arXiv:2611.32893v1 [math.DG] 24 Nov 2026

Pansu 微分成为幂零李群同态的内在判据

CRISTIAN SOPIO 和 FRANCESCA TRIPALDI

ABSTRACT. 根据 Pansu 定理，Carnot 群之间的 Lipschitz 映射几乎处处可微，且其微分是群同态。当定义域是一个带有生成括号的左不变分布的幂零李群时，Pansu 微分是某个渐近 Carnot 群的同态，该 Carnot 群取决于分次这一辅助选择，而它未必是原群的同态。对于适当的分次选择，我们给出了判断其何时为原群同态的内在判据：该微分必须在一个仅依赖于群及其分布、并来自映到 Carnot 群的泛商的理想上为零。当目标群的步足够小时，该判据自动成立；一个具体例子表明，这一阈值是精确的。在此过程中，我们还准确确定了这一障碍如何依赖于分次的选择。

1. INTRODUCTION

考虑一个幂零李群 G，它带有左不变的生成括号分布，以及一个 Carnot 群H。从 G 到 H 的 Lipschitz 映射几乎处处 Pansu 可微 [4]。当 G 本身是一个 Carnot 群且其第一层为给定分布时，由 Pansu 定理 [11] 可知，这些微分是群同态 $G \to H$。一般而言，Pansu 微分是从 G的切锥出发的一个同态，该切锥是一个 Carnot 群，且不必同构于 G （Mitchell 定理 [1], ，另见定理 2.9）。此外，它可以写成 G 上的映射，但仅在选择了适应于该分布的分次之后。我们给出一个内在判据，用以判定在适当选择分次时，Pansu 微分何时是这两个给定群之间的群同态 $G \to H$，并精确描述该障碍如何依赖于分次的选择。

设 G 是一个连通、单连通的幂零李群，其李代数为 $\mathfrak{g} = (E,\ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$，其中 E 是有限维实向量空间。生成括号子空间 $\Delta \subseteq E$ 定义了一个递增滤过（$\mathcal{F}_i E$）$_{i\geq 0}$：令 $\mathcal{F}_0 E = \{0\}$，并且对于 $i \geq 1$，令 $\mathcal{F}_i E$ 为 Δ 中长度至多为 i 的括号词的线性张成空间。因此，$\mathcal{F}_1 E = \Delta$ 且 $[\mathcal{F}_i E, \mathcal{F}_j E]_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathcal{F}_{i+j} E$。分布步长 是满足 $\mathcal{F}_s E = E$ 的最小整数 s，一般而言 $s \leq S$，其中 S 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零阶。关联分次李代数

$$\mathfrak{v} := \operatorname{gr}_\Delta \mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathfrak{v}_j\ , \quad \mathfrak{v}_j = \mathcal{F}_j E / \mathcal{F}_{j-1} E\,, \tag{1}$$

其括号由 $\mathfrak{g}$ 诱导 是一个 Carnot 代数，其第一层为 $\mathcal{F}_1 E = \Delta$。我们将 $\mathfrak{v}_j$ 称为权 j 层，而 $\mathfrak{v}_j$ 中的非零元素称为权为 j 的齐次元素。对于其他分次向量空间，我们也使用相同的术语。

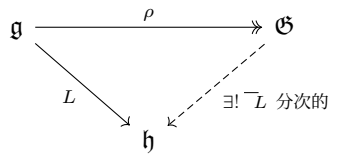
设 H 为一个步数为 m、具有分层李代数 $\mathfrak{h} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathfrak{h}_j$ 的 Carnot 群。记作 $\mathfrak{h}_{\leq i} = \bigoplus_{j=1}^{i} \mathfrak{h}_j$，其中 $\mathfrak{h}_j = \{0\}$表示 $j > m$，对于其他分次代数也采用相同的约定。若李群同态$\Phi\colon\ G \to H$，则称其为水平的，如果其在单位元处的微分 $d\Phi_e\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 满足 $d\Phi_e(\Delta) \subseteq \mathfrak{h}_1$。因此，$d\Phi_e(\mathcal{F}_i E) \subseteq \mathfrak{h}_{\leq i}$，从而 $d\Phi_e$ 诱导出一个分次的李代数同态 $\operatorname{gr} d\Phi_e\colon\ \mathfrak{v} \to \mathfrak{h}$，将每个 $\mathfrak{v}_j$映射到 $\mathfrak{h}_j$中。我们要探讨的问题是：

哪些分次李代数同态 $D\colon\ \mathfrak{v} \to \mathfrak{h}$ 可以写成 $D = \operatorname{gr} d\Phi_e$ 对于水平李群同态 $\Phi\colon\ G \to H$?

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C17,22E25,17B70.*Key words and phrases.* Pansu 可微性、Carnot 群、幂零李群、适配分次、密切群、Lipschitz 映射。

由于 G 是单连通的，这等价于询问是否存在某个李代数同态 $D = \operatorname{gr} L$ $L\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 满足 $L(\Delta) \subseteq \mathfrak{h}_1$。如果这样的 L存在，从而 Φ也存在，那么它是唯一的，因为 $L|_\Delta = D|_{\mathfrak{v}_1}$ 和Δ通过括号生成 $\mathfrak{g}$ （引理 2.1）。

泛水平商。命题 3.1 构造了一个 Carnot 代数 $\mathfrak{G}$ 以及一个满射李代数同态 $\rho\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}$ 满足 $\rho(\Delta) = \mathfrak{G}_1$，并具有如下泛性质：任意李代数同态 $L\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$到满足 $L(\Delta) \subseteq \mathfrak{h}_1$的 Carnot 代数都唯一分解为 $L = L \circ \rho$，其中$L\colon\ \mathfrak{G} \to \mathfrak{h}$ 是分次的：



因此，ker ρ由被每个此类 L消去的元素组成，并且（$\mathfrak{G}$，ρ）只取决于（$\mathfrak{g}$，Δ），差一个唯一的、与商映射相交织的分次同构（推论 3.2）。实际上，$\mathfrak{G}$ 可由 $\mathfrak{g}$ 的一个表示计算得到，其中生成元位于 Δ中，方法是将每个关系替换为其齐次分量。此外，ρ是严格的，即对于每个 i，$\rho(\mathcal{F}_i E) = \mathfrak{G}_{\le i}$，因此其伴随分次同态 $\operatorname{gr}\rho\colon\ \mathfrak{v} \to \mathfrak{G}$将 $\mathfrak{v}_j$ 映 onto $\mathfrak{G}_j$，对于每个 j均成立。

适配分次与缺陷理想。为了比较 $\mathfrak{G}$ 与 E上 $\mathfrak{v}$的实现，我们选择一个适配分次 $W = (W_j)_{j=1}^s$，也就是说，对向量空间 E 进行分次，使其

$$E = \bigoplus_{j=1}^{s} W_j\ , \quad \mathcal{F}_j E = \bigoplus_{i=1}^{j} W_i\ , \quad W_1 = \Delta\,,$$

在 [5]中称为切分次。我们不要求 $[W_i, W_j]_{\mathfrak{g}} \subseteq W_{i+j}$。线性同构 $\sigma_W\colon\ \mathfrak{v} \to E$将 $\xi \in \mathfrak{v}_j = \mathcal{F}_j E / \mathcal{F}_{j-1} E$ 映射到其在 W_j中的唯一代表元。通过 σ_W 传递 $\mathfrak{v}$ 的括号，得到密切代数 $\mathfrak{g}_0^W = (E,\ [\cdot,\cdot]_{0,\ W})$，其中

$$[u,v]_{0,W} := \sigma_W\big([\sigma_W^{-1}(u), \sigma_W^{-1}(v)]_{\mathfrak{v}}\big)\ , \quad u, v \in E\,.$$

该括号缺陷

$$B_W(u,v) := [u,v]_{\mathfrak{g}} - [u,v]_{0,W}\ , \quad u, v \in E\,,$$

衡量原始括号与密切括号之间的不一致，而缺陷理想

$$J_W := \operatorname{Ideal}_{0,W}\big(\{\operatorname{pr}_{W_i} B_W(u,v) : u, v \in E,\ 1 \le i \le s\}\big) \tag{2}$$

是包含每个括号缺陷的 $\mathfrak{g}_0^W$的最小齐次理想。这里，pr_{W_i} 表示沿其他层投影到 W_i 上的投影。为了比较不同的分次，我们将 J_W 传递到固定代数 $\mathfrak{v}$上：子空间 $j_W := \sigma_W^{-1}(J_W)$是 $\mathfrak{v}$的齐次理想。

对于一个分次同态 $D\colon\ \mathfrak{v} \to \mathfrak{h}$，映射 $A_W := D \circ \sigma_W^{-1}$ 是从 $\mathfrak{g}_0^W$到$\mathfrak{h}$的分次同态，并且

$$A_W([u,v]_{\mathfrak{g}}) - [A_W(u), A_W(v)]_{\mathfrak{h}} = A_W(B_W(u,v))\,.$$

Sin其核 A_W 是 $\mathfrak{g}_0^W$的齐次理想，这给出了以下判据（引理 2.7 ）：

$$A_W \text{ preserves } [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \iff J_W \subseteq \ker A_W \iff j_W \subseteq \ker D\,. \tag{3}$$

此外，J_W 也是 $\mathfrak{g}$的理想，并且 $\mathfrak{q}_W := E / J_W$ 是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_0^W$的一个共同 Carnot商，在该商上两个括号一致（命题 3.4）。

倾斜的海森堡分次。令 $\mathfrak{g}$为具有基 X、Y、Z和 $[X,Y]_{\mathfrak{g}} = Z$的三维海森堡代数，并令 $\Delta = $张成$\{X, Y\}$。于是 $\mathfrak{v}_1 = \Delta$和 $\mathfrak{v}_2 = $张成$\{Z\}$，其中 $Z := Z + \Delta$。二者

$$W_1 = \Delta\ ,\ W_2 = \operatorname{span}\{Z\} \quad \text{and} \quad \widetilde{W}_1 = \Delta\ ,\ \widetilde{W}_2 = \operatorname{span}\{Z + X\}$$

是适配分次，但只有第一个是 $\mathfrak{g}$的李代数分次。映射 σ_W 和 $\sigma_{\widetilde{W}}$ 在 $\mathfrak{v}_1$上一致，而 $\sigma_W(Z) = Z$ 和 $\sigma_{\widetilde{W}}(Z) = Z + X$。因此，伴随分次代数相同，但其在 E 上的实现取决于适配分次。

$\widetilde{}$对于 W，括号 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 和$[\cdot,\cdot]_{0,\ W}$重合，因此 $J_W=\{0\}$。对于 W，在基 X，Y，T（其中 $T:=Z+X$）中，我们有

$$[X,Y]_{\mathfrak{g}}=T-X\ ,\quad [X,T]_{\mathfrak{g}}=0\ ,\qquad [Y,T]_{\mathfrak{g}}=X-T\ ,$$
$$[X,Y]_{0,\widetilde{W}}=T\ ,\qquad [X,T]_{0,\widetilde{W}}=0\ ,\quad [Y,T]_{0,\widetilde{W}}=0\,.$$

缺陷 $B_{\widetilde{W}}(X,\ Y)=-X$给出 X，因此$T=[X,Y]_{0,\ \widetilde{W}}$，在 $J_{\widetilde{W}}$ 中，所以 $J_{\widetilde{W}}=$张成$\{X,T\}=$张成空间$\{X,Z\}$。记 $X\in\mathfrak{v}_1$ 为 X，我们得到

$$j_W=\{0\}\quad\text{and}\quad j_{\widetilde{W}}=\operatorname{span}\{\overline{X},\overline{Z}\}\,.$$

同一个代数 $\mathfrak{v}$ 因而具有不同的缺陷理想。由（3），对于单射分次同态$D\colon\ \mathfrak{v}\to\mathfrak{h}$，映射 $D\circ\sigma_W^{-1}$ 保持原括号，而 $D\circ\sigma_{\widetilde{W}}^{-1}$ 则不保持。

极小分次与答案。为了将适配分次的选择与泛商联系起来，考虑这两个线性映射

$$\operatorname{gr}\rho\colon\mathfrak{v}\to\mathfrak{G}\quad\text{and}\quad\rho\circ\sigma_W\colon\mathfrak{v}\to\mathfrak{G}\,.$$

对于 $\xi\in\mathfrak{v}_j$，向量 $\rho(\sigma_W(\xi))$ 和 gr $\rho(\xi)$ 的权重 j分量相同，因为 $\sigma_W(\xi)$ 表示ξ，而较低权重的分量可能取决于 W。这些由修正映射记录

$$t_W:=\rho\circ\sigma_W-\operatorname{gr}\rho\colon\mathfrak{v}\to\mathfrak{G}\ ,\quad t_W(\mathfrak{v}_j)\subseteq\mathfrak{G}_{\le j-1}\,.$$

在 Heisenberg例子中，$\mathfrak{G}=\mathfrak{g}$ 和 $\rho=\mathrm{id}_E$，与任何第一层为 Δ、且 $t_{\widetilde{W}}(Z)=X$的 Carnot 代数一样。令 M_W 为 $\mathfrak{G}$ 由向量 $t_W(\xi)$ 的齐次分量生成的齐次理想$\xi\in\mathfrak{v}$。命题 3.8 给出

$$J_W=\rho^{-1}(M_W)\ ,\quad j_W=(\operatorname{gr}\rho)^{-1}(M_W)\ ,\quad \mathfrak{q}_W\cong\mathfrak{G}/M_W\,. \tag{4}$$

若 W是极小的，则 $t_W=0$，也就是说，若 $\rho\circ\sigma_W=\operatorname{gr}\rho$。极小分次总是存在的，并且根据（4），它们恰好是缺陷理想尽可能小的适配分次，即 $J_W=\ker\rho$ 和 $j_W=\ker(\operatorname{gr}\rho)$。它们不一定唯一：当且仅当 $\ker(\operatorname{gr}\rho)\subseteq\mathfrak{v}_s$（推论 4.2 和注记 4.3）时，它们才唯一。现在我们可以回答这个问题了。

定理 A（见定理 5.2）。对于分次李代数同态 $D\colon\ \mathfrak{v}\to\mathfrak{h}$，以下条件等价：

(i) 对于水平李群同态 $\Phi\colon\ G\to H$，$D=\operatorname{gr}\ d\Phi_e$；(ii) $D\circ\sigma_W^{-1}$ 对某个适配分次 W 保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$；(iii) $D\circ\sigma_W^{-1}$ 对每个最小适配分次 W 保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$；(iv) $D(\ker\operatorname{gr}\rho)=\{0\}$。

在这种情况下，Φ 是唯一的，并且对于 (ii) 中的每个适配分次 W，$D\circ\sigma_W^{-1}=d\Phi_e$.

因此，只需依据（$\mathfrak{g}$、Δ）选取一个最小适配分次，即可对每个这样的 $d\Phi_e$ 以及每个 Carnot 目标群 D 实现 H，而最小分次是具有此性质的唯一适配分次。对于固定的 D，定理 5.2 还描述了所有使 W保持 $D\circ\sigma_W^{-1}$ 的适配分次 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$（参见其后的讨论）。

会出现哪些缺陷理想。对于齐次理想 $M\subseteq\mathfrak{G}$，令 $[\mathfrak{G},M]$为由 $\mathfrak{G}$ 中的元素与 M中的元素的括号所张成的空间，并令

$$\mu_j(M):=\dim\big((M/[\mathfrak{G},M])_j\big)\,.$$

由引理4.4，$\mu_j(M$是理想 的一组齐次生成元中权为 j 的元素的最少个数。令 $\mathfrak{v}_{>j}:=\bigoplus_{i>j}\mathfrak{v}_i$。

定理 B (见定理 4.5)。齐次理想 $M\subseteq\mathfrak{G}$ 等于 M_W，当且仅当存在某个适配分次 W 使得 $\mu_j(M)\le$维数 $\mathfrak{v}_{>j}$对每个 $j\ge1$均成立。

该证明为每个这样的 M构造一个适配分次。结合（4），这就确定了该对（ J_W 和 j_W ）的所有缺陷理想，其中$\mathfrak{g}$，Δ）。由于 $\mathfrak{v}_{>s}=\{0\}$，理想 M_W 无需包含最高权重 s的生成元。例如，海森堡代数的中心永远不是缺陷理想（例 4.6）。命题 4.7 列出了一个五维非分层例子的所有缺陷理想。

Pansu 微分与目标群的步数。赋予 G和 H 由 Δ 和 $\mathfrak{h}_1$上的内积所确定的左不变 Carnot–Carath´eodory 距离，并设 $f\colon\Omega\to H$ 在开集 $\Omega\subseteq G$上是 Lipschitz 的。

对于每一种适配分次 W，映射 f 关于 W 几乎处处 Pansu 可微（定理 2.12）：对于几乎每个 $x \in \in \Omega$，f 在 x处的放大极限，按 E 的膨胀取值（这些膨胀将W_j乘以 t^j），收敛到一个分次同态 $D_P^W f(x)$：$\mathfrak{g}_0^W \to \mathfrak{h}$，即 ***Pansu*** 微分 在 f处关于 x的微分（定义 W （2.11）。

这些微分是同一个内在对象的代表元：存在一个满测度集合 $\Omega_f \subseteq \Omega$，并且对每个 $x \in \Omega f$，都有一个分次同态 $D_P f(x)\colon \mathfrak{v} \to \mathfrak{h}$，即典范 ***Pansu*** 微分，使得$D_P^W f(x) = D_P f(x) \circ \sigma_W^{-1}$对每个适配分次都成立 W (引理 2.13和定义 2.14)。$(\mathfrak{g}, \Delta)$ 的相关不变量是其可见性权重，即齐次理想 ker(gr ρ) 的最低权，

$$r_* := \min\{j \geq 1 : \ker(\operatorname{gr}\rho) \cap \mathfrak{v}_j \neq \{0\}\},$$

当 g 与 $r_* = \infty$ r ρ为单射时（定义 3.3）。定理 A应用于 $D = D_P f(x)$，得出以下结论 .

定理 C（见定理 5.3 和推论 5.4）。设 $f\colon \Omega \to H$ 是 Lipschitz 映射，且 $x \in \Omega f$。存在一个适配分次 W，使得 $D_P^W f(x)$ 保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$，即 $D_P^W f(x)\colon G \to H$是群同态，当且仅当 $D_P f(x)$(ker gr ρ) $= \{0\}$。在这种情况下，每个极小适配分次都具有此性质，并且 $D_P^W f(x) = d\Phi_e$对应唯一的水平同态 $\Phi\colon G \to H$。若 $m < r_*$，则对每个 $x \in \Omega f$ 以及每个 Lipschitz 映射 f，此结论均成立。

最后一个断言成立，是因为 ker(gr ρ) 是齐次的，且位于权至少为 r_*的部分，而 $D_P f(x)$ 将 $\mathfrak{v}_j$ 映入 $\mathfrak{h}_j = \{0\}$，对 $j > m$ 而言：对于步数小于 r_*的目标群，这个障碍不可见。特别是，此时分次可以独立于 f 和 x 来确定。

对于 $m \geq r_*$，判据 $D_P f(x)$(ker gr ρ) $= \{0\}$ 是一个实质性条件，而且界是 $m < r_*$ 的，且为锐界。对于五维代数 N_5，1，取其自然的二维 Δ，商 $\mathfrak{G}$ 是 Engel 代数，且 $r_* = 3$；命题 5.7 给出了一个映入步数为 3 的 Engel 群的多项式接触映射，其 Pansu 微分在每个存在的点上都违反该判据。不过，这个界并非总是必要的。对于例 5.8 中的六维代数对，我们有 $r_* = 2$；而对于映入第一Heisenberg群的映射，即 $m = r_*$，只要关于极小分次的 Pansu 微分处处存在且随点连续，该判据就在每一点成立（命题 5.9）。我们不知道对每个 Lipschitz 映射，同样的结论是否几乎处处成立。相较之下，在上文的 ⁀Heisenberg 例子中，gr ρ 是单射，因此 $r_* = \infty$；而 W 的失败只涉及那个代表元（例 5.6）。

最后，定理 A 在 $\mathfrak{h}$ 仅为分次时也原样成立，而定理C的逐点结论对分次目标群在每个 Pansu 可微点都成立。对于分次目标群，目前尚缺的是：当定义域不是 Carnot 群时，几乎处处存在 Pansu 微分（注 5.5）。

在 [5], 中，适配分次作为切分次出现；该文证明了 Mitchell 定理和 Pansu 渐近定理的定量版本。我们的公共商 $\mathfrak{q}_W$ 与其中的 Carnot 商理想 [5, 定义 3.18 和引理 3.23]密切相关：缺陷理想 J_W 是其中最小的一个（推论 3.5）。密切群的研究可追溯至 Folland 和 Stein [3], ；关于一般滤子流形，参见 [15]。关于幂零李代数及其伴随分次代数的比较，也可见于 [2], ，其中与下中心列适配的分次给出了与伴随 Carnot 群之间定量的次线性双 Lipschitz 比较；以及 [14], ，其中利用正分次构造了 Rumin 复形。我们的关注点则是缺陷理想对适配分次的依赖性、它们的分类，以及由此得到的内在判据。

关于 Lipschitz 映射的应用依赖于几乎处处的 Pansu 可微性：当 G是 Carnot 群时，这一结果归功于 Pansu [11]（另见 [10, 定理 2.1.6]）；一般情形则归功于 Karmanova 和 Vodopyanov [4] 。在目标群方面，Pansu 定理已推广到分次群 [7, 定理 2.11]以及 Banach 齐性群 [9, 定理 1.1]。当定义域是分层群时，局部 Lipschitz 光滑映射可由接触方程刻画 [7, 定理 1.1], ，而分层群上的微分演算则见 [8]。Engel 群是我们尖锐性例子中的目标群，也是步为 3 的最简单 Carnot 群。我们例子中的代数 $N_{5,\ 1}$ 和 $N_{6,\ 2,\ 10}$ 的命名参照了 [6]所列的低维幂零李代数。

第 2 节汇集了关于分次代数、适配分次、缺陷理想、Carnot–Carath´eodory 距离和 Pansu 可微性的记号与预备知识，并以分次变换和典范 Pansu 微分作结。第 3 节构造泛水平商以及适用于

固定适配分次的公共商，定义可见性权重，并通过修正映射联系这两个商。第 4 节用极小分次描述所有适配分次，证明定理 B，并确定海森堡代数以及 N_5 的所有缺陷理想，1。第5 节证明定理 A 和C，并包含关于尖锐性和刚性的例子。

致谢。 第一作者感谢利兹大学数学学院在其访问研究期间给予的热情接待。作者感谢 Andrea Tettamanti 提请他们注意论文 [5] 。

AI 工具的使用。 作者使用 ChatGPT（OpenAI）协助修订手稿，并帮助检查数学论证。作者对最终文本负责。

2. Preliminaries

我们沿用引言中的记号。李代数均假设为有限维实李代数，且李群同态均为光滑的。

2.1. 分次代数与水平同态。 若一个向量空间 V 具有有限直和分解 $V = \bigoplus_{j\geq 1} V_j$，则称其为分次的，并将子空间 V_i 称为层。对于相应的层的和，我们分别记为$V_{\leq i}$、 $V_{<i}$ 和 $V_{>i}$，并将沿其他层的投影记为 pr_{V_j}: $V \to V_j$。若子空间 $U \subseteq V$ 满足 $U = \bigoplus_j (U \cap V_j)$，则称其为齐次的；等价地说，它包含其元素的齐次分量。若 A: $V \to V'$ 是分次向量空间之间的线性映射，则当对每个 j都有 $A(V_j) \subseteq V'_j$时，称其为分次的。由此直接可知，分次线性映射的核和像也都是齐次的。

分次李代数是一个分次向量空间 V，带有满足 $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ 的李括号。若进一步对每个 $j \geq 1$ 都有 $V_{j+1} = [V_1, V_j]$，即它由 V_1 生成，则称其为 Carnot 代数。这种分次称为该李代数的分层。分次的步是满足 $V_j \neq \{0\}$ 的最大 j，在分层的情况下，它与该李代数的幂零阶一致。在分次李代数中，由一组齐次元素生成的理想是齐次的。如果 I 是一个齐次理想，那么V/I 由各层 V_j 的像构成分次；当 V 是时，它是一个 Carnot 代数。

现在回到由李代数 $\mathfrak{g} = (E, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 底层向量空间 E 的子空间 Δ 定义的递增滤过 $(\mathcal{F}_i E)_{i\geq 0}$。根据定义，包含关系 $[\mathcal{F}_i E, \mathcal{F}_j E]_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathcal{F}_{i+j} E$ 是显然的，因为长度为 i 和 j 的两个括号词的括号是一个长度为 $i+j$ 的括号词。因此，$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{v}$ 上诱导出一个分次括号：$= \mathrm{gr}_\Delta \mathfrak{g}$。根据雅可比恒等式，每个长度为 j 的括号词都是括号 $[x_1, [x_2, [\ldots, x_j]\ldots]]$ 的线性组合，其中 $x_i \in \Delta$，因此 $\mathfrak{v}_j = [\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_{j-1}]$，且 $\mathfrak{v}$ 是一个步为 s 的 Carnot 代数。

我们称李代数同态 L: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 到分次李代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ 是水平的，如果 $L(\Delta) \subseteq \mathfrak{h}_1$。注意，在这个定义以及引理2.1、2.3 和2.7中，只使用了 $\mathfrak{h}$的分次，因此 $\mathfrak{h}$ 可以是任意分次李代数，不一定是 Carnot 李代数。这些结果也将应用于从$\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{G}$ 的水平映射，而不是从 $\mathfrak{h}$到 $\mathfrak{G}$。在其他地方，目标李代数必须是 Carnot 群的李代数，所考虑的分次也必然是分层。

引理 2.1. 设 L: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一个到分次李代数的水平李代数同态 *a.*

(i) $L(\mathcal{F}_i E) \subseteq \mathfrak{h}_{\leq i}$ 对任意 i成立。(ii) 公式 $(\mathrm{gr}\, L)(x + \mathcal{F}_{i-1}E) := \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}_i} L(x)$ 对 $x \in \mathcal{F}_i E$ 定义了一个分次李代数同态$\mathrm{gr}\, L$: $\mathfrak{v} \to \mathfrak{h}$。(iii) $L|_\Delta = (\mathrm{gr}\, L)|_{\mathfrak{v}_1}$，并且具有相同伴随分次映射的两个水平同态彼此相同。

证明。 (i) 映射 L 将 Δ 中长度为 $j \leq i$ 的括号词映射为 $\mathfrak{h}_1$中 j 个元素的括号，该括号属于 $\mathfrak{h}_j \subseteq \mathfrak{h}_{\leq i}$。

(ii) 由 (i) 可知， $L(\mathcal{F}_{i-1}E) \subseteq \mathfrak{h}_{\leq i-1}$ 在 $\mathfrak{h}_i$中没有分量，因此 $\mathrm{gr}\, L$ 定义良好，并且按构造是分次的。设 $x \in \mathcal{F}_i E$ 和 $y \in \mathcal{F}_j E$。由 (i) 可知， $L(x) \in \mathfrak{h}_{\leq i}$ 且 $L(y) \in \mathfrak{h}_{\leq j}$，因此 $L([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [L(x)\ L(y)]_{\mathfrak{h}}$ 的权重为$i+j$ 的分量是 $[\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}_i} L(x),\ \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}_j} L(y)]_{\mathfrak{h}}$。由于 x 和 y 在 $\mathfrak{v}$ 中的等价类的括号是 $[x,y]_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{v}_{i+j}$中的等价类，这说明 $\mathrm{gr}\, L$ 保持括号运算。

(iii) 对于 $x \in \Delta = \mathcal{F}_1 E$，我们有 $(\mathrm{gr}\, L)(x) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}_1} L(x) = L(x)$。两个在 Δ 上一致的李代数同态，在其生成的李代数上一致，即 $\mathfrak{g}$。

□

2.2. **适配分次与密切代数。**

定义 2.2。 给定向量空间 E 的递增滤过 $(\mathcal{F}_iE)_{i\geq 0}$，适配分次 是满足以下条件的分次$E=\bigoplus_{j=1}^{s} W_j$：对于每个 j，均有 $\mathcal{F}_jE=\bigoplus_{i=1}^{j} W_i$。特别地，$W_1=\mathcal{F}_1E=\Delta$。

我们不要求 $[W_i,W_j]_{\mathfrak{g}}\subseteq W_{i+j}$。给定一个滤子（$\mathcal{F}_iE$）$_{i\geq 0}$，总可以构造一个适配分次：取 $W_1=\mathcal{F}_1E=\Delta$ 以及 W_j 在 $\mathcal{F}_jE$ 中的 $\mathcal{F}_{j-1}E$ 的任意补空间 $j\geq 2$。

由于 $\mathcal{F}_jE=\mathcal{F}_{j-1}E\oplus W_j$，每个 $\xi\in\mathfrak{v}_j$ 在 W_j中都有唯一的代表元，我们记 σ_W： $\mathfrak{v}\to E$，表示将 ξ 映射到该代表元的线性同构。通过 σ_W 将 $\mathfrak{v}$ 的括号传递过来，得到密切代数 $\mathfrak{g}_0^W=(E,\ [\cdot,\cdot]_{0,\ W})$，其中$[u,v]_{0,\ W}$：$=\sigma_W\big([\sigma_W^{-1}\ (u)\ \ \sigma_W^{-1}\ (v)\ ]_{\mathfrak{v}}\big)$，对于任意 $u,\ v\in E$。我们用子空间 W_j对$\mathfrak{g}_0^W$进行分次，并定义相应的齐次膨胀

$$\delta_t^W\Big(\sum_{j=1}^{s} w_j\Big):=\sum_{j=1}^{s} t^j w_j\ ,\quad w_j\in W_j,\ t>0\,.$$

为了衡量原括号 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 与渐近括号$[\cdot,\cdot]_{0,\ W}$之间的差异，我们将 W 的括号缺陷 定义为双线性映射

$$B_W\colon E\times E\to E\ ,\quad B_W(u,v):=[u,v]_{\mathfrak{g}}-[u,v]_{0,W}\,.$$

引理 2.3。 设 $L\colon\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是到分次李代数中的李代数同态，且 W 是一个适配分次，对每个 j都有 $L(W_j)\subseteq\mathfrak{h}_j$。那么 L 是水平的，且 $\mathrm{gr}\ L=L\circ\sigma_W$。

证明。 L 是水平的，因为根据构造，$W_1=\Delta$。对于 $\xi\in\mathfrak{v}_j$，向量 $\sigma_W(\xi)\in W_j\subseteq\mathcal{F}_jE$表示 ξ，且 $L(\sigma_W(\xi))\in\mathfrak{h}_j$。因此 $(\mathrm{gr}\ L)(\xi)=\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}_j}L(\sigma_W(\xi))=L(\sigma_W(\xi))$。

□

引理 2.4。 设 W 是一个适配分次。

(i) 映射 $\sigma_W\colon\ \mathfrak{v}\to\mathfrak{g}_0^W$是分次李代数同构。因此 $\mathfrak{g}_0^W$是一个步数为s 、第一层为 Δ的 *Carnot* 代数，且膨胀 δ_t^W是 $\mathfrak{g}_0^W$的自同构。(ii) 对于 $u\in W_i$ 和 $v\in W_j$,

$$[u,v]_{0,W}=\mathrm{pr}_{W_{i+j}}[u,v]_{\mathfrak{g}}\ \textit{and}\ B_W(u,v)\in\mathcal{F}_{i+j-1}E\,,$$

采用 $W_k=\{0\}$ 和 $\mathcal{F}_kE=E$ 作为 $k>s$的约定。

(iii) 对于所有 $u,\ v\in E,\ \ \delta_{1/t}^W[\delta_t^Wu,\delta_t^Wv]_{\mathfrak{g}}$关于 t是多项式，并且当 $t\to 0$时收敛到$[u,v]_{0,\ W}$。

证明。 **(i)** 根据$[\cdot,\cdot]_{0,\ W}$的定义，这成立，因为 $\sigma_W(\mathfrak{v}_j)=W_j$。

(ii) 在 $\mathfrak{v}$ 中，u 和 v 的类的括号是 $\mathfrak{v}_{i+j}$中 $[u,v]_{\mathfrak{g}}\in\mathcal{F}_{i+j}E=W_{\leq i+j}$ 的类，其在 W_{i+j}中的代表元为 $\mathrm{pr}_{W_{i+j}}[u,v]_{\mathfrak{g}}$。若 $i+j>s$，两边均为零。无论哪种情况，$B_W(u,\ v)$都是 $[u,v]_{\mathfrak{g}}$中权小于 $i+j$的分量之和。

(iii) 根据双线性，只需考虑 $u\in W_i$ 和 $v\in W_j$，此时

$$\delta_{1/t}^W[\delta_t^Wu,\delta_t^Wv]_{\mathfrak{g}}=\sum_{k\leq i+j} t^{\,i+j-k}\,\mathrm{pr}_{W_k}[u,v]_{\mathfrak{g}}\,,$$

其收敛 s 到 $\mathrm{pr}_{W_{i+j}}[u,v]_{\mathfrak{g}}$as $t\to 0$。由于 $\mathrm{pr}_{W_{i+j}}[u,v]_{\mathfrak{g}}=[u,v]_{0,\ W}$根据（ ii).

□

第 (iii) 部分表明 $\mathfrak{g}_0^W$是将括号按 δ_t^W缩放后的极限。其单连通李群，即密切群 [3, 15], 根据 Mitchell 定理（下文定理 G2.9），是 G的度量切锥。

引理 2.5。 设 W 和 W' 为适配分次，并定义 $C:=\sigma_{W'}\circ\sigma_W^{-1}\colon\ \ E\to E$。则对于每个 j，$C\ (W_j)=W_j'$，C 是分次李代数同构 $\mathfrak{g}_0^W\to\mathfrak{g}_0^{W'}$；对于每个 $t>0$，$C\circ\delta_t^W=\delta_t^{W'}\circ C$，且（$C$ –id）$(W_j)\subseteq\mathcal{F}_{j-1}E$。

证明。 前三个断言由引理 2.4（i）推出，其中 W 以及 W'。对于 $u\in W_j$，向量 u 和C（u）表示同一个类 $\sigma_W^{-1}\ (u)\in\mathfrak{v}_j$，因此它们的差属于 $\mathcal{F}_{j-1}E$。

□

2.3. **缺陷理想**。

定义 2.6。 设 W 为一个适配分次。 W 的缺陷理想 是由括号缺陷的齐次分量生成的 $\mathfrak{g}_0^W$的理想，

$$J_W := \mathrm{Ideal}_{0,W}\big(\{\mathrm{pr}_{W_i} B_W(u,v) : u,v \in E,\ 1 \le i \le s\}\big),$$

并定义 $j_W := \sigma_W^{-1}(J_W) \subseteq \mathfrak{v}$。

由于由齐次元素生成， J_W 是 $\mathfrak{g}_0^W$的齐次理想。因此，它是 E中包含所有 $B_W(u,v)$（其中 $u,v \in E$）、对$[E,\cdot]_{0,W}$封闭，且关于 W为齐次的最小子空间。由于 σ_W 是分次同构， j_W 是 $\mathfrak{v}$的齐次理想。

引理 2.7 （核判据）。 设 $D\colon \mathfrak{v} \to \mathfrak{h}$ 是映入某个分次李代数的分次李代数同态，设 W 是一个适配分次，并令 $A_W := D \circ \sigma_W^{-1}$ 。则

$$A_W \ \textit{preserves}\ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \iff J_W \subseteq \ker A_W \iff j_W \subseteq \ker D\,.$$

在这种情况下， A_W 是一个水平李代数同态，且 分次 $A_W = D$。

*Pro*由。 根据引理 2.4中的 (i)， $A_W\colon \mathfrak{g}_0^W \to \mathfrak{h}$ 是一个分次同态。因此，对于 $u,v \in E$，

$$A_W([u,v]_{\mathfrak{g}}) - [A_W(u),A_W(v)]_{\mathfrak{h}} = A_W([u,v]_{\mathfrak{g}}) - A_W([u,v]_{0,W}) = A_W(B_W(u,v))\,,$$

因此 A_W 保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 当且仅当它湮灭每个括号缺陷。 A_W 的核是 $\mathfrak{g}_0^W$的一个齐次理想，因此这当且仅当 $J_W \subseteq \ker A_W$。应用 σ_W^{-1} 即可得到第二个等价关系。最后，$A_W(W_j) = D(\mathfrak{v}_j) \subseteq \mathfrak{h}_j$，因此 A_W是水平的，并且 $\mathrm{gr}\, A_W = A_W \circ \sigma_W = D$ 由引理 2.3可知。

□

2.4. **群、指数坐标与距离**。 对于一个带有$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{a}}$的幂零李代数 $\mathfrak{a}$，我们将 $\star_{\mathfrak{a}}$ 记作 Baker-Campbell-Hausdorff（BCH）乘积

$$u \star_{\mathfrak{a}} v = u + v + \tfrac{1}{2}[u,v]_{\mathfrak{a}} + \tfrac{1}{12}\big([u,[u,v]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}} + [v,[v,u]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}\big) + \cdots,$$

它是一个有限和。于是 $(\mathfrak{a},\star_{\mathfrak{a}})$ 是具有李代数 $\mathfrak{a}$的单连通李群，并采用指数坐标表示。其单位元是 0，而 u 的逆元是 $-u$。

由于所考虑的群 G 是单连通且幂零的，指数映射 $\mathfrak{g} \to G$ 是一个微分同胚，因此我们可以将 G 与 $(E,\star_{\mathfrak{g}})$ 视为相同，而 Haar测度被选为 E上的 Lebesgue测度。同样地，我们有 Carnot 群 $H = (\mathfrak{h},\star_{\mathfrak{h}})$，并且密切群 是 $G_0^W := (E,\star_{0,W})$，其中 $\star_{0,W}$是$[\cdot,\cdot]_{0,W}$的 BCH 乘积。膨胀 δ_t^W是 G_0^W的自同构，而膨胀$\bar{\delta}_t(\sum_j h_j) = \sum_j t^j h_j$（其中 $h_j \in \mathfrak{h}_j$）是 H的自同构。

引理 2.8。 设 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 为幂零李代数。映射 $\Phi\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ 是李群同态$(\mathfrak{a},\star_{\mathfrak{a}}) \to (\mathfrak{b},\star_{\mathfrak{b}})$ 当且仅当它是李代数同态。特别地，线性映射 $A\colon E \to \mathfrak{h}$对所有 $u,v \in E$满足 $A(u \star_{\mathfrak{g}} v) = A(u) \star_{\mathfrak{h}} A(v)$， 当且仅当它保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$。

证明。 李群同态满足 $\Phi \circ \exp = \exp \circ d\Phi_0$，而在指数坐标下，两个指数映射都是恒等映射，因此 $\Phi = d\Phi_0$是李代数同态。反过来，李代数同态保持 BCH 公式中的每个迭代括号。

□

在 Δ 上固定一个内积，并将其延拓到左不变分布 $x \mapsto d(L_x)_0(\Delta)$上，其中 $L_x(y) = x \star_{\mathfrak{g}} y$。Carnot–Carathéodory 距离 d_G 是水平曲线长度的下确界；根据周–拉舍夫斯基定理，该距离有限、左不变，且诱导出流形拓扑。同理，$d_{0,\,W}$ 表示 G_0^W上的距离，该距离由具有相同内积的 $W_1 = \Delta$ 定义； d_H 则表示 H 上的距离，该距离由 $\mathfrak{h}_1$上的一个内积定义。由于 δ_t^W和 $\bar{\delta}_t$ 是将第一层乘以 t的自同构，

$$d_{0,W}(\delta_t^W u, \delta_t^W v) = t\, d_{0,W}(u,v) \quad \text{and} \quad d_H(\bar{\delta}_t a, \bar{\delta}_t b) = t\, d_H(a,b)\,.$$

其他内积的选择会给出双 Lipschitz 等价距离，因此 Lipschitz 映射$G \to H$ 这一类映射以及下文的 Pansu 可微性概念都不依赖于内积的选择。

对于 $t > 0$置 $d_t^W(u,\ v) := \frac{1}{t}\, d_G(\delta_t^W u,\ \delta_t^W v)$。膨胀 δ_t^W不一定是 G 的自同构，因此一般而言， d_t^W不会与 d_G 重合，但以下结论成立。

定理 2.9 (Mitchell 定理，见 [5, 定理 6。1])。 对于每个适配分次 W 以及每个紧集 $K \subseteq E$,

$$\lim_{t\to 0} \sup_{u,v\in K} \left| d_t^W(u,v) - d_{0,W}(u,v) \right| = 0\,. \tag{5}$$

证明。 对于 u, v 在 0 的某个邻域 U 中，这由定理 6.1], 得出，该定理还给出了收敛速率。对于任意紧集 K，取 $\lambda > 0$ 使得 $\delta_\lambda^W(K) \subseteq U$。由于 $\delta_{t/\lambda}^W \circ \delta_\lambda^W = \delta_t^W$， d_t^W的定义给出

$$d_{t/\lambda}^W\big(\delta_\lambda^W u, \delta_\lambda^W v\big) = \frac{\lambda}{t}\, d_G\big(\delta_t^W u, \delta_t^W v\big) = \lambda\, d_t^W(u,v)\,.$$

由 $d_{0,W}$的齐次性，我们得到

$$d_t^W(u,v) - d_{0,W}(u,v) = \lambda^{-1}\Big(d_{t/\lambda}^W\big(\delta_\lambda^W u, \delta_\lambda^W v\big) - d_{0,W}\big(\delta_\lambda^W u, \delta_\lambda^W v\big)\Big) \quad \text{for all } u, v \in K\,.$$

由于 $\delta_\lambda^W u, \delta_\lambda^W v \in U$，由第一种情况可知，右端当 $t \to 0$ 时在 $K \times K$ 上一致趋于 0。

□

推论 2.10。 对于每个适配分次 W，都存在 $r > 0$ 使得 $\frac{1}{2}\, d_{0,W}(0,u) \le d_G(0,u) \le 2\, d_{0,W}(0,u)$，只要 $d_{0,W}(0,u) \le r$。

证明。 $d_{0,W}$ 关于 0 的单位球面 Σ 是紧集，因为 $d_{0,W}$ 是齐次的，并诱导流形拓扑。将定理 2.9应用于 $K = \Sigma \cup \{0\}$，可得 $r > 0$ 使得 $\frac{1}{2} \le d_t^W(0,v) \le \frac{3}{2}$ 对所有 $v \in \Sigma$ 和$0 < t \le r$均成立。若 $0 < t := d_{0,W}(0,u) \le r$，则由齐次性有 $v := \delta_{1/t}^W u \in \Sigma$，因此

$$d_G(0,u) = d_G\big(\delta_t^W 0, \delta_t^W v\big) = t\, d_t^W(0,v) \in \left[\tfrac{t}{2}, \tfrac{3t}{2}\right],$$

由此得证。

□

2.5. **Pansu 可微性**。

定义 2.11。 设 $\Omega \subseteq G$ 为开集， $f\colon \Omega \to H$, $x \in \Omega$，并设 W 为一个适配分次。对于 $t > 0$，考虑

$$R_{x,t}^W(u) := \bar{\delta}_{1/t}\big(f(x)^{-1} \star_{\mathfrak{h}} f(x \star_{\mathfrak{g}} \delta_t^W u)\big)\,,$$

只要 $x \star_{\mathfrak{g}} \delta_t^W u \in \Omega$，该式就有定义。由于 Ω 是开集，且当 $t \to 0$时， $\delta_t^W \to 0$ 在紧集上一致成立，因此对于任意紧集 $K \subseteq E$ 中的所有 u，只要 t 足够小，该条件就成立。

若存在一个分次李代数群同态 $A\colon \mathfrak{g}_0^W \to \mathfrak{h}$，使得.....，则称映射 f 关于 W 在 处 ***Pansu*** 可微。

$$\lim_{t\to 0} \sup_{u\in K} d_H\big(R_{x,t}^W(u), A(u)\big) = 0 \quad \text{for every compact set } K \subseteq E\,.$$

若情况如此，我们记作 $D_P^W f(x) := A$。根据引理 2.8，它也是一个齐次群同态$D_P^W f(x)\colon\ G_0^W \to H$。

如果 $\mathfrak{g}$ 本身是一个第一层为 Δ 且 W 其分层为 $\mathfrak{g}_0^W = \mathfrak{g}$ 的 Carnot 代数，那么，膨胀δ_t^W是 G的自同构，而定义2.11就是 Pansu 定义 [11]。在这种情况下，下面的定理2.12 就是 Pansu 定理（详细证明见 [10, 定理 2.1。6]）。Pansu 定理也沿着目标方向得到了推广，适用于分次群 [7, 定理 2。11] 以及 Banach 齐性群 [9, 定理 1。1], 而下面的定理 2.12 则放宽了对定义域的假设。

定理 2.12 (Pansu [11] 和 Karmanova-Vodopyanov [4])。 设$\Omega \subseteq G$ 为开集， $f\colon \Omega \to H$ 为 ***Lipschitz***，且 W 为一个适配分次。那么 f 在几乎处处的 $x \in \Omega$处相对于 W 是 ***Pansu*** 可微的。

证明。 我们将 [4, 定理 3.3.5] 应用于 G，使用一个适配于 W的左不变标架，并说明其中所用对象在我们的情形下如何表示。对于每个 j，选取 W_j 中次数为 j 的基（在 [4]中称为次数）。这些基共同构成 E 的一组基 $X_1, \dots, X_n$，它是 G上的左不变向量场标架。左不变向量场的流是右乘，因此 [4] 在 x处的正规坐标为 $y \mapsto x \star_{\mathfrak{g}} y$，其膨胀为 $x \star_{\mathfrak{g}} y \mapsto x \star_{\mathfrak{g}} \delta_t^W y$。左不变标架的结构常数是常数，因此 [4, 定理 2.1.6] 中的幂零切锥就是 $(E, \star_{0,W})$。根据 [4, 定义 2.1.18

和引理 2.1.22]，x 处的局部 Carnot 群是经由 $y \mapsto x \star_{\mathfrak{g}} y$传递的 $(E, \star_{0,W})$。对于 H的分层标架，$f(x)$处的局部 Carnot 群为 H，其距离为 d_H。

因此，这些局部 Carnot 群之间的水平同态为 $x \star_{\mathfrak{g}} y \mapsto f(x) \star_{\mathfrak{h}} A(y)$，其中$A$: $\mathfrak{g}_0^W \to \mathfrak{h}$ 是分次的。采用这些识别后，在 x [4, (1.0.1)] 处的 hc-可微性表述为

$$d_H\big(f(x \star_{\mathfrak{g}} y), f(x) \star_{\mathfrak{h}} A(y)\big) = o\big(d_{0,W}(0,y)\big) \quad \text{as} \quad y \to 0\,,$$

这里我们使用推论2.10 将 $d_G(0,y)$ 替换为 $d_{0,W}(0,y)$。设 $y = \delta_t^W v$，其中 $d_{0,W}(0,v) = 1$，则这表示 $R_{x\,,t}^W$ 在 $d_{0,W}$ 的单位球面上一致收敛到 A；并且根据齐次性，该结论在每个紧集上都成立。最后，根据球盒定理，对于 d_G 和 d_H 是 Lipschitz 的映射，在紧集上相对于 [4] 中使用的拟度量 d_∞ 也是 Lipschitz 的。由此结合 [4, 定理 3.3.5] 即可得到所述结论。

□

我们将 Ω_f^W记为满足以下条件的点集：f 相对于 W Pansu 可微；根据定理 2.12，当 f 为 Lipschitz 映射时，该集合具有满测度。重要的是，对于 Lipschitz 映射 f，在 W的识别 σ_W下，该集合和微分均不依赖于 。

引理 2.13（分次变换）。设 $f\colon \Omega \subseteq G \to H$ 为 *Lipschitz* 映射，设 $x \in \Omega$，并设 W和 W' 为适配分次。若 f 相对于 W在 x 处 *Pansu* 可微，则它也相对于 W'在 x处 *Pansu* 可微，并且

$$D_P^{W'} f(x) \circ \sigma_{W'} = D_P^W f(x) \circ \sigma_W\,.$$

证明。令 $C := \sigma_{W'} \circ \sigma_W^{-1}$ 以及 $P := C - \mathrm{id}_E$。根据引理 2.5，C 是分次李代数同构$\mathfrak{g}_0^W \to \mathfrak{g}_0^{W'}$，$C \circ \delta_t^W = \delta_t^{W'} \circ C$，且 $P(W_j) \subseteq \mathcal{F}_{j-1}E = W_{\le j-1}$。因此 $C\delta_t^W v = \delta_t^W\big(v + e_t(v)\big)$对 $v \in E$成立，其中

$$e_t(v) := \delta_{1/t}^W P \delta_t^W v = \sum_j \sum_{i<j} t^{j-i}\,\mathrm{pr}_{W_i} P(v_j)\,, \quad v = \sum_j v_j,\ v_j \in W_j\,,$$

因此，当 $t \downarrow 0$ 时，$e_t \to 0$ 在紧集上一致收敛。

取一个紧集 $K \subseteq E$ 和一个包含 K 的紧邻域 K'。由 d_G 的左不变性，当 $v \in K$ 和 t 足够小时，使得 v, $v + e_t(v) \in K'$

$$\tfrac{1}{t}\, d_G\big(x \star_{\mathfrak{g}} C\delta_t^W v,\, x \star_{\mathfrak{g}} \delta_t^W v\big) = d_t^W\big(v + e_t(v), v\big) \le d_{0,W}\big(v + e_t(v), v\big) + \sup_{K' \times K'} \big|d_t^W - d_{0,W}\big|\,,$$

根据定理 2.9 以及 $d_{0,\,W}$ 在 K' 上的一致连续性，它关于 $v \in K$ 一致趋于 0。由于$\delta_t^{W'} C v = C\delta_t^W v$，$d_H$ 的左不变性和齐次性以及 f 的 Lipschitz 界可得

$$d_H\big(R_{x,t}^{W'}(Cv), R_{x,t}^W(v)\big) = \tfrac{1}{t}\, d_H\big(f(x \star_{\mathfrak{g}} C\delta_t^W v), f(x \star_{\mathfrak{g}} \delta_t^W v)\big) \longrightarrow 0$$

关于 $v \in K$ 一致成立。因此，$R_{x\,,\,t}^{W'} \circ C$ 在紧集上一致收敛到 $D_P^W f(x)$，也就是说，$R_{x\,t\,,}^{W'}$ 在紧集上一致收敛到 $D_P^W f(x) \circ C^{-1}$。后者是一个分次李代数同态 $\mathfrak{g}_0^{W'} \to \mathfrak{h}$，因此 $D_P^{W'} f(x) = D_P^W f(x) \circ C^{-1}$，这就是所要证明的结论。□

定义 2.14。设 $f\colon \Omega \to H$ 是 Lipschitz 的。根据引理 2.13，集合 $\Omega f := \Omega_f^W$与 W无关，并且具有满测度。对于 $x \in \Omega f$，典范 *Pansu* 微分 在 f 处的 x 是分次李代数同态

$$D_P f(x) := D_P^W f(x) \circ \sigma_W : \mathfrak{v} \to \mathfrak{h}\,,$$

它与 W 无关。等价地，对于每个适配分次 W，$D_P^W f(x) = D_P f(x) \circ \sigma_W^{-1}$。

例 2.15。设 $\mathfrak{g}$、W 和 W 如引言中的倾斜 Heisenberg 例子所示，并记作$u = xX + yY + zZ$。那么 $C := \sigma_{\widetilde{W}} \circ \sigma_W^{-1}$ 固定 X 和 Y，并将 Z 映射到 $T = Z + X$，且

$$\delta_t^{\widetilde{W}} u = \big(t(x - z) + t^2 z\big)X + tyY + t^2 zZ\,.$$

令目标群仍为第一Heisenberg群 $H = G$，其分层为 W，并令 $f\colon G \to G$ 为恒等映射。由于在每个 $p \in G$ 处都有 $f(p)^{-1} \star_{\mathfrak{g}} f(p \star_{\mathfrak{g}} v) = v$，我们得到 $R_{p\,,\,t}^W(u) = u$，并且

$$R_{p,t}^{\widetilde{W}}(u) = \bar{\delta}_{1/t}\big(\delta_t^{\widetilde{W}} u\big) = (x - z + tz)X + yY + zZ \longrightarrow (x - z)X + yY + zZ\,.$$

$\sim$因此 $D_P^W\mathrm{id}(p) = \mathrm{id}_E$。另一方面， $D_P^W\mathrm{id}(p) = C^{-1}$，它将 X、Y、T 映射到 X、Y、Z，这与引理 2.13 一致。二者表示相同的典范微分 $D_P\mathrm{id}(p) = \sigma_W$。映射 C^{-1} 是一个分次的$\sim$李代数同态 $\mathfrak{g}_0^W \to \mathfrak{g}$，但它不保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$：它将 $[X,Y]_{\mathfrak{g}} = Z$ 映射到 $Z - X$。因此，恒等映射的$\sim W$-微分在任何点都不是群同态 $G \to H$。这与$\widetilde{\ }$定理 A 一致，因为 W 是极小的，而 W 不是。

3. Two quotients

本节构造引言中的泛水平商（$\mathfrak{G}$， ρ），它仅取决于（$\mathfrak{g}$， Δ）；并且对每个适配分次 W，构造公共商 $\mathfrak{q}_W := E/J_W$它是 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{g}_0^W$的公共商。它们的泛性质涉及不同类别的同态：对于 $\mathfrak{G}$，是水平同态；对于 W，是保持其层的同态。第 3.3 节证明 $\mathfrak{q}_W$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个商，并确定其核。

3.1. 泛水平商。 设 $\mathcal{L}(\Delta) = \bigoplus_{j\ge 1}\mathcal{L}_j(\Delta)$ 是向量空间 Δ 上按括号长度分次的自由李代数，因此 $\mathcal{L}_1(\Delta) = \Delta$ 和 $\mathcal{L}_j(\Delta)$ 由 Δ 中 j 个元素的括号张成。根据我们的定义，这些都是权为 j 的元素。从 Δ 到一个李代数的每个线性映射，都唯一地延拓为一个定义在 $\mathcal{L}(\Delta)$ [12] 上的李代数同态。令

$$\mathrm{ev}\colon \mathcal{L}(\Delta) \to \mathfrak{g}$$

是延拓包含映射 $\Delta \subseteq E$ 的同态：它将 Δ 中元素的形式括号映射到 $\mathfrak{g}$ 中。由于 $\mathcal{F}_iE$ 由 Δ 中长度不超过 i 的括号词张成，因此我们有

$$\mathrm{ev}\left(\bigoplus_{j\le i}\mathcal{L}_j(\Delta)\right) = \mathcal{F}_iE \quad \text{for every } i\,. \tag{6}$$

特别地，同态 ev 是满射的。

给定 $R := \ker \mathrm{ev}$，令 R^{h} 为 $\mathcal{L}(\Delta)$ 中由 R 各元素的齐次分量生成的理想。定义

$$\mathfrak{G} := \mathcal{L}(\Delta)/R^{\mathrm{h}} \quad \text{and} \quad \rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}\,, \quad \rho(\mathrm{ev}(\xi)) := \xi + R^{\mathrm{h}}\,.$$

映射 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}$ 定义良好，因为 $R \subseteq R^{\mathrm{h}}$。此外，我们可以用层 $\mathcal{L}_i(\Delta)$ 的像 $\mathfrak{G}_i$ 为 $\mathfrak{G}$ 配备一个分次。

命题 3.1 (泛水平商)。 代数 $\mathfrak{G}$ 是 *Carnot* 代数，且对于任意 $j > s$，有 $\mathfrak{G}_j = \{0\}$，其中 s 是分布步长，而 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}$ 是一个满足 $\rho(\Delta) = \mathfrak{G}_1$ 的满射李代数同态。此外：

(i) 映射 ρ 是严格的：

$$\rho(\mathcal{F}_iE) = \mathfrak{G}_{\le i} \quad \textit{for every } i\,. \tag{7}$$

Hence $\mathrm{gr}\,\rho$： $\mathfrak{v} \to \mathfrak{G}$ 是一个分次李代数同态，对每个 $\mathfrak{v}_j$ 都将其满射到 $\mathfrak{G}_j$ j.

（ii）对于每个 *Carnot* 代数 $\mathfrak{h}$ 以及每个水平李代数同态 L： $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，存在唯一的分次李代数同态 L： $\mathfrak{G} \to \mathfrak{h}$，使得 $L = L \circ \rho$。它满足 $\mathrm{gr}\,L = L \circ \mathrm{gr}\,\rho$。

证明。 若 $j > s$ 且 $\xi \in \mathcal{L}_j$（Δ），则 $\mathrm{ev}(\xi) \in E = \mathcal{F}_sE$，因此由（6）可知存在 $\eta \in \bigoplus_{k\le s}\mathcal{L}_k$（$\Delta$），使得 $\mathrm{ev}(\eta) = \mathrm{ev}(\xi)$。于是 $\xi - \eta \in R$，其权重 j 分量为 ξ，因为 η 没有权重 $j > s$ 分量。因此 $\xi \in R^{\mathrm{h}}$，且 $\mathfrak{G}_j = \{0\}$ 对 $j > s$成立。

$\mathfrak{G}$的分次是李代数分次，并且 $\mathfrak{G}$ 由 $\mathfrak{G}_1$ 生成，因为 $\mathcal{L}(\Delta)$ 由 Δ生成，因此 $\mathfrak{G}$ 是一个 Carnot 代数。此外，由于 ev 是一个满同态，且 $\rho \circ \mathrm{ev}$ 是 $\mathcal{L}(\Delta)$ 的商映射，所以映射 ρ 也是一个满同态。

(i) 包含关系 $\rho(\mathcal{F}_iE) \subseteq \mathfrak{G}_{\le i}$ 由构造可直接得到。反之， $\mathfrak{G}_{\le i}$ 中的每个元素都是某个 $\eta \in \bigoplus_{k\le i}\mathcal{L}_k(\Delta)$ 的 $\rho(\mathrm{ev}(\eta))$，且 $\mathrm{ev}(\eta) \in \mathcal{F}_iE$。这就证明了 (7)。对于 $i = 1$，它表示为 $\rho(\Delta) = \mathfrak{G}_1$，即 ρ 是水平的，因此引理2.1(ii)表明，$\mathrm{gr}\,\rho$ 是分次李代数同态。最后，给定$\zeta \in \mathfrak{G}_j$，我们可以选取 $x \in \mathcal{F}_jE$，使得 $\rho(x) = \zeta$，从而 $\mathrm{gr}\,\rho(x + \mathcal{F}_{j-1}E) = \mathrm{pr}^{\mathfrak{G}_j}\rho(x) = \zeta$，也就是说，$\mathrm{gr}\ \rho$将 $\mathfrak{v}_j$映 onto $\mathfrak{G}_j$。

(ii) 同态 $L \circ \mathrm{ev}$ 将 $\mathcal{L}_j(\Delta)$ 映入 $\mathfrak{h}_j$，因为 $\mathcal{L}_j(\Delta)$ 由 Δ 中 j 个元素的括号张成，且 $L(\Delta) \subseteq \mathfrak{h}_1$。此外，它在 R 上为零，因此若 $r = \sum_j r_j \in R$ 满足 $r_j \in \mathcal{L}_j(\Delta)$，则向量

$L \circ \mathrm{ev}(r_j) \in \mathfrak{h}_j$ 位于不同的层中，因此各自都为零。因此，理想 $\ker(L \circ \mathrm{ev})$ 包含 R^{h}，而 $L \circ \mathrm{ev}$ 诱导出一个分次同态 $\underline{L}\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{h}$，满足 $L \circ \rho \circ \mathrm{ev} = L \circ \overline{\mathrm{ev}}$，也就是说，$\underline{L} \circ \rho = L$。由于 ρ 是满射，该同态是唯一的。最后，对于 $x \in \mathcal{F}_j E$，由于 L 是分次的，

$$\operatorname{gr} L(x + \mathcal{F}_{j-1}E) = \operatorname{pr}_{\mathfrak{h}_j} \overline{L} \circ \rho(x) = \overline{L} \circ \operatorname{pr}_{\mathfrak{G}_j} \rho(x) = \overline{L} \circ \operatorname{gr} \rho(x + \mathcal{F}_{j-1}E)\,.$$

□

推论 3.2。

(i) 核 ρ 是从 $\mathfrak{g}$ 到 *Carnot* 代数的所有水平同态的核的交集。(ii) 设 $\mathfrak{G}'$ 是一个 *Carnot* 代数，且 $\rho'\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}'$ 是一个水平同态，使得从 $\mathfrak{g}$ 到 *Carnot* 代数的每个水平同态 L 都是某个唯一的分次同态 L' 的 $L = \underline{L'} \circ \rho'$。那么存在唯一的分次同构 $\phi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$，满足 $\rho' = \phi \circ \rho$。(iii) 如果集合 S 作为理想生成 R，那么 R^{h} 就是由 S中各元素的齐次分量生成的理想。

Proof. (i) 每个这样的 L 都满足 $\ker \rho \subseteq \ker L$，因为 $L = \underline{L \circ \rho}$，而且 ρ本身就是其中之一 m.

(ii) 命题 3.1(ii) 应用于 ρ' 给出一个分次同态 ϕ，满足 $\rho' = \phi \circ \rho$；根据假设，存在一个分次同态 ψ 使得 $\rho = \psi \circ \rho'$。于是 $\psi \circ \phi \circ \rho = \rho$，因此根据 ρ的满射性，$\psi \circ \phi =$ 为恒等映射。此外，根据唯一性假设，$\phi \circ \psi \circ \rho' = \rho'$ 蕴含 $\phi \circ \psi =$ 为恒等映射。映射 ϕ 是唯一的，因为 ρ 是满射的。

(iii) 令 I 为由 S 中元素的齐次分量生成的理想。由于 $S \subseteq R$，这些分量属于 R^{h}，因此 $I \subseteq R^{\mathrm{h}}$。反之，$I$ 包含 S 中的每个元素，所以 $R \subseteq I$；又由于 I 是齐次的，它包含 R 中元素的齐次分量，即 $R^{\mathrm{h}} \subseteq I$。□

(iii) 部分说明了实际计算 $\mathfrak{G}$ 的方法：具有 Δ 中生成元的 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，给出了具有相同生成元的 $\mathfrak{G}$ 的一个表示，其中每个关系都被其齐次分量所替代。例如，取引言中的海森堡代数，但令 $\Delta = E$。于是生成元 X、Y、Z 的权都为 1，因此关系 $[X,Y] - Z$ 具有齐次分量 $[X,Y]$（权为 2）和 $-Z$（权为 1）。根据 (iii)，它们在 $\mathfrak{G}$ 中都为零，因此 $\mathfrak{G}$ 是一个维数为 2 的阿贝尔代数，由 X 和 Y 的像张成，且 $\rho(Z) = 0$。特别地，这表明当 $\Delta \cap [E,E]_{\mathfrak{g}} \neq \{0\}$ 时，$\rho|_{\Delta}$ 不一定是单射。

定义 3.3。$(\mathfrak{g}, \Delta)$ 的可见性权重 是齐次理想 $\ker(\operatorname{gr}\rho)$ 的最低权，

$$r_* := \min\bigl\{j \geq 1 : \ker(\operatorname{gr}\rho) \cap \mathfrak{v}_j \neq \{0\}\bigr\}\,,$$

其中 $r_* = \infty$ 当 $\operatorname{gr}\rho$ 是单射时。

对于上述带有 $\Delta = E$的海森堡代数，$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 = E$和 $\operatorname{gr}\rho = \rho$，因此 $r_* = 1$，因为 $Z \in \ker(\operatorname{gr}\rho)$。

3.2. **固定分次的公共商**。

命题 3.4 (公共商)。设 W 是一个适配分次，且设 $\pi_W\colon E \to \mathfrak{q}_W := E/J_W$ 是商映射。

(i) J_W是 $\mathfrak{g}$的一个理想，并且 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$和 $[\cdot,\cdot]_{0,W}$ 在 $\mathfrak{q}_W$ 上诱导相同的括号。以这些层 $\pi_W(W_j)$构成的 $\mathfrak{q}_W$ 是一个 *Carnot* 代数，而 π_W 在 $\mathfrak{g}$ 上和在 $\mathfrak{g}_0^W$上都是李代数同态。(ii) 对于任意 *Carnot* 代数 $\mathfrak{h}$ 以及任意李代数同态 $L\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，若对每个 j 都有 $L(W_j) \subseteq \mathfrak{h}_j$，则存在唯一的分次李代数同态 $\underline{L}\colon \mathfrak{q}_W \to \mathfrak{h}$，使得 $\underline{L} = L \circ \pi_W$。

证明。(i) 对于 $x \in E$ 和 $z \in J_W$，

$$[x,z]_{\mathfrak{g}} = [x,z]_{0,W} + B_W(x,z) \in J_W\,,$$

因为 J_W是 $\mathfrak{g}_0^W$的理想，包含每个括号缺陷。因此 J_W是 $\mathfrak{g}$的理想，并且 $\pi_W([u,v]_{\mathfrak{g}}) = \pi_W([u,v]_{0,W})$ 对所有 u，$v \in E$成立：两个括号在 $\mathfrak{q}_W$上诱导出相同的括号，并且 π_W是两个代数上的同态。由于 J_W 是 Carnot 代数 $\mathfrak{g}_0^W$的齐次理想（根据引理 2.4(i)），商$\mathfrak{q}_W$ 是一个层为 $\pi_W(W_j)$ 的 Carnot 代数。

(ii) 由引理 2.3，L是水平的，且 $\operatorname{gr} L = L \circ \sigma_W$，也就是说，$L = D \circ \sigma_W^{-1}$ 满足 $D := \operatorname{gr} L$，由引理 2.1 可知这是一个分次李代数同态。由于 L保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$，引理 2.7 给出 $J_W \subseteq \ker L$。因此 L

诱导出一个李代数同态 $L\colon \mathfrak{q}_W \to \mathfrak{h}$ 满足 $L = L \circ \pi_W$，并且由于 $L(\pi_W(W_j)) = L(W_j) \subseteq \mathfrak{h}_j$，它是分次的。它是唯一的，因为 π_W 是满射。

□

由 [5, 定义 3。18], 理想 I 属于 $\mathfrak{g}$ 是 相对于分次 W 的 Carnot 商理想$\mathfrak{g}/I$，若其为 Carnot 代数，且各层是 W_j 的像（其定义还要求 $\Delta \subseteq W_1 + I$，而这里这点自动成立，因为 $W_1 = \Delta$）。根据 [5, 引理 3。23], ，这样的理想也是 $\mathfrak{g}_0^W$的理想，且两个括号在商上诱导出相同的括号。下一个推论表明，命题 3.4指出了其中最小的一个，即缺陷理想 J_W。

推论 3.5。 对于每个适配分次 W，缺陷理想 J_W 是相对于 W的最小 *Carnot* 商理想。

证明。 根据命题 3.4(i)， J_W 是相对于 W的 Carnot 商理想。若 I 是另一个这样的理想，则商映射 $\pi_I\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ 是李代数同态，将 W_j 映入 j的第 $\mathfrak{g}/I$ 层，因此根据命题 3.4(ii)，它可经由 π_W 分解。因此 $J_W = \ker \pi_W \subseteq \ker \pi_I = I$。

□

注 3.6 （群层面的缺陷）。 固定一个适配分次 W。对于 $u, v \in E$，用指数坐标定义乘积缺陷为

$$\eta_W(u,v) := \big(-(u \star_{0,W} v)\big) \star_{0,W} (u \star_{\mathfrak{g}} v)\,,$$

从而

$$u \star_{\mathfrak{g}} v = (u \star_{0,W} v) \star_{0,W} \eta_W(u,v)\,.$$

缺陷理想 J_W 是 $\mathfrak{g}_0^W$ 中包含 η_W 所有取值的最小齐次理想。事实上，由命题 3.4(i)，两个 BCH 乘积在 E/J_W 上一致，因此 $\eta_W(u,v) \in J_W$ 对所有 $u, v \in E$ 均成立。反过来，BCH 公式给出

$$\eta_W(\tau u, \tau v) = \frac{\tau^2}{2} B_W(u,v) + O(\tau^3) \quad \text{as } \tau \to 0\,,$$

其中 τu 和 τv 表示 普通数乘。因此，任何包含所有取值的齐次理想 s
也包含 η_W

$$B_W(u,v) = \lim_{\tau \to 0} \frac{2}{\tau^2} \eta_W(\tau u, \tau v)\,,$$

因为 它是 E 的一个闭线性子空间。根据 J_W 的定义，它因此包含 J W.
In 特别地，每个分次同态 $A\colon \mathfrak{g}_0^W \to \mathfrak{h}$ 在指数坐标中都满足 es,

$$A(u \star_{\mathfrak{g}} v) = A(u) \star_{\mathfrak{h}} A(v) \star_{\mathfrak{h}} A\big(\eta_W(u,v)\big)\,.$$

因此，当且仅当对所有 $u,\ v \in E,\ A$ 保持原群乘法；这等价于 $A(\eta_W(u,\ v)) = 0$，或者等价地， $J_W \subseteq \ker A$。

3.3. **两个商的比较**。 设 W 是一个适配分次。对于 $\xi \in \mathfrak{v}_j$，向量 $\sigma_W(\xi) \in \mathcal{F}_j E$表示 ξ，因此 $\rho(\sigma_W(\xi)) \in \mathfrak{G}_{\le j}$由（7）可知，其权重 j 分量为 gr $\rho(\xi)$。较低权重的分量可能取决于 W。

定义 3.7. 设 W 是一个适配分次。 W 的修正映射 为

$$t_W := \rho \circ \sigma_W - \operatorname{gr}\rho\colon \mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{G}\,, \quad t_W(\mathfrak{v}_j) \subseteq \mathfrak{G}_{\le j-1}\,,$$

且 M_W 是由向量 $t_W(\xi)$, $\xi \in \mathfrak{v}$ 的齐次分量生成的 $\mathfrak{G}$ 的理想。若 $t_W = 0$，也就是说若 $\rho \circ \sigma_W = \operatorname{gr}\rho$，我们称 W 极小 。

由于由齐次元素生成， M_W 是一个齐次理想，因此 $\mathfrak{G}/M_W$ 是一个 Carnot 代数。

命题 3.8. 对于每个适配分次 W,

$$J_W = \rho^{-1}(M_W) \quad \textit{and} \quad j_W = (\operatorname{gr}\rho)^{-1}(M_W)\,, \tag{8}$$

并且 ρ 诱导出一个分次李代数同构 $\mathfrak{q}_W \to \mathfrak{G}/M_W$。

证明。 根据命题 3.4(i)， π_W 是从 $\mathfrak{g}$ 到 Carnot 代数 $\mathfrak{q}_W$的李代数同态，并且由于 $\pi_W(\Delta) = \pi_W(W_1)$ 是第一层，因此它是水平的。命题 3.1(ii) 给出一个分次同态ϕ_W： $\mathfrak{G} \to \mathfrak{q}_W$ 满足 $\pi_W = \phi_W \circ \rho$。对于 $\xi \in \mathfrak{v}_j$,

$$\pi_W(\sigma_W(\xi)) = \phi_W(\operatorname{gr}\rho(\xi)) + \phi_W(t_W(\xi)) .$$

左端和右端的第一项都属于 $\mathfrak{q}_W$ 的第 j 层，而最后一项仅含有权小于 j 的分量。因此， $\phi_W(t_W(\xi)) = 0$。由于 $\ker\ \phi_W$ 是齐次的，它包含 $t_W(\xi)$ 的齐次分量，所以 $M_W \subseteq \ker\ \phi_W$，且 $\rho^{-1}(M_W) \subseteq \ker(\phi_W \circ \rho) = J_W$。

反之，令 $\pi_{M_W}\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/M_W$ 为商映射。由于 $t_W(\mathfrak{v}) \subseteq M_W$，对于 $\xi \in \mathfrak{v}_j$，我们得到 $\pi_{M_W}(\rho(\sigma_W(\xi)))$ $= \pi_{M_W}(\operatorname{gr}\ \rho(\xi))$，它属于第 j 层。因此，李代数同态 $\pi_{M_W} \circ \rho$ 将 W_j 映入 $\mathfrak{G}/M_W$ 的第 j 层，命题 3.4(ii) 给出 $J_W \subseteq \ker(\pi_{M_W} \circ \rho) = \rho^{-1}(M_W)$。这就证明了第一个等式。对于第二个等式，由于 $t_W(\xi) \in M_W$,

$$\xi \in j_W \iff \rho(\sigma_W(\xi)) = \operatorname{gr}\rho(\xi) + t_W(\xi) \in M_W \iff \operatorname{gr}\rho(\xi) \in M_W .$$

最后， $\pi_{M_W} \circ \rho$ 是满射，核为 J_W，因此诱导出李代数同构 $\mathfrak{q}_W \to \mathfrak{G}/M_W$；由于 $\pi_{M_W} \circ \rho$ 将 W_j 映入第 j层，它是分次的。

□

4. Which defect ideals occur

由命题 3.8可知，缺陷理想 J_W 和 j_W 由齐次理想 $M_W \subseteq \mathfrak{G}$确定。本节研究哪些理想 M_W 可能出现。我们首先描述相对于一个极小分次的所有适配分次，然后统计齐次生成元，最后证明定理 B 并研究一些具体例子。

4.1. 极小分次。 适配分次 W由其映射 σ_W确定，因为 $W_j = \sigma_W(\mathfrak{v}_j)$。反过来，设 $\sigma\colon \mathfrak{v} \to E$ 是一个线性映射，使得对于每个 j 和每个 $\xi \in \mathfrak{v}_j$，向量 $\sigma(\xi) \in \mathcal{F}_j E$表示 ξ。那么，对于每个 j， $\sigma(\mathfrak{v}_j)$都是 $\mathcal{F}_{j-1}E$ 在 $\mathcal{F}_j E$ 中的补空间，因此 $W_j := \sigma(\mathfrak{v}_j)$是一个满足 $\sigma_W = \sigma$的适配分次。

引理 4.1。

(i) 有序对 $(\mathfrak{g}, \Delta)$ 具有一个最小适配分次 W^0，即满足 $\rho \circ \sigma_{W^0} = \operatorname{gr}\rho$ 的分次。(ii) 设 W^0 是一个最小适配分次。对于每个适配分次 W，存在唯一的线性映射N： $\mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$，满足对每个 j 都有 $N(\mathfrak{v}_j) \subseteq \mathfrak{v}_{<j}$，并且

$$\sigma_W = \sigma_{W^0} \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{v}} + N) . \tag{9}$$

反之，每个这样的 N 都以此方式由唯一的适配分次 W 得到。在这两种情况下，$t_W = \operatorname{gr}\ \rho \circ N$。

证明。(i) 设 W 是任意一个适配分次。对于 $\xi \in \mathfrak{v}_j$，由 (7) 可知，修正项 $t_W(\xi)$ 属于 $\mathfrak{G}_{\le j-1} = \rho(\mathcal{F}_{j-1}E)$。因此存在一个线性映射 a： $\mathfrak{v} \to E$，满足 $a(\mathfrak{v}_j) \subseteq \mathcal{F}_{j-1}E$ 以及 $\rho \circ a = t_W$。映射 $\sigma := \sigma_W - a$ 仍将每个 $\xi \in \mathfrak{v}_j$ 映射到 ξ 的一个代表元，因此 $\sigma = \sigma_{W^0}$ 是某个适配分次 W^0，且 $\rho \circ \sigma_{W^0} = \rho \circ \sigma_W - t_W = \operatorname{gr}\ \rho$。

(ii) 对于 $\xi \in \mathfrak{v}_j$，向量 $\sigma_W(\xi)$ 和 $\sigma_{W^0}(\xi)$ 都表示 ξ，因此它们的差属于 $\mathcal{F}_{j-1}E = \sigma_{W^0}(\mathfrak{v}_{<j})$。所以， $N := \sigma_{W^0}^{-1} \circ \sigma_W - \mathrm{id}_{\mathfrak{v}}$ 将 $\mathfrak{v}_j$ 映射到 $\mathfrak{v}_{<j}$，并且它是满足 (9) 的唯一映射。反之，如果 N 降低权，那么对于每个 $\xi \in \mathfrak{v}_j$，$\sigma_{W^0}(\xi + N\xi)$ 都表示 ξ，因此 $\sigma_{W^0} \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{v}} + N)$ 是唯一一个适配分次 W 的映射 σ_W。最后，由于 $\rho \circ \sigma_{W^0} = \operatorname{gr}\ \rho$,

$$t_W = \rho \circ \sigma_{W^0} \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{v}} + N) - \operatorname{gr}\rho = \operatorname{gr}\rho \circ N .$$

□

推论 4.2。 对于每个适配分次 W， 核 $\rho \subseteq J_W$和 核$(\operatorname{gr}\ \rho) \subseteq j_W$，并且每个等式成立当且仅当 W 为极小。如果 W^0 为极小，则极小适配分次就是由 (9) 给出的分次，其中$N(\mathfrak{v}) \subseteq$核$(\operatorname{gr}\ \rho)$。特别地，极小适配分次唯一，当且仅当 核$(\operatorname{gr}\ \rho) \subseteq \mathfrak{v}_s$。

证明。两个包含关系由 (8) 得出。由于 ρ 和 $\operatorname{gr}\rho$ 是满射，等式 $J_W = \ker\ \rho$ 和 $j_W = \ker(\operatorname{gr}\ \rho)$ 中的每一个都等价于 $M_W = \{0\}$，也就是说，等价于 $t_W = 0$。现在固定一个最小适配分次 W^0，并按照引理 4.1(ii) 将 $\sigma_W = \sigma_{W^0} \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{v}} + N)$ 写成如下形式： $t_W = \operatorname{gr}\ \rho \circ N$。因此， W 是极小的，当且仅当 $\operatorname{gr}\ \rho \circ N = 0$，也就是说，当且仅当 $N(\mathfrak{v}) \subseteq \ker(\operatorname{gr}\ \rho)$。

最后，设 $\ker(\mathrm{gr}\,\rho) \subseteq \mathfrak{v}_s$，并令 W 为极小的。则 N 将每个 $\mathfrak{v}_j$ 映射到 $\mathfrak{v}_{<j} \cap \ker(\mathrm{gr}\ \rho) \subseteq \mathfrak{v}_{<j} \cap \mathfrak{v}_s$ 中，而这正是 $\{0\}$，因为 $j \le s$。因此 $N = 0$ 和 $W = W^0$。否则，由于 $\ker(\mathrm{gr}\ \rho)$ 是齐次的，它包含某个权为 $k < s$ 的非零向量 ξ。由于 $\mathfrak{v}_s \neq \{0\}$，存在一个非零线性映射 $N\colon \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$，它在 $\mathfrak{v}_{<s}$ 上为零，并将 $\mathfrak{v}_s$ 映射到 ξ 的张成空间中。于是，对于每个 j，$N(\mathfrak{v}_j) \subseteq \mathfrak{v}_{<j}$，且 $N(\mathfrak{v}) \subseteq \ker(\mathrm{gr}\ \rho)$，因此 N 定义了一个不同于 W^0 的最小适配分次。

□

注4.3 (最小适配分次未必唯一)。 设 $\mathfrak{g}$ 是代数 $N_{6,\ 2,\ 10}$ 其 [6], 的基为X_1，…，X_6，且非零括号为

$$[X_1, X_2] = X_3\ , \quad [X_1, X_3] = X_5\ , \quad [X_2, X_3] = X_6\ , \quad [X_2, X_4] = X_5\,,$$

并令 $\Delta =$ 张成空间$\{X_1, X_2, X_4\}$。

滤子。元素 Δ的括号给出 $\mathcal{F}_2E =$张成空间$\{X_1, \dots, X_5\}$和 $\mathcal{F}_3E = E$，因此 $s = 3$。将 ξ_i 记为 X_i 在 $\mathfrak{v}$中的类，我们有 $\mathfrak{v}_1 =$张成空间$\{\xi_1, \xi_2, \xi_4\}$、 $\mathfrak{v}_2 =$张成空间$\{\xi_3, \xi_5\}$ 和 $\mathfrak{v}_3 =$张成空间$\{\xi_6\}$，其括号为 $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$、 $[\xi_2, \xi_4] = \xi_5$和 $[\xi_2, \xi_3] = \xi_6$。注意到 $[\xi_1, \xi_3] = 0$，因为 $X_5 \in \mathcal{F}_2E$。

商。设 L 是到 Carnot 代数 $\mathfrak{h}$中的水平同态，则有 $L(X_5) = [L(X_2)\ L(X_4)] =[L(X_1)\ L(X_3)] \in \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{h}_3$，因此 $L(X_5) = 0$。另一方面， $E/\mathrm{span}\{X_5\}$是一个 Carnot 代数，其中X_1、 X_2、 X_4的权为 1， X_3的权为 2， X_6的权为 3：其唯一的非零括号是 $[X_1, X_2] = X_3$和 $[X_2, X_3] = X_6$ （这就是 Engel 代数与 $\mathbb{R}$的直积）。因此，每个水平的 L 都可通过一个分次同态分解，该同态将生成元 X_1、 X_2、 X_4 映入 $\mathfrak{h}_1$。根据推论 3.2(ii)， $\mathfrak{G} = E/\mathrm{span}\{X_5\}$且 ρ 是商映射。因此，$\mathrm{gr}\ \rho$将 ξ_5映为 0，并将其他每个 ξ_i 映为 X_i的等价类，所以 $\ker(\mathrm{gr}\,\rho) = \mathrm{span}\{\xi_5\}$ 的权为 $2 < s$。

非唯一性。对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，令 W^λ为适配分次，使得 $W_1^\lambda = \Delta$, $W_2^\lambda =$张成$\{X_3, X_5\}$且$W_3^\lambda =$张成$\{X_6 + \lambda X_5\}$。其映射 σ_{W^λ}将 ξ_6映至 $X_6 + \lambda X_5$，并将所有其他 ξ_i映至 X_i。由于 $\rho(X_5) = 0$，我们得到 $\rho \circ \sigma_{W^\lambda} =\mathrm{gr}\ \rho$，因此每个 W^λ都是极小的，且对于 $\lambda \neq \mu$有 $W^\lambda \neq W^\mu$。在引理 4.1的记号中， W^λ对应于映射 N，其中 $N(\xi_6) = \lambda\xi_5$，并且在其他 ξ_i上为 $N = 0$；该映射的取值落在 $\ker(\mathrm{gr}\ \rho)$ 中，正如推论 4.2所指出的。参数 λ 在 $\mathfrak{G}$中不可见，但在密切代数中并非如此：$[X_2, X_3]_{0,W^\lambda} = X_6 + \lambda X_5$。

4.2. **齐次生成元。** 对于一个齐次理想 $M \subseteq \mathfrak{G}$，记 $M_j := M \cap \mathfrak{G}_j$，并令 $[\mathfrak{G}, M]$ 为满足 $\zeta \in \mathfrak{G}$ 和 $m \in M$ 的括号 $[\zeta, m]_{\mathfrak{G}}$ 的张成空间。根据雅可比恒等式， $[\mathfrak{G}, M]$ 是包含于 M 中的理想；由于$[\mathfrak{G}, M]_j = \sum_{a+b=j}[\mathfrak{G}_a, M_b]_{\mathfrak{G}}$，它是齐次的。因此

$$\mu_j(M) = \dim M_j - \dim[\mathfrak{G}, M]_j\,.$$

下一个引理表明， $\mu_j(M)$ 是生成 M 所需的权为 j 的生成元的最少数目。这是中山引理 [13, 引理 1.22] 的分次版本，其中 M 被视为泛包络代数 $U(\mathfrak{G})$ 上的分次模，并通过伴随作用作用： $U(\mathfrak{G})$ 的正权元素映射 M到$[\mathfrak{G}, M]$。由于该参考文献处理的情形具有更大的普遍性，我们在此给出针对当前情形的直接证明。

引理 4.4. 设 $M \subseteq \mathfrak{G}$ 为齐次理想， $U_j \subseteq M_j$ 为子空间， $j \ge 1$.

(i) 若 U_j作为理想生成 M，则 $M_j = U_j + [\mathfrak{G}, M]_j$，因此对每个 j，都有 $\mu_j(M) \le$维数 U_j。(ii) 若对每个 j都有 $M_j = U_j \oplus [\mathfrak{G}, M]_j$，则 U_j作为理想生成 M，且维数 $U_j = \mu_j(M)$。

证明。 由 U_j 生成的理想由 U_j 以及这些元素与 $\mathfrak{G}$中元素的迭代括号张成，而这些元素属于 $[\mathfrak{G}, M]$。因此 $M = \sum_j U_j + [\mathfrak{G}, M]$，取权为$j$ 的分量即可得到结论。

(ii) 令 I 为由 U_j生成的理想，则 $I \subseteq M$。由于 $M = \bigoplus_j M_j$，只需证明对每个 j都有$M_j \subseteq I$。我们对 j 作归纳，假设对所有 $b < j$， $M_b \subseteq I$ 均成立。令 $m \in M_j$，并写作 $m = u + z$，其中 $u \in U_j$且 $z \in [\mathfrak{G}, M]_j$。由于 $\mathfrak{G}$和 M由齐次元素张成，

$$[\mathfrak{G}, M]_j = \sum_{a+b=j} [\mathfrak{G}_a, M_b]_{\mathfrak{G}}\,, \qquad a, b \ge 1\,.$$

此处出现的每个 M_b 都具有 $b \le j-1$，因此根据归纳假设有 $M_b \subseteq I$；又因为I 是一个理想，所以有 $[\mathfrak{G}_a, M_b]_{\mathfrak{G}} \subseteq I$。于是 $z \in I$，且由于 $u \in U_j \subseteq I$，有 $m = u + z \in I$。对于 $j = 1$，由于求和为空，该等式显然成立。最后，$\dim U_j =\dim M_j - \dim[\mathfrak{G}, M]_j = \mu_j(M)$。

□

4.3. **分类**。

定理 4.5。 齐次理想 $M \subseteq \mathfrak{G}$ 等于某个适配分次 W 下的 M_W，当且仅当

$$\mu_j(M) \le \dim \mathfrak{v}_{>j} \qquad \textit{for every } j \ge 1 .$$

因此，当 W 遍历所有适配分次时， J_W 恰好遍历理想 $\rho^{-1}(M)$，而 j_W遍历理想 $(\operatorname{gr}\rho)^{-1}(M)$，其中 M如上所述。

证明。固定一个最小适配分次 W^0，由引理 4.1(i) 可知它存在。令 W为一个适配分次，并令 N如式 (9) 所示。由于 $t_W = \operatorname{gr}\rho\circ N$且 $\operatorname{gr}\rho$是分次的， $t_W(\xi)$ 的权重 j分量对每个 $\xi \in \mathfrak{v}$ 都是 $\operatorname{gr}\rho\big(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}_j} N(\xi)\big)$。此外，$\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}_j}\circ N$ 在 $\mathfrak{v}_{\le j}$ 上为零，因此，当 ξ 遍历 $\mathfrak{v}$时， $t_W(\xi)$ 的权重 j分量张成 $U_j := \operatorname{gr}\rho\big(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}_j} N(\mathfrak{v}_{>j})\big)$。特别地，$\dim U_j \le \dim \mathfrak{v}_{>j}$。根据定义， U_j张成 M_W，因此由引理 4.4(i) 得 $\mu_j(M_W) \le \dim \mathfrak{v}_{>j}$。

反之，设 M 满足这些不等式。我们构造 N，使得对于每个 j，j 权重的 t_W 的分量张成 M_j的一个给定生成子空间。

对于每个 j，选取 M_j中 $[\mathfrak{G},M]_j$ 的一个补空间 U_j。根据引理 4.4(ii)， U_j 生成 M，且 $\dim U_j = \mu_j(M) \le \dim \mathfrak{v}_{>j}$。因此存在一个满射线性映射 $T_j\colon \mathfrak{v}_{>j} \to U_j$。由于 $\operatorname{gr}\rho$ 将 $\mathfrak{v}_j$ 映射到 $\mathfrak{G}_j$ 上，因此还存在一个线性映射 $\ell_j\colon \mathfrak{G}_j \to \mathfrak{v}_j$，满足 $\operatorname{gr}\rho\circ\ell_j = \mathrm{id}_{\mathfrak{G}_j}$，即将 $U_j \subseteq \mathfrak{G}_j$ 提升回 $\mathfrak{v}_j$。定义

$$N(\xi) := \sum_{j\ge 1} \ell_j\, T_j\big(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}_{>j}}\xi\big) \quad \text{for any } \xi \in \mathfrak{v} .$$

如果 $\xi \in \mathfrak{v}_k$，则 $\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}_{>j}}\xi$ 对于 $j < k$ 为 ξ，对于 $j \ge k$ 为 0，因此 $N(\xi) = \sum_{j<k}\ell_j T_j(\xi) \in \mathfrak{v}_{<k}$。于是 N 降低权，并根据引理 4.1(ii) 定义了一个适配分次 W，其中 $t_W = \operatorname{gr}\rho\circ N$。对于 $\xi \in \mathfrak{v}$， $N(\xi)$ 的 j 权重分量为 $\ell_j T_j(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}_{>j}}\xi)$，因此 $t_W(\xi)$ 的 j 权重分量为 $\operatorname{gr}\rho\,\ell_j T_j(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}_{>j}}\xi) = T_j(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}_{>j}}\xi)$。当 ξ 遍历 $\mathfrak{v}$时，这些元素张成 $T_j(\mathfrak{v}_{>j}) = U_j$。因此， M_W（即由这些分量生成的理想）就是由 U_j 生成的理想，也就是 $M_W = M$。

由命题 3.8 可得最终结论 $J_W = \rho^{-1}(M_W)$ 和 $j_W = (\operatorname{gr}\rho)^{-1}(M_W$对每个适配分次 W均成立。

□

对于 $j \ge s$，条件为 $\mu_j(M) = 0$：可达理想不需要权为 s 的生成元，尽管它可以包含权为 s 的元素。

4.4. **例子**。

例 4.6. 设 $\mathfrak{g}$和 Δ 与引言中的 Heisenberg例子相同。任意映入 Carnot 代数的水平同态 L 都是分次的，因为 $L(Z) = [L(X)\ L(Y)] \in \mathfrak{h}_2$。因此， $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}$ 连同其分层、 $\rho = \mathrm{id}_E$，以及关于由唯一极小分次 W^0给出的分层的 $\operatorname{gr}\rho = \sigma_{W^0}$。每个适配分次都有 $W_2 =$ 张成空间$\{Z+u\}$，其中给定 $u \in \Delta$，因此 $t_W(Z) = u$，且 t_W在 $\mathfrak{v}_1$上消失。由于$[u,\Delta]_{\mathfrak{g}} =$ 在 $u \ne 0$时为张成空间$\{Z\}$， 命题 3.8 给出

$$J_W = \{0\} \ \text{ if } u = 0 \ \text{ and } \ J_W = \operatorname{span}\{u\} \oplus \operatorname{span}\{Z\} \ \text{ if } u \ne 0 .$$

这与定理 4.5 一致。 $\mathfrak{g}$ 的齐次理想若在 Δ 中有非零分量，就必须包含 Z，因为对每个 $u \in \Delta$， $[u,\Delta]_{\mathfrak{g}} =$ 都张成 $\{Z\}$。因此， $\mathfrak{g}$ 的齐次理想恰好是 $\{0\}$、张成空间 $\{Z\}$、对于某个一维子空间 $\ell \subseteq \Delta$ 的 $\ell\oplus$ 张成空间 $\{Z\}$，以及 $\mathfrak{g}$。这里 $\dim \mathfrak{v}_{>1} = 1$ 且 $\dim \mathfrak{v}_{>2} = 0$，所以理想张成空间 $\{Z\}$ （其中 $\mu_2 = 1$）和 $\mathfrak{g}$ （其中 $\mu_1 = 2$）违反了界限，而每个 $\ell\oplus$张成空间 $\{Z\}$ （其中 $\mu_1 = 1$）都满足这些界限。事实上，对于任何满足 $W_2 =$ 张成 $\{Z+u\}$ 且 $\ell =$ 张成 $\{u\}$ 的分次， $\ell\oplus$ 都张成 $\{Z\} = J_W$。特别地，中心张成空间 $\{Z\}$ 永远不是缺陷理想。

接下来，设 $\mathfrak{g}$为五维代数 $N_{5,\,1}$ [6]，其基为 $X_1, \dots, X_5$，非零括号为

$$[X_1,X_2] = X_3\ , \quad [X_1,X_3] = X_4\ , \quad [X_2,X_3] = X_5\ , \quad [X_1,X_4] = X_5 . \tag{10}$$

令 $\Delta =$张成空间为$\{X_1,X_2\}$。于是 $\mathcal{F}_2E =$张成空间为$\{X_1,X_2,X_3\}$和 $\mathcal{F}_3E = E$，因此 $s = 3$，而幂零阶为 4。记 ξ_i 为 X_i 在 $\mathfrak{v}$中的等价类，则 $\mathfrak{v}$ 的非零括号为 $[\xi_1,\xi_2] = \xi_3$、 $[\xi_1,\xi_3] = \xi_4$ 和$[\xi_2,\xi_3] = \xi_5$，因此 $\mathfrak{v}$ 是秩为 2、步为 3 的自由幂零李代数。

设 $\mathfrak{e}$ 为 Engel 代数，其基 Y_1， $Y_2 \mid Y_3 \mid Y_4$ 按权排列，非零括号为 $[Y_1,Y_2] = Y_3$和 $[Y_1,Y_3] = Y_4$。

命题 4.7。对于 $(N_{5,\ 1},\ \Delta = \text{张成空间}\{X_1, X_2\})$，我们有：

(i) $\mathfrak{G} = \mathfrak{e}$，其中 $\rho(X_i) = Y_i$ 对 $i \le 4$ 且 $\rho(X_5) = 0$。因此，$\ker(\operatorname{gr}\rho) = \text{张成空间}\{\xi_5\}$ 和 $r_* = 3$。

(ii) 分次 W^0，其中 $W_2^0 = \text{张成空间}\{X_3\}$ 且 $W_3^0 = \text{张成空间}\{X_4, X_5\}$，是唯一的最小适配分次。

(iii) 当 W 遍历所有适配分次时，J_W 恰好遍历张成空间$\{X_5\}$、张成空间$\{X_3, X_4, X_5\}$、$\ell \oplus$ 张成空间$\{X_3, X_4, X_5\}$（ℓ 中一条直线）以及 E.

证明。(i) 该陈述中的映射 ρ 保留括号 (10)：我们有 $[Y_1, Y_2] = Y_3$ 和 $[Y_1, Y_3] = Y_4$，而 $[Y_2, Y_3] = [Y_1, Y_4] = 0$。因此，$\rho$ 是到 $\mathfrak{e}$ 上的水平同态，其核为张成空间$\{X_5\}$。设 L 是映射到 Carnot 代数 $\mathfrak{h}$中的水平同态。则 $L(X_3) = [L(X_1)\ L(X_2)] \in \mathfrak{h}_2$ 且 $L(X_4) = [L(X_1)\ L(X_3)] \in \mathfrak{h}_3$，所以 $L(X_5) = [L(X_2)\ L(X_3)] = [L(X_1)\ L(X_4)] \in \mathfrak{h}_3 \cap \mathfrak{h}_4$，从而 $L(X_5) = 0$。因此，对于唯一的同态 L，有 $L = L \circ \rho$：$\mathfrak{e} \to \mathfrak{h}$；由于 $L(Y_i) = L(X_i) \in \mathfrak{h}_1$ 对 $i = 1$、2 以及 Y_1，Y_2 生成 $\mathfrak{e}$，该同态是分次的。根据推论 3.2(ii)，$\mathfrak{G} = \mathfrak{e}$，其中 ρ 为商映射。

最后，$\operatorname{gr}\rho(\xi_i) = Y_i$ 对于 $i \le 4$ 以及 $\operatorname{gr}\rho(\xi_5) = 0$。由于 $Y_1, \dots, Y_4$ 线性无关，$\ker(\operatorname{gr}\rho) =$的张成空间为$\{\xi_5\}$，其权为 3，因此根据定义 3.3。

(ii) 我们有 $\rho \circ \sigma_{W^0}(\xi_i) = \rho(X_i) = \operatorname{gr}\rho(\xi_i)$ 对于每个 i，因此 W^0 是极小的。根据推论 4.2，它是唯一的，因为 $\ker(\operatorname{gr}\rho) \subseteq \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_s$。

(iii) $\mathfrak{e}$ 的齐次理想为

$$\{0\}\ ,\quad \operatorname{span}\{Y_4\}\ ,\quad \operatorname{span}\{Y_3, Y_4\}\ ,\quad L_1 \oplus \operatorname{span}\{Y_3, Y_4\}\ \ (L_1 \text{ a line in } \mathfrak{e}_1)\ \text{ and }\ \mathfrak{e}\,.$$

这里 $\dim \mathfrak{v}_{>1} = 3$、$\dim \mathfrak{v}_{>2} = 2$ 和 $\dim \mathfrak{v}_{>3} = 0$。理想 $\operatorname{span}\{Y_4\}$ 具有 $\mu_3 = 1$，违反了界限。对于其他非零理想，唯一的非零 μ_j 是 $\operatorname{span}\{Y_3, Y_4\}$ 的 $\mu_2 = 1$、$L_1 \oplus \operatorname{span}\{Y_3, Y_4\}$ 的 $\mu_1 = 1$，以及 $\mathfrak{e}$ 的 $\mu_1 = 2$，因此它们满足界限。根据定理 4.5，理想 J_W 是在 ρ 下 $\{0\}$、$\operatorname{span}\{Y_3, Y_4\}$、$L_1 \oplus \operatorname{span}\{Y_3, Y_4\}$ 和 $\mathfrak{e}$ 的原像；这些正是陈述中的理想，其中 $\ell = \Delta \cap \rho^{-1}(L_1)$。□

注记 4.8。以下适配分次均满足 $W_1 = \Delta$，实现了命题 4.7(iii) 中的四种类型。这里我们假设 $\ell = \text{张成空间}\{u\} \subset \Delta$。

J_W	W_2	W_3	非零修正
张成空间$\{X_5\}$	张成空间$\{X_3\}$	张成空间$\{X_4, X_5\}$	none
张成空间$\{X_3, X_4, X_5\}$	张成空间$\{X_3\}$	张成空间$\{X_4 + X_3, X_5\}$	$t_W(\xi_4) = Y_3$
$\ell \oplus$ 张成空间$\{X_3, X_4, X_5\}$	张成空间$\{X_3 + u\}$	张成空间$\{X_4, X_5\}$	$t_W(\xi_3) = \rho(u)$
E	张成空间$\{X_3 + X_1\}$	张成空间$\{X_4 + X_2, X_5\}$	$t_W(\xi_3) = Y_1,\ \ t_W(\xi_4) = Y_2$

在每一行中，由修正项生成的 $\mathfrak{e}$ 理想是 $\{0\}$，张成空间$\{Y_3, Y_4\}$，张成空间$\{\rho(u)\} \oplus$ 张成空间$\{Y_3, Y_4\}$ 和$\mathfrak{e}$，分别成立，因此命题3.8 给出了所显示的 J_W。

5. The intrinsic criterion

本节证明定理A 和C。我们首先计算水平同态的 Pansu 微分，然后证明代数判据及其解析版本，最后重新讨论这些例子。

5.1. 水平同态的 Pansu 微分。

引理 5.1。设 $\Phi\colon\ G \to H$ 是一个水平李群同态。则 Φ 是 *Lipschitz* 的，并且相对于任意适配分次 W，在每个 $x \in G$ 处都是 *Pansu* 可微的，而且

$$D_P^W \Phi(x) = \operatorname{gr} d\Phi_e \circ \sigma_W^{-1}\,, \qquad D_P \Phi(x) = \operatorname{gr} d\Phi_e\,.$$

证明。令 $L := d\Phi_e$。在指数坐标下，$\Phi = L$（引理 2.8），且 L 将水平曲线映射为水平曲线，并将其长度至多放大为 $L|_\Delta$的范数：$\Delta \to \mathfrak{h}_1$；因此 Φ 是 Lipschitz 的。由于Φ 是一个同态，$\Phi(x)^{-1} \star_{\mathfrak{h}} \Phi(x \star_{\mathfrak{g}} v) = L(v)$。对于满足 $u_j \in W_j$的 $u = \sum_j u_j$，引理 2.1(i) 给出$L(u_j) \in \mathfrak{h}_{\le j}$，因此

$$R_{x,t}^W(u) = \bar{\delta}_{1/t} L(\delta_t^W u) = \sum_j \sum_{k \le j} t^{j-k} \operatorname{pr}_{\mathfrak{h}_k} L(u_j) \longrightarrow \sum_j \operatorname{pr}_{\mathfrak{h}_j} L(u_j) = \operatorname{gr} L\big(\sigma_W^{-1}(u)\big)$$

在紧集上一致收敛，当 $t \downarrow 0$时，因此对 d_H也成立。极限 $\operatorname{gr} L \circ \sigma_W^{-1}$ 是一个分次李代数同态 $\mathfrak{g}_0^W \to \mathfrak{h}$，根据引理 2.1(ii) 和 2.4(i)。□

5.2. **代数判据**。

定理 5.2. 设 $D\colon \mathfrak{v}\to\mathfrak{h}$ 是一个分次李代数同态。以下各项等价 t:

(i) $D=\operatorname{gr} d\Phi_e$ 对于水平李群同态 $\Phi\colon G\to H$ 成立；(ii) $D\circ\sigma_W^{-1}$ 对于某个适配分次 W 保持不变；(iii) $D\circ\sigma_W^{-1}$ 对于每个最小适配分次 W 保持不变；(iv) $D(\ker\operatorname{gr}\rho)=\{0\}$；(v) $D=D\circ\operatorname{gr}\rho$ 对于分次李代数同态 $D\colon\mathfrak{G}\to\mathfrak{h}$ 成立。

若情况如此，Φ 和 D 是唯一的，$d\Phi_e=D\circ\rho$，并且 $D\circ\sigma_W^{-1}=d\Phi_e$ 对于每个适配分次 W 如(ii)所述。此外，若 W^0 是一个最小适配分次，且 $\sigma_W=\sigma_{W^0}\circ(\mathrm{id}_{\mathfrak{v}}+N)$ 如引理4.1所述，则

$$D\circ\sigma_W^{-1}\ \textit{preserves}\ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\iff D\circ N=0\,. \tag{11}$$

证明。令 $A_W:=D\circ\sigma_W^{-1}$。由引理2.7，A_W 保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 当且仅当 $D(j_W)=\{0\}$。

(i)⇒(v)。同态 $L:=d\Phi_e$ 是水平的，因此命题3.1**(ii)** 给出 $D=\operatorname{gr}L=L\circ\operatorname{gr}\rho$。

(v)⇒(iv) 是单射ial.

(iv)⇒**(iii)**。若 W 是最小的，则 $j_W=\ker(\operatorname{gr}\rho)$，由推论4.2可知，因此 $D(j_W)=\{0\}$。

(iii)⇒**(ii)**。由引理4.1可知，最小适配分次存在。

(ii)⇒**(i)**。由引理2.7，A_W 是一个水平李代数同态，且 $\operatorname{gr}A_W=D$。由于 G 是单连通的，$A_W=d\Phi_e$ 对应一个李群同态 $\Phi\colon G\to H$，它是水平的。

若这些条件成立，Φ 则根据引理 2.1**(iii)**，它是唯一的，因为 $\operatorname{gr}d\Phi_e=D$ 决定了 $d\Phi_e$；出于同样的原因，$A_W=d\Phi_e$ 对于(ii)中的每个 W 也是如此。映射 D 是唯一的，因为 $\overline{\operatorname{gr}}\,\rho$ 是满射的，因此对于 $D=L$ 有 $L=d\Phi_e$，也就是说，$\overline{d\Phi}_e=D\circ\rho$。

最后，根据命题3.8 以及 $\operatorname{gr}\rho$的满射性，

$$D(j_W)=\overline{D}\big(\operatorname{gr}\rho\big((\operatorname{gr}\rho)^{-1}(M_W)\big)\big)=\overline{D}(M_W)\,.$$

由于 $\ker\overline{D}$ 是一个齐次理想，而 M_W 由向量$t_W(\xi)$的齐次分量生成，因此当且仅当$D\circ t_W=0$时该式为零。根据引理4.1，$D\circ t_W=D\circ\operatorname{gr}\rho\circ N=\overline{D}\circ N$。□

设 D 满足定理 5.2 的条件，并固定一个极小分次 W^0。根据引理 4.1**(ii)**，每个适配分次 W都可表示为 $\sigma_W=\sigma_{W^0}\circ(\mathrm{id}_{\mathfrak{v}}+N)$，其中存在唯一的线性映射 N，使得对每个j都有 $N(\mathfrak{v}_j)\subseteq\mathfrak{v}_{<j}$；根据**(11)**，当且仅当 N 的值属于 $\ker D$时，$D\circ\sigma_W^{-1}$ 保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$。因此，$\ker D$越大，具有这一性质的适配分次就越多；若 D 是单射，则 W^0 是唯一的。此外，极小分次恰好是这样的适配分次：对于每个这样的 D以及每个 Carnot 代数，$D\circ\sigma_W^{-1}$ 都保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$。事实上，若 W 是极小的，则 N 的值属于 $\ker(\operatorname{gr}\rho)$（推论 4.2），而后者包含于 $\ker D$中。反之，对于目标群 $\mathfrak{G}$ 和 $D=\operatorname{gr}\rho$，该条件表示为 $N(\mathfrak{v})\subseteq\ker(\operatorname{gr}\rho)$，也就是说，$W$ 是极小的。因此，可以一次性固定一个极小分次，使其与目标群以及 D无关；这正是它在定理 5.3 中成为自然选择的原因。

5.3. **Pansu 微分**。

定理 5.3. 设 $f\colon\Omega\to H$ 是 *Lipschitz* 的，且 $x\in\Omega_f$。以下各条件等价：

(i) 存在某个适配分次 W，$D_P^Wf(x)$ 保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$，即 $D_P^Wf(x)\colon G\to H$ 是群同态；(ii) $D_P^Wf(x)\colon G\to H$ 对于每个极小适配分次 W 都是群同态；(iii) $D_Pf(x)(\ker\operatorname{gr}\rho)=\{0\}$；(iv) 存在一个水平李群同态 $\Phi\colon G\to H$，满足对于每个 $y\in G$，$D_P\Phi(y)=D_Pf(x)$。

在此情形下，Φ 是唯一的，并且对于 (i 中的每个适配分次 W，$D_P^Wf(x)=d\Phi_e$).

证明。令 $D:=D_Pf(x)$，我们得到 $D_P^Wf(x)=D\circ\sigma_W^{-1}$ 对每个 W均成立（见定义 2.14）。根据引理 2.8，线性映射 $E\to\mathfrak{h}$ 是群同态 $G\to H$ 当且仅当它保持 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$。根据引理 5.1，**(iv)** 表明 $D=\operatorname{gr}d\Phi_e$。因此，**(i)** 至 **(iv)** 的陈述分别是定理 5.2中的条件 **(ii)**、**(iii)**、**(iv)** 和 **(i)**。

□

推论 *5.4.* 设 m 是 H 的幂零阶，且 $\Omega \subseteq G$ 开。若 $m < r_*$，则对于每个 *Lipschitz* 映射 $f\colon \Omega \to H$，定理 *5.3* 的条件在每个 $x \in \Omega_f$处均成立。特别地，每个最小适配分次 W都满足 $D_P^W f(x) = d\Phi_e$，其中 $\Phi\colon G \to H$是一个水平同态。这里， Φ取决于 f和x，但 W 不取决于它们。

证明。 设 $x \in \Omega_f$并令 $D := D_P f(x)\colon \mathfrak{v} \to \mathfrak{h}$。若 $r_* = \infty$，则 $\ker(\operatorname{gr} \rho) = \{0\}$，无需证明。否则，根据定义 3.3，有

$$\ker(\operatorname{gr}\rho) \subseteq \bigoplus_{j \geq r_*} \mathfrak{v}_j \,.$$

对于 $j \geq r_* > m$，分次映射 D 将 $\mathfrak{v}_j$ 映入 $\mathfrak{h}_j = \{0\}$。因此 $D(\ker(\operatorname{gr}\rho)) = \{0\}$，由定理 (iii) 条件 5.3即可得到所述结论。

□

备注 5.5。 定理 5.2 在 $\mathfrak{h}$ 仅为分次映射时仍原样成立，因为其证明未用到 $\mathfrak{h}$的其他性质。若 H 是带齐次距离的分次群，那么在 f Pansu 可微的每一点，2.13引理和定理5.3 均成立，而推论 5.4 成立，其中 m 是由 $\mathfrak{h}_1$生成的 Carnot 子代数的步数，该子代数包含每个 Pansu 微分的像。尚缺少的是证明从 G到 H的 Lipschitz 映射几乎处处存在 Pansu 微分；这需要结合定理 2.12 的非 Carnot 定义域与 [7, 定理 2.11]的分次情形。

5.4. **例子**。

例 5.6。 对于例 4.6中的海森堡代数，我们有 $\ker(\operatorname{gr}\rho) = \{0\}$，即 $r_* = \infty$，且推论 5.4适用于每个 Carnot 群 H：对于分层 W^0， $D_P^{W^0} f(x)$ 在每个 $x \in \Omega_f$ 上都是群同态。对于例 2.15中的恒等映射， $D = D_P \mathrm{id}(x) = \sigma_{W^0}$是单射，因此根据（11），分层是唯一的适配分次，使得 $D_P^W \mathrm{id}(x)$ 是群同态。倾斜分次的问题仅涉及该特定选择。

其余例子涉及推论 $m < r_*$ 5.4中所使用的界 。命题 5.7 表明，一般而言该界是紧的，而命题 5.9 表明，对于特定的一对（$\mathfrak{g}$， Δ），当 $m = r_*$时，推论的结论可能仍然成立。

命题 5.7。 设 $\mathfrak{g} = N_{5,\,1}$ 和 $\Delta =$ 张成$\{X_1, X_2\}$ 如命题 4.7中所述，因而 $r_* = 3$，并设$H =$ （$\mathfrak{e}$， $\star_{\mathfrak{e}}$） 为步数 $m = 3$ 的 *Engel* 群。存在一个多项式接触映射 F： $G \to H$ 使得，对于每个球 $\Omega \subseteq G$， F 在 Ω 上的限制是 *Lipschitz* 的，并且

$$D_P F(x)(\xi_5) = -15\, Y_4 \neq 0 \qquad \textit{for every } x \in \Omega_F \,.$$

因此，在 Ω_F 的任何一点，定理 *5.3* 的条件都不成立：对于任何适配分次 W， $D_P^W F$（x） 都不是群同态，而 $D_P F$（x） 不是任何水平同态的 *Pansu* 微分。

证明。 在指数 坐标 $x = (x_1, \ldots, x_5)$ 下的 G 的左不变向量场，以及 X_1和 X_2的 e

$$X_1 = \partial_1 - \tfrac{x_2}{2}\partial_3 - \Big(\tfrac{x_3}{2} + \tfrac{x_1 x_2}{12}\Big)\partial_4 - \Big(\tfrac{x_4}{2} + \tfrac{x_1 x_3}{12} + \tfrac{x_2^2}{12}\Big)\partial_5 \quad \text{and} \quad X_2 = \partial_2 + \tfrac{x_1}{2}\partial_3 + \tfrac{x_1^2}{12}\partial_4 + \Big(\tfrac{x_1 x_2}{12} - \tfrac{x_3}{2}\Big)\partial_5 \,,$$

并且在 H 的指数坐标 $y = (y_1, \ldots, y_4)$ 中，相对于基 $Y_1, \ldots, Y_4$， Y_1和Y_2 的向量场为

$$Y_1 = \partial_{y_1} - \tfrac{y_2}{2}\partial_{y_3} - \Big(\tfrac{y_3}{2} + \tfrac{y_1 y_2}{12}\Big)\partial_{y_4} \quad \text{and} \quad Y_2 = \partial_{y_2} + \tfrac{y_1}{2}\partial_{y_3} + \tfrac{y_1^2}{12}\partial_{y_4} \,.$$

光滑映射 $F = (F_1, \ldots, F_4)$: $G \to H$ 是接触映射，即 dF将 Δ 映入 H 的水平丛，当且仅当对于 $i = 1,2$

$$X_i F_3 = \tfrac{1}{2}\big(F_1\, X_i F_2 - F_2\, X_i F_1\big) \,,$$
$$X_i F_4 = \tfrac{1}{12}F_1^2\, X_i F_2 - \Big(\tfrac{1}{2}F_3 + \tfrac{1}{12}F_1 F_2\Big) X_i F_1 \,.$$

直接计算可得，这些恒等式对于该多项式映射成立

$$F_1 = x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_1^2 \,,\; F_2 = 15x_1 - 25 \,,\; F_3 = -\tfrac{5}{4}x_1^3 + \tfrac{25}{4}x_1^2 + \tfrac{25}{2}x_1 + \tfrac{25}{2}x_2 - 15x_3 - 25 \,,$$
$$F_4 = \tfrac{1}{16}x_1^5 - \tfrac{25}{48}x_1^4 - \tfrac{25}{12}x_1^3 - \tfrac{25}{12}x_1^2 x_2 + \tfrac{5}{4}x_1^2 x_3 + \tfrac{25}{6}x_1^2 - \tfrac{25}{6}x_1 x_2 - \tfrac{15}{2}x_1 x_4$$
$$+ \tfrac{25}{2}x_1 - \tfrac{25}{12}x_2^2 + \tfrac{25}{2}x_2 - 15x_4 - 15x_5 \,.$$

由于 F 是光滑且满足接触条件的，它将水平曲线映射为水平曲线，并且其速度在紧集上有界。因此，它在每个球 Ω 上都是 Lipschitz 的，故根据定理2.12，在 Ω 上几乎处处 Pansu 可微。当定义域是分层群时，局部利普希茨映射可由 [7,定理 11] 的接触方程刻画（另见 [8]）。

令 $x \in \Omega_{F^\circ}$ 对于 $i = 1,\ 2$, $\delta_t^W(X_i) = tX_i$，左平移通过加法作用于坐标 y_i，因此 $R_{x,\ t}^W(X_i)$ 的权重 1 的分量为 $\frac{1}{t}(F_k($ $x \star_{\mathfrak{g}} tX_i) - F_k(x))$, $k = 1,\ 2$，并趋于 $X_iF_k(x)$。由于 $X_1F_1 = 1 + x_1$, $X_2F_1 = 1$, $X_1F_2 = 15$ 和 $X_2F_2 = 0$，这就得到

$$D_PF(x)(\xi_1) = (1 + x_1)\, Y_1 + 15\, Y_2 \quad \text{and} \quad D_PF(x)(\xi_2) = Y_1\,.$$

由于 $D_PF(x)$ 是 $\mathfrak{v}$ 和 $\xi_5 = [\xi_2, [\xi_1, \xi_2]]$ 的李代数同态，

$$D_PF(x)(\xi_5) = \big[Y_1, [(1 + x_1)Y_1 + 15\, Y_2,\ Y_1]\big] = [Y_1, -15\, Y_3] = -15\, Y_4\,.$$

该断言由定理 5.3 得出，因为 $\xi_5 \in \ker(\operatorname{gr}\rho)$。

□

例 5.8。 令 $\mathfrak{g}$ 的基为 X_1，……，X_6，且非零括号为

$$[X_1, X_2] = X_5\ , \quad [X_1, X_5] = X_6\ , \quad [X_3, X_4] = X_6\ ,$$

并令 $\Delta =$ 张成空间$\{X_1, \ldots, X_4\}$。于是 $\mathcal{F}_2E = E$，因此 $s = 2$，而 $\mathfrak{v}$ 的非零括号为 $[\xi_1, \xi_2] = \xi_5$和 $[\xi_3, \xi_4] = \xi_6$；特别是 $[\xi_1, \xi_5] = 0$，因为 $X_6 \in \mathcal{F}_2E$。到 Carnot 代数 $\mathfrak{h}$ 中的水平同态 L 满足 $L(X_6) = [L(X_3)\ L(X_4)] \in \mathfrak{h}_2$ 以及 $L($ $X_6) = [L(X_1)\ [L(X_1)\ L(X_2)]] \in \mathfrak{h}_3$，故 $L(X_6) = 0$。此外， $E/$ 张成空间$\{X_6\}$ 是一个 Carnot 代数，其中 X_1、……、X_4 的权为 1， X_5 的权为 2：它是由 X_1、X_2、X_5 张成的海森堡代数与阿贝尔代数 span$\{X_3, X_4\}$的直积。与命题 4.7(i)中的情形一样，推论 3.2(ii)给出 $\mathfrak{G} = E/$张成空间$\{X_6\}$。因此 ker(gr ρ) =张成空间$\{\xi_6\}$ 且 $r_* = 2$，而分次 W^0（其中 $W_2^0 =$张成空间$\{X_5, X_6\}$）是唯一的最小适配分次（推论 4.2）。

设 $H = H^1$ 为 Heisenberg 群，其中 $\mathfrak{h}$ 由 A、B 和 $[A, B]$ 张成。于是 $m = 2 = r_*$，因此推论 5.4 不适用，而定理 5.2 的判据确实是一个实质性条件：将 ξ_3、ξ_4、ξ_6 映射到 A、B、$[A, B]$，并将 ξ_1、ξ_2、ξ_5 映射到 0 的分次同态 D： $\mathfrak{v} \to \mathfrak{h}$ 满足 $D(\xi_6) \neq 0$。尽管如此，下一个命题表明，对于处处存在 Pansu 微分且该微分连续的映射，在每一点该判据都成立。

命题 5.9。 在例 *5.8* 中，设 $f\colon \Omega \to H$ 关于 W^0 在 Ω 的每一点均 *Pansu* 可微，且 $x \mapsto D_P^{W^0} f(x)$ 连续。那么，对于每个 $x \in \Omega$ 中的 $D_P^{W^0} f(x)$， 保持 $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$，也就是说， $D_P^{W^0} f(x) = d\Phi_e$ 对于唯一的水平同态 Φ： $G \to H$。

证明。写作 $D_x := D_P^{W^0} f(x)$。由于 W^0是极小的， $J_{W^0} =$ker $\rho =$张成空间$\{X_6\}$，因此由引理 2.7 D_x保持 $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ 当且仅当 $D_x(X_6) = 0$。我们用反证法：假设集合 $O := \{x \in \Omega\colon\ D_x(X_6) \neq 0\}$非空。我们知道它是开集，因为 $x \mapsto D_x$ 是连续的。回顾一下，在这个特定例子中，我们取 $H = H^1$ 为三维 Heisenberg 群。思路是，在 O 上，映射 f 沿 X_1和 X_2的导数为零，因此沿它们的流为常数，进而沿 $X_6 = [X_1, [X_1, X_2]]$也为常数，这与假设 $D_x(X_6) \neq 0$矛盾。

步骤 *1*： $D_x(X_1) = D_x(X_2) = 0$ 对于 $x \in O$。向量 $D_x(X_3)$ 和 $D_x(X_4)$ 张成空间 $\mathfrak{h}_1$，因为 $[D_x(X_3)\ D_x(X_4)] = D_x(X_6) \neq 0$。对于 $i \in \{1, 2\}$和 $j \in \{3, 4\}$，我们有$[X_i, X_j]_{0,\ W^0} = 0$，因此 $[D_x(X_i)\ D_x(X_j)] = 0$。由于括号 $\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$ 是非退化的，这意味着 $D_x(X_1)$ $= D_x(X_2) = 0$。

第*2*步： f沿着 X_1-段和 X_2-段在 O上保持不变。令 $y \in O$和 $i \in \{1, 2\}$。由于 $X_i \in W_1^0$，我们有 $\delta_t^{W^0}$ $(\pm X_i) = \pm tX_i$。根据 d_H的左不变性和齐次性，定义 2.11和第1步可得

$$\tfrac{1}{t}\, d_H\big(f(y), f(y \star_{\mathfrak{g}} (\pm tX_i))\big) = d_H\big(0, R_{y,t}^{W^0}(\pm X_i)\big) \xrightarrow[t\to 0]{} d_H\big(0, D_y(\pm X_i)\big) = 0\,.$$

现在令 I 为一个区间，并且对所有 $s \in I$ 都有 $c(s)\colon = y \star_{\mathfrak{g}} sX_i \in O$。由于 sX_i 和 hX_i 可交换， $c(s + h) =$ $c(s) \star_{\mathfrak{g}} hX_i$，因此将上面的估计应用于点 $c(s)$，对于每个 $s \in I$，可得 $d_H\big(f(c(s))\ f(c(s + h))\big) = o(|h|)$，其中 $h \to 0$。固定 $s_0 \in I$，并令 $\varphi(s)\colon = d_H\big(f(c(s_0))\ f(c(s))\big)$。根据三角不等式， $|\varphi(s+h) - \varphi(s)| \leq d_H\big(f(c(s))\ f(c$ $(s + h))\big)$，因此 φ 在 I 上可微，且 $\varphi' = 0$。所以 φ 为常数，等于 $\varphi(s_0) = 0$，而 $f \circ c$ 在 I 上为常数。

第*3*步： $f(x \star_{\mathfrak{g}} a^3 X_6) = f(x)$ 对于 $x \in O$以及 $|a|$足够小。令 $a \in \mathbb{R}$ 为 $A := aX_1$，令 B 为 $= aX_2$，并将 $[g,h] := g \star_{\mathfrak{g}} h \star_{\mathfrak{g}} g^{-1} \star_{\mathfrak{g}} h^{-1}$ 记为群交换子。BCH 公式给出

$$[A,B] = a^2 X_5 + \tfrac{1}{2} a^3 X_6 \quad \text{and} \quad [A,[A,B]] = a^3 X_6 \,.$$

展开交换子， $a^3 X_6 = g_1 \star_{\mathfrak{g}} \cdots \star_{\mathfrak{g}} g_{10}$与每个 $g_k \in \{\pm aX_1, \pm aX_2\}$。令 $x_0 := x$并令$x_k := x_{k-1} \star_{\mathfrak{g}} g_k$，于是有 $x_{10} = x \star_{\mathfrak{g}} a^3 X_6$，注意到 x_{k-1}和 x_k通过线段 $\{x_{k-1} \star_{\mathfrak{g}} \tau g_k : \tau \in [0,1]\}$ 沿着 X_1 或 X_2相连。由于 $a \to 0$，这十条线段收缩到点 x，因此当 $|a|$足够小时，它们都位于开集O中。根据第2步， $f(x_k) = f(x_{k-1})$ 对每个 k都成立，因此 $f(x \star_{\mathfrak{g}} a^3 X_6) = f(x)$。

第*4*步：结论。令 $x \in O$。由于 $X_6 \in W_2^0$，我们有 $\delta_t^{W^0}(X_6) = t^2 X_6$。当 $t > 0$足够小时，对 $a = t^{2/3}$ 应用第3步可得 $f(x \star_{\mathfrak{g}} t^2 X_6) = f(x)$，因此

$$R_{x,t}^{W^0}(X_6) = \bar{\delta}_{1/t}\big(f(x)^{-1} \star_{\mathfrak{h}} f(x \star_{\mathfrak{g}} t^2 X_6)\big) = 0 \,.$$

令 $t \to 0$，得到 $D_x(X_6) = 0$，这与 $x \in O$ 矛盾。

因此， $O = \emptyset$，也就是说， $D_x(X_6) = 0$ 对每个 $x \in \Omega$ 都成立，最后一个断言由定理 5.2 得出。 □

注意，证明用到了 O是开集这一点。对于 Lipschitz 映射，满足 $D_P f(x)(\xi_6) \neq 0$的点集仅为可测集，我们不知道命题 5.9 的结论是否几乎处处成立。

References

[1] Andr´e Bella¨ıche, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, 《次黎曼几何》（Andr´e Bella¨ıche 和 Jean- Jacques Risler 编），Progr. Math.，第 144 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，1996，欧洲数学大会首届会议卫星会议论文集“Journ´ees nonholonomes: g´eom´etrie sous-riemannienne, th´eorie du contrˆole, robotique”，法国巴黎，1992 年 6 月 30 日至 7 月 1 日，第 1–78 页。[2] Yves de Cornulier, *On sublinear bilipschitz equivalence of groups*, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 52 (2019)，第 5 期，1201–1242。[3] Gerald B. Folland 和 Elias M. Stein, *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974)，429–522。[4] Maria Karmanova 和 Sergey Vodopyanov, *Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability and coarea formula*, 2008 年，arXiv:0804.3291v2。[5] Enrico Le Donne、Sebastiano Nicolussi Golo 和 Andrea Tettamanti, *Quantitative versions of Pansu asymptotic theorem and of Mitchell tangent theorem* 2026 2601 21509 , arXiv: . .

[6] Enrico Le Donne 和 Francesca Tripaldi, *A cornucopia of Carnot groups in low dimensions*, Anal. Geom. Metr. Spaces 10 (2022)，第 1 期，155–289。[7] Valentino Magnani, *Contact equations, Lipschitz extensions and isoperimetric inequalities*, Calc. Var. Partial Differential Equations 39 (2010)，第 1-2 期，233–271。[8] Valentino Magnani, *Towards differential calculus in stratified groups*, J. Aust. Math. Soc. 95 (2013)，第 1 期，76–128。[9] Valentino Magnani 和 Tapio Rajala, *Radon–Nikodym property and area formula for Banach homogeneous group targets*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2014)，第 23 期，6399–6430。[10] Roberto Monti, *Distances, boundaries and surface measures in Carnot–Carathéodory spaces*，博士论文，特伦托大学，2001 年。[11] Pierre Pansu, *Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. (2) 129 (1989)，第 1 期，1–60。[12] Christophe Reutenauer, *Free Lie algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series，第 7 卷，The Clarendon Press，Oxford University Press，纽约，1993。[13] Daniel Rogalski, *An introduction to noncommutative projective geometry* 2014 1403 3065 *Non-* , arXiv: . . *commutative Algebraic Geometry* 64, 2016 另见《Math. Sci. Res. Inst. Publ.》第 I 章，Cambridge Univ. Press，。[14] Francesca Tripaldi, *The Rumin complex on nilpotent Lie groups*, 2020，arXiv:2009.10154。[15] Erik van Erp 和 Robert Yuncken, *On the tangent groupoid of a filtered manifold* **49** 2017 6, , Bull. 1000 1012 Lond. Math. Soc. ( )，第 – 期。

Cristian Sopio, Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Ferrara, Via Machiavelli35, 44121 Ferrara, Italy*Email address*: cristian.sopio@unife.it

Francesca Tripaldi, Department of Pure Mathematics, University of Leeds, Woodhouse, LS2 9JT Leeds, UK*Email address*: f.tripaldi@leeds.ac.uk