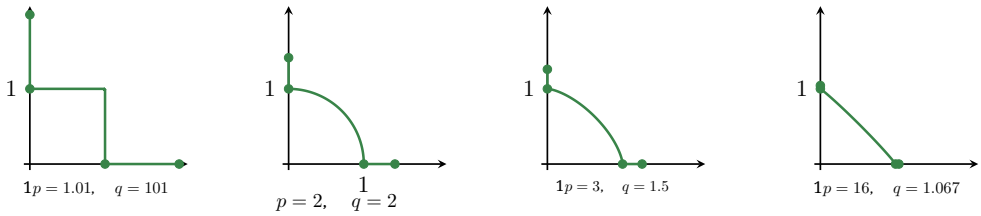


Figure 1. $K \oplus_p L$ 对于 $K = L = \{e_1, e_2\}$ 以及 p 的不同取值。

如上所示，紧集的 L_p-和不一定是凸的。但请注意，对于 $p > 1$，我们总有 $K \cup L \subset K \oplus_p L$。此外，对于 $1 < p \le \infty$，任意两个非空集合 $K, L \subset \mathbb{R}^n$ 的 L_p-和都是道路连通的。事实上，对于每个 $a \in K$ 和 $b \in L$，连续曲线

$$\gamma_{a,b}(t) = (1-t)^{1/q} a + t^{1/q} b, \qquad t \in [0,1],$$

在 $K \oplus_p L$ 内将 a 连接到 b。因此， $K \oplus_p L$ 中任意两点都可以通过至多连接三条这样的路径而连通。我们注意到，根据定义， L_p-和满足结合律和交换律。为方便起见，我们记作

$$\underbrace{A_1 \oplus_p \cdots \oplus_p A_1}_{m_1 \text{ copies}} \oplus_p \ldots \oplus_p \underbrace{A_k \oplus_p \cdots \oplus_p A_k}_{m_k \text{ copies}} = \bigoplus_{j \in [k]}^{(p)} A_j^{\oplus_p m_j}.$$

Le引理 9。 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空紧集，且 $m =$ 张成空间的维数(A)。假设 th at

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_j, \qquad a_j \in A, \quad \lambda_j \ge 0.$$

则存在大小为 $s \le m$ 的 $\{i_1, ..., i_s\} \subset [r]$，使得 a_{i_1}、...、a_{i_s} 线性无关，并且对于某个 $c_j \ge 0$ 有 $x = \sum_{j=1}^{s} c_j a_{i_j}$，其中 $||c||_1 \le ||\lambda||_1$。

证明。不妨假设 $x \ne 0$, $\lambda_j > 0$ for $1 \le j \le r$，且 a_j 线性相关。因此存在实数 $\mu_1, \dots, \mu_r$，不全为零，使得 $\sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j = 0$,并且 $\sum_{j=1}^{r} \mu_j \ge 0$. 特别地，至少有一个 μ_j 为正。令 $I = \{t \in \mathbb{R} : \lambda + t\mu \in \mathbb{R}^r_+\}$。那么，对于某个实数 $t_0 > 0$，有 $I = [-t_0, t_1]$，且 $t_1 \in$ 属于 $(0, +\infty]$。对于 $1 \le j \le r$，令$c_j = \lambda_j - t_0\mu_j$。那么，对于每个 j，都有 $c_j \ge 0$，并且至少有一个 c_j 为零。此外

$$\sum_{j=1}^{r} c_j a_j = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_j - t_0 \sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j = x, \quad \sum_{j=1}^{r} c_j = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j - t_0 \sum_{j=1}^{r} \mu_j \le \sum_{j=1}^{r} \lambda_j.$$

因此 $|\mathrm{supp}(c)| < |\mathrm{supp}(\lambda)|$ 以及 $||c||_1 \le ||\lambda||_1$。我们重复这一论证，直到剩余的$a_i$线性无关为止。□

注 1：在上述证明中，如果 $0 \notin \mathrm{conv}(A)$，那么 $t_1 < +\infty$。因此在这种情况下，我们可以在每一步选择t_1 而不是 t_0，这样最终得到 $x = \sum_{j \in J} c_j a_j$的一个表示，其中 $J \subset [r]$ 和 （a_j, $j \in J$）线性无关，并且满足 $||c||_1 \ge ||\lambda||_1$。下面的引理将这一观察推广了。

引理 10。设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空紧集，且 $m = \dim \mathrm{span}(A)$。假设

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_j, \qquad a_j \in A, \quad \lambda_j \ge 0.$$

如果 $0 \notin \mathrm{conv}(A)$，那么对于任意 $q \in [1, \infty]$，存在大小为 $s \le m$的 $\{i_1, ..., i_s\} \subset [r]$，使得 a_{i_1}、...、a_{i_s} 线性无关，并且对于某个 $c_j \ge 0$有 $x = \sum_{j=1}^{s} c_j a_{i_j}$，其中$||c||_q \ge ||\lambda||_q$。

证明。我们不妨假设，对于 $1 \le j \le r$, $\lambda_j > 0$，并且 a_j 线性相关。我们可以写成 $\sum_{i=1}^{r} \mu_i a_i = 0$。由于 $0 \notin$属于凸包 $\mathrm{conv}(A)$, $\mu_1, \dots, \mu_r$既有正项也有负项。因此，存在 t_+, $t_- > 0$，使得 $I := \{t \in \mathbb{R} : \lambda + t\mu \in \mathbb{R}^r_+\} = [-t_-, t_+]$。记 $c_j^{\pm} := \lambda_j \pm t_{\pm}\mu_j$。由此得到两个不同的表示 $x = \sum_{j=1}^{r} c_j^{\delta} a_j$，其中 $\delta \in \{\pm\}$，且满足 $c_j^{\delta} \ge 0$ 并且满足 $|\mathrm{supp}(c^{\pm})| \le r - 1$。此外，由于 $0 \in$ 属于 I 的内部，且范数具有凸性，我们可以选取 $c \in \{c^+, c^-\}$ 使得 $||c||_q \ge ||\lambda||_q$。我们可以逐步重复这一消去过程，直到剩余的 a_i 线性无关。□

我们证明 Shapley–Folkman 引理的 L_p-和版本。

引理 11 (关于 $\oplus_p$ 的 Shapley–Folkman 引理)。设 $1 \le p \le \infty$, $k \ge n + 1$，并设 A_1、.....、$A_k \subset \mathbb{R}^n$ 为不一定包含原点的非空集合。如果 $x \in \bigoplus_{i \in [k]}^{(p)}$凸包$(A_i)$，则存在 $I \subset [k]$，其基数至多为 n，使得

$$x \in \left(\bigoplus_{i \in I}^{(p)} \mathrm{conv}(A_i) \right) \oplus_p \left(\bigoplus_{i \in I^c}^{(p)} A_i \right).$$

证明。情形 $p = 1$ 是经典 Shapley–Folkman 引理。因此，我们可以假设$1 < p \le \infty$。点 $x \in \bigoplus_{i \in [k]}^{(p)}\mathrm{conv}(A_i)$可以写成

$$x = \sum_{i=1}^{k} t_i^{1/q} a_i, \qquad a_i \in \mathrm{conv}(A_i), \quad t_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{k} t_i = 1.$$

于是， $x \in \bigoplus_{i\in[k]}^{(1)} \mathrm{conv}(t_i^{1/q} A_i)$。根据经典 Shapley–Folkman 引理，存在 $I \subset [k]$，满足 $|I| \le n$，使得

$$x \in \left(\bigoplus_{i\in I}^{(1)} \mathrm{conv}(t_i^{1/q} A_i) \right) + \left(\bigoplus_{i\in I^c}^{(1)} t_i^{1/q} A_i \right) \subset \left(\bigoplus_{i\in I}^{(p)} \mathrm{conv}(A_i) \right) \oplus_p \left(\bigoplus_{i\in I^c}^{(p)} A_i \right),$$

其中，最后一个包含关系由 L_p和的定义可知。 □

3. Geometry of L_p-sums

3.1. **和的凸包的性质**。若 A, $B \subset \mathbb{R}^n$ 是非空集合，则恒等式 $\mathrm{conv}(A+B) = \mathrm{conv}(A) + \mathrm{conv}(B)$ 对于比较和集及其凸包很有用，正如论文 [16]中所述。下面的结果给出了这一恒等式的 L_p和类比。

Lem引理 12。设 $n \ge 1$ 为整数。设 A、B 为 $\mathbb{R}^n$中的紧集。那么，如果 $1 < p < \infty$ ：

$$\mathrm{conv}(0, A \oplus_p B) = \mathrm{conv}(0, A) \oplus_p \mathrm{conv}(0, B).$$

并且对于 $p = \infty$:

$$\mathrm{conv}(A \oplus_\infty B) = \mathrm{conv}(A, B) = \mathrm{conv}(A) \oplus_\infty \mathrm{conv}(B). \tag{6}$$

证明。由于两个包含 0 的凸集的 L_p-和是凸的，因此包含关系 $\subset$显然成立，下面证明另一个包含关系。记 $K = \mathrm{conv}(0, A)$ 和 $L = \mathrm{conv}(0, B)$。设 $z \in K \oplus_p L$。不妨设 $z \ne 0$。我们可以写成 $z = \alpha x + \beta y$，其中 $x \in K$，$y \in L$，α，$\beta \ge 0$，且$\alpha^q + \beta^q = 1$. 存在 s，$t \in [0,1]$ 以及凸组合

$$x = s \sum_{i=1}^{m_A} \lambda_i a_i, \qquad y = t \sum_{j=1}^{m_B} \mu_j b_j,$$

其中 $a_i \in A$、$b_j \in B$ 和 λ_i，$\mu_j \ge 0$，且 $\sum_i \lambda_i = \sum_j \mu_j = 1$。令

$$r = \left((\alpha s)^q + (\beta t)^q \right)^{1/q} \le 1 \quad \widehat{\alpha} = \frac{\alpha s}{r}, \quad \widehat{\beta} = \frac{\beta t}{r}$$

由于 $z \ne 0$ 蕴含 $r > 0$，它们有良好定义。于是 $\widehat{\alpha}^q + \beta^q = 1$，并且

$$z = r \left(\widehat{\alpha} \sum_i \lambda_i a_i + \widehat{\beta} \sum_j \mu_j b_j \right) = r \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \left(\widehat{\alpha} a_i + \widehat{\beta} b_j \right).$$

由于每个 $\widehat{\alpha} a_i + \beta b_j$ 都属于 $A \oplus_p B$，且 $\lambda_i \mu_j \ge 0$，$\sum_{i,\ j} \lambda_i \mu_j = 1$，$r \in [0,1]$，我们可推得 $z \in \mathrm{conv}(0,\ A \oplus_p B)$。这证明了反向包含关系。

现在证明等式（6）。显然，$A \cup B \subset A \oplus_\infty B \subset \mathrm{conv}(A,\ B)$。取凸包可得 $\mathrm{conv}(A,\ B) = \mathrm{conv}(A \oplus_\infty B)$。包含关系 $\mathrm{conv}(A) \oplus_\infty \mathrm{conv}(B) \subset \mathrm{conv}(A,\ B)$ 显然成立，因此我们只需证明另一个包含关系。设 $x \in \mathrm{conv}(A,\ B)$。我们可以将$x$写成有限个凸组合:

$$x = \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j, \qquad \alpha_i, \beta_j \ge 0, \qquad \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1,$$

其中 $a_i \in A$和 $b_j \in B$。设 $t = \sum \alpha_i$，因此 $1 - t = \sum \beta_i$。若 $t = 0$，则 $x \in$凸包(B)；若 $t = 1$，则 $x \in$ 凸包 (A)。若 $0 < t < 1$，则

$$x = t \left(\sum_i \frac{\alpha_i}{t} a_i \right) + (1-t) \left(\sum_j \frac{\beta_j}{1-t} b_j \right) =: t a' + (1-t) b' \in \mathrm{conv}(A) \oplus_\infty \mathrm{conv}(B)$$

这证明了另一个包含关系。 □

注意，对于 $p=1$，上述等式并不成立：取 $A=\{e_1\}$ 和 $B=\{e_2\}$.

3.2. **紧集**。 一个可以研究的非凸紧集的简单例子是集合 $A=\{e_1,\dots,e_n\}$。 A 与自身的迭代 L_p-和可以精确计算。

引理 13。 固定 $1<p<\infty$。对于每个整数 $k\geq 1$，有

$$\{e_1,\dots,e_n\}^{\oplus_p k}=\bigcup_{\substack{m_1,\dots,m_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ \sum_{i=1}^n m_i=k}}\left(\operatorname{diag}(m_1^{1/p},\dots,m_n^{1/p})(B_q^n\cap\mathbb{R}^n_+)\right)\setminus\left(\operatorname{int}(B_q^n)\cap\mathbb{R}^n_+\right).$$

证明。 利用（5），我们有

$$\{e_1,\dots,e_n\}^{\oplus_p k}=\bigcup_{\substack{(m_1,\dots,m_n)\\ \sum_{i=1}^n m_i=k}}\bigoplus_{i\in[n]}^{(p)}\{e_i\}^{\oplus_p m_i}.$$

因此，只需证明：对于任意满足 $\sum_{i=1}^n m_i=k$ 的非负整数 $m_1,\dots,m_n$，我们有

$$\bigoplus_{i\in[n]}^{(p)}\{e_i\}^{\oplus_p m_i}=\left(\operatorname{diag}(m_1^{1/p},\dots,m_n^{1/p})(B_q^n\cap\mathbb{R}^n_+)\right)\setminus\left(\operatorname{int}(B_q^n)\cap\mathbb{R}^n_+\right).$$

如果某些 m_i为零，则在相应的低维子空间中应用相同的论证。然后，通过在与这些指标对应的坐标处插入零，将结果嵌回原空间。

假设对于所有 $i.$， $m_i\geq 1$ 。首先，对于每个 i，我们有

$$E_i:=\{e_i\}^{\oplus_p m_i}=\left\{\sum_{j=1}^{m_i}t_j^{1/q}e_i:0\leqslant t_j\leqslant 1\text{ and }\sum_{j=1}^{m_i}t_j=1\right\}=[e_i,m_i^{1/p}e_i],$$

根据 H¨尔德不等式以及 L_p-和的路径连通性。令

$$E:=\bigoplus_{j\in[n]}^{(p)}E_j=\left\{\sum_{i=1}^n t_i^{1/q}\lambda_i e_i:1\leq\lambda_i\leq m_i^{1/p},0\leqslant t_i\leqslant 1\text{ and }\sum_{i=1}^n t_i=1\right\}.$$

我们将证明 $E=\left(\operatorname{diag}\left(m_1^{1/p},\dots,m_n^{1/p}\right)(B_q^n\cap\mathbb{R}^n_+)\right)\setminus\left(\operatorname{int}(B_q^n)\cap\mathbb{R}^n_+\right)$。。设 $x=\sum_{i=1}^n t_i^{1/q}\lambda_i e_i$ 是 E 中的一点，其中 $t_i\in[0,1]$，且 $\sum_{i=1}^n t_i=1$，以及 $\lambda_i\in[1,m_i^{1/p}]$。于是，

$$\left\|\sum_{i=1}^n\frac{t_i^{1/q}\lambda_i}{m_i^{1/p}}e_i\right\|_q^q=\sum_{i=1}^n t_i\left(\frac{\lambda_i}{m_i^{1/p}}\right)^q\leq\sum_{i=1}^n t_i=1.$$

利用 E 中所有点均为正正交象限中的点之和这一事实，我们有 $x\in\operatorname{diag}\left(m_1^{1/p},\dots,m_n^{1/p}\right)(B_q^n\cap\mathbb{R}^n_+)$。由于

$$\left\|\sum_{i=1}^n t_i^{1/q}\lambda_i e_i\right\|_q^q=\sum_{i=1}^n t_i\lambda_i^q\geq\sum_{i=1}^n t_i=1,$$

我们得到 $E\subset\left(\operatorname{diag}\left(m_1^{1/p},\dots,m_n^{1/p}\right)(B_q^n\cap\mathbb{R}^n_+)\right)\setminus\left(\operatorname{int}(B_q^n)\cap\mathbb{R}^n_+\right)$. 反之，令

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in\left(\operatorname{diag}\left(m_1^{1/p},\dots,m_n^{1/p}\right)(B_q^n\cap\mathbb{R}^n_+)\right)\setminus\left(\operatorname{int}(B_q^n)\cap\mathbb{R}^n_+\right).$$

我们考虑由 f 在 $[0,1]$ 上定义的函数

$$f(s)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{m_i^{s/p}}\right)^q.$$

由于 f在 $f(0)=\sum_{i=1}^n x_i^q\geq 1$和 $f(1)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i}{m_i^{1/p}}\right)^q\leq 1$处连续，根据介值定理，存在 $s_0\in[0,1]$使得 $f(s_0)=1$。令 $t_i=\left(\frac{x_i}{m_i^{s_0/p}}\right)^q$。因此 $\sum_{i=1}^n t_i=\overline{f(s_0)}=1$且 $\sum_{i=1}^n t_i^{1/q}m_i^{s_0/p}e_i=\sum_{i=1}^n x_ie_i=x.$置 $\lambda_i=m_i^{s_0/p}$。由于$1\leq\lambda_i\leq m_i^{1/p}$，我们得到 $x\in E$，证明完毕。□

命题14。 固定 $1<p<\infty$。对于每个紧集 $A\subset\mathbb{R}^n$，使得 $\operatorname{span}(A)=\mathbb{R}^n$，我们有

$$\operatorname{int}\left(A^{\oplus_p(n+1)}\right)\neq\emptyset.$$

证明。 集合 A 包含 n个线性无关向量。通过施加线性变换，不妨设 $\{e_1,\ldots,e_n\}\subset A.$利用引理 13，我们有

$$\left(\operatorname{diag}(1,\ldots,1,2^{1/p})(B_q^n\cap\mathbb{R}_+^n)\right)\setminus\left(\operatorname{int}(B_q^n)\cap\mathbb{R}_+^n\right)\subset\{e_1,\ldots,e_n\}^{\oplus_p(n+1)}\subset A^{\oplus_p(n+1)}.$$

左侧集合具有非空内部，因此 $A^{\oplus_p(n+1)}$ 具有非空内部。 □

注 2。 我们注意到， $n+1$ 是最优的：对于 $A=\{e_1,\ldots,e_n\}$ 有 $\operatorname{int}\left(A^{\oplus_p n}\right)=\emptyset$.事实上，由引理 13 可知 $A^{\oplus_p n}\subset\left(\bigcup_{k=1}^n e_k^{\perp}\right)\cup\left((\partial B_q^n)\cap\mathbb{R}_+^n\right)$，因此 $A^{\oplus_p n}$具有空内部。

引理15. 固定 $1<p\leq\infty$。对于每个整数 $k\geq n$，有

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n:\|x\|_q\geq 1,\|x\|_1\leq(k-n+1)^{1/p}\right\}\subset\{e_1,\ldots,e_n\}^{\oplus_p k}. \tag{7}$$

当 $p=\infty$ 时等号成立。特别地，若 $k\geq 2n-1$，则有

$$\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:\|x\|_1=(k-n+1)^{1/p}\right\}\subset\{e_1,\ldots,e_n\}^{\oplus_p k}.$$

证明.对于 $p=\infty$ 的情形，结论由 Carath´eodory 定理得出。因此，我们可以假设 $p<\infty$。令 $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$ 满足 $\|x\|_q\geq 1,$且$\sum_{i=1}^n x_i\leq(k-n+1)^{1/p}$。对于每个 $1\leq i\leq n-1$，令 $m_i=\lceil x_i(k-n+1)^{1/q}\rceil$, 且$m_n=k-\sum_{i=1}^{n-1}m_i$。注意到

$$m_n=k-\sum_{i<n}m_i\geq k-n+1-\sum_{i<n}x_i(k-n+1)^{1/q}\geq x_n(k-n+1)^{1/q}.$$

根据 m_i 的定义，只有当 $x_i=0$ 时才有 $m_i=0$。因此，

$$\sum_{i:m_i>0}\left(\frac{x_i}{m_i^{1/p}}\right)^q\leq\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{(k-n+1)^{1/p}}\leq 1.$$

因此，

$$x\in\operatorname{diag}(m_1^{1/p},\ldots,m_n^{1/p})(B_q^n\cap\mathbb{R}_+^n).$$

由于 $\|x\|_q\geq 1,\quad x\notin\operatorname{int}(B_q^n)\cap\mathbb{R}_+^n$。利用引理 13，可得

$$x\in\left(\operatorname{diag}(m_1^{1/p},\ldots,m_n^{1/p})(B_q^n\cap\mathbb{R}_+^n)\right)\setminus\left(\operatorname{int}(B_q^n)\cap\mathbb{R}_+^n\right)\subset\{e_1,\ldots,e_n\}^{\oplus_p k}.$$

若 $k\geq 2n-1$ 则 $(k-n+1)^{1/p}\geq n^{1/p}$。因此，若 $x\in\mathbb{R}_+^n$ 且 $||x||_1=(k-n+1)^{1/p}$，则 $n^{1/p}\leq||x||_1\leq n^{1/p}||x||_q$，由霍尔德不等式可得¨。因此，该情形下所述的包含关系可由包含关系（7）得出。□

3.3. **星形性结果**。本节旨在说明两个结果，即定理 1和定理 2。两者均假设 $k \geq n+1$。前者指出，当 $0 \in \cap \mathrm{conv}(A_i)$，则（对任意 $p>1$） $A_1 \oplus_p \cdots \oplus_p A_k$ 是星形的。特别地，这意味着若 $\mathbb{R}u \cap A^{\oplus_p k}$，则它总是一个区间 $0 \in \mathrm{conv}(A$。定理2 指出，不对 A作任何假设时，这个较弱的结论仍然成立。

我们首先引用组合几何中的两个经典结果，它们归功于 B´ar´any [5]，这些结果是 Carath´eodory 定理（及其锥版本）的推广。它们被称为彩色 *Carath´eodory* 定理，见 [19],第 8 章。

事实 1 （B´ar´any [5, 定理 2.1]）。设 $k \geq n+1$ 和 $A_1, \ldots\ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$。则$\cap_{i=1}^k$凸包$(A_i) \subset \bigoplus_{i\in[k]}^{(\infty)} A_i = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i : \ a_i \in A_i, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum \lambda_i = 1\}$。

以下是事实 1的锥类比，见 [5]中的定理 2.2。

事实 2 (B´ar´任意 [5, 定理 2。2])。设 $k' \geq m$ 和 $A_1, \ldots, A_{k'} \subset \mathbb{R}^m$。假设 $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$满足，使得 $v \in \cap_{i\leq k'}$锥(A_i)。则存在$(a_i \in A_i, \ \mu_i \geq 0, \ i \in [k'])$ 使得$v = \sum_{i=1}^{k'} \mu_i a_i$。更确切地说，存在 $1 \leq r \leq m$、 $J = \{c_1, \ldots, c_r\} \subset [k']$、 a_1、…、 a_r线性无关，满足 $a_i \in A_{c_i}$，且$(\mu_i > 0, \ i \in [r])$，使得 $v = \sum_{i=1}^r \mu_i a_i$。

关于上述两个定理的证明，请参见 [5] 和 [19, 定理 8.2.1，第 199] 页。后者引入了彩虹单形这一概念，我们现在回顾一下，因为下一条命题会用到它。若一个 d-单纯形 $T = \mathrm{conv}(a_1, \ldots, a_{d+1})$ 的所有 $d+1$顶点颜色各不相同，则称其为彩虹单形。由于一个顶点可能有多种颜色，我们将定义说得更精确些：若 $\dim(T) = r-1$，且存在一个双射 $\sigma : [r] \to J$，使得对所有 $i \in [r]$，都有 $a_i \in A_{\sigma(i)}$，则称 $T = \mathrm{conv}(a_1, \ldots, a_r)$ 为 J-彩虹单纯形。我们用 $\mathcal{T}_J$ 表示 J-彩虹单纯形的集合，并用

$$\mathcal{T}_\ell = \bigcup_{\substack{J\subset[k] \\ |J|=\ell+1}} \mathcal{T}_J$$

表示颜色属于 $[k]$ 的 ℓ 维彩虹单形的集合。最后，用 $\mathcal{T} = \cup_{\ell\geq 0}\mathcal{T}_\ell$ 表示顶点属于 $\cup_{j\in[k]}A_j$的所有彩虹单形的集合。

类似地，如果 $C = $锥$(a_1, \ldots, a_r) = \mathbb{R}_+ a_1 + \cdots + \mathbb{R}_+ a_r$是一个 r维锥，且其中的a_i's 具有互不相同的颜色[1], 那么我们称 C 为一个 r彩虹锥。

以下是定理 $p = \infty$ 的 1 的情形。

命题 16。设 $k \geq n+1$，并设 $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ 是任意集合，使得$x_0 \in \cap_{i=1}^k$凸包(A_i)。那么 $R := \bigoplus_{i\in[k]}^{(\infty)} A_i = A_1 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty A_k$ 在 x_0处是星形的。

证明。若将每个 A_i 替换为 $A_i' := A_i - x_0$，则 $\cap$凸包(A_i)和 $A_1 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty A_k$都会平移 $-x_0$，因此可以假设 $x_0 = 0$。根据 Carath´eodory 定理，可以假设所有 A_i都是有限的，因此 $R := A_1 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty A_k = \cup_{T\in\mathcal{T}} T$是紧的，因为它是有限个（紧）单形的并。若 $z \in R$，则考虑 $I(z) := \{t \in [0,1] : [tz, z] \subset R\}$。它非空（因为 $z \in R$）且是闭集，因为 R 是紧的。因此，由于 $[0,1]$, 的连通性，只需证明 $I(z)$ 在 $[0,1]$中是开集，从而得出所需的 $I(z) = [0,1]$。因此，只需证明若 $x \in R \setminus \{0\}$，则存在 $\epsilon > 0$ 使得 $[(1-\epsilon)x, \ x] \subset R$。

固定 $x \in R$、 $x \neq 0$ 和 $a_1, \ldots\ldots, a_r$，其中 $r \geq 1$ 最小，使得 $x \in T = \mathrm{conv}(a_1, \ldots\ldots, a_r)$ 且 T 是彩虹单纯形。我们先考察 $r = 1$ 的情形，即 $x \in \cup_{i=1}^k A_i$，设 $x \in A_1$、$x \neq 0$。此时还有 $k-1 \geq n$ 种未使用的颜色。根据 [5, 定理 2.3], ，我们可以找到 $b_2 \in A_2$、……、$b_{n+1} \in A_{n+1}$，使得 $0 \in \mathrm{conv}(a_1, b_2, \ldots\ldots, b_{n+1})$。因此， $[0,x] = [0,a_1] \subset T'$，且 $T' = \mathrm{conv}(a_1, b_2, \ldots\ldots, b_{n+1}) \subset A_1 \oplus_\infty A_2 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty A_{n+1} \subset R$。

[1]即与之前一样，存在大小为 r 的 $J \subset [k]$，以及 $\sigma : [r] \to J$ 一个双射，使得 $a_i \in A_{\sigma(i)} \ \forall i \in [r]$。

现在假设 $x \notin \cup_{i\in k} A_i$，因此 $r \geq 2$。不妨对颜色重新命名，设 $x \in T = \text{conv}(a_1、\ldots\ldots、a_r)$，其中 $a_i \in A_i$（且 r 最小），并且 T 是一个（$r-1$）-彩虹单纯形。根据 Carath´eodory 定理，$r \leq n+1$。如果 $r = n+1$，那么 r 的极小性意味着 $x \in \text{int}(T)$，在这种情况下，显然 $[(1-\epsilon)x$，对于某个 $\epsilon > 0$ 成立。因此假设 $2 \leq r \leq n$。所以还剩下 $k - r \geq (n+1) - n = 1$ 种颜色。由 r 的极小性，我们有 $x \in \text{relint}(T)$。令 $W = \text{Span}(a_i - x;\ i \leq r) = \text{Span}(T - x)$。记 $m = \dim(W^{\perp}) = n - r + 1 \geq 1$。令 $J_r = [k]\backslash[r]$ 为 T 未使用的颜色。记 π 为到 $W^{\perp} \approx \mathbb{R}^m$ 上的正交投影。对于每个 $i \in J_r$、$\pi(-x) \in \text{cone}(\pi(A_i - x))$。由于 $|J_r| = k - r \geq n + 1 - r = m$，事实 2 告诉我们，可以选取大小至多为 m 的 $J' \subset J_r$（当 $\pi x = 0$ 时取 $J' = \emptyset$）以及 $(a_i、\ i \in J')$、$\mu_i > 0$，使得 $-\pi x = \sum_{i\in J'} \mu_i \pi(a_i - x)$ 且 $\dim(\text{Span}(\pi(a_i - x)\colon\ i \in J')) = |J'|$。写作 $-x = -\pi x + w_x$，并令 $a_i - x = \pi(a_i - x) + w_i$，其中 $w_x、\ w_i \in W$。然后，令 $w := w_x - \sum_{i\in J'} \mu_i w_i \in W$，得到：

$$-x = -\pi x + w_x = \sum \mu_i (a_i - x - w_i) + w_x = \sum_{i\in J'} \mu_i (a_i - x) + w. \tag{8}$$

设 $T' = \text{凸包}(T,\ (a_j,\ j \in J'))$。由 $(\pi(a_i - x))\ i \in J')$ 的线性无关性可知，

$$\begin{aligned}\dim(T') = \dim(\text{Span}(T' - x)) &= \dim\left(\text{span}(a_i - x; i \in [r]) + \text{span}(a_j - x; j \in J')\right) \\ &= r - 1 + \dim(\text{Span}(\pi(a_j - x); j \in J')) = r + |J'| - 1\,.\end{aligned}$$

换言之，$T' \in \mathcal{T}_{[r]\cup J'}$是一个（$r + |J'| - 1$）彩虹单纯形。设 $M = \sum \mu_i > 0$。对于$\epsilon > 0$ 足够小的情形，令 $\tilde{\mu_i} = \mu_i / M$ 且 $x' = x + \frac{\epsilon}{1-\epsilon M} w$，恒等式（8）给出：

$$(1-\epsilon)x = (1-\epsilon M)x + \epsilon w + \epsilon M \sum_{i\in J'} \tilde{\mu}_i a_i =: (1-\epsilon M)x' + \epsilon M \sum_{i\in J'} \tilde{\mu}_i a_i \quad . \tag{9}$$

若 $\epsilon > 0$ 足够小，则 $1-\epsilon M \in (1\ 2, 1)$，且 $x+2\epsilon w \in T$(因为 $w \in W =$张成空间$(T-x)$ 且$x \in$相对内部$(T))$，因此 $x' \in [x, x + 2\epsilon w] \subset T \subset T'$，从而 (9) 意味着 $[(1-\epsilon)x, x] \subset T' \subset R$。我们得出，对于任意 $x \in R$，存在 $\epsilon > 0$ 使得 $[(1-\epsilon)x, x] \subset R$；根据前面提到的连通性论证，这意味着 R 是星形的。□

引理 17。令 $r \geq 1$、$a_1、\ldots、a_r \in \mathbb{R}^n$，并令 $T = \text{凸包}(a_1、\ldots、a_r)$，且对于 $p \in (1、\infty)$，令$T_p = \{a_1\} \oplus_p \cdots \oplus_p \{a_r\}$。若 $0 \in T$，则 $T \subset T_p$。

证明。若 $r = 1$，则 $0 \in T$ 意味着 $a_1 = 0$，因此 $T = T_p = \{0\}$。若 $r = 2$，则 T 是一条线段，并且可以检查出在此情形下 $T = T_p$ 也成立。假设 $r \geq 3$。那么，由于 $0 \in T$，我们可以对某些 $\eta_i \geq 0$、$||\eta||_1 = 1$写成 $0 = \sum_{i=1}^r \eta_i a_i$。令 $x \in T$。若 $x = a_i$，则显然$x \in T_p$。假设 $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i$，其中 $\lambda_i \geq 0$和 $||\lambda||_1 = 1$。不妨设 $x \notin \{a_1, \ldots, a_r\}$。因此，$|\text{supp}(\lambda)| \geq 2$，从而 $||\lambda||_q < 1$。对于任意 $t \geq 0$，写成 $x = \sum_{i=1}^r (\lambda_i + t\eta_i) a_i.$。记作$\mu_i(t) = \lambda_i + t\eta_i \geq 0$，于是 $||\mu(t)||_q = (\sum_{i=1}^r (\lambda_i + t\eta_i)^q)^{1/q}$ 关于 t递增，从$||\mu(0)||_q = ||\lambda||_q < 1$开始，并趋于 $\lim_{t\to+\infty} ||\mu(t)||_q = +\infty$。因此根据连续性，存在$t_0 > 0$ 使得 $||\mu(t_0)||_q = 1$，从而 $x = \sum_{i=1}^r \mu_i(t_0) a_i \in T_p$。□

定理 1。设 $k \geq n+1$。设 $A_1、\ldots、A_k \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集，使得 $0 \in \cap_{i=1}^k$凸包(A_i)。那么对于任意 $p \in (1、\infty]$，和 $A_1 \oplus_p \cdots \oplus_p A_k$ 都是星形的。

证明。情形 $p = +\infty$ 由命题 16 得出，因此我们假设 $1 < p < +\infty$。记$q > 1$为 p的共轭指数。若 $A_1, \ldots, A_k$是有限集，记 $R_p = A_1 \oplus_p \ldots \oplus_p A_k$，它是有限个 $T_p = T_p(a_1, \ldots, a_\ell) = \{a_1\} \oplus_p \ldots \oplus_p \{a_\ell\}$，$\ell \leq k$的并；类似地，$p = \infty$，$R_\infty$是有限个 $T =$凸包$(a_1, \ldots, a_\ell)$，$\ell \leq k$ 的并（根据 Carath´eodory 定理，这等同于对满足 T为 $(\ell-1)$-彩虹单纯形的那些 $T =$凸包$(a_1, \ldots, a_\ell)$取有限并）。在事实 1 中，为了证明假设 $0 \in \cap$凸包(A_i) 和$k \geq n+1$推出 $0 \in R_\infty$，我们考察量 $\rho = \text{dist}(0, R_\infty) = \min_{T\in\mathcal{T}} \text{dist}(0, T)$，其中 $\mathcal{T} = \cup_{0\leq\ell\leq n} \mathcal{T}_\ell$ 为所有彩虹单形构成的集合，并通过反证法论证，

不可能出现 $\rho > 0$ （例如参见 [19, 第 8.2 节，定理 8.2.1]的证明）。这里的证明类似：若 $z \in R_p^* := \{\sum_{i\le k} \lambda_i a_i : \lambda_i \ge 0, a_i \in A_i, \sum \lambda_i^q \le 1\}$，我们将通过证明 $\max_{(a,\lambda)} F(\lambda) = 1$来说明$z \in R_p$，其中 $F(\lambda) = \sum_{i\in[k]} \lambda_i^q$，最大值取遍 $z \in R_p^*$的所有有效表示，即所有满足$\lambda_i \ge 0$, $a_i \in A_i$, $F(\lambda) \le 1$和 $z = \sum \lambda_i a_i$的元组 $((a_i)_{i\in[k]}, (\lambda_i)_{i\in[k]})$。根据事实 1，存在 $T = T(a_1, ..., a_r)$ 这个彩虹单纯形（其中 $r \le n+1$），使得 $0 \in T$，因此（根据引理 17）有 $0 \in T_p = \{a_1\} \oplus_p \cdots \oplus_p \{a_r\}$，从而 $0 \in R_p$。所以我们可以假设 $z \ne 0$。

为导出矛盾，假设我们有 $m(z) < 1$，其中

$$m(z) := \max_{a,\lambda} F(\lambda) = \max\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i^q : \lambda_i \ge 0, F(\lambda) \le 1; \exists a_i \in A_i, z = \sum \lambda_i a_i \right\},$$

并固定 $J \subset [k]$、$a_i \in A_i$、$\lambda_i > 0$（对于 $i \in J$），使得（a、λ）是 z 的有效表示，且 $F(\lambda) = m(z) < 1$ 是极大的。称 $|J| = r \ge 1 (r > 0$，因为 $z \ne 0)$，并重新命名颜色，使得 $J = [r]$。首先，我们断言 a_1、...、a_r 是线性无关的；特别地，$r \le n$。事实上，如果对某些 $h \in \mathbb{R}^r$、$h \ne 0$ 有 $\sum h_i a_i = 0$，这将与 $F(\lambda)$ 的极大性矛盾：对每个 $i \in [r]$，都有 $0 < \lambda_i < 1$，因此 $0 < \lambda_i \pm \epsilon h_i < 1$（对所有 i），并且当 $\epsilon > 0$ 足够小时（由 F 的连续性），$F(\lambda \pm \epsilon h) < 1$；换言之，对于足够小的 $\epsilon > 0$，（a、$\lambda + \epsilon h$）和（a、$\lambda - \epsilon h$）也是 z 的有效表示。由 F 的严格凸性，有 $\max\{F(\lambda + \epsilon h)\ F(\lambda - \epsilon h)\} > F(\lambda)$，矛盾。

假设我们有 $r = n$，即 $\mathbb{R}^n = \mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_n)$。因此，$L(\sum h_i a_i) := \sum h_i \lambda_i^{q-1}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义了一个线性形式，并且 $L(z) = F(\lambda) > 0$。由于 $k \ge n+1$，我们至少有一种未使用的颜色。由于 $0 \in$ 凸包(A_{n+1})，我们可以固定某个 $b = b_{n+1} \in A_{n+1}$，使得 $L(b) \le 0$。固定$h \in \mathbb{R}^n$ 使得 $b_{n+1} = \sum_{i=1}^n h_i a_i$。当 $t > 0$ 足够小时，我们可以将 z 表示为：

$$z = \sum \lambda_i a_i - tb + tb = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - t h_i) a_i + tb,$$

由于 $F_t := \sum (\lambda_i - t h_i)^q + t^q < 1$（利用 $F(\lambda) < 1$），且对所有 $i \in [n]$ 都有 $\lambda_i > 0$，因此当 $t > 0$ 较小时，这是一个有效的表示。并且，

$$\begin{aligned} F_t = \sum (\lambda_i - t h_i)^q + t^q &\ge F(\lambda) - qt \sum h_i \lambda_i^{q-1} + t^q \\ &= F(\lambda) - qtL(b) + t^q \ge F(\lambda) + t^q > F(\lambda), \end{aligned}$$

其中我们利用了以下事实：（对于任意 $y \in \mathbb{R}$），当 $t > 0$ 足够小时，有 $(1 - ty)^q \ge 1 - qty$；并且根据对 $b \in A_{n+1}$ 的选择，$L(b) \le 0$。这与 $F(\lambda)$ 的极大性相矛盾。因此必有 $r < n$：对于这种情况，我们同样会得到矛盾。

因此，假设 $z = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i$，其中 $r \le n-1$，$a_1, ..., a_r$ 线性无关，且 $m(z) = F(\lambda) < 1$。记 $W =$ 为 a_i 的张成空间，并在 W 上定义线性形式 L：$L(\sum h_i a_i) = \sum h_i \lambda_i^{q-1}$。特别地，$L(z) = F(\lambda) > 0$。记 $H =$ 为 L 的核，$= \{w \in W : L(w) = 0\}$。因此，$\dim(H) = r - 1$，所以 $m := \dim(H^\perp) = n + 1 - r$。记 π 为到 $H^\perp$ 上的正交投影。由于 $z \notin H, \pi z \ne 0$。根据定理 2，[。由于 $k - r \ge m$ 且对于 $j \in [k] \setminus [r]$，$0 \in$ 是 πA_j 的凸包，我们可以选取 $\alpha \ge 0$, $\mu_j \ge 0$，使其对应于 $j = r+1, ..., k$，以及 $b_j \in A_j$，并满足 $\alpha + \sum \mu_j = 1$ 和 $\alpha \pi z + \sum \mu_j \pi b_j = 0$。令 $M := \sum_j \mu_j$，于是 $0 < M \le 1$（我们不能有 $M = 0$，因为 $\pi z \ne 0$）。记 $b = \sum \mu_j b_j$：由于 $b + \alpha z \in H$，我们有 $b \in -\alpha z + H \subset W$，所以可以选取 $h \in \mathbb{R}^r$，从而写成 $b = \sum h_i a_i$。而且，由 $L(\alpha z + b) = 0$，我们还可推出 $L(b) \le 0$。现在，如同在 $r = n$ 的情形中，我们使用新选取的 b_j 来得到 z 的其他有效表示，即：

$$z = \sum \lambda_i a_i - tb + tb = \sum_{i=1}^r (\lambda_i - t h_i) a_i + \sum_{j=r+1}^k t \mu_j b_j$$

记 $F_t := \sum_{i\le r}(\lambda_i - th_i)^q + t^q \sum_{j>r} \mu_j^q$。由于 $F(\lambda) = F_0 < 1$，当 $t > 0$ 足够小时，我们有 $F_t < 1$。此外

$$\begin{aligned} F_t = \sum_{i\le r}(\lambda_i - th_i)^q + t^q \sum_{j>r} \mu_j^q &\ge F(\lambda) - qt \sum h_i \lambda_i^{q-1} + t^q \sum \mu_j^q \\ &= F(\lambda) - qtL(b) + t^q ||\mu||_q^q \\ &\ge F(\lambda) + t^q ||\mu||_q^q > F(\lambda) \end{aligned}$$

其中我们使用了 $L(b) \le 0$，以及 $||\mu||_q > 0$（因为 $||\mu||_1 = M > 0$）。这与 $F(\lambda)$ 在有效表示中的极大性相矛盾。我们推得 $m(z) = 1$，因此$z \in R_p$，正如所要求的那样。□

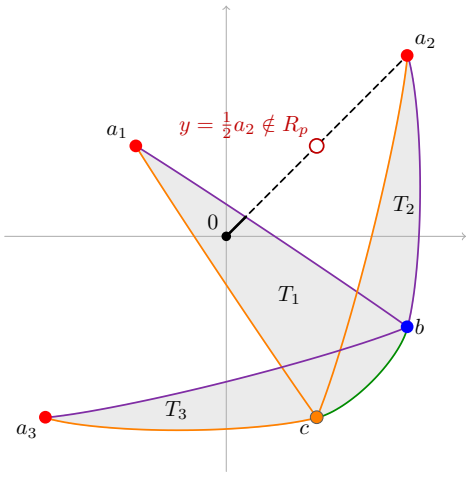


FIGURE 2. 一个 $0 \in \bigoplus_{i\in[3]}^{(\infty)} A_i$ 但 R_p 不星形（以 0 为中心）的例子。

注意，$n+1$ 在上述表述中是最优的。见下文注释 4。

注释 3。仅要求 $0 \in A_1 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty A_k$ 是不够的。事实上，对于 $n \ge 2$，我们给出了这样一个例子：其中一个集合包含原点，而 $\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i$ 对于 $p \in (1, \infty)$ 中的任何点都不是星形的。对于任意 $k \ge n+1$，我们考虑

$$A_i = \begin{cases} \{0, e_1\} & i = 1, \\ \{e_i\} & 2 \le i \le n \\ \{e_n\} & i \ge n+1. \end{cases}$$

根据 L_p-和的定义，我们有

$$R_p := \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i^{1/q} a_i : a_i \in A_i, 0 \le t_i \le 1 \text{ and } \sum_{i=1}^k t_i = 1 \right\}.$$

首先注意，每个满足 $x_1 > 0$ 的 $x \in R_p$ 都满足 $\|x\|_q^q \ge 1$。事实上，我们可以将 $x \in R_p$ 写成

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{1/q} e_j + \left(\sum_{i=n}^k t_i^{1/q} \right) e_n, \qquad t_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^k t_i = 1.$$

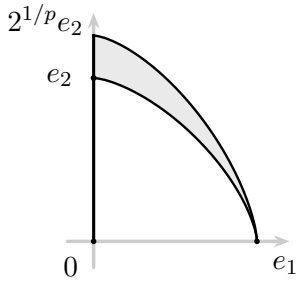
于是，

$$\|x\|_q^q = \sum_{i=1}^{n-1} t_i + \left(\sum_{j=n}^{k} t_i^{1/q} \right)^q \geq \sum_{i=1}^{k} t_i = 1.$$

反设， R_p 关于某个 $c \in R_p$是星形的。根据构造， c 的所有坐标均为非负数。若 $c_1 > 0$ ，则由于 $0 \in R_p$，有 $[0, c] \subset R_p$。当 $\lambda > 0$足够小时，有 $\lambda c \in R_p$，但 $\|\lambda c\|_q < 1$ 和 $\lambda c_1 > 0$，这与上述结论矛盾。另一方面，若 $c_1 = 0$，则由于 $e_1 \in R_p$，对于任意$t \in [0, 1]$，都有 $x = (1-t)e_1 + tc \in R_p$. 因此， $\|x\|_q^q = (1-t)^q + t^q \|c\|_q^q$. 由于 $q > 1$，当 $t > 0$足够小时，有 $t^{q-1}\|c\|_q^q < 1$，从而

$$\|x\|_q^q < 1 - t + t\left(t^{q-1}\|c\|_q^q\right) < 1.$$

由于 $x_1 = 1 - t > 0$，这再次与上述内容矛盾。因此， R_p 不关于任何点呈星形，见 $\mathbb{R}^2$中的下图。



$$A_1 = \{0, e_1\}, \quad A_2 = \{e_2\}, \quad A_3 = \{e_2\}, \quad p = 3.$$

以下是定理 1的两个推论。

推论18。 设 $k \geq n+1$，并设 $A_1, ..., A_k \subset \mathbb{R}^n$ 为满足 $0 \in \cap_{i=1}^k$凸包(A_i)的集合。那么 $\left(\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i\right)_p$ 关于 $p > 1$单调不增。特别地，对于任意$p > 1$， $\bigoplus_{i\in[k]}^{(\infty)} A_i \subset \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i$ 。此外，若 $A_1, ..., A_k$ 为紧集，则当$p \to \infty$时， $\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i$ 关于 *Hausdorff*度量收敛到 $\bigoplus_{i\in[k]}^{(\infty)} A_i$ 。

证明。 设 $p' > p$，并设 $z \in A_1 \oplus_{p'} \cdots \oplus_{p'} A_k$。因此 $z = \sum \lambda_i a_i$，其中 $a_i \in A_i$、$\lambda_i \geq 0$和$||\lambda||_{q'} = 1$。因此 $\mu := ||\lambda||_q^{-1} \geq 1$ （因为 $q' < q$），且 $\mu z \in A_1 \oplus_p \cdots \oplus_p A_k$。由于 $z \in [0, \mu z]$ 且$A_1 \oplus_p \cdots \oplus_p A_k$是星形的，我们便得出 $z \in A_1 \oplus_p \cdots \oplus_p A_k$，如所声称。

现在我们转向“此外”部分，并假设所有 A_i 都是紧的。设 $R > 0$ 满足$A_i \subset RB_2^n$对所有 $i \in [k]$均成立。若 $\epsilon > 0$且 $p > p(\epsilon, R)$，则 $R_\infty \subset A_1 \oplus_p \cdots \oplus_p A_k \subset R_\infty + \epsilon B_2^n$。事实上，若 $a_j \in A_i \subset RB_2^n (j \leq k)$，且 $z \in \{a_1\} \oplus_p \cdots \oplus_p \{a_k\}$，即 $z = \sum \lambda_i a_i$ 满足$||\lambda||_q = 1$，则令 $z' = \frac{z}{||\lambda||_1} \in R_\infty$，于是 $z \in \overline{||\lambda||_1 R_\infty}$，且 $||\lambda||_1 \in [1, k^{1/p}]$。因此$z = z' + (||\lambda||_1 - 1)\, z' = z' + \epsilon u$ 满足 $||u||_2 = \epsilon^{-1}(||\lambda||_1 - 1)\ ||z'||_2 \leq R\epsilon^{-1}(k^{1/p} - 1) \leq 1$，只要$p \geq p(k, R, \epsilon)$ 足够大即可。□

Ta根据上面的推论，可得以下结论。

推论 19。 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个集合，使得 $0 \in$ 凸包(A)，并设 $k \geq n+1$。则凸包$(A) \subset A^{\oplus_p k}$，且这些集合都是星形的。更确切地说，$(A^{\oplus_p k})_{p>1}$ 是非递增的（关于包含关系）。此外，若 A 是紧的，则（对任意 $k \geq n+1$），极限$_{p\to\infty} A^{\oplus_p k} =$ 凸包(A)，在 *Hausdorff*度量下成立。

注记 4。 我们给出一个例子，说明 $n+1$ 在推论 19 和定理 中的锐性。令 v_1，……，$v_{n+1} \in \mathbb{S}^{n-1}$ 为单纯形 T的顶点，且满足 $0 \in \mathrm{int}(T)$。

令 $A=\{v_1,...,v_{n+1}\}$。那么，对于 $k\geq n+1$， $A^{\oplus_p k}\supset$是A的凸包，但 $A^{\oplus_p n}$不包含 A的凸包，因为它不包含 0。（事实上， $A^{\oplus_p n}=\cup_{j=1}^{n+1}B_j^{\oplus_p n}$，其中 $B_j=A\setminus\{v_j\}$。设$B=B_{n+1}=\{v_1,...,v_n\}$。那么，由于 $0\in$int(T)，存在一个开半空间 H, $H\supset B$（且 0， $v_{n+1}\notin H$）。因此 $B^{\oplus_p n}\subset H^{\oplus_p n}=H$，这意味着 $0\notin B^{\oplus_p n}$。）对于 T这个正则 n-单纯形，该论证给出 $B(0,\ \frac{1}{n})\cap A^{\oplus_p n}=\emptyset$，而对于任意 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$， $A^{\oplus_p n}\cap\mathbb{R}_+u\neq\emptyset$，因此显然 $A^{\oplus_p n}$ 不是星形。

注 5。上述推论中 moreover 部分的紧性假设是必要的。事实上，考虑凸集 $A=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2;\ y\geq x^2\}\subset\mathbb{R}^2$。对于任意$k\geq 2$以及任意 $p\in(1,\ \infty)$，有 $A^{\oplus_p k}=k^{1/p}A$。因此 $d_H(A^{\oplus_p k},\ A)=+\infty$（因为 $(R,\ \frac{R^2}{k^{1/p}})\in k^{1/p}A$ 且 $d_H\left(\left(R,\frac{R^2}{k^{1/p}}\right),A\right)\geq\frac{(1-k^{-1/p})R^2}{\sqrt{1+4R^2}}\xrightarrow[R\to\infty]{}+\infty$）。

定理 2。设 $p\in(1,\ \infty)$ 且 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集。设 $k\geq n+1$。那么对于任意单位向量 $u\in\mathbb{R}^n$， $\mathbb{R}u\cap A^{\oplus_p k}$ 是线段。

证明。我们可以排除以下情形： $A=\emptyset$ 或 $A=\{x_0\}$（此时 $A^{\oplus_p k}=[x_0,k^{1/p}x_0]$），以及情形 $A\subset\mathbb{R}u_0$，此时结论显然成立。若 A 不是满维的，且 $u\in\mathbb{S}^{n-1}\setminus$span$(A)$，则 $\mathbb{R}u\cap A^{\oplus_p k}\subset\{0\}$，因此无须证明任何内容。因此，我们可以假设 span$(A)=\mathbb{R}^n$，且 $n\geq 2$。此外，不失一般性，我们可以假设A 是有限的。要么 $0\in$conv(A)，此时由推论19可知， $A^{\oplus_p k}$ 是星形的，特别是交集 $I_u:=A^{\oplus_p k}\cap\mathbb{R}u$ 是一条线段（包含 0）。

或者 $0\notin$ conv(A)。由于 A是有限的，conv(A) 是紧的，因此根据严格分离，存在$u_0\in\mathbb{S}^{n-1}$ 和 $\delta>0$，使得 $\langle a,\ u_0\rangle\geq\delta>0$ 对任意 $a\in A$均成立。特别地，令 H_0为开半空间 $H_0=\{z\in\mathbb{R}^n:\ \langle z,\ u_0\rangle>0\}$，我们看到，对所有 $\ell\geq 1$， $A^{\oplus_p\ell}\subset H_0$。

我们必须证明，对于任意 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$, $I_u:=\mathbb{R}_+u\cap A^{\oplus_p k}$ 是一条线段。若 $\langle u,\ u_0\rangle\leq 0$，则 $\mathbb{R}_+u\cap A^{\oplus_p k}=\emptyset$（因为 $A^{\oplus_p k}\subset H_0$）。假设 $I_u=\mathbb{R}_+u\cap A^{\oplus_p k}\neq\emptyset$，特别是$\langle u,\ u_0\rangle>0$。另假设 I_u 至少有两个点，否则无须证明。取 $x\neq y$ 为 I_u 中任意两个点。因此（交换 x和 y 的名称后）存在 $0<r<s$，使得 $x=ru$ 且 $y=su$。我们必须证明 $[r,s]u\subset I_u$。

固定 $x=\sum_{i=1}^k\lambda_i a_i$ 和 $y=\sum_{j=1}^k\mu_j b_j$，它们分别是 x 和 y 的两个有效表示，且将其视为 $A^{\oplus_p k}$ 中的点，即满足 $a_i,\ b_j\in A$, $\lambda_i,\ \mu_j\geq 0$ 且 $||\lambda||_q=||\mu||_q=1$。将 $(x_1,\ ...,\ x_{2k})$ =$(a_1,\ ...,\ a_k,\ b_1,\ ...,\ b_k)$ 记为由 A 中的 $2k$ 个向量组成的序列（其中可能有重复项）。我们定义

$$P:=\left\{\nu\in\mathbb{R}^{2k}:\sum_{i=1}^{2k}\nu_i x_i=u,\ \nu_j\geq 0\,(\forall j\in[2k])\right\}.$$

如果 $\nu\in P$，那么 $\sum\nu_i\langle x_i,\ u_0\rangle=\langle u,\ u_0\rangle>0$，并且由于对所有 i都有 $\langle x_i,\ u_0\rangle\geq\delta$（因为 $x_j\in A$），我们推得 $\sum_{i=1}^{2k}\nu_i\leq\delta^{-1}\langle u,\ u_0\rangle=:M>0$，特别意味着 $P\subset[0,M]^{2k}$是紧的。因此 P 是一个多胞体。定义 P 时所用的唯一不等式是 $2k$不等式 $\nu_i\geq 0$，所以 P 的所有面都具有如下形式

$$P_I:=\{\nu\in P:\text{supp}(\nu)\subset I\}=\{\nu\in P:i\in[2k]\setminus I\Rightarrow\nu_i=0\}=P\cap\left(\cap_{i\notin I}e_i^{\perp}\right)$$

对于某个 I（注意，根据 I， P_I 可能为空）。

记 $M=(x_1,\ .....,\ x_{2k})$，我们将其视为一个 $n\times(2k)$-矩阵。我们断言：

断言 1。如果 $P_I\neq\emptyset$，那么 $\dim(P_I)=|I_0|-\text{rk}(M_{I_0})$，其中 M_I是 M的 $n\times I$-子矩阵，即 $M_I=(x_i:\ \ i\in I)$，并且 $I_0=\cup_{\nu\in P_I}\text{supp}(\nu)$是任意 $\nu\in\text{relint}(P_I)$的支集。

命题的证明。我们先讨论 $I=I_0$的情形。设 $P_I\neq\emptyset$，令 $\nu\in$ relint(P_I)，并假设 supp$(\nu)=I$。那么，若 $h\in\mathbb{R}^{2k}$ 满足：当 $\epsilon>0$ 足够小时， $\nu\pm\epsilon h\in P$，则$\tilde{}$ $\tilde{}$必然有 supp$(h)\subset$ supp$(\nu)\subset I$，且 $\sum_{i\in I}h_i x_i=0$，即 $h\in$ ker(M_I)；其中，若从 h中删去（为零的） I^c 坐标，便得到 $h=(h_i)_{i\in I}$。反过来，假设 $h\in\mathbb{R}^{2k}$ 满足

$\tilde{}$supp(h) $\subset I_0$，且 $h \in \ker(M_I)$。由于对所有 $i \in I$ 都有 $\nu_i > 0$，当 $\epsilon > 0$ 足够小时，我们便有 $\nu \pm \epsilon h \in P_I$。换言之，若记 $\pi_I\colon\ \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^{2k}$，它由 $\tilde{h}$ 得到 h（即嵌入到 $\mathbb{R}^{2k}$，该嵌入由 $h_i = \tilde{h}_i$ 对 $i \in I$ 以及 $h_i = 0$ 对 $i \notin I$ 给出），则

$$\mathrm{aff}(P_I) = \nu + \mathrm{Span}(\pi_I(\ker(M_I)))$$

因此，根据秩定理，$\dim(P_I) = \dim(\ker(M_I)) = |I| - \mathrm{rk}(M_I)$。

在 $I_0 \subsetneq I$ 的情况下，$P_I = P_{I_0}$ 是 P 的同一个面，因为它们具有相同的相对内部。因此，该结论由前一种情况得出。□

记 $\mathcal{J} = \{I \subset [2k]\colon\ \exists \nu \in P,\ \mathrm{supp}(\nu) = I\}$（换言之，$I \in \mathcal{J}$ 如果对于任意满足 $P_{I'} = P_I$ 的 I'，都有 $I \subset I'$）。根据上述结论，如果 $I \in \mathcal{J}$ 且 P_I 是 P 的 0 维面，则 $|I| = \mathrm{rk}(M_I) \leq n$。类似地，如果 $I \in \mathcal{J}$ 且 P_I 是 P 的一条边，则 $|I| = \mathrm{rk}(M_I) + 1 \leq n + 1 \leq k$。对于 $\ell \geq 0$，记 $\mathcal{J}_\ell\colon = \{I \in \mathcal{J}\colon\ \dim(P_I) = \ell\}$。记 $P^{(1)}$ 为 P 的 1-骨架，即其所有边（及顶点）的并：

$$P^{(1)} = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J}_1} P_I = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_1} P_I$$

（其中第二个等式是因为 $\dim(P) \geq 1$）。P 的所有面均为某种类型 P_{I_0}，其中 $I_0 \in \mathcal{J}$。由此可得，P 的 1-骨架包含于

$$P_{\leq k} := \{\nu \in P : |\mathrm{supp}(\nu)| \leq k\} = \bigcup_{I \subset [2k], |I| \leq k} P_I = \bigcup_{I_0 \in \mathcal{J}, |I_0| \leq k} P_{I_0}\ .$$

我们断言 $P_{\leq k}$ 是道路连通的。事实上，若 $\nu^{(0)}$，$\nu^{(1)}$ 位于 $P_{\leq k}$ 内，令 I_0，I_1 分别表示它们的支集，于是 $\nu^{(0)} \in P_{I_0}$ 且 $\nu^{(0)} \in P_{I_1}$。对于 P 的这两个面，分别取一个顶点 $\mu^{(j)} \in \mathrm{Vert}(P_{I_j})$、$j = 0,\ 1$。$\mu^{(j)}$ 是 P 的顶点（可能是同一个顶点），因此在 $P^{(1)}$ 上存在一条路径（由边 $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ 构成的路径，其中 e_i、e_{i+1} 共享一个顶点），将 $\mu^{(0)}$ 与 $\mu^{(1)}$ 连接起来。显然（对于 $j = 0,\ 1$），线段 $[\mu^{(j)}, \nu^{(j)}] \subset P_{I_j} \subset P_{\leq k}$。将这两条线段与 $P^{(1)} \subset P_{\leq k}$ 上的路径连接起来，便得到一条位于 $P_{\leq k}$ 内、从 $\nu^{(0)}$ 到 $\nu^{(1)}$ 的连续路径，这表明后者是道路连通的。

现在我们可以完成对 $[x, y] \subset I_u = \mathbb{R}_+ u \cap A^{\oplus_p k}$ 的证明。由于 $x = ru = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$，我们看到 $\nu^{(0)} := (\frac{\lambda}{r}, 0) = (\frac{\lambda_1}{r}, \ldots, \frac{\lambda_k}{r}, 0, \ldots, 0) \in P_{\leq k}$。同理，由于 $y = su = \sum_{j=1}^k \mu_j b_j$，我们看到 $\nu^{(1)} := (0, \frac{\mu}{s}) \in P_{\leq k}$。由于 $P_{\leq k}$ 是道路连通的，因此存在连续的 $\gamma\colon [0,1] \to P_{\leq k}$，满足 $\gamma(0) = \nu^{(0)}$ 且 $\gamma(1) = \nu^{(1)}$。注意，对所有 $t \in [0,1]$，都有 $||\gamma(t)||_q > 0$，因为 $\nu = 0_{\mathbb{R}^{2k}} \notin P$。因此，函数 $f(t) := \frac{1}{||\gamma(t)||_q}$ 在 $[0,1]$ 上连续。注意，$f(0) = r$，且 $f(1) = s$（因为 $||\lambda||_q = ||\mu||_q = 1$）。根据连续性，$f([0,1])$ 是一条线段，因此 $[r, s] \subset f([0,1])$。于是，对任意 $r' \in [r, s]$，存在 $t \in [0,1]$，使得 $f(t) = r'$。记 $\nu = \gamma(t)$，则根据 P 的定义，$||r'\nu||_q = 1$ 且 $\sum_{i \in [2k]} (r'\nu_i) x_i = r'u$。此外，$|\mathrm{supp}(r'\nu)| = |\mathrm{supp}(\nu)| \leq k$，因为 $\gamma([0,1]) \subset P_{\leq k}$，因此 $r'u \in A^{\oplus_p k} \cap \mathbb{R}u$。由此，我们得到 $[x, y] = [r, s]u \subset I_u$，证毕。□

对于 $B \subset \mathbb{R}^n$ 一个可测集，我们使用记号 $B^* = \cup_{b \in B} [0, b]$。

引理 20。假设对于每个 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，$B \cap \mathbb{R}u$ 都是一个区间。那么，要么 $B = B^*$，要么 $B^* \setminus B$ 是星形的。

证明。如果 $0 \in B$，则该假设意味着对于每个 $y \in B$ 都有 $[0, y] \subset B$，因此 $B = B^*$。现在假设 $0 \notin B$，特别地有 $0 \in B^* \setminus B$。令 $x \in B^* \setminus B$。我们可以将 $x = ry$ 写成某个 $y \in B$ 和 $r \in [0,1$ 的形式。注意到关于 B 的假设，以及 $y \in B$、$x \notin B$，意味着 $[0, x] \cap B = \emptyset$。因此显然有 $[0, x] \subset B^* \setminus B$。□

推论 21。 设 $1 < p \le \infty$，且设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为一个可测集。那么，对于每个 k，都有 $(A^*)^{\oplus_p k} = (A^{\oplus_p k})^*$。对于 $k \ge n+1$，集合 $S_k := (A^*)^{\oplus_p k} \setminus A^{\oplus_p k}$ 要么为空，要么是星形的。此外，对于所有 $k \ge n+1$都有 $S_k = S_{n+1} \subset S_n$，因此 $A^{\oplus_p k} = \left(A^{\oplus_p k}\right)^* \setminus S_{n+1}$。

证明。我们首先证明 $(A^*)^{\oplus_p k} = (A^{\oplus_p k})^*$. 。注意到 $(A^*)^{\oplus_p k}$ 是星形的（对任意 $k \ge 1$）。由于 $A^{\oplus_p k} \subset (A^*)^{\oplus_p k}$，我们有 $(A^{\oplus_p k})^* \subset ((A^*)^{\oplus_p k})^* = (A^*)^{\oplus_p k}$。反过来，若 $x \in (A^*)^{\oplus_p k}$，则可写作 $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \rho_i a_i$，其中 $a_i \in A$、$\rho_i \in [0,1]$、$\lambda_i \ge 0$、$\|\lambda\|_q = 1$.。令 $\rho = \|(\lambda_i \rho_i)_i\|_q \le 1$。若 $\rho = 0$，则 $x = 0$。否则，$x = \rho \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i \rho_i}{\rho} a_i =: \rho \cdot y$，其中 $y \in A^{\oplus_p k}$。这证明了反向包含关系。—

现在假设 $k \ge n+1$。根据定理 2， $A^{\oplus_p k} \cap \mathbb{R}u$ 对每个 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$都是一个区间。应用引理 20，我们推得 $(A^{\oplus_p k})^* \setminus A^{\oplus_p k}$ 要么为空，要么是星形的。

接下来，我们证明 $S_{k+1} = S_k \subset S_n$ 若 $k \ge n+1$。若 $0 \in$ 凸包(A)，则这是显然的，因为在这种情况下，对于 $k \ge n+1$，$S_k = \emptyset$。因此我们假设 $0 \notin$ 凸包(A)。首先，我们证明对于 $k \ge n$，$S_{k+1} \subset S_k$。令 $x \in (A^*)^{\oplus_p (k+1)} \setminus A^{\oplus_p (k+1)}$。显然 $x \notin A^{\oplus_p k}$，因为$A^{\oplus_p k} \subset A^{\oplus_p (k+1)}$。我们来证明 $x \in (A^*)^{\oplus_p k}$。不妨设 $x \ne 0$。由于 $x \in$ 锥(A)，根据 Carath´eodory 定理，我们可以写成 $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$，其中 $1 \le m \le$ 个数不超过 $\{k, n\} \le k$，以及一些 $\lambda_i \ge 0$ 和一些 $a_i \in A$。记作 $x' = \frac{x}{\|\lambda\|_q}$。于是 $x' \in A^{\oplus_p m} \subset A^{\oplus_p k}$。如果有$\|\lambda\|_q \ge 1$，那么就有 $x' \in [0, x]$；又由于 $x \in (A^*)^{\oplus_p (k+1)} \setminus A^{\oplus_p (k+1)}$，且后者是星形的，这将意味着 x' 属于该集合，特别是 $x' \notin A^{\oplus_p (k+1)}$（矛盾）。因此 $\|\lambda\|_q < 1$ 且 $x \in [0, x']$。由于 $x' \in A^{\oplus k}$，我们推得 $x \in (A^{\oplus_p k})^*$，从而对于 $k \ge n$， $S_{k+1} \subset S_k$。

若 $p = \infty$，则根据 Carath´eodory 定理，对所有 $k \ge n+1$，有 $S_k =$ 凸包$(A^*) \setminus$凸包(A)。类似地，当 $p \in (1, \infty)$ 时，我们论证 $S_k = S_{n+1}$ 对所有 $k \ge n+1$ 均成立，这将完成推论 21 的证明。因此，我们只需验证：若 $k \ge n+2$，则 $S_{n+1} \subset S_k$。由于 $(A^*)^{\oplus_p (n+1)} \subset (A^*)^{\oplus_p k}$，只需证明若 $x \in S_{n+1}$，则 $x \notin A^{\oplus_p k}$。反设存在某个 $x \in S_{n+1} \cap A^{\oplus_p k}$，并回顾我们假设 $0 \notin$凸包(A)。我们写作 $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$，其中 $a_i \in A$、$\lambda_i \ge 0$，且 $\|\lambda\|_q = 1$。根据引理 10，我们可以找到大小为 $s \le n$ 的 $I \subset [k]$，以及 $c \in \mathbb{R}_+^I$，使得 $x = \sum_{i \in I} c_i a_i$、$c_i \ge 0$ 和 $\|c\|_q \ge \|\lambda\|_q = 1$。于是 $x' = \|c\|_q^{-1} x \in A^{\oplus_p n} \subset A^{\oplus_p (n+1)}$；并且 $x' = \|c\|_q^{-1} x \in [0, x]$。由于 $x \in S_{n+1}$ 是星形的，我们同样可推出 $x' \in S_{n+1}$ （矛盾）。因此，对于每个 $k \ge n+1$，都有 $S_{n+1} \subset S_k$。结合上面已经建立的反向包含关系，可得对所有 $k \ge n+1$，有 $S_n \supset S_{n+1} = S_k$。 □

注6. 对于 $p = \infty$，包含关系 $S_{n+1} \subset S_n$ 表明 conv$(A^*) \setminus$conv$(A) \subset (A^*)^{\oplus_\infty n} \setminus A^{\oplus_\infty n}$。我们注意到，该包含关系可能是严格的：如果 $A =$ Vert(T)，其中 T 为一个 n-单纯形，$0 \in$ int(T)，那么 conv$(A^*) \setminus$ conv$(A) = \emptyset$，而 $(A^*)^{\oplus_\infty n} \setminus A^{\oplus_\infty n} =$ int(T)。对于 $p \in (1, \infty)$，对同一个A，注意到 $A^{\oplus_p (n+1)}$ 是星形的（根据推论 19），而 int$(T) \subset (A^*)^{\oplus_p n} \setminus A^{\oplus_p n}$，因此 $\emptyset = S_{n+1} \subset S_n$ 也是严格的。更准确地说，对于该例子，我们有 $(A^*)^{\oplus_p n} \setminus A^{\oplus_p n} =int(T_p)$，其中 $T_p =$ conv $\left(\cup_{i=1}^{n+1} \bigoplus_{j \in [n+1] \setminus \{i\}}^{(p)} \{a_j\}\right)$.

4. Hausdorff metric

在本节中，我们证明定理 3，并为两个集合的豪斯多夫距离 L_p-和建立精确的上界。事实上，定理 3 是定理 22、4、26和28的推论，这些定理将在下文中证明。每个定理都从不同角度探讨凸化现象。我们首先给出一个高度依赖于第 L_p3节中推导出的 -和的几何性质的证明。

定理22。 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空紧集，并设 $1 < p < \infty$。那么，对于每个 $k \geq n+1$，

$$d_0\left(A^{\oplus_p k}\right) \leq \max\left\{\min_{a\in A}\|a\|_2, \left(\max_{a\in A}\|a\|_2\right)\left[k^{1/p} - (k-n+1)^{1/p}\right]\right\}. \tag{10}$$

特别地，当 k 足够大时，

$$d_H\left(\frac{1}{k^{1/p}}A^{\oplus_p k}, \operatorname{conv}(0,A)\right) \leq \frac{d_0(A)}{k^{1/p}}.$$

此外，上述界是紧的。

证明。 设 $k \geq n+1$。利用引理 15，可得

$$\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+ : \|x\|_1 \leq (k-n+1)^{1/p}, \|x\|_q \geq 1\right\} \subset \{e_1,\dots,e_n\}^{\oplus_p k}. \tag{11}$$

利用引理 9，每个点 $x \in$ 凸包$(0, A)$ 都可以表示为

$$x = \sum_{i=1}^n c_i a_i, \quad a_i \in A, \quad c_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i \leq 1.$$

定义线性映射 $T:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 $T(e_j) = a_j$ 对 $1 \leq j \leq n$成立。令 $u = k^{1/p}c$。于是，

$$T(u) = k^{1/p}\sum_{i=1}^n c_i T(e_i) = k^{1/p}x, \quad \|u\|_1 = k^{1/p}\|c\|_1 \leq k^{1/p}.$$

由于

$$T(u) \in k^{1/p}\operatorname{conv}(0,A) = k^{1/p}\operatorname{conv}\left(0, \frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right) = \operatorname{conv}\left(0, A^{\oplus_p k}\right),$$

所需不等式（10）由以下断言得出

$$d\left(T(u), A^{\oplus_p k}\right) \leq \max\left\{\min_{a\in A}\|a\|_2, \left(\max_{a\in A}\|a\|_2\right)\left[k^{1/p} - (k-n+1)^{1/p}\right]\right\}.$$

注意，如果 $v \in \{e_1,\dots,e_n\}^{\oplus_p k}$，则

$$T(v) \in T\left(\{e_1,\dots,e_n\}^{\oplus_p k}\right) = \{a_1,\dots,a_n\}^{\oplus_p k} \subset A^{\oplus_p k}. \tag{12}$$

情形1：假设 $\|u\|_q < 1$。令 a_0 为 A 中的一点，使得 $\|a_0\|_2 = \min_{a\in A}\|a\|_2$，并令$t = (1 - \|u\|_q^q)^{1/q}$。由于 $k \geq n+1$，根据 L_p-和的定义，

$$T(u) + ta_0 = \sum_{i=1}^n u_i a_i + ta_0 \in A^{\oplus_p(n+1)} \subset A^{\oplus_p k}.$$

因此，

$$d(T(u), A^{\oplus_p k}) \leq t\|a_0\|_2 \leq \min_{a\in A}\|a\|_2.$$

情形2：如果 $\|u\|_q \geq 1$ 且 $\|u\|_1 \leq (k-n+1)^{1/p}$，那么由（11）可得 $u \in \{e_1,\dots,e_n\}^{\oplus_p k}$从而由（12），$T(u) \in A^{\oplus_p k}$，因此 $d(T(u)\ A^{\oplus_p k}) = 0$。

情况 3：如果 $\|u\|_q \geq 1$ 和 $\|u\|_1 > (k-n+1)^{1/p}$，我们取

$$v = \max\left\{\frac{(k-n+1)^{1/p}}{\|u\|_1}, \frac{1}{\|u\|_q}\right\}u.$$

然后，$\|v\|_q \geq 1$。如果最大值由第一项取得，则 $\|v\|_1 = (k-n+1)^{1/p}$。另一方面，如果最大值由第二项取得，则 $\|v\|_q = 1$。因此，在第一种情况下由（11），在第二种情况下由引理13，我们得到

在这两种情况下均有 $v \in \{e_1, \dots, e_n\}^{\oplus_p k}$。由（12）可知 T（v） $\in A^{\oplus_p k}$。由于 $\|u\|_1 \le k^{1/p}$,

$$\begin{aligned}\|u - v\|_1 &= \left(1 - \max\left\{\frac{(k-n+1)^{1/p}}{\|u\|_1}, \frac{1}{\|u\|_q}\right\}\right)\|u\|_1 \\ &\le \|u\|_1 - (k-n+1)^{1/p} \le k^{1/p} - (k-n+1)^{1/p}.\end{aligned}$$

根据三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}d(T(u), A^{\oplus_p k}) \le \|T(u) - T(v)\|_2 &= \left\|\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)\, a_i\right\|_2 \\ &\le \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|\, \|a_i\|_2 \le \left(\max_{a\in A}\|a\|_2\right)\|u - v\|_1 \\ &\le \left(\max_{a\in A}\|a\|_2\right)\left[k^{1/p} - (k-n+1)^{1/p}\right].\end{aligned}$$

结合所有情形即可证明该结论。对 $x \in \mathrm{conv}(0,\ A)$ 取上确界，得到 (10)。证毕

最后，如果 $d_0(A) = 0$，那么 A 是包含原点的凸集，因此 $A^{\oplus_p k} = k^{1/p} A$。因而 S,

$$d_0\left(\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right) = 0.$$

如果 $d_0(A) > 0$，那么对于充分大的 k，最大值中的两项都不超过 $d_0(A)$。事实上，这可由以下事实得出:

$$\min_{a\in A}\|a\|_2 = d(0, A) \le d_0(A),$$

且对于 $p > 1$,

$$k^{1/p} - (k-n+1)^{1/p} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

最后，我们考虑 $A = \{a\}$ 与 $a \ne 0$。那么，$\frac{1}{k^{1/p}} A^{\oplus_p k} = [k^{-1/p}a, a]$ 且 conv(0, A) $= [0, a]$。因此,

$$d_H\left(k^{-1/p} A^{\oplus_p k}, \mathrm{conv}(0, A)\right) = \frac{\|a\|_2}{k^{1/p}} = \frac{d_0(A)}{k^{1/p}},$$

这验证了界的尖锐性。 □

回顾一下我们在引言中陈述的关于两个平面集合之和的以下尖锐上界。

定理 4。 固定 $1 < p \le \infty$。如果 A、$B \subset \mathbb{R}^2$ 是非空紧集，那么

$$d_0(A \oplus_p B) \le \max\{d_0(A), d_0(B)\}.$$

该界是尖锐的，具体而言，存在非凸的 A和 B，使得等号成立。对于 $p = \infty$，我们有界

$$d(A \oplus_\infty B) \le \max\{d(A), d(B)\}.$$

存在非凸的 A 和 B，使得等号成立。

我们陈述定理 4 证明中的第一个关键引理。该引理由第三作者最初在论文 [20, 24] 中证明。

Le引理 23. 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \subset \mathbb{R}^2$ 为非空紧集。令 $z \in$ 凸包$(\tilde{A}+\tilde{B})$ 使得

$$z \notin \tilde{A} + \operatorname{conv}(\tilde{B}), \qquad z \notin \operatorname{conv}(\tilde{A}) + \tilde{B}.$$

~那么存在互不相同的 a_0、$a_1 \in A$，以及互不相同的 b_0、$b_1 \in B$，使得

$$z \in [a_0, a_1] + [b_0, b_1],$$

并且

$$|a_0 - a_1| \le 2d(\tilde{A}), \qquad |b_0 - b_1| \le 2d(\tilde{B}).$$

此外，区间 $[a_0, a_1]$ 和 $[b_0, b_1]$ 不平行，因此集合 $[a_0, a_1] + [b_0, b_1]$~ ~是一个平行四边形，其顶点包含在 $A + B$ 中。

结合引理23，我们将在下文使用引理 25 ，它将由以下引理推导得出。

引理 24. 对于 $q \in [1, \infty)$，设 A、$B \subset \mathbb{R}^n$ 是两个紧凸集，使得 $1 \le$维数(A),维数(B) $\le n-1$。定义 $P_t = (1-t)^{1/q} A + t^{1/q} B$。那么，若 $z \in \cup_{t\in[0,1]} P_t$，则存在某个 $t_1 \in [0,1]$，使得 $z \in \partial P_{t_1}$ 。

证明。 如果 $z \in A \cup B = \partial P_0 \cup \partial P_1$，则无需证明：因此不妨设 $z \notin A \cup B$。对于 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，记 $h_t(u) = (1-t)^{1/q} h_A(u) + t^{1/q} h_B(u)$。因此

$$P_t = (1-t)^{1/q} A + t^{1/q} B = \{z \in \mathbb{R}^n : \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}, \langle z, u\rangle \le h_t(u)\}.$$

由于 $z \notin B$，存在 $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ 使得 $\langle z,\ u_0\rangle > h_B(u_0)$。由连续性可知，当 t 足够接近 1 时，$\langle z,\ u_0\rangle > h_t(u_0)$（从而 $z \notin P_t$）。这表明 $t_1 < 1$，其中

$$t_1 = \sup\{t \ge 0 : z \in P_t\}.$$

如果有 $z \in \operatorname{int}(P_{t_1})$，那么由紧致性可得 $\min_{u\in\mathbb{S}^{n-1}}(h_{t_1}(u) - \langle z,\ u\rangle) > 0$，这将意味着当 $t > t_1$ 足够接近 t_1 时，$z \in \operatorname{int}(P_t)$，与 t_1 的定义矛盾。因此 $z \in \partial P_{t_1}$。□

作为引理24的一个特例，我们得到：

引理 25。 设 $I = [a_0, a_1]$ 和 $J = [b_0, b_1]$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的不平行线段，使得 t

$$|a_0 - a_1| \le 2r, \qquad |b_0 - b_1| \le 2r,$$

对于某个 $r > 0$。对 $t \in [0,1]$，定义平行四边形

$$P_t := (1-t)^{1/q} I + t^{1/q} J,$$

并将 P_t 的顶点定义为

$$\gamma_{ij}(t) := (1-t)^{1/q} a_i + t^{1/q} b_j, \qquad i, j \in \{0,1\}.$$

如果 $z \in \cup_{t\in[0,1]} P_t$，则存在 $t_1 \in [0,1]$ 使得 $z \in \partial P_{t_1}$。特别地，

$$d(z, \{\gamma_{ij}(t) : 0 \le t \le 1, i, j \in \{0,1\}\}) \le r.$$

证明。对 $A = I$、$B = J$、$n = 2$应用引理 24。由于 I 和 J 不平行，我们确实有 $\dim(I + J) = 2$。若 $z \in I \cup J$，结论显然成立。否则，我们找到了$t_1 \in (0,1)$，使得 $z \in \partial P_{t_1}$，由此推出 z 位于 αI的某个平移上，或位于 βJ的某个平移上，其中 $\alpha = (1-t_1)^{1/q} \in (0,1)$，且 $\beta = t_1^{1/q} \in (0,1)$。因此，存在 $c_{t_1} = \gamma_{ij}(t_1)$ $(i, j \in \{0,1\})$，它是 P_{t_1}的一个顶点，使得 $|z - c_{t_1}| \le \max\{\alpha r, \beta r\} \le r$，如所声称。□

定理4的证明。令 $z \in$ 凸包(0， $A \oplus_p B$)。回顾一下，根据引理12 有

$$\operatorname{conv}(0, A \oplus_p B) = \operatorname{conv}(0, A) \oplus_p \operatorname{conv}(0, B),$$

因此 $z \in$ conv(0， A) $\oplus_p$ conv(0， B)。若 $z \in (\{0\} \cup A) \oplus_p$ conv(0， B)，则记作 $z = t_z^{1/q} a + (1 - t_z)^{1/q} b$，其中 $a \in \{0\} \cup A$、 $b \in$ conv(0， B)，且 $0 \le t_z \le 1$。若 $a \in A$，则有

$$d(z, A \oplus_p B) \le d(z, t_z^{1/q} a + (1 - t_z)^{1/q} B) = (1 - t_z)^{1/q} d(b, B) \le \max\{d_0(A), d_0(B)\}.$$

若 $a = 0$，则 $z = (1 - t_z)^{1/q} b$，因此有 $z \in$ conv(0， B)。于是

$$d(z, A \oplus_p B) \le d(z, B) \le \max\{d_0(A), d_0(B)\}.$$

或者，若 $z \in$ conv(0， A) $\oplus_p (\{0\} \cup B)$，则用相同的方法可证明，d(z， $A \oplus_p B$) 的上界为 max{d_0 (A) $d_0(B)$}。

接下来，我们考虑以下情形:

$$z \notin \operatorname{conv}(0, A) \oplus_p (\{0\} \cup B), \qquad z \notin (\{0\} \cup A) \oplus_p \operatorname{conv}(0, B). \tag{13}$$

由于 $z \in$ 凸包(0， A) $\oplus_p$ 凸包(0， B)，存在 $0 < t_z < 1$ 使得 $z \in t_z^{1/q}$凸包(0， A) $+(1 - t_z)^{1/q}$凸包(0， B)。此外，由条件（13），我们有

$$z \notin t_z^{1/q}(\{0\} \cup A) + (1 - t_z)^{1/q} \operatorname{conv}(0, B), \qquad z \notin t_z^{1/q} \operatorname{conv}(0, A) + (1 - t_z)^{1/q}(\{0\} \cup B).$$

由引理23 及 $\tilde{A} :=$ $t_z^{1/q}(\{0\} \cup A)$ 和 $\tilde{B} :=$ $(1 - t_z)^{1/q}(\{0\} \cup B)$ 可知，存在 a_0、 $a_1 \in \{0\} \cup A$ 和 b_0， $b_1 \in \{0\} \cup B$ 使得线段 $[a_0, a_1]$ 和 $[b_0, b_1]$ 不平行，且

$$z \in t_z^{1/q}[a_0, a_1] + (1 - t_z)^{1/q}[b_0, b_1],$$

并且

$$|a_0 - a_1| \le 2d(\{0\} \cup A), \qquad |b_0 - b_1| \le 2d(\{0\} \cup B).$$

但注意到

$$d(\{0\} \cup A) \le d_0(A), \qquad d(\{0\} \cup B) \le d_0(B),$$

因此，距离 $|a_0 - a_1|$ 和 $|b_0 - b_1|$ 均以上界 2 max{d_0(A) d_0(B)}为界。

如果这些点 a_0、 a_1、 b_0、 b_1 都不是原点，则对25 应用引理 $I :=$ $[a_0, a_1]$ 和$J :=$ $[b_0, b_1]$ 其中 $r :=$ 最大值{d_0(A) d_0(B)}，得到

$$d(z, A \oplus_p B) \le d(z, \{\gamma_{ij}(t) : 0 \le t \le 1, i, j \in \{0, 1\}\}) \le \max\{d_0(A), d_0(B)\}.$$

接下来考虑一个端点为零的情形。设 $[a_0, a_1] = [0, a]$其中 $a \in A$。那么存在 $0 \le \gamma \le 1$ 和 $b \in$ 凸包(0， B)，使得

$$z = t_z^{1/q} \gamma^{1/q} a + (1 - t_z)^{1/q} b.$$

˜ ˜令 $t_z := t_z \gamma$。若 $t_z < 1$，则令

$$\tilde{b} := \left(\frac{1 - t_z}{1 - \tilde{t}_z}\right)^{1/q} b.$$

˜事实上， $b \in$ 凸包(0， B)。于是

$$z = \tilde{t}_z^{1/q} a + (1 - \tilde{t}_z)^{1/q} \tilde{b}$$

我们已经在本证明开头考察过这样的点 z，并发现d(z， $A \oplus_p B$) 的上界为 max{d_0(A) d_0(B)}。如果 $\tilde{t}_z = 1$，那么 $z = a \in A \oplus_p B$ 和 d(z， $A \oplus_p B$) $= 0$。如果其他端点中的任意一个 a_1， b_0， b_1 为 0，同样的技巧也适用。

我们在上文证明了，如果 $z \in$ 凸包$(0,\ A \oplus_p B)$，那么

$$d(z, A \oplus_p B) \le \max\{d_0(A), d_0(B)\},$$

并对所有这样的 z取上确界，即得所需的界。

接下来，我们证明当 $p = \infty$ 时，对于测度 d，最大界成立。令$x \in$ 凸包$(A \oplus_\infty B)$。则存在 $t \in [0,1]$，使得 $x \in$ 凸包(tA) + 凸包$((1-t)B)$。类似地，如果 $x \in tA$ +凸包$((1-t)B)$，或者如果 $x \in$ 凸包(tA) + $(1-t)B$，那么

$$d(x, A \oplus_\infty B) \le \max(d(A), d(B)).$$

否则，根据引理23 存在互异的 a_1、$a_2 \in A$，满足 $\|a_1 - a_2\|_2 \le 2d(A)$；以及互异的$b_1$、$b_2 \in B$，满足 $\|b_1 - b_2\|_2 \le 2d(B)$，使得

$$x \in t[a_1, a_2] + (1-t)[b_1, b_2] \subset [a_1, a_2] \oplus_\infty [b_1, b_2].$$

注意这个公式

$$[a_1, a_2] \oplus_\infty [b_1, b_2] = \bigcup_{j=1}^{2} [\mathrm{conv}([a_1, a_2], b_j) \cup \mathrm{conv}([b_1, b_2], a_j)],$$

其验证是平面几何中的一道练习题。设对于某个 j，有 $x \in$ 凸包$([a_1, a_2], b_j)$。根据定义，我们有 $[b_j, a_1] \cup [b_j, a_2] \subset A \oplus_\infty B$。由此立即可知，$b_j$、$a_1$、$a_2$ 不共线，否则 $x \in A \oplus_\infty B$。于是 x 被限制在三角形凸包$([a_1, a_2], b_j)$内，并且由于边 $[b_j, a_1]$、$[b_j, a_2]$ 包含于 $A \oplus_\infty B$ 中，从 x 到集合 $A \oplus_\infty B$ 的距离至多为区间 $[a_1, a_2]$ 长度的一半，而该区间的长度至多为 $2d(A)$。也就是说，$d(x, A \oplus_\infty B) \le d(A)$。如果对于某个 j，有 $x \in$ 凸包$([b_1, b_2], a_j)$，那么同样的推理给出 $d(x, A \oplus_\infty B) \le d(B)$。无论哪种情况，$d(x, A \oplus_\infty B)$ 都被 $\max(d(A)\ d(B))$ 从上方界定。

为了说明即使两个集合都是非凸的，等号也可能成立，取集合

$$A := [0, 2\alpha e_1] \cup [0, 2\alpha e_2], \qquad B := [0, -2\beta e_1] \cup [0, -2\beta e_2].$$

那么 $d_0(A) = \alpha$ 且 $d_0(B) = \beta$，由此很容易推出 $d_0(A \oplus_p B) = \max\{\alpha, \beta\}$。 □

接下来，我们证明在 $n \ge 3$ 情形下一个精确的双集合界。

定理 26. 固定 $1 \le p < \infty$。若 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 是非空紧集，则

$$d_0(A \oplus_p B)^p \le d_0(A)^p + d_0(B)^p.$$

在 $p = \infty$ 的情形下，我们有

$$d_0(A \oplus_\infty B) \le \max\{d_0(A), d_0(B)\}.$$

证明。 根据 d_0 的定义，我们有 $\mathrm{conv}(0, A) \subset A + d_0(A)B_2^n$，且 $\mathrm{conv}(0, B) \subset B + d_0(B)B_2^n$。于是

$$\begin{aligned} \mathrm{conv}(0, A \oplus_p B) &\subset \mathrm{conv}(0, A) \oplus_p \mathrm{conv}(0, B) \\ &\subset (A + d_0(A)B_2^n) \oplus_p (B + d_0(B)B_2^n) \\ &\subset A \oplus_p B + \|(d_0(A), d_0(B))\|_p B_2^n, \end{aligned}$$

所需的界由此得出。 □

现在我们证明，当 p 时，定理 26 中的幂是最优的；若 $n \ge 3$，则调整 [16, 定理 73]中的反例以适用于 L_p-和。

命题 27。 令 $n \geq 3$ 为整数，固定 $1 < p < \infty$ 并选择 $r > p$。那么对于任意$\alpha > 0$，都存在紧集 A_α、$B_\alpha \subset \mathbb{R}^n$，使得 $d_0(A_\alpha) = d_0(B_\alpha) = \alpha$，并且

$$d_0(A_\alpha \oplus_p B_\alpha) > (d_0(A_\alpha)^r + d_0(B_\alpha)^r)^{1/r}.$$

由此可知，d_0^r 关于 L_p 中紧集的求和具有次可加性，当且仅当 $r \leq p$。此外，如果 $r = p$ 且 $\varepsilon > 0$，则存在紧集$A_{\varepsilon,\,\alpha}$、$B_{\varepsilon,\,\alpha} \subset \mathbb{R}^n$，使得 $d_0(A_{\varepsilon,\,\alpha}) = d_0(B_{\varepsilon,\,\alpha}) = \alpha$，并且

$$d_0(A_{\varepsilon,\alpha} \oplus_p B_{\varepsilon,\alpha}) \geq (1-\varepsilon)(d_0(A_{\varepsilon,\alpha})^p + d_0(B_{\varepsilon,\alpha})^p)^{1/p},$$

这表明定理 *26* 中推导出的不等式是尖锐的。

证明。 我们从论文 [16]中取出这个具体例子。

令 $\theta > 0$ 为稍后指定的参数。对于 $\epsilon \in \{\pm 1\}$，用 A_ϵ 表示线段 $A_\epsilon = [0, (1,\ 0,\ \epsilon\theta)^\top]$，用 B_ϵ 表示线段 $B_\epsilon = [0, (1,\ \epsilon\theta,\ 0)^\top]$。令 $A = A_{-1} \cup A_1$ 和 $B = B_1 \cup B_{-1}$。换言之，若 $\rho \in O(3)$ 表示绕轴 $\mathbb{R}e_1$ 旋转角度 $\pi/2$，则 $B = \rho(A)$。因此，$\mathrm{conv}(A,\ B)$ 是一个顶点位于 0、底面为正方形的棱锥。此外，令 $F_{\varepsilon,\,\delta} := A_\varepsilon \oplus_p B_\delta$（当 $\epsilon,\ \delta \in \{\pm 1\}$ 时），则对于 $p > 1$，可写为:

$$A \oplus_p B = \bigcup_{\epsilon,\delta \in \{-1,1\}} A_\epsilon \oplus_p B_\delta =: \bigcup_{\epsilon,\delta \in \{-1,1\}} F_{\epsilon,\delta}\,.$$

由于 $0 \in A$，并且根据 A 关于 $\mathbb{R}e_1$ 的对称性，可以很容易验证

$$d_0(A) = d(A) = \sup_{z \in \mathrm{conv}(A)} d(z, A) = d\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, A\right) = \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}},$$

并且由于 $B = \rho(A)$，我们还可得 $d_0(B) = d(B) = \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$。

现在来计算 $d_0(A \oplus_p B)$。记 $a_1 = (1, 0, \theta)^\top$ 和 $b_1 = (1, \theta, 0)^\top$。于是，利用$t = 1/2$，可得

$$z_+ := t^{1/q} a_1 + (1-t)^{1/q} b_1 = \left(2^{1/p}, 2^{-1/q}\theta, 2^{-1/q}\theta\right)^\top \in F_{1,1} \subset A \oplus_p B,$$

类似地，$z_- := \left(2^{1/p}, -2^{-1/q}\theta, -2^{-1/q}\theta\right)^\top \in F_{-1,-1} \subset A \oplus_p B$。因此，

$$z = \frac{z_+ + z_-}{2} = (2^{1/p}, 0, 0)^\top \in \mathrm{conv}(A \oplus_p B).$$

由于 $z = \rho(z)$，并且对于任意的 (i, j)，$\in \{\pm 1\}^2$，$F_{i,j} = \rho^k(F_{1,1})$ 对某个 $k = k_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3\}$ 成立，我们看到，对于所有 (i, j)，$d(z, F_{i,j}) = d(z, F_{1,1})$。因此，

$$d(z, A \oplus_p B) = \min_{i,j} d(z, F_{i,j}) = d(z, F_{1,1}).$$

由于 $F_{1,1} \subset$ 张成空间(a_1, b_1)，我们看到 $\mathrm{aff}(F_{1,1}) = u^\perp$，其中 $u = \frac{1}{\sqrt{2+\theta^2}}(-\theta, 1, 1)^\top$。因此，

$$P_{\mathbb{R}u}(z) = \langle z, u\rangle u = -\frac{2^{1/p}\theta}{2+\theta^2}\begin{pmatrix}-\theta\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$P_{u^\perp}(z) = z - P_{\mathbb{R}u}(z) = \begin{pmatrix}2^{1/p}\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{2^{1/p}\theta}{2+\theta^2}\begin{pmatrix}-\theta\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{2^{1/p}}{2+\theta^2}\begin{pmatrix}2\\\theta\\\theta\end{pmatrix}.$$

记 $p_{1,1} = P_{u^\perp}(z) = \frac{2^{1/p}}{2+\theta^2}(2,\theta,\theta)^\top$。我们断言 $p_{1,1} \in F_{1,1}$。事实上，令 $\lambda = \frac{2}{2+\theta^2} \in [0,1]$。由于 $F_{1,1} = [0,a_1] \oplus_p [0,b_1]$，我们可以通过验证以下内容来证明这一点：

$$p_{1,1} = \frac{2^{1/p}}{2+\theta^2}\begin{pmatrix}2\\ \theta\\ \theta\end{pmatrix} = 2^{-1/q}\frac{2}{2+\theta^2}\begin{pmatrix}2\\ \theta\\ \theta\end{pmatrix} = 2^{-1/q}\lambda\begin{pmatrix}2\\ \theta\\ \theta\end{pmatrix} = 2^{-1/q}(\lambda a_1 + \lambda b_1) \in F_{1,1}.$$

因此，$d(z,F_{1,1}) = d(z,u^\perp) = |z-p_{1,1}| = |\langle z,u\rangle| = \frac{2^{1/p}\theta}{\sqrt{2+\theta^2}}$。于是，

$$d(z, A\oplus_p B) = d\left(z, \bigcup_{i,j} F_{i,j}\right) = d(z,F_{1,1}) = \frac{2^{1/p}\theta}{\sqrt{2+\theta^2}}.$$

如果 $r > p$，那么我们有

$$\frac{d(A\oplus_p B)}{(d(A)^r + d(B)^r)^{1/r}} \geq 2^{1/p-1/r}\sqrt{\frac{1+\theta^2}{2+\theta^2}}.$$

当 $\theta \to \infty$ 时，上述平方根趋于 1。由于 $r > p$，我们有 $2^{1/r-1/p} < 1$，因此存在足够大的 θ，使得平方根项严格大于 $2^{1/r-1/p}$，从而该比值大于 1，得到所需的严格不等式。如果 $r = p$，那么$2^{1/p-1/r} = 1$。在这种情况下，只需选取足够大的 θ，使得平方根项大于 $(1-\varepsilon)$，即可得到所需结果。为确保 $d(A) = d(B) = \alpha$，用适当的常数对这些集合进行放缩。□

定理 28。设 $1 < p \leq \infty$，且 A_1、...、A_k 是 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $k \geq n+1$ 的非空紧集。则

$$d_0\left(\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i\right) \leq \max_{I\subset[k]:|I|\leq n}\min_{i\in[k]\setminus I} d_0\left(\bigoplus_{[k]\setminus\{i\}}^{(p)} A_j\right).$$

证明。令 $x \in$ 凸包$(0, \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i)$。于是 $x \in \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}$ 凸包$(0, A_i)$，我们可以应用引理 11 找到一个集合 $I \subset [k]$ 其中至多包含 n 个元素，使得

$$x \in \left(\bigoplus_{i\in I}^{(p)} \operatorname{conv}(0,A_i)\right) \oplus_p \left(\bigoplus_{i\in[k]\setminus I}^{(p)} (\{0\}\cup A_i)\right).$$

取 $i_0 \in [k]\setminus I$。我们有 $x \in \bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)}$ 凸包$(0, A_i) \oplus_p (\{0\}\cup A_{i_0})$。于是我们写成 $x = \sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}} \lambda_i^{1/q} x_i + \lambda_{i_0}^{1/q} x_{i_0}$，其中 $\lambda_i \geq 0$、$\sum_{i\in[k]}\lambda_i = 1$、$x_i \in$ 凸包$(0, A_i)$ 对于 $i \in [k]\setminus\{i_0\}$，且 $x_{i_0} \in \{0\}\cup A_{i_0}$。此外，任意 $y \in \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i$ 都具有如下形式

$$y = \sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}} \tilde{\lambda}_i^{1/q} y_i + \tilde{\lambda}_{i_0}^{1/q} y_{i_0},$$

其中，对于所有 i，$\lambda_i \geq 0$、$\sum_{i\in[k]}\lambda_i = 1$ 和 $y_i \in A_i$。假设 $x_{i_0} \in A_{i_0}$。如果 $\lambda_{i_0} = 1$，那么$x = x_{i_0} \in A_{i_0}$，且 $d(x, \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i) = 0$。如果 $\lambda_{i_0} < 1$，那么将范围限制到元素 y for

˜对于 $\lambda_{i_0}=\lambda_{i_0}$ 且 $y_{i_0}=x_{i_0}$ 的元素，我们有

$$
\begin{aligned}
d\left(x,\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}A_i\right) &= \inf_{y\in\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}A_i}\|x-y\|_2\\
&= \inf_{\substack{\sum_{i\in[k]}\tilde\lambda_i=1\\ \tilde\lambda_i\ge 0}}\left\|\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\lambda_i^{1/q}x_i-\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\tilde\lambda_i^{1/q}y_i+\lambda_{i_0}^{1/q}x_{i_0}-\tilde\lambda_{i_0}^{1/q}y_{i_0}\right\|_2\\
&\le (1-\lambda_{i_0})^{1/q}\inf_{\substack{\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\tilde\lambda_i=1-\lambda_{i_0}\\ \tilde\lambda_i\ge 0}}\left\|\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\left(\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i_0}}\right)^{1/q}x_i-\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\left(\frac{\tilde\lambda_i}{1-\lambda_{i_0}}\right)^{1/q}y_i\right\|_2.
\end{aligned}
$$

现在，设 $z=\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}(\lambda_i(1-\lambda_{i_0})^{-1})^{1/q}x_i$，它属于 $\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)}\mathrm{conv}(0,A_i)$，并注意到上述下确界实际上是对所有 $y\in\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)}A_i$ 取的。因此，上述界意味着

$$
d\left(x,\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}A_i\right)\le d\left(z,\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)}A_i\right)\le d_0\left(\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}A_i\right). \tag{14}
$$

˜若 $x_{i_0}=0$，则限制为那些满足 $\lambda_{i_0}=0$ 的 y，从而得到

$$
\begin{aligned}
d\left(x,\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}A_i\right) &= \inf_{\substack{\sum_{i\in[k]}\tilde\lambda_i=1\\ \tilde\lambda_i\ge 0}}\left\|\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\lambda_i^{1/q}x_i-\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\tilde\lambda_i^{1/q}y_i-\tilde\lambda_{i_0}^{1/q}y_{i_0}\right\|_2\\
&\le \inf_{\substack{\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\tilde\lambda_i=1\\ \tilde\lambda_i\ge 0}}\left\|\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\lambda_i^{1/q}x_i-\sum_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}\tilde\lambda_i^{1/q}y_i\right\|_2\\
&\le d_0\left(\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)}A_i\right),
\end{aligned}
$$

其中，对于最后一个不等式，我们使用了与上文相同的技巧。注意，这是可行的，因为元素 $z=\sum_{[k]\setminus\{i_0\}}\lambda_i^{1/q}x_i$ 属于 $\mathrm{conv}(0,\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}A_i)$。因此，界（14）在任何情况下都对任意 $i_0\in[k]\setminus I$成立，于是

$$
d\left(x,\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}A_i\right)\le\min_{i\in[k]\setminus I}d_0\left(\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i\}}^{(p)}A_i\right)
$$

对所有基数至多为 n 的集合 $I\subset[k]$ 取最大值，得到

$$
d\left(x,\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}A_i\right)\le\max_{I\subset[k]:|I|\le n}\min_{i\in[k]\setminus I}d_0\left(\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i\}}^{(p)}A_i\right)
$$

该结果通过对所有 $x\in$ 凸包$(0,\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}A_i)$ 取上确界而得到。 □

注 7. 正如综述中所指出的 [16], 如果我们考虑特殊情形，其中 $A_i = A$对所有 $i \in [k]$，则我们有界

$$d_0\left(\frac{1}{k^{1/p}}A^{\oplus_p k}\right) \le \left(\frac{k-1}{k}\right)^{1/p} d_0\left(\frac{1}{(k-1)^{1/p}}A^{\oplus_p (k-1)}\right) \le \left(\frac{n}{k}\right)^{1/p} d_0\left(\frac{1}{n^{1/p}}A^{\oplus_p n}\right).$$

这为定理3提供了另一种证明。

5. Effective standard deviation

回顾有效标准差，记作 v，其定义见第1.3节。我们将证明 Cassels 界（3）的以下推广。

定理 6. 设 $1 < p \le \infty$，且 n 为正整数。设 A、$B \subset \mathbb{R}^n$ 为非空紧集，使得 $0 \in \mathrm{conv}(A) \cap \mathrm{conv}(B)$。对于 $n \ge 3$，有

$$v(A \oplus_p B) \le \begin{cases} (v(A)^{2p/(2-p)} + v(B)^{2p/(2-p)})^{(2-p)/2p}, & \text{if } 1 < p < 2, \\ \max\{v(A), v(B)\}, & \text{if } 2 \le p \le \infty. \end{cases}$$

存在非凸的 A 和 B，使得这些界是尖锐的。
对于 $n = 2$，对每个 $p > 1$，都有紧确界 $v(A \oplus_p B) \le \max\{v(A)\ v(B)\}$。

证明。再次地，若 $x \in \mathrm{conv}(A)$，记 $v_A(x)^2 := \inf\{V(X) : \mathrm{supp}(X) \subset A, \mathbb{E}X = x\}$。由于 $0 \in \mathrm{conv}(A) \cap \mathrm{conv}(B)$，由引理 12 可知，$\mathrm{conv}(A \oplus_p B) = \mathrm{conv}(A) \oplus_p \mathrm{conv}(B)$。因此，若 $z \in \mathrm{conv}(A \oplus_p B)$，则可找到 $x_1 \in \mathrm{conv}(A)$、$x_2 \in \mathrm{conv}(B)$ 和 $t_1 \in [0,1]$，使得 $z = t_1^{1/q}x_1 + t_2^{1/q}x_2$，其中 $t_2 = 1 - t_1$。

若 $\sum \lambda_i a_i = x_1$ 和 $\sum \mu_j b_j = x_2$ 分别是 x_1 和 x_2 的两个任意（有限）表示（即两个和都是有限的，$\lambda_i > 0$、$\mu_j > 0$、$a_i \in A$、$b_j \in B$，且 $\sum \lambda_i = \sum \mu_j = 1$），则 $z \in \mathrm{conv}(A \oplus_p B)$ 的一个（有限）表示为：

$$z = t_1^{1/q}x_1 + t_2^{1/q}x_2 = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (t_1^{1/q}a_i + t_2^{1/q}b_j).$$

因此，

$$\begin{aligned} v(z, A \oplus_p B)^2 &\le \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \left|t_1^{1/q}a_i + t_2^{1/q}b_j - z\right|^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \left|t_1^{1/q}(a_i - x_1) + t_2^{1/q}(b_j - x_2)\right|^2 \\ &= t_1^{2/q} \sum \lambda_i |a_i - x_1|^2 + t_2^{2/q} \sum \mu_j |b_j - x_2|^2. \end{aligned}$$

如果 $q > 2$，那么对右侧取下确界，即对 $x_1 = \sum \lambda_i a_i \in$ 凸包(A)；$x_2 = \sum \mu_j b_j \in$ 凸包(B) 的所有可能表示取下确界，可得

$$\begin{aligned} &v(z, A \oplus_p B)^2 \le t_1^{2/q} v(x_1, A)^2 + t_2^{2/q} v(x_2, B)^2 \\ &\le (t_1 + t_2)^{q/2} \cdot \left(v(x_1, A)^{\frac{2q}{q-2}} + v(x_2, B)^{\frac{2q}{q-2}}\right)^{\frac{q-2}{q}} = \left(v(x_1, A)^{\frac{2q}{q-2}} + v(x_2, B)^{\frac{2q}{q-2}}\right)^{\frac{q-2}{q}} \end{aligned}$$

其中我们使用了 H¨尔德不等式，并且 $t_1 + t_2 = 1$。如果 $1 \le q \le 2$，那么根据凸性，我们有

$$v(z, A \oplus_p B)^2 \le t_1^{2/q} v(x_1, A)^2 + t_2^{2/q} v(x_2, B)^2 \le \max\{v(x_1, A)^2, v(x_2, B)^2\}.$$

然后对 $z \in$ 凸包$(A \oplus_p B)$ 取上确界，即可得到所声称的次可加性。

接下来，对于平面情形 $n = 2$，我们解释为什么最大界成立。首先，由于 $0 \in$ 凸包$(A) \cap$ 凸包(B)，引理 12 可应用于此，其中凸包$(A) =$ 凸包$(0, A)$ 和凸包$(B) =$ 凸包$(0, B)$。由于 $d(S) \le v(S)$ 对任意集合 S都成立，因此引理 23 在使用以下内容时仍然有效：

v 代替 d。由于当 $v(S) = d(S)$ 时，若 S 是某个区间端点的集合，则引理 25对于距离函数 $v(\cdot, S)$ 可代替 $d(\cdot, S)$。因此，回顾公式

$$v(S) = \sup_{x\in \mathrm{conv}(S)} v(x, S),$$

如果沿用定理4的证明策略，那么我们就能得到 v 的所需最大界，且等号情形与该例相同。

对于 $n \geq 3$ 的情形，我们来证明这些界的最优性。当 $2 \leq p \leq \infty$ 时，我们采用定理 4 等号情形中的完全相同的等号示例。对于$1 < p < 2$ 的情形，取正数 α_0 和 β_0，使其满足

$$\alpha_0^q = \frac{a^s}{a^s + b^s}, \qquad \beta_0^q = \frac{b^s}{a^s + b^s},$$

其中 $s = 2p/(2 - p)$。于是

$$\sqrt{a^2\alpha_0^2 + b^2\beta_0^2} = (a^s + b^s)^{1/s}.$$

取足够小的 $\lambda > 0$，使得

$$h_A := \lambda\alpha_0^{q-1} \leq a, \qquad h_B := \lambda\beta_0^{q-1} \leq b,$$

并令

$$A := \{0, h_A e_3 + ae_1, h_A e_3 - ae_1\}, \qquad B := \{0, h_B e_3 + be_2, h_B e_3 - be_2\}.$$

直接验证可知，$v(A) = a$ 且 $v(B) = b$。和集$A \oplus_p B$ 中的一般点可写成 $ux + vy$，其中 $x \in A$、$y \in B$ 和 $u^q + v^q = 1$。根据 H¨older 不等式，此类点的 e_3 分量至多为

$$uh_A + vh_B \leq (h_A^p + h_B^p)^{1/p} = \lambda(\alpha_0^q + \beta_0^q)^{1/p} = \lambda.$$

因此，e_3 坐标的形式为 x_3e_3，其中 $x_3 \leq \lambda$。此外，H¨older 不等式取等号当且仅当 $(u, v) = (\alpha_0, \beta_0)$。由此可知，$A \oplus_p B$ 与平面 $x_3 = \lambda$ 的交集恰好是四个点 $\lambda e_3 \pm \alpha_0 ae_1 \pm \beta_0 be_2$。这些点是一个中心为 c 的矩形的顶点：$= \lambda e_3$。

由于 $A \oplus_p B$ 中的每个点的 e_3 分量都满足 $x_3 \leq \lambda$，因此，给出 c 的 $A \oplus_p B$ 中点的任何凸组合都只能使用满足 $x_3 = \lambda$的点。上文已证明，这些点只有该矩形的顶点。设 $c = \sum p_i v_i$，其中 p_i 为正数且总和为 1，而 v_i 是上述矩形的顶点。由于 c是矩形的中心，c到每个顶点的距离都相等，均为 ℓ。于是，

$$\sum p_i \|v_i - c\|_2^2 = \ell^2.$$

初等几何给出

$$\ell = \sqrt{a^2\alpha_0^2 + b^2\beta_0^2} = (a^s + b^s)^{1/s}.$$

将所有内容综合起来可得

$$v(c, A \oplus_p B) = \ell = (a^s + b^s)^{1/s},$$

这验证了该等式。 □

注 8. 设 A, B 是两个紧集，并考虑当 $p > 1$ 接近 1 时的 $A \oplus_p B$。由于 $p \to 1$，在 Hausdorff度量下有

$$A \oplus_p B \longrightarrow \left(\bigcup_{a\in A} [a, a + B]\right) \cup \left(\bigcup_{b\in B} [b, b + A]\right).$$

特别地，$A + B$ 包含于极限集中，但该包含关系可能是严格的。

注意，即使 A 和 B 都包含原点， $A \oplus_p B$ 也未必收敛于$A+B$，当 $p \to 1$时。因此，尽管 $\frac{2p}{2-p} = 2$ 当 $p = 1$时成立，但不能直接从定理 6 （令 $p \to 1$）中恢复Cassels的结果。为说明这一点，取 $n = 2$ 和 $A = \{0, a\}$，$B = \{0, b\}$，其中 $a = e_1$， $b = e_2 + \frac{1}{4}e_1$. 则 $A + B = \{0, a, b, a + b\}$，而 $A \bar{\oplus}_p B$ 当 $p \to 1$ 时的Hausdorff极限为

$$D = [0, a] \cup [0, b] \cup [a, a + b] \cup [b, a + b],$$

它是平行四边形 conv$(A + B)$ 的边界。

应用定理 6，取 $p = 1 + \varepsilon$，其中 $0 < \varepsilon < 1$，可得

$$v^{2\alpha_\varepsilon}(A \oplus_{1+\varepsilon} B) \le v^{2\alpha_\varepsilon}(A) + v^{2\alpha_\varepsilon}(B), \qquad \alpha_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \longrightarrow 1.$$

令 $\varepsilon \to 0$，我们得到 $v^2(D) \le v^2(A)+v^2(B)$。此外，由于 $A+B \subset D$且 conv$(A+B)$ = conv(D)，我们还有 $v^2(D) \le v^2(A + B)$。对于我们的例子，可以验证这个不等式是严格的：计算可得 $v^2(A + B) = \frac{425}{1024}$，而 $v^2(D) = \frac{4}{17}$。因此，由于取极限 $p \to 1$ 所得到的不等式涉及集合 D，而不是 $A + B$，在这个例子中，它严格弱于 Cassels 的次可加性不等式 (3)。换言之，令 $p \to 1$，无法直接从定理 6 得到 $p = 1$ 情形。

现在修改 [16, 定理 6 的证明，2] 以得到关于 L_p-和的以下强次可加性界。

定理 29。 固定 $1 < p \le \infty$。对于整数 $k \ge n + 1$，设 $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集，满足对所有 i 都有 $0 \in$凸包(A_i)。于是

$$v\left(\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i\right) \le \max_{I\subset[k]:|I|\le n} \min_{i\in[k]\setminus I} v\left(\bigoplus_{j\in[k]\setminus\{i\}}^{(p)} A_j\right).$$

证明。 令 $x \in$ 凸包$(\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i)$。由引理 12， $x \in \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)}$凸包$(A_i)$。由引理 11，存在一个集合 $I \subset [k]$，其基数至多为 n，使得

$$x \in \left(\bigoplus_{i\in I}^{(p)} \mathrm{conv}(A_i)\right) \oplus_p \left(\bigoplus_{i\in[k]\setminus I}^{(p)} A_i\right).$$

取 $i_0 \in [k]\setminus I$。再次使用引理 11，可写成

$$x \in \mathrm{conv}\left(\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)} A_i\right) \oplus_p A_{i_0}.$$

存在 $0 \le t \le 1$ 使得 $x = t^{1/q}z + (1 - t)^{1/q}a_0$，其中 $z \in$ 凸包$(\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)} A_i)$ 且 $a_0 \in A_{i_0}$。于是

$$v\left(z, \bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)} A_i\right)^2 = \inf\left\{\sum_m p_m|\alpha_m - z|^2 : z = \sum_m p_m\alpha_m, \sum_m p_m = 1, \alpha_m \in \bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)} A_i\right\}$$

$$\ge \inf\left\{\sum_m p_m|t^{1/q}\alpha_m - t^{1/q}z|^2 : z = \sum_m p_m\alpha_m, \sum_m p_m = 1, \alpha_m \in \bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)} A_i\right\}$$

令 $\alpha_m^* := t^{1/q}\alpha_m + (1 - t)^{1/q}a_0$，并注意到 $x = \sum_m p_m\alpha_m^*$。从 L_p 和的定义也显然可得 $\alpha_m^* \in \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i$。通过加上并减去 $(1 - t)^{1/q}a_0$，上述

下确界至少为

$$\inf\left\{\sum_m p_m|\alpha_m^*-x|^2 : x=\sum_m p_m\alpha_m^*, \sum_m p_m=1, \alpha_m\in\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i\right\} = v\left(x, \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i\right)^2$$

将上述各个界合并起来,

$$v\left(x, \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i\right)^2 \le v\left(z, \bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)} A_i\right)^2.$$

对 $z\in \mathrm{conv}(\bigoplus_{i\in[k]\setminus\{i_0\}}^{(p)} A_i)$ 取上确界，再对 $i_0\in[k]$ 取最小值，可得

$$v\left(x, \bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i\right)^2 \le \min_{i\in[k]\setminus I} v\left(\bigoplus_{j\in[k]\setminus\{i\}}^{(p)} A_j\right)^2$$

然后，如同定理 28 的证明中一样，对所有满足 $I\subset[k]$ 且 $|I|\le n$的情形取最大值，再对所有 $x\in\mathrm{conv}(\bigoplus_{i\in[k]}^{(p)} A_i)$ 取最大值，即可得到所需的界。 □

6. Volume of L_p-sums

本节研究紧集的 L_p-和的体积。对于任意紧集 $A\subset\mathbb{R}^n$ 以及任意 $k\in\mathbb{N}$， L_p-和的定义给出

$$A\subset\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\subset\frac{(\mathrm{conv}(0,A))^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}=\mathrm{conv}(0,A).$$

注意，第二个包含关系可能是严格的。事实上，归一化和不一定包含原点。然而，通过取原点与这些集合的凸包，我们得到

$$\mathrm{conv}(0,A)=\mathrm{conv}\left(0,\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right).$$

下面的定理表明，对于每个固定的 $1<p<\infty$，其体积在 $k\to\infty$ 时收敛于| 凸包(0， A)| 。

定理 7。 设 $1<p<\infty$。如果 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个紧集，那么

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k^{1/p}}A^{\oplus_p k}\right|=|\mathrm{conv}(0,A)|.$$

证明。 我们断言，对于 $k\ge 2n+2$，有

$$\left(1-\frac{n+1}{k}\right)^{1/p}\mathrm{conv}(0,A)\setminus\left(\frac{n+1}{k}\right)^{1/p}\mathrm{conv}(0,A)\subset\frac{1}{k^{1/p}}A^{\oplus_p k}\subset\mathrm{conv}(0,A). \tag{15}$$

第二次包含关系由上述观察可得。现在我们证明第一次包含关系。设 x 是最左侧集合中的一个点。根据 Carath´eodory 定理，我们可以写成

$$x=\sum_{j=1}^{n+1}c_j a_j,\qquad a_j\in A,\quad c_j\ge 0,\quad \left(\frac{n+1}{k}\right)^{1/p}<\sum_{j=1}^{n+1}c_j\le\left(1-\frac{n+1}{k}\right)^{1/p}.$$

令 $u_j=k^{1/p}c_j$ 和 $S=\sum_{j=1}^{n+1}u_j$。由 H¨older 不等式可得

$$\sum_{j=1}^{n+1}u_j^q\ge\frac{S^q}{(n+1)^{q/p}}=\left(\frac{k}{n+1}\right)^{q/p}\left(\sum_{j=1}^{n+1}c_j\right)^q>1.$$

取 $m_j = \lceil u_j S^{p-1} \rceil$. , 则

$$\sum_{j=1}^{n+1} m_j \le S^p + n + 1 \le k,$$

其中最后一个不等式由 $\sum_{j=1}^{n+1} c_j$ 的上界推出。增大一些 m_j，使它们的和恰好等于 k，也就是说， $\sum_{j=1}^{n+1} m_j = k$。此外，

$$\sum_{j:m_j>0} \frac{u_j^q}{m_j^{q/p}} \le \sum_{j:u_j>0} \frac{u_j^q}{u_j^{q-1} S^{(p-1)(q-1)}} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{u_j}{S} = 1.$$

应用引理 13 在维数 $n+1$ 中，我们得到 $u \in \{e_1, \dots, e_{n+1}\}^{\oplus_p k}$。定义线性映射 T: $\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 $T(e_j) = a_j$ 对 $1 \le j \le n+1$成立。因此，

$$k^{1/p} x = T(u) \in T\left(\{e_1, \dots, e_{n+1}\}^{\oplus_p k}\right) \subset \{a_1, \dots, a_{n+1}\}^{\oplus_p k} \subset A^{\oplus_p k},$$

从而证明了第一次包含关系。取体积后，我们得到

$$0 \le \left| \operatorname{conv}(0, A) \setminus \frac{1}{k^{1/p}} A^{\oplus_p k} \right| \le \left[1 - \left(1 - \frac{n+1}{k}\right)^{n/p} + \left(\frac{n+1}{k}\right)^{n/p} \right] |\operatorname{conv}(0, A)| \longrightarrow 0.$$

结合 $\frac{1}{k^{1/p}} A^{\oplus_p k} \subset$凸包(0， A)，可得 $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k^{1/p}} A^{\oplus_p k} \right| = |$凸包(0， A)|. □

注记 9. 对于任意紧集，仅有 Hausdorff 收敛并不能推出体积收敛。因此，上述定理不能由定理22中得到的 Hausdorff 收敛推出。例如，集合

$$E_k := \left\{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right\} \subset \mathbb{R}$$

满足 $d_H(E_k,\ [0,1]) = \frac{1}{2k}$，当 $k \to \infty$ 时收敛到 0，但 $|E_k| = 0$.

注记 10. 我们注意到，上述证明实际上给出了 $1 < p < \infty$ 时体积的收敛速率，

$$|\operatorname{conv}(0, A)| - \left| \frac{1}{k^{1/p}} A^{\oplus_p k} \right| = O\left(k^{-\min\{1, n/p\}}\right), \quad \text{as } k \to \infty.$$

此外，当 $0 \in$ 凸包(A) 时，收敛速率还可以改进。事实上，推论19 表明， $A^{\oplus_p k}$ 在 $k \ge n+1$时是星形的。对包含关系（15）取径向包，可得

$$\left(1 - \frac{n+1}{k}\right)^{1/p} \operatorname{conv}(0, A) \subset \frac{1}{k^{1/p}} A^{\oplus_p k} \subset \operatorname{conv}(0, A), \qquad k \ge 2n+2.$$

因此，在这种情况下，体积的收敛速率为

$$|\operatorname{conv}(0, A)| - \left| \frac{1}{k^{1/p}} A^{\oplus_p k} \right| = O\left(k^{-1}\right).$$

6.1. **关于 L_p-和的 Bobkov、Madiman、Wang猜想。** 在论文 [8], 中，Bobkov、Madiman 和 Wang（BMW）研究了 Brunn–Minkowski不等式的分数阶推广。他们的推广基于分数划分这一概念，其定义如下。设 $m \geq 2$ 为一个整数，设 $\mathcal{G}$ 为 $[m]$的一个非空子集集合，并设 β: $\mathcal{G} \to [0,1]$ 为一个权重函数。若权重满足条件 $\sum_{S\in\mathcal{G}:\ i\in S} \beta(S) = 1$ 对每个 $i \in [m]$ 均成立，则有序对（$\mathcal{G}$, β）称为 $[m]$ 的一个分数划分。

Bobkov、Madiman 和 Wang 猜想，若 $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ 是非空集合，且 $(\mathcal{G}, \beta)$ 是 $[m]$的分数划分，则

$$\left|\sum_{i=1}^{m} A_i\right|^{1/n} \geq \sum_{S\in\mathcal{G}} \beta(S) \left|\sum_{i\in S} A_i\right|^{1/n}. \tag{16}$$

若令 $m = 2$、$\mathcal{G} = \{\{1\},\{2\}\}$，并对每个 i 令 $\beta(\{i\}) = 1$，则 (16) 即为 Brunn–Minkowski 不等式。若集合 A_i 是凸的，则 BMW 猜想成立。对于非凸集合 A_i，已证明 BMW 猜想在 $n \geq 7$时不成立 [14]，而去掉幂 $1/n$ 后则成立 [6]; 后一个界的等号情形见[21]。BMW 猜想与我们对凸化的研究密切相关。我们看到，若$A_i = A$、$\mathcal{G} := \{[m]\backslash\{i\} : i \in [m]\}$，且对每个 $S \in \mathcal{G}$ 都有 $\beta(S) = 1/(m-1)$，则 (16) 化为第 m 个集合平均 $m^{-1}\sum_{i=1}^{m} A$的体积单调性。

下一个定理验证了在集合 A_i 为包含 0 的凸紧集时，BMW猜想的一个 L_p-和版本。

定理 30. 设 $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ 为包含 0 的凸紧集，并设 $(\mathcal{G}, \beta)$ 是 $[m]$ 的一个分数划分。若 $1 < p < \infty$，则

$$\left|\bigoplus_{i\in[m]}^{(p)} A_i\right|^{p/n} \geq \sum_{S\in\mathcal{G}} \beta(S) \left|\bigoplus_{i\in S}^{(p)} A_i\right|^{p/n}.$$

证明。 不难看出

$$\bigoplus_{i\in[m]}^{(p)} A_i = \bigoplus_{S\in\mathcal{G}}^{(p)} \beta(S)^{1/p} \bigoplus_{i\in S}^{(p)} A_i. \tag{17}$$

现在，利用 (17) 和 L_p-Brunn–Minkowski不等式 [18]，得到

$$\left|\bigoplus_{i\in[m]}^{(p)} A_i\right|^{p/n} \geq \sum_{S\in\mathcal{G}} \left|\beta(S)^{1/p} \bigoplus_{i\in S}^{(p)} A_i\right|^{p/n} = \sum_{S\in\mathcal{G}} \beta(S) \left|\bigoplus_{i\in S}^{(p)} A_i\right|^{p/n}.$$

□

接下来，我们给出一个受 [14, 命题 2], 启发的反例，它表明在定理30 中，凸性是必要的。

定理 31. 设 $1 \leq p < \infty$ 且 $n \geq \lceil 7p \rceil$。存在星形紧集 $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{R}^n$，使得

$$|A_1 \oplus_p A_2 \oplus_p A_3|^{p/n} < \frac{1}{2}\left(|A_1 \oplus_p A_2|^{p/n} + |A_1 \oplus_p A_3|^{p/n} + |A_2 \oplus_p A_3|^{p/n}\right).$$

证明。 令 $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$、$Q_1 = [0,1]^m \times \{0\}^{n-m}$ 和 $Q_2 = \{0\}^m \times [0,1]^{n-m}$。考虑这些集合

$$A_1 = Q_1, \qquad A_2 = Q_2, \qquad A_3 = a^{1/p} Q_1 \cup b^{1/p} Q_2,$$

其中我们稍后选择 a, $b > 0$。然后， $|A_1 \oplus_p A_2| = |Q_1 \oplus_p Q_2|$ 并且

$$|A_1 \oplus_p A_3| = |(Q_1 \oplus_p a^{1/p} Q_1) \cup (Q_1 \oplus_p b^{1/p} Q_2)|.$$

由于 $Q_1 \oplus_p a^{1/p} Q_1 \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$，其体积为零。因此，

$$|A_1 \oplus_p A_3| = |Q_1 \oplus_p b^{1/p} Q_2| = b^{(n-m)/p} |Q_1 \oplus_p Q_2|,$$

其中，最后一个等式是通过两次应用以下事实得出的：对于分别包含原点、位于互补正交子空间中且维数分别为 m 和 $n-m$ 的凸体 C 和 D，

$$|C \oplus_p D| = \frac{\Gamma\left(1+\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(1+\frac{n-m}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{q}\right)} |C|_m \, |D|_{n-m}. \tag{18}$$

类似地，我们有 $|A_2 \oplus_p A_3| = a^{m/p} |Q_1 \oplus_p Q_2|$ 和

$$\begin{aligned}
|A_1 \oplus_p A_2 \oplus_p A_3| &= |(Q_1 \oplus_p Q_2 \oplus_p a^{1/p} Q_1) \cup (Q_1 \oplus_p Q_2 \oplus_p b^{1/p} Q_2)| \\
&= \left| \left((1+a)^{1/p} Q_1 \oplus_p Q_2\right) \cup \left(Q_1 \oplus_p (1+b)^{1/p} Q_2\right) \right| \\
&\le \left| \left((1+a)^{1/p} Q_1 \oplus_p Q_2\right) \right| + \left| \left(Q_1 \oplus_p (1+b)^{1/p} Q_2\right) \right| - |Q_1 \oplus_p Q_2| \\
&= \left((1+a)^{m/p} + (1+b)^{(n-m)/p} - 1 \right) |Q_1 \oplus_p Q_2|.
\end{aligned}$$

我们回顾一下广为人知的卡拉马塔不等式：对于任意凸函数 φ，如果 (x, y) 被主序于 (u, v)，也就是说，$u \le x, y \le v$ 且 $u + v = x + y$，那么

$$\varphi(x) + \varphi(y) \le \varphi(u) + \varphi(v).$$

将其应用于 $\varphi(t) = t^{n/(7p)}$，由于 $n \ge 7p$，该函数是凸函数；再结合

$$x = (1+a)^{7m/n}, \quad y = (1+b)^{7(n-m)/n}, \quad u = 1, \quad v = x + y - 1,$$

我们得到

$$\left((1+a)^{m/p} + (1+b)^{(n-m)/p} - 1 \right)^{p/n} \le \left((1+a)^{7m/n} + (1+b)^{7(n-m)/n} - 1 \right)^{1/7}.$$

选择 a，b 使得 $a^{m/n} = b^{(n-m)/n} = 2$。我们需要验证

$$\left(\left(1 + 2^{n/m}\right)^{7m/n} + \left(1 + 2^{n/(n-m)}\right)^{7(n-m)/n} - 1 \right)^{1/7} < \frac{5}{2}. \tag{19}$$

注意到 $t \mapsto \left(1 + 2^{1/t}\right)^{7t}$ 对于 $t > 0$是对数凸的，因此它是凸的。由于 $m = \lfloor n/2 \rfloor$和 $n \ge 7$，我们得到 $\frac{3}{7} \le \frac{m}{n} \le \frac{n-m}{n} \le \frac{4}{7}$。应用卡拉马塔不等式可得

$$\left(1 + 2^{n/m}\right)^{7m/n} + \left(1 + 2^{n/(n-m)}\right)^{7(n-m)/n} \le \left(1 + 2^{7/3}\right)^3 + \left(1 + 2^{7/4}\right)^4 < \left(\frac{5}{2}\right)^7 + 1,$$

其中最后一个不等式可直接计算得到。由于它蕴含（19），证明完成。□

6.2. **体积的最终单调性**。回顾第6.1节，BMW 猜想归结为闵可夫斯基平均的体积的单调性问题。更准确地说，对于非空紧集 $A \subset \mathbb{R}^n$，我们要问序列

$$\left\{ \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} A \right| \right\}_{k \ge 1}$$

在 k上是非递减的。关于 $n \ge 12$，[16, 定理 34]给出了否定答案。然而，Fradelizi、L´angi 和 Zvavitch [14] 证明了，若 A 是星形的，则当维数为 $n = 2$、*3* 时，该体积序列是非递减的；当维数为 $n \ge 4$时，该体积序列最终是非递减的。

我们将为 L_p-和平均值建立类似的结果，证明体积序列

$$\left\{\left|\frac{1}{k^{1/p}}A^{\oplus_p k}\right|\right\}_{k\geq 1}$$

最终单调不减。

我们首先给出一个反例，其构造与 [16], 在 $p=1$时恢复他们的结果相同。

定理 32。 令 $1\leq p<\infty$，并令 $n\geq 2\left\lceil \frac{p}{\ln 2\ln(9/8)}\right\rceil$。存在一个星形集 A，使得

$$\left|\frac{1}{3^{1/p}}A^{\oplus_p 3}\right|<\left|\frac{1}{2^{1/p}}A^{\oplus_p 2}\right|.$$

证明。令 $m=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$和 $A=Q_1\cup Q_2$，其中 $Q_1=[0,1]^m\times\{0\}^{n-m}$、$Q_2=\{0\}^m\times[0,1]^{n-m}$。注意到

$$\frac{1}{2^{1/p}}A^{\oplus_p 2}=\frac{1}{2^{1/p}}\Big((Q_1\oplus_p Q_1)\cup(Q_2\oplus_p Q_2)\cup(Q_1\oplus_p Q_2)\Big).$$

由于 $Q_1\oplus_p Q_1\subset\mathbb{R}^m\times\{0\}^{n-m}$ 和 $Q_2\oplus_p Q_2\subset\{0\}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$，它们的体积为零。因此，$|\frac{1}{2^{1/p}}(A\oplus_p A)|_n=\frac{1}{2^{n/p}}|Q_1\oplus_p Q_2|_n$。接下来，我们计算左侧的体积，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{3^{1/p}}A^{\oplus_p 3}\right|&=\frac{1}{3^{n/p}}\left|(Q_1\oplus_p Q_1\oplus_p Q_2)\cup(Q_1\oplus_p Q_2\oplus_p Q_2)\right|\\&=\frac{1}{3^{n/p}}\left|(2^{1/p}Q_1\oplus_p Q_2)\cup(Q_1\oplus_p 2^{1/p}Q_2)\right|\\&\leq\frac{1}{3^{n/p}}\Big(|2^{1/p}Q_1\oplus_p Q_2|+|Q_1\oplus_p 2^{1/p}Q_2|-|Q_1\oplus_p Q_2|\Big)\\&=\left(\frac{2^{m/p}+2^{(n-m)/p}-1}{3^{n/p}}\right)|Q_1\oplus_p Q_2|,\end{aligned}$$

其中最后一个等式使用了（18）。只需验证：如果 $n\geq 2\left\lceil \frac{p}{\ln 2\ln(9/8)}\right\rceil$，那么

$$\frac{2^{m/p}+2^{(n-m)/p}}{3^{n/p}}\leq\frac{1}{2^{n/p}}.$$

利用 $m=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$，我们有 $\delta:=n-2m\in\{0,1\}$。用 δ 表示，我们希望证明

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\delta/p}+\left(\frac{4}{3}\right)^{\delta/p}\leq\left(\frac{9}{8}\right)^{m/p}.$$

注意

$$m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\geq\left\lceil\frac{p\ln 2}{\ln(9/8)}\right\rceil\geq\frac{p\ln 2}{\ln(9/8)}.$$

那么，$\left(\frac{9}{8}\right)^{m/p}\geq 2$.另一方面，我们考虑定义在 $[0,1]$ 上的函数 ϕ，其定义为 b

y

$$\phi(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{4}{3}\right)^t.$$

注意到 ϕ 是凸的，且 $\phi(0)=\phi(1)=2$，因此我们得到

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\delta/p}+\left(\frac{4}{3}\right)^{\delta/p}\leq 2\leq\left(\frac{9}{8}\right)^{m/p}.$$

□

接下来，我们证明 L_p-和平均值的体积的最终单调性。首先，我们回顾 [14] 中引理 2 的证明所给出的体积估计。

引理 33 ([14, 式 (10)])。 设 $n \geq 2$，且设 $B = \bigcup_{i=1}^{n}[0, e_i]$。若 $k \geq$最大值$\{2,(n-1)(n-2)\}$，且若 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是满足 $B^{\oplus_1 k} \subset M \subset k$凸包$(B)$ 的紧集，则

$$\left|\frac{M+B}{k+1}\right| \geq \theta_{n,k}\left|\frac{M}{k}\right| + (1-\theta_{n,k})|\operatorname{conv}(B)|, \quad \textit{where} \quad \theta_{n,k} = \frac{k^n}{(k-n+2)(k+1)^{n-1}} < 1.$$

引理 34。 设 $n \geq 2$、$1 < p < \infty$，且设 $B = \bigcup_{i=1}^{n}[0, e_i]$。若 $k \geq$最大值$\{2,(n-1)(n-2)\}$，且 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是满足 $B^{\oplus_p k} \subset M \subset k^{1/p}$凸包$(B)$ 的紧集，则

$$\left|\frac{M \oplus_p B}{(k+1)^{1/p}}\right| \geq \left|\frac{M}{k^{1/p}}\right|. \tag{20}$$

当且仅当 $M = k^{1/p}$ 凸包(B) 时，等号成立。此外，存在一个常数 $C(n,k)$ >0，仅依赖于 n 和 k，使得

$$|\operatorname{conv}(B)| - \left|\frac{M}{k^{1/p}}\right| \leq C(n,k)\left(\left|\frac{M \oplus_p B}{(k+1)^{1/p}}\right| - \left|\frac{M}{k^{1/p}}\right|\right). \tag{21}$$

证明。 根据 L_p-和的定义，

$$B^{\oplus_1 k} \subset k^{1/q}B^{\oplus_p k} \subset k^{1/q}M \subset k\operatorname{conv}(B), \qquad \frac{k^{1/q}M+B}{k+1} \subset \frac{M \oplus_p B}{(k+1)^{1/p}} \subset \operatorname{conv}(B).$$

将引理 33应用于 $k^{1/q}M$ 可得

$$\left|\frac{M \oplus_p B}{(k+1)^{1/p}}\right| \geq \left|\frac{k^{1/q}M+B}{k+1}\right| \geq \theta_{n,k}\left|\frac{M}{k^{1/p}}\right| + (1-\theta_{n,k})|\operatorname{conv}(B)|.$$

因此，

$$\left|\frac{M \oplus_p B}{(k+1)^{1/p}}\right| - \left|\frac{M}{k^{1/p}}\right| \geq (1-\theta_{n,k})\left(|\operatorname{conv}(B)| - \left|\frac{M}{k^{1/p}}\right|\right) \geq 0.$$

这证明了两个不等式： $C(n,k) = (1-\theta_{n,k})^{-1}$。

最后，假设等式在 (20) 中成立。由于 M 是紧的，且 $M \subset k^{1/p}$是B的凸包，(21) 表明 $M = k^{1/p}$是B的凸包。反过来，若 $M = k^{1/p}$ 是B的凸包，则

$$\left|\frac{M}{k^{1/p}}\right| = |\operatorname{conv}(B)| \geq \left|\frac{M \oplus_p B}{(k+1)^{1/p}}\right|,$$

其中，最后一个不等式由上述包含关系得出。结合 (20)，可得等式。 □

定理 35。 设 $n \geq 2$、$1 < p < \infty$，且令 A 为紧星形集。则对于每个 $k \geq$最大值$\{2,(n-1)$ $(n-2)\}$，

$$\left|\frac{A^{\oplus_p(k+1)}}{(k+1)^{1/p}}\right| \geq \left|\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right|. \tag{22}$$

当且仅当 A 位于某个真线性子空间中或 $A^{\oplus_p k} = k^{1/p}$凸包 (A) 时，等号成立。

证明。 不妨设 A张成空间 $= \mathbb{R}^n$。令 $\varepsilon > 0$。取一个有限集 $A_0 \subset A$，使得 |凸包(A) \ 凸包$(0, A_0)| < \varepsilon$。由于 $\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \subset$凸包$(A)$，我们得到

$$\left|\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right| - \varepsilon \leq \left|\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \cap \operatorname{conv}(0, A_0)\right|. \tag{23}$$

由于凸包(0, A_0)是一个多胞体，我们可以将其三角剖分为若干两两不相交的满维单纯形的并，且每个单纯形都有一个顶点位于原点。我们将这些单纯形记为

$$T_j = \operatorname{conv}(0, v_{j,1}, \dots, v_{j,n}), \quad v_{j,i} \in A_0, \quad j = 1, \dots, m.$$

对于每个 j，令

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{n} [0, v_{j,i}], \quad M_j = A^{\oplus_p k} \cap k^{1/p} T_j.$$

由于 A 是星形的， $B_j \subset A$。因此， $B_j^{\oplus_p k} \subset M_j \subset k^{1/p} T_j$. 应用可逆线性映射后，引理34给出

$$|T_j| - \left|\frac{M_j}{k^{1/p}}\right| \le C(n,k) \left(\left|\frac{M_j \oplus_p B_j}{(k+1)^{1/p}}\right| - \left|\frac{M_j}{k^{1/p}}\right| \right),$$

其中 $C(n, k)$ 与 j 无关。注意

$$\frac{M_j \oplus_p B_j}{(k+1)^{1/p}} \subset \frac{A^{\oplus_p (k+1)}}{(k+1)^{1/p}} \cap T_j.$$

对 j 求和，得到

$$\begin{aligned} \left|\operatorname{conv}(0, A_0) \setminus \frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right| &= \sum_{j=1}^{m} \left(|T_j| - \left|\frac{M_j}{k^{1/p}}\right| \right) \\ &\le C(n,k) \left(\left|\frac{A^{\oplus_p (k+1)}}{(k+1)^{1/p}}\right| - \left|\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \cap \operatorname{conv}(0, A_0)\right| \right). \end{aligned}$$

由（23），得到

$$\begin{aligned} |\operatorname{conv}(A)| - \left|\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right| &\le \varepsilon + \left|\operatorname{conv}(0, A_0) \setminus \frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right| \\ &\le (1 + C(n,k))\varepsilon + C(n,k) \left(\left|\frac{A^{\oplus_p (k+1)}}{(k+1)^{1/p}}\right| - \left|\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right| \right). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，得到

$$|\operatorname{conv}(A)| - \left|\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right| \le C(n,k) \left(\left|\frac{A^{\oplus_p (k+1)}}{(k+1)^{1/p}}\right| - \left|\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right| \right).$$

左侧非负，从而证明所需的单调性。

For 等号情形，设等式在（22）中成立。前面的估计给出 s

$$\left|\operatorname{conv}(A) \setminus \frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}}\right| = 0.$$

因此，

$$\frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} = \operatorname{conv}(A).$$

反向结论显然，因为

$$\frac{A^{\oplus_p (k+1)}}{(k+1)^{1/p}} \subset \operatorname{conv}(A) = \frac{A^{\oplus_p k}}{(k)^{1/p}},$$

证明完毕。 □

接下来，我们将上述定理推广到满足较弱假设的集合。除了维数为 $n = 3$ 的情形外，这两个定理在 k 上具有相同的下界。

定理 8。 设 $n \geq 2$、 $1 < p < \infty$，且 A 为一个紧集。那么，对于每个$k \geq$最大值$\{n,(n-1)(n-2)\}$,

$$\left| \frac{A^{\oplus_p(k+1)}}{(k+1)^{1/p}} \right| \geq \left| \frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \right|. \tag{4}$$

等式 当且仅当 A 属于真线性子空间或 $A^{\oplus_p k} = k^{1/p}$ 凸包(0， A) 时成立。

证明。 不妨设 span(A) $= \mathbb{R}^n$。回顾一下， $A^* = \bigcup_{a \in A}[0,a]$ 并且，对于 $k \geq n$，定义

$$H_k = (A^*)^{\oplus_p k} \setminus A^{\oplus_p k}.$$

推论 21 表明 H_{k+1} 要么为空，要么是星形的，并且关于 k单调不增。现在，我们应用定理35，

$$\begin{aligned} \left| \frac{A^{\oplus_p(k+1)}}{(k+1)^{1/p}} \right| &= \left| \frac{(A^*)^{\oplus_p(k+1)}}{(k+1)^{1/p}} \right| - \frac{|H_{k+1}|}{(k+1)^{n/p}} \geq \left| \frac{(A^*)^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \right| - \frac{|H_{k+1}|}{(k+1)^{n/p}} \\ &\geq \left| \frac{(A^*)^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \right| - \frac{|H_k|}{(k+1)^{n/p}} \geq \left| \frac{(A^*)^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \right| - \frac{|H_k|}{k^{n/p}} = \left| \frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}} \right|. \end{aligned}$$

这就证明了所需的不等式。

假设（4）中等号成立。那么，上述推导链中的所有不等式都成为等式。第一个不等式取等号，再结合定理 35中的等号情形，可得

$$(A^*)^{\oplus_p k} = k^{1/p} \operatorname{conv}(A^*) = k^{1/p} \operatorname{conv}(0, A).$$

第三个不等式取等号可得 $|H_k| = 0$ 因此 $\left|A^{\oplus_p k}\right| = \left|(A^*)^{\oplus_p k}\right|$。于是， $A^{\oplus_p k} =$(A*) $^{\oplus_p k} = k^{1/p}$ 凸包(0， A)。

反向结论显然成立，因为

$$\frac{A^{\oplus_p(k+1)}}{(k+1)^{1/p}} \subset \operatorname{conv}(0, A) = \frac{A^{\oplus_p k}}{k^{1/p}},$$

至此证明完成。 □

References

[1] Z. Artstein, *Convexification estimates for Minkowski averages in infinite dimensions*, 《纯粹与应用泛函分析》，6（2021），第709–718页。[2] Z. Artstein and V. Kadets, *B-convexity, convexification of Minkowski averages in a Banach space, and SLLN for random sets* 32 2025 61 70 ，《凸分析杂志》，（），第–页。[3] S. Artstein-Avidan, T. Falah, and B. A. Slomka, *Vertex generated polytopes*, 《纯粹与应用泛函分析》，10（2025），第1171–1192页。[4] M. Balko, V. Jelínek, P. Valtr, and B. Walczak, *On the Beer index of convexity and its variants*, 《离散与计算几何》，57（2017），第179–214页。[5] I. Bárány, *A generalization of Carathéodory's theorem*, 《离散数学》，40（1982），第141–152页。[6] F. Barthe and M. Madiman, *Volumes of subset Minkowski sums and the Lyusternik region*, 《离散与计算几何》，71（2024），第823–848页。[7] G. Beer, *The index of convexity and the visibility function*, 《太平洋数学杂志》，44（1973），第59–67页。[8] S. Bobkov, M. Madiman, and L. Wang, *Fractional generalizations of Young and Brunn-Minkowski inequalities* 545 ，载于《集中、函数不等式与等周理论》，《当代数学》丛书第，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2011年，第35–53页。[9] J. W. S. Cassels, *Measures of the non-convexity of sets and the Shapley-Folkman-Starr theorem*, 《剑桥哲学学会数学论文集》，78（1975），第433–436页。[10] N. Dyn and E. Farkhi, *Set-valued approximations with Minkowski averages—convergence and convexification rates* 25 2004 363 377 ，《数值泛函分析与优化》，（），第–页。[11] W. R. Emerson and F. P. Greenleaf *Asymptotic behavior of products $C^p = C + \cdots + C$ in locally*, , 《美国 *compact abelian groups* 145 1969 171 204 数学会汇刊》，（），第–页。

[12] H. Federer, *Curvature measures*, 《美国数学会汇刊》, 93（1959）, 第418–491页。
[13] W. J. Firey, *p-means of convex bodies*, 《斯堪的纳维亚数学杂志》, 10（1962）, 第17–24页。
[14] M. Fradelizi, Z. Lángi, and A. Zvavitch, *Volume of the Minkowski sums of star-shaped sets*, 《美国数学会会刊 B 辑》, 9（2022）, 第358–372页。[15] M. Fradelizi, M. Madiman, A. Marsiglietti, and A. Zvavitch,
Do Minkowski averages get progressively more convex? 354 2016 185 189 ,

《巴黎科学院数学报告》, （）, 第–页。[16] , *The convexification effect of Minkowski summation*, 《EMS 数学科学综述》, 5（2018）, 第1–64页。[17] J. E. Goodman,
On the largest convex polygon contained in a nonconvex n-gon, or how to peel a potato, 《几何专论》, 11（1981）, 第99–106页。[18] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang,
The Brunn-Minkowski-Firey inequality for nonconvex sets, 《应用数学进展》, 48（2012）, 第407–413页。[19] J. Matoušek, *Lectures on discrete geometry*, 《数学研究生教材》第212卷, Springer-Verlag, 纽约, 2002年。[20] M. Meyer, *The Dyn-Farkhi conjecture and the convex hull of a sumset in two dimensions*, 《美国数学会会刊》, 153（2025）, 第4889–4901页。[21] ,
Equality conditions for the fractional superadditive volume inequalities, 《离散与计算几何》, 74（2025）, 第242–269页。[22] , *Measuring the convexity of compact sumsets with the Schneider non-convexity index*, 《不等式与应用杂志》, （2025）, 第103号论文, 共32页。[23] ,
Norm rigidity and equality cases for the Dyn–Farkhi inequality, arXiv预印本 arXiv:2608.13738, （2026年）。[24] , *A sharp p-subadditive bound for the ℓ_p Hausdorff distance from convex hull*, arXiv预印本 arXiv:2604.20387, （2026年）。[25] R. Schneider, *A measure of convexity for compact sets*, 《太平洋数学杂志》, 58（1975）, 第617–625页。[26] R. M. Starr,
Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences, 《计量经济学》: 计量经济学会期刊, （1969）, 第25–38页。[27] P. van Hintum,
The sharp threshold for Hausdorff convexification under Minkowski addition, arXiv预印本 arXiv:2606.10815, （2026年）。[28] R. Wegmann, *Einige Maßzahlen für nichtkonvexe Mengen*, 《巴塞尔数学档案》, 34（1980）, 第69–74页。

（M. Fradelizi） LAMA, Univ Gustave Eiffel,
Univ Paris Est Creteil, 77447 Marne-la-Vallée,
France.
Email address: matthieu.fradelizi@univ-eiffel.fr（A. Manui） Department of Mathematics,
Syracuse University, Syracuse, NY 13244, USA*Email address*: amanui@syr.edu（M. Meyer）
Institut de Mathématiques de Jussieu, Sorbonne Université, CNRS, 4 PlaceJussieu,
75252 Paris, France*Email address*: meyer@imj-prg.fr（M. Szusterman）
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz (CMLS), École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France*Email address*: maud.szusterman@polytechnique.edu（A. Zvavitch）
Department of Mathematical Sciences, Kent State University, Kent, OH 44242,USA
Email address: zvavitch@math.kent.edu