Jaynes–Cummings–Hubbard 模型的特罗特分解混合量子比特-玻色子模拟

Nabaraj Khatri,[1,2] Dilip Ojha,[3] Rajib Tripathi,[3] Kismat K.C,[3] 以及 Ashish Khanal[4,2,*]

[1] *Tri-Chandra Multiple Campus, Tribhuvan University, Ghantaghar, 44600 Kathmandu, Nepal* [2] *Holographic Himalaya, Lambagar, 44600 Tarakeshwar, Nepal* [3] *Central Department of Physics, Tribhuvan University, Kirtipur, 44600 Kathmandu, Nepal* [4] *Department of Physics and Astronomy, Ohio University, Athens, OH 45701, USA*

Jaynes–Cummings–Hubbard（JCH）模型描述了耦合光学腔中光与物质的相互作用，并为研究其量子动力学提供了一个框架。在这项工作中，我们设计了一种 Trotter 化量子电路，使用 Bosonic Qiskit 和矩阵乘积态（MPS）后端研究 JCH 模型的实时动力学。我们模拟单极化激元输运，并将格点占据数与精确对角化结果进行基准比较。随后，我们将模拟扩展至硬核光子约束下的双激发扇区，考察激发输运和对称性。最后，我们研究二分纠缠熵对腔间光子跃迁强度的依赖性。结果展示了如何利用矩阵乘积态模拟混合量子比特–玻色子电路，以研究光–物质晶格动力学。本研究为将混合模拟方法拓展至更复杂的相互作用与开放光–物质系统提供了数值基准。

arXiv:2611.32895v1 [quant-ph] 24 Nov 2026

I. 引言

量子计算领域的最新进展推动了各种用于模拟量子系统的计算框架和软件工具的发展 [1–3]。从基于电路的量子模拟器 [4, 5]到经典模拟和连续变量平台 [6, 7]，这些工具为研究量子动力学、探索新兴量子硬件的能力提供了途径。然而，由于玻色希尔伯特空间具有无限维度，且将玻色子编码为量子比特会带来开销 [8, 9]，高效模拟同时包含离散量子自由度和玻色模的系统仍然面临挑战。这类混合系统需要能够在统一的模拟环境中处理量子比特与玻色自由度的计算框架 [10–12]。

一种广为人知的光–物质混合系统是 Jaynes–Cummings–Hubbard（JCH）模型。该模型将二能级系统与晶格中的连续变量腔模耦合起来，用于研究极化激元波传输、量子相变和空间纠缠 [13–16]。由于玻色空间是无限的，且态空间呈指数增长，追踪其实时动力学颇具挑战 [17, 18]。此外，将连续玻色模映射到标准量子比特门会带来巨大的电路开销 [9]。因此，我们采用 Bosonic Qiskit [10], —— 一种近期提出的 Python 软件包，它提供可直接作用于截断 Fock 空间量子模的内置连续变量门，同时支持标准量子比特操作 [4, 19]。我们将其与矩阵乘积态（MPS）张量网络后端结合，以降低内存占用 [20]。尽管针对相关自旋–玻色子模型的特罗特分解乘积公式演化已得到研究 [21–23], ，Bosonic Qiskit 尚未针对该多体 Jaynes–Cummings–Hubbard 链与精确对角化结果进行基准比较 [24–26]。

在本研究中，我们使用 Bosonic Qiskit 模拟单个极化激元如何穿过一条由 8 个相连腔组成的一维链，每个腔都包含一个腔模和一个二能级原子，两者通过局域 Jaynes–Cummings 相互作用和最近邻光子跃迁耦合 [13]。我们将极化激元初始化于中间的腔（格点 4），并在 MPS 后端上通过特罗特化局域耦合和分束器门，以时间步长 $\Delta t = 0.05$ 演化系统。我们将单激发动力学与精确对角化结果进行基准比较，并进一步扩展至双激发动力学。结果表明，极化激元波包会扩散并在边界处反射，呈现有限尺寸复现；经过数千步后，Trotter 误差仍然很小且有界。我们还使用相同的模拟工具计算了二分纠缠熵，并发现，在耦合强度固定时，熵的增长由跳跃强度（J）决定（g）。

本文其余部分安排如下。在第II 节中，我们介绍 Qiskit、连续变量量子信息和 Bosonic Qiskit。在第III 节中，我们回顾 Jaynes–Cummings 模型，并介绍 Jaynes–Cummings–Hubbard 模型。第IV节介绍模拟设置、MPS 后端，以及与精确对角化的基准比较。第 V节讨论纠缠熵动力学，第VI 节则以展望作结。

II. 连续变量计算与 Bosonic Qiskit

A. 量子比特与量子模式

量子信息的基本单位是量子比特。与经典比特不同，量子比特可以处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ [27]的叠加态。IBM 的 Qiskit 是一款开源

* ak247626@ohio.edu

软件开发工具包（SDK），用于构建、模拟并运行这类量子比特上的量子电路 [4, 28]。这些基于量子门的框架主要用于操控单个量子比特，而非复杂的耦合光-物质系统。

许多物理现象，例如电磁场传播、分子振动和机械运动，从根本上来说都是连续的。在传统的离散变量（DV）平台中，必须将这些连续可观测量映射到二能级量子比特寄存器上，这会引入大量的离散化开销。连续变量（CV）量子计算通过将信息直接编码到量子谐振子（量子模式）的无限维希尔伯特空间中，避免了这种不匹配；该空间由福克基$\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots\}$张成。量子模式的状态也可以等价地由一对连续的共轭正交算符 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 描述，它们满足 $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ [29]。

B. Bosonic Qiskit

Bosonic Qiskit 是由量子优势协同设计中心（C2QA）开发的免费开源 Python 工具，作为 IBM 的 Qiskit 的附加组件（有关更多详情，请参阅 [10]）。它通过引入连续变量模和混合量子比特—玻色子架构 [30]，的原语，补充了传统的量子电路模型，并为用户提供了用于模拟、控制和分析这些架构的高级框架。它将玻色子产生/湮灭算符、位移/压缩动力学以及多模相互作用，连同标准量子比特寄存器直接整合在一起，从而显著降低了对无限维希尔伯特空间进行离散化的开销。

为执行经典模拟，Bosonic Qiskit 将每个量子模式截断为有限维福克空间$\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$，其中 N是所选的截断维度。量子模式上的操作由满足 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ 的产生算符（$\hat{a}^\dagger$）和湮灭算符（$\hat{a}$）控制，并通过位移算符 $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ 等幺正算符、受控位移等条件门，以及量子模式之间的分束器相互作用 $\hat{B}(\theta)$ 来执行。

具有 m个量子比特和 n 个量子模式的混合电路的总希尔伯特空间是它们的张量积，

$$\mathcal{H}_{\text{hybrid}} = \mathcal{H}_{\text{qubit}}^{\otimes m} \otimes \mathcal{H}_{\text{qumode}}^{\otimes n} = \mathbb{C}^{2^m} \otimes \text{span}\left(\{|k\rangle\}_{k=0}^{N-1}\right)^{\otimes n}. \tag{1}$$

时间演化通过矩阵指数型量子门或显式的哈密顿量模拟项来实现，例如条件旋转

$\hat{U}_{\text{CR}}(\theta) = \exp\left(-i\theta\hat{\sigma}_z\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$，其中$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{n}$ 是光子数算符，而 $\hat{\sigma}_z$ 作用于控制量子比特。表 I 列出了 Bosonic Qiskit 中提供的一些量子门。

要模拟 JCH 哈密顿量，必须同时考虑局域自旋–光子耦合和格点间的

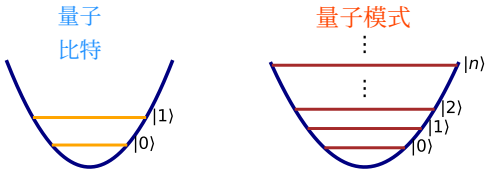


图 1：离散量子比特系统（$|0\rangle$，$|1\rangle$）与连续变量量子模系统（$|n\rangle$）的势能阱和能级比较，突出了混合量子架构中有限维与无限维希尔伯特空间之间的转换。

Gate	生成元	Bosonic Qiskit 调用
相空间旋转	$e^{i\theta\hat{n}}$	cv.r()
分束器	$e^{\theta\hat{a}\hat{b}^\dagger - \theta^*\hat{b}\hat{a}^\dagger}$	cv.bs()
单模压缩	$e^{\frac{1}{2}(\theta^*\hat{a}^2 - \theta\hat{a}^{\dagger 2})}$	cv.sq()
受控旋转	$e^{\sigma^z \otimes i\theta\hat{n}}$	cv.c_r()
(受控) SNAP	$e^{\sigma^z \otimes i\theta_n \lvert n\rangle\langle n\rvert}$	cv.snap()

表 I：Bosonic Qiskit 中选用的连续变量门。

玻色子跃迁。在后续章节中，我们将使用一种 Trotter 化量子门方案，将 Jaynes–Cummings 相互作用幺正算符与分束器跃迁网络结合起来。

III. JAYNES–CUMMINGS–HUBBARD 模型

A. Jaynes–Cummings 模型

Jaynes–Cummings 模型（JCM）是一个完整的量子力学模型，用于描述与二能级原子系统 [13, 31]相互作用的单模场。它类似于一个镜像腔，光子在两面镜子之间来回反射。尽管原子具有两个以上的能级，但可以将原子的跃迁限制在仅有的两个特定量子态之间，从而形成一个有效二能级系统。

为了描述这个二能级原子，我们引入常用的原子升算符和降算符 $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$and $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$，以及反转算符$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$，它们共同遵循标准的泡利代数。原子与场之间的电偶极相互作用包含四项，$\hbar g($ $\sigma_+ a + \sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a + \sigma_- a^\dagger)$，其中 g是原子-场耦合强度。其中，$\sigma_+ a^\dagger$ 和 $\sigma_- a$ 不守恒能量，因此在旋转波近似（RWA）下予以舍弃，仅留下守恒能量的项 $\sigma_+ a$和 $\sigma_- a^\dagger$。这便得到 Jaynes–Cummings

哈密顿量，

$$H_{\mathrm{JC}} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger), \quad (2)$$

其中 ω_a 和 ω_c 分别是原子和腔的频率。由于其形式简单，它常被称为量子光学中的“氢原子” [31]。

在相互作用绘景中并施加共振条件（$\omega_a = \omega_c$）时，自由部分 H_0 与耦合项 H'对易，因此 $H_I = H' = \hbar g$（$\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger$）。对于最初位于原子上的单个激发，$|\psi(0)\rangle = |e,\ n\rangle$，求解由此得到的两能级薛定谔方程可得精确态，

$$|\psi(t)\rangle = \cos\!\big(g\sqrt{n+1}\,t\big)\,|e,n\rangle - i\sin\!\big(g\sqrt{n+1}\,t\big)\,|g,n{+}1\rangle, \quad (3)$$

即激发在原子与场模之间发生相干的周期性交换。原子反转$w(t) = \langle\hat{\sigma}_z\rangle = P_i(t) - P_f(t)$随后为

$$w(t) = \cos(\Omega(n)\,t), \qquad \Omega(n) = 2g\sqrt{n+1}, \quad (4)$$

其中 $\Omega(n)$ 为拉比频率。在真空态（$n = 0$）中，这简化为 $\Omega(0) = 2g$，即真空拉比振荡；在这种振荡中，即使初始时没有光子，原子仍会与场交换其激发。

B. Jaynes–Cummings–Hubbard 哈密顿量

JCH 模型将 Jaynes–Cummings 腔物理与晶格上的腔间光子跃迁相结合[14, 15]。每个格点都包含一个与二能级原子耦合的腔模，光子可以在相邻格点之间跃迁。设定 $\hbar = 1$ 后，其哈密顿量为：

$$H_{\mathrm{JCH}} = -J\sum_{\langle i,j\rangle}(a_i^\dagger a_j + \mathrm{h.c.}) + \sum_i h_i^{\mathrm{JC}} - \mu\sum_i N_i, \quad (5)$$

$$h_i^{\mathrm{JC}} = \omega_c a_i^\dagger a_i + \omega_a \sigma_i^+\sigma_i^- + g(a_i^\dagger\sigma_i^- + a_i\sigma_i^+), \quad (6)$$

$$N_i = a_i^\dagger a_i + \sigma_i^+\sigma_i^-, \quad (7)$$

其中 J 是腔间跃迁率，g 是真空拉比耦合，N_i 是格点 i [14]处的总激发数。

在我们的工作中，我们设定 $\mu = 0$，并使原子与腔处于共振状态，$\omega_c = \omega_a \equiv \omega$，在一条开放链上，其中 $\langle i,\ j\rangle$ 遍历最近邻。该哈密顿量守恒总激发数 $\sum_i N_i$，因此，制备的单激发态始终处于单激发扇区。在那里，$\omega\sum_i N_i$ 项仅贡献一个全局相位，而动力学由下式产生：

$$H = -J\sum_i(a_i^\dagger a_{i+1} + \mathrm{h.c.}) + g\sum_i(a_i^\dagger\sigma_i^- + a_i\sigma_i^+). \quad (8)$$

这是我们在第 IV A 节中特罗特分解并映射为量子比特–量子模门（JC 项和分束器项）的哈密顿量。每个格点具有极化激元态 $|n,\ \pm\rangle = (\,|g,\ n\rangle \pm |e,\ n-1\rangle\,)/\sqrt{2}$，其能量为 $E_{n,\pm} = n\omega \pm g\sqrt{n}$。初始态 $|e,\ 0\rangle$ 是 $|1,\ +\rangle$与 $|1,\ -\rangle$的等权叠加态，这正是频率为 $2g$的真空态拉比振荡的起源。

每个格点上的光子阻塞赋予 JCH 模型类似 Bose-Hubbard 模型的特性，单激发和双激发极化激元能级 $E_{n,\pm}$ 并不简并，并具有有效的位点内排斥：

$$U_{\mathrm{eff}} = E_{2,-} - 2E_{1,-} = g(2-\sqrt{2}), \quad (9)$$

这会抑制第二个激发占据同一个腔 [14, 32]。正因如此，JCH 晶格能够支持莫特绝缘体到超流体相变。不过，我们的工作仅限于使用 Bosonic Qiskit 模拟 JCH 腔位点占据数和纠缠熵。

IV. JCH 链的特罗特分解模拟

在第II节介绍了 Bosonic Qiskit 的连续变量原语后，我们现在将其应用于式（8）中的 JCH 哈密顿量。我们构建特罗特分解电路，在矩阵乘积态后端上运行，并将结果与单激发情况下的独立精确解进行比较。首先，我们通过与精确对角化结果比较，验证实现的正确性。其次，我们使用类似的 Trotter 电路模拟双激发动力学。所有模拟均使用 Python、Qiskit（v2.0.0）、Qiskit Aer（v0.17.0）和 Bosonic Qiskit（v15.1）完成 [10]。本研究所用的模拟代码可按需提供。

A. 电路构建与初态

我们研究具有开放边界、含 $N = 8$ 个格点的一维 JCH 链。每个格点包含一个量子模式（腔）和一个量子比特（原子），因此总希尔伯特空间呈混合形式：$\mathcal{H}_{\mathrm{hybrid}} = \mathcal{H}^{\otimes m}_{\text{量子比特}} \otimes \mathcal{H}^{\otimes n}_{\text{量子模式}} = \mathbb{C}^{2^m} \otimes \big(\text{张成空间}\ \{|k\rangle\}_{k=0}^{d-1}\big)^{\otimes n}$，其中 $m = n = 8$。每个量子模式均采用福克截断 $d = 2$，因此一个腔中只能容纳零个或一个光子。

可以先想象一下这个模型所描述的情形。每个格点都是一个小腔，里面有一个原子。当两者处于共振状态时，激发会在腔内光子和原子之间不断交换，因此在任一时刻，它既有一部分是光，也有一部分是物质。这种混合激发称为极化激元。光子还可以以速率 J 泄漏到相邻腔中，而原子不能移动。因此，极化激元只能通过其光子部分沿链传播。这就是为什么我们追踪的局域激发

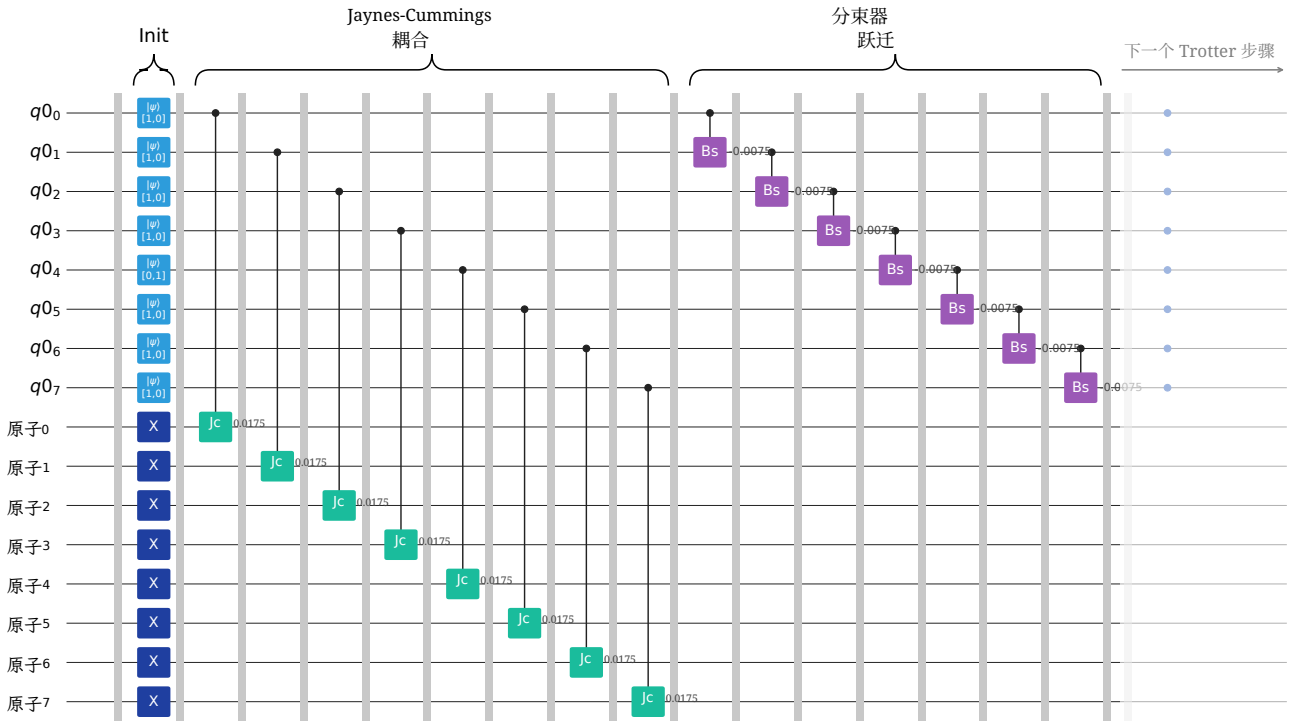
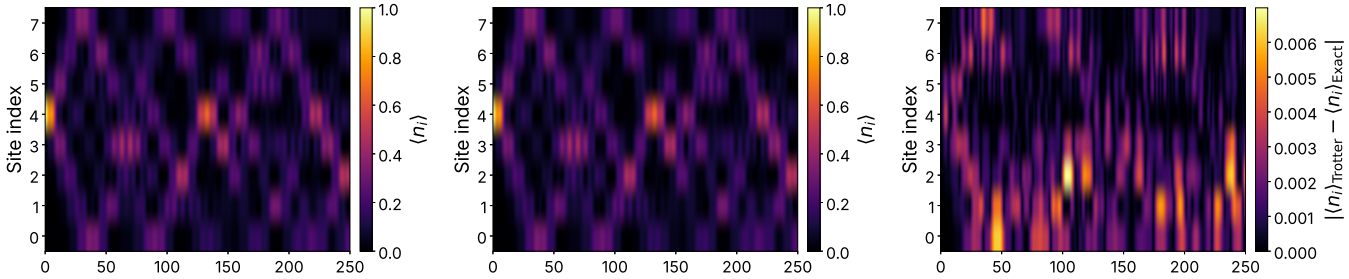


图 2：Jaynes–Cummings–Hubbard 系统实现电路设置，包含 8 个格点，对应步长为 0.05 的第一个 Trotter 步。第四个格点初始化为激发态，其余格点初始化为基态。拉长的竖直量子门是 Jaynes–Cummings 门，用于耦合光子-原子相互作用。分束器门是引入跃迁的分束器，使玻色激发发生干涉并在各模式之间分布。Jaynes–Cummings 耦合强度和跃迁参数分别设为 0.35 和 0.15。Pauli X 门将原子置于基态。



(a) Bosonic Qiskit 模拟　(b) 精确对角化　(c) 比较

图 3：开放边界 $N = 8$ JCH 链上单个极化激元的格点占据数 $\langle n_i(t)\rangle$ 的时间演化，$\omega_c = \omega_a$、$g = 0.35$ 和 $J = 0.15$，初始化于中心格点（$i = 4$）。(a) 每个量子模式福克截断为 $d = 2$ 的 Bosonic Qiskit Trotter 电路（矩阵乘积态后端），运行至 $t = 250$，$\Delta t = 0.05$（5000 步）。(b) 同一设置的精确对角化。(c) (a) 与 (b) 的绝对差，最大值为6.98×10^{-3}，与通常的 Trotter 误差一致。激发在 $t \lesssim 20$内弹道式扩散，边界反射在 $t \approx 130$ 和 $t \approx 220$附近产生部分复现，即有限尺寸的 Poincar´e 回归行为。

数是这两部分之和，

$$\hat{N}_i = a_i^\dagger a_i + \sigma_i^+ \sigma_i^- . \tag{10}$$

格点上的 Jaynes–Cummings 项只会移动一个激发态-同一格点上光子与原子之间的耦合，因此它使 N_i 保持不变。因此，快速的光子-原子交换在 $\langle n_i\rangle$中是不可见的，而我们在占据数中看到的纯粹是极化激元从

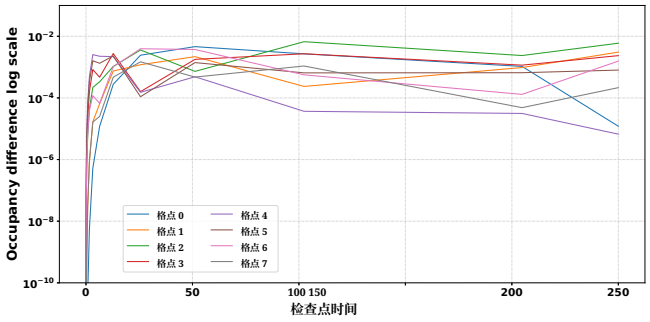


图 4：对于单个初始激发（位于中心格点），将 Trotter 化 JCH 动力学与精确对角化进行比较的逐格点误差分析。对于每个格点，绝对占据数偏差 $|\langle n_i\rangle_{\mathrm{Trotter}} - \langle n_i\rangle_{\mathrm{Exact}}|$作为时间的函数，在选定的检查点处绘制。

纵轴采用对数刻度，插图给出了放大视图。残余偏差与有限步长 Trotter 误差一致，表明在模拟时间窗口内，量子电路演化能够以受控精度追踪精确动力学。

一个格点到另一个格点的运动。哈密顿量的两个项也都守恒总激发数，我们将在稍后利用这一点进行检查。

在单激发运行中，我们从链上的 $i = 4$ 处有一个极化激元开始。通过 Pauli-X 量子门将该处的量子比特翻转至 $|e\rangle$，其余原子均处于基态，而每个量子模式均从真空态开始。

Trotter 步交替使用两个层，这与将 H_{JCH} 分解为位点项和跃迁项相对应。首先是一个杰恩斯-卡明斯门层，每个格点各一个，用 $g = 0.35$将每个原子与其所在的腔耦合起来。它会在光子和原子之间交换一个激发。随后是一个分束器门层，用跳跃强度 $J = 0.15$连接相邻的量子模，使光子能够从一个腔跃迁到下一个腔。由于原子和腔处于共振状态，失谐为零，因此不需要额外的单模相位门。由于这两个层彼此不对易，以这种方式分解演化只能得到近似结果，且每一步的误差会随着 Δt 变小而减小。图 2 展示了第一步中这种分解的情况，对应于 $\Delta t = 0.05$。

我们将电路运行至一系列检查点，最远到达$t = 250$ （5000 个 Trotter 步），并在每个检查点计算每个格点的约化密度矩阵 ρ_i，然后评估

$$\langle n_i(t)\rangle = \mathrm{Tr}\left[\rho_i \hat{N}_i\right], \tag{11}$$

其中 $\hat{}$ N_i 由式（10）给出。将所有八个格点和每个检查点的 $\langle n_i(t)\rangle$ 叠加起来，即得到时空占据图，并在图3左侧面板中以热图形式展示。

B. 矩阵乘积态

混合寄存器上的稠密态矢量规模是所有局部维数的乘积，此处为 $2^8 \times d^8$，因此，即使截断值适中，内存和量子门开销也会随着格点数呈指数增长。矩阵乘积态通过将量子态表示为由键指标连接的小型张量链，避免了这一问题。键维数 χ 决定了这条链能够容纳多少纠缠；每次执行双格点量子门后，都会通过奇异值分解截断量子态，使其恢复到较低维度，仅保留最大的 χ个奇异值[33, 34]。我们使用 Qiskit Aer 的矩阵乘积态方法运行该电路，并通过单个后端选项进行选择，因此，该电路与在态矢量后端上运行的电路完全相同。

只有当描述该态不需要太多纠缠时，这种截断才具有较低的计算开销。对于 JCH 这样的最近邻链，通常确实如此。由于 H_{JCH} 只耦合相邻格点，动力学过程中产生的纠缠在链上的二分划分中通常遵循近似的面积律标度，而不会随着每次二分划分而大幅增长。因此，矩阵乘积态适合作为 JCH 链的后端，同一份代码也可用于更长的链。

C. 与精确对角化进行基准比较

为了检查误差，我们将特罗特分解的矩阵乘积态运行结果与类似设置下的精确解进行比较。由于我们的初始态恰好携带一个激发，并且 JCH 哈密顿量守恒激发数，H_{JCH} 在这一子空间中的表示是一个普通的 $2N \times 2N$ 矩阵，其基底由“光子位于格点 i”和“原子处于激发态，位于格点i”构成。对该矩阵进行对角化很容易，由此即可得到精确参照。

在这个扇区中，该问题是粒子在一条链上的跃迁：粒子可以在每个格点上以光子或原子的形式存在。图3 中的热图 $t = 0$展示了结果：激发位于中心格点，并向外扩散，其数值为 J；由于只有极化激元中的光子部分能够发生跃迁，扩散速度也因此减慢。由于 $g > J$，两个极化激元分支相隔约 $2g$，它们的拍频在时间轴方向产生了细密的条纹。在开放边界处反射后，波前返回并发生干涉，从而在中心格点附近形成部分复现，时间约为 $t \approx 130$ 和 $t \approx 220$。

两种计算结果吻合良好，再现了相同的扩散、反射和复现模式。绝对差值的峰值为 6.98×10^{-3}，这与 $\Delta t = 0.05$ 处的 Trotter 误差相符，而非电路错误或键维数不足。图4 逐格点展示了这一情况。误差在初始弹道阶段逐渐增大，随后趋于饱和，并在狭窄范围内波动（10^{-4} 至 10^{-2}），而不是不断累积；这一现象在全部八个格点上都存在。

D. 双激发动力学

本节将研究从单激发扩展到双激发。每个原子都是一个二能级系统，每个腔最多截断为一个光子。因此，格点无法无限制地吸收激发，激发之间会有效地相互作用。请注意，这排除了诸如 $|g,2\rangle$ 这样的状态，因此我们模拟的是截断的硬核 JCH 模型。随着激发数增加，状态空间也会迅速增大，我们将在这一范围内测试同一电路。

我们取一条包含 $N=7$ 个格点、截断值为 $d=2$的链，共得到 14 个量子比特。耦合参数为 $g=0.35$ ，分别对应格点上的 Jaynes–Cummings 项和更强的跃迁 $J=0.5$，因此光子现在比在单激发运行中更容易移动。两个光子分别放置在格点 2 和 4 上，关于中心格点对称；所有原子均从基态开始，其余量子模处于真空态。Trotter 步与之前类似，采用 $\Delta t=0.05$ 和 3000 步，达到 $t=150$。

图 5 展示了结果。在 $t=0$ 处，两个激发被设置在格点 2 和 4 上。它们分别向彼此和两侧边界扩散，因此中间的格点从两侧获得权重。由于初始态和哈密顿量都关于格点 3 对称，占据率在整个过程中始终保持镜像对称。与单激发情形相比，该图样规则性低得多，因为激发不仅会与边界发生散射，也会彼此散射；在较晚时刻，权重会分散到整条链上，大多数格点接近 $2/7\approx0.29$。

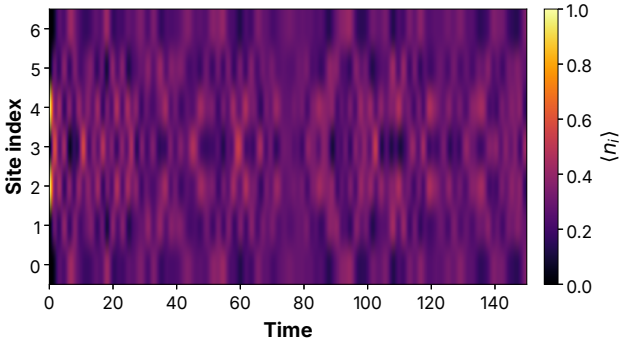


图 5：开放边界的 $N=7$ JCH 链上，两个初始激发时格点占据数 $\langle n_i(t)\rangle$ 随时间的演化，其中 $g=0.35$、$J=0.5$ ，且每个量子模式的福克截断为 $d=2$ 。光子初始位于格点 2 和 4，所有原子均处于基态；演化至 $t=150$ ，并在矩阵乘积态后端上使用 $\Delta t=0.05$ 运行。占据数始终关于中心格点 $i=3$ 呈镜面对称，并扩展至整条链；总 $\sum_i\langle n_i\rangle=2$ 在所有时刻均保持在 10^{-10} 以内。

V. 纠缠熵动力学

我们通过将整个链的希尔伯特空间分解为 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$，计算了二分划分的冯·诺伊曼纠缠熵，其中 A 表示激发格点处的局部双量子比特块，B 表示其余的 $N-1$ 格点。由于全局动力学是幺正的，并且初态为纯乘积态， $|\psi(t)\rangle\in\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$ 在所有 t 时刻都保持纯态。对于纯全局态的二分划分 $A|B$，约化密度矩阵 $\rho_A(t)=\mathrm{Tr}_B[|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|]$ 是混态，当且仅当 A 与 B 在量子力学上相互纠缠；根据施密特分解， $S(\rho_A)=S(\rho_B)$恒等成立，与 B 的维数无关 [35]。

在每个 Trotter 步，保存密度矩阵会直接对矩阵乘积态表示中的 B 执行偏迹，从而得到 $\rho_A(t)$这一 4×4 矩阵，并按照标准形式计算熵：

$$\mathrm{S}(\rho_A)=-\mathrm{Tr}[\rho_A\log_2\rho_A]=-\Sigma\lambda_i\log_2\lambda_i \qquad (12)$$

其中ρ_A，通过是qiskit的quantum info.entropy 计算并以 2 为底报告，结果单位为比特。

纠缠熵反映了最初局域化的激发在多大程度上已经实现量子机械地在链上离域；图 6）中的高熵表明中心格点处的约化态高度混合，而低熵值则表明激发仍保持局域化，并且与其余格点基本没有纠缠。当跃迁参数 J=0.02 较小时，诱导的群速度过小，在有限的模拟时间步内无法发生输运，因此熵上升缓慢。当 J=0.08 时，激发的离域速度比之前快得多，熵在$t\approx15$处达到最大值。随后，熵沿返回路径再次降至零（$t\approx30$），因为激发已完全离开中心格点。当 J=0.2 时，动力学起初与之前相似，但随着激发快速离域，扩散和熵的跃升速度都快得多。激发到达链的边界后，会部分重新聚焦到中心格点。当 J=0.5 时，其数值已经超过 JC 耦合速率 g，输运呈现有限尺寸量子行走的特征；熵的往返运动多次重复，其干涉在熵轨迹中产生了密集的准周期性条纹图样。

VI. 结论与展望

在这项工作中，我们展示了一种计算框架，使用 Bosonic Qiskit 和矩阵乘积态（MPS）后端模拟一维 Jaynes-Cummings-Hubbard 模型的实时动力学。通过追踪一个极化激元在由 8 个格点组成的腔链中的运动，我们的 Trotter 分解模拟成功捕捉到了弹道波包扩展、边界

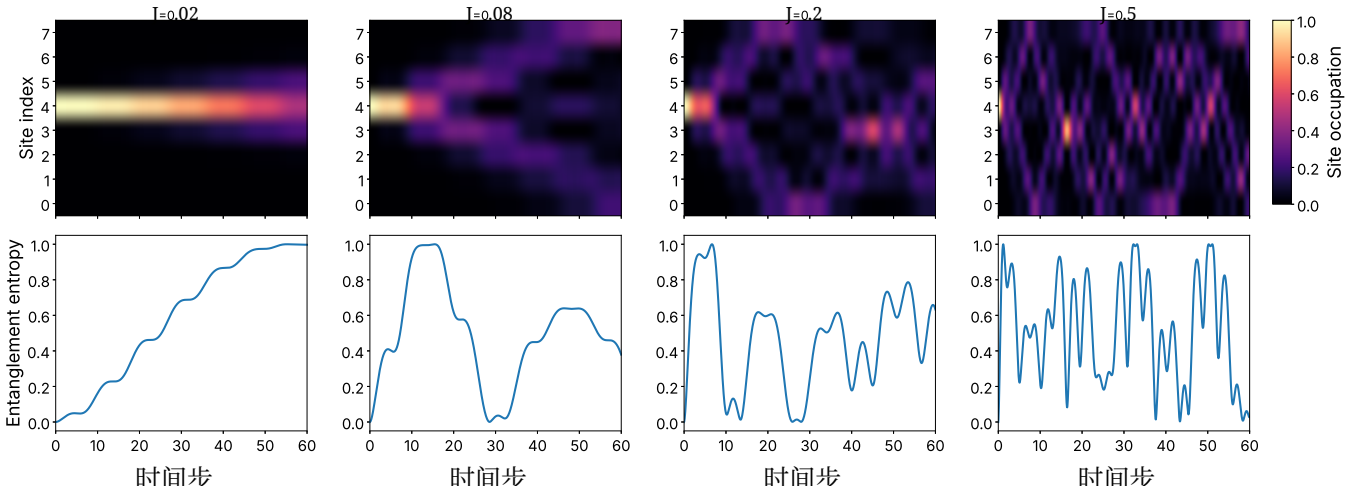


图 6：跃迁强度为 $J = 0.02$、0.08、0.2 和 0.5（从左至右）时， $N = 8$ JCH 链的激发动力学； $g = 0.35$ ，初始时一个极化激元位于中心格点（$i = 4$）。上排显示格点占据数 $\langle n_i(t)\rangle$ ，下排显示中心格点的约化双量子比特态与链其余部分之间的冯·诺依曼纠缠熵（单位：比特）。较弱的跃迁会导致缓慢、近乎单调的离域，而较大的 J会加快扩散。这些结果来自采用 Bosonic Qiskit 进行的特罗特化演化， $\Delta t = 0.05$ 至 $t = 60$ ，福克截断为 $d = 2$。

反射以及跨越数千个时间步的有限尺寸复现。此外，通过将基于电路的方法与精确对角化进行系统比较，我们确认离散化误差和 Trotter 误差始终受到严格限制。我们还将这一设置扩展到双激发扇区，发现该框架能够捕捉相互作用诱导的极化激元散射和光子阻塞效应。最后，我们评估了不同腔间跃迁率下的二分纠缠熵。综上，这些结果表明，混合量子比特-玻色子软件工具可以在光-物质晶格模型中通过精确解进行检验，这是在没有精确参考解的参数区间中使用这些工具之前迈出的第一步。

然而，我们的模拟仅限于低激发扇区中规模较小的一维开放链，并采用 $d = 2$ 的福克截断；这既施加了硬核光子极限，又使纠缠保持在适合进行 MPS 压缩的程度。此外，我们仅使用一阶特罗特分解，因此电路深度会随着长时间演化而累积。我们将这些问题留待未来研究。类似地，还有一些有趣的研究方向有待探索。该混合模拟框架可以扩展到更丰富的量子多体现象和更贴近硬件的区间。一个自然的下一步是超越硬核极限，进入多极化激元区间，其中，光子阻塞和有效的格点局域相互作用会在更大的二维晶格几何结构中驱动莫特绝缘体到超流体的相变 [14, 15, 32, 36, 37]。此外，通过 Kraus 算符或 Lindblad 主方程纳入开放系统动力学，例如腔光子损耗和原子自发辐射，将能够对现实硬件噪声以及超导电路架构中的玻色子量子纠错码进行基准测试 [38–40]。最后，将这些连续变量 Trotter 化电路编译到真实的连续变量硬件或混合振荡器-量子比特量子处理器（QPUs）上，有望实现对复杂光-物质系统进行可扩展的数字-模拟量子模拟 [4, 11, 12, 41, 42]。

致谢

我们谨向 Tri-Chandra Multiple Campus、特里布万大学物理学中央系（CDP）以及 ICTP PWF Holographic Himalaya 致以诚挚谢意，感谢他们在本研究开展期间提供了良好的学术环境。我们由衷感谢 Kiran Adhikari博士在整个研究过程中给予的持续鼓励、真知灼见的讨论和悉心指导。

[1] R. P. Feynman, 《国际理论物理学杂志》**21**，467（1982）。[2] S. Lloyd, 《科学》**273**，1073–1078（1996）。[3] I. L. Chuang、L. M. K. Vandersypen、X. Zhou、D. W. Leung 和 S. Lloyd, 《自然》**393**，143（1998）。[4] A. Javadi-Abhari、M. Treinish、K. Krsulich、C. J. Wood、J. Lishman、J. Gacon、S. Martiel、P. D. Na-

tion、L. S. Bishop、A. W. Cross、B. R. Johnson 和 J. M. Gambetta，使用 Qiskit 进行量子计算（2024），arXiv:2405.08810 [quant-ph]。[5] V. Bergholm、J. Izaac、M. Schuld、C. Gogolin、S. Ahmed、V. Ajith、M. S. Alam、G. Alonso-Linaje、B. Akash- Narayanan、A. Asadi、J. M. Arrazola、U. Azad、S. Ban-ning、C. Blank、T. R. Bromley、B. A. Cordier、J. Ceroni、A. Delgado、O. D. Matteo、A. Dusko、T. Garg、D. Guala、A. Hayes、R. Hill、A. Ijaz、T. Isacsson、D. Ittah、S. Ja-hangiri、P. Jain、E. Jiang、A. Khandelwal、K. Kottmann、R. A. Lang、C. Lee、T. Loke、A. Lowe、K. McKiernan、J. J. Meyer、J. A. Monta˜nez-Barrera、R. Moyard、Z. Niu、L. J. O'Riordan、S. Oud、A. Panigrahi、C.-Y. Park、D. Polatajko、N. Quesada、C. Roberts、N. S´a、I. Schoch、B. Shi、S. Shu、S. Sim、A. Singh、I. Strandberg、J. Soni、A. Sz´ava、S. Thabet、R. A. Vargas-Hern´andez、T. Vin-cent、N. Vitucci、M. Weber、D. Wierichs、R. Wiersema、M. Willmann、V. Wong、S. Zhang 和 N. Killoran，PennyLane：混合量子-经典计算的自动微分（2022），arXiv:1811.04968 [quant-ph]。[6] N. Lambert、E. Gigu`ere、P. Menczel、B. Li、P. Hopf、G. Su´arez、M. Gali、J. Lishman、R. Gadhvi、R. Agarwal、A. Galicia、N. Shammah、P. Nation、J. Johansson、S. Ahmed、S. Cross、A. Pitchford 和 F. Nori，《物理学报告》1153，1–62（2026）。[7] N. Killoran、J. Izaac、N. Quesada、V. Bergholm、M. Amy 和 C. Weedbrook，《Quantum》3，129（2019）。[8] A. Macridin、P. Spentzouris、J. F. Amundson 和 R. Harnik，《物理评论 A》（2018）。[9] N. P. D. Sawaya、T. Menke、T. H. Kyaw、S. Johri、A. Aspuru-Guzik 和 G. G. Guerreschi，《npj 量子信息》6，10.1038/s41534-020-0278-0（2020）。[10] T. J. Stavenger、E. Crane、K. C. Smith、C. T. Kang、S. M. Girvin 和 N. Wiebe，载于 *2022 IEEE High Performance Extreme Computing Conference (HPEC)*（IEEE，2022），第 1–8 页。[11] Y. Liu、S. Singh、K. C. Smith、E. Crane、J. M. Martyn、A. Eickbusch、A. Schuckert、R. D. Li、J. Sinanan-Singh、M. B. Soley、T. Tsunoda、I. L. Chuang、N. Wiebe 和 S. M. Girvin，《PRX Quantum》7，10.1103/4rf7-9tfx（2026）。[12] E. Crane、K. C. Smith、T. Tomesh、A. Eickbusch、J. M. Martyn、S. K¨uhn、L. Funcke、M. A. DeMarco、I. L. Chuang、N. Wiebe、A. Schuckert 和 S. M. Girvin，Phys. Rev. X 16，041008（2026）。[13] E. Jaynes 和 F. Cummings，《IEEE 会议录》51，89–109（1963）。[14] A. D. Greentree、C. Tahan、J. H. Cole 和 L. C. L. Hollenberg，《自然·物理》2，856–861（2006）。[15] M. J. Hartmann、F. G. S. L. Brand˜ao 和 M. B. Plenio，《自然·物理》2，849–855（2006）。[16] C. Noh 和 D. G. Angelakis，《物理学进展报告》80，016401（2017）。[17] P. Campagne-Ibarcq、A. Eickbusch、S. Touzard、E. Zalys-Geller、N. E. Frattini、V. V. Sivak、P. Reinhold、S. Puri、S. Shankar、R. J. Schoelkopf、L. Frunzio、M. Mirrahimi 和 M. H. Devoret，《自然》584，368–372（2020）。[18] I. Luchnikov、S. Vintskevich、H. Ouerdane 和 S. Fil-ippov，《物理评论快报》122，10.1103/phys-revlett.122.160401（2019）。[19] A. Macridin、P. Spentzouris、J. F. Amundson 和 R. Harnik，Physical review letters 121 11，110504（2018）。[20] U. Schollw¨ock，《物理学年鉴》326，96–192（2011）。[21] H. F. Trotter，《美国数学学会会刊》10，545–551（1959）。[22] A. Miessen、P. J. Ollitrault 和 I. Tavernelli，《物理评论研究》（2021）。[23] A. Chiesa、F. Tacchino、M. Grossi、P. Santini、I. Tav- ernelli、D. Gerace 和 S. Carretta，《自然·物理》15，455 459 2019–（）。[24] P. Hauke、F. M. Cucchietti、L. Tagliacozzo、I. Deutsch 和 M. Lewenstein，《物理学进展报告》75，082401 2012（）。[25] A. Weiße 和 H. Fehske，精确对角化技术，载于 *Computational Many-Particle Physics*（施普林格柏林海德堡，2008），第 529–544 页。[26] N. M. Hoffmann、C. Sch¨afer、A. Rubio、A. Kelly 和 H. Appel，《物理评论 A》99，10.1103/phys- reva.99.063819（2019）。[27] D. P. DiVincenzo，《物理评论 A》51，1015（1995）。[28] G. Aleksandrowicz、T. Alexander、P. Barkoutsos、L. Bello、Y. Ben-Haim、D. Bucher、F. J. Cabrera- Hern´andez、J. Carballo-Franquis、A. Chen、C.-F. Chen、*et al.*、Zenodo（2019）。[29] S. L. Braunstein 和 P. van Loock，《现代物理学评论》77，513–577（2005）。[30] S. Bravyi、O. Dial、J. M. Gambetta、D. Gil 和 Z. Nazario，《应用物理学杂志》132，10 1063 5 0082975 2022。/。（）。[31] B. W. Shore 和 P. L. Knight，《现代光学杂志》40，1195–1238（1993）。[32] D. G. Angelakis、M. F. Santos 和 S. Bose，Phys. Rev. A 76，031805(R)（2007）。[33] G. Vidal，Phys. Rev. Lett. 91，147902（2003）。[34] U. Schollw¨ock，Rev. Mod. Phys. 77，259（2005）。[35] A. Ekert 和 P. L. Knight，《美国物理学杂志》63，415–423（1995）。[36] M. P. A. Fisher、P. B. Weichman、G. Grinstein 和 D. S. Fisher，Phys. Rev. B 40，546（1989）。[37] S. Schmidt 和 G. Blatter，Phys. Rev. Lett. 103，086403（2009）。[38] D. Gottesman、A. Kitaev 和 J. Preskill，Physical Re- view A 64，10.1103/physreva.64.012310（2001）。[39] V. V. Albert、K. Noh、K. Duivenvoorden、D. J. Young、R. T. Brierley、P. Reinhold、C. Vuillot、L. Li、C. Shen、S. M. Girvin、B. M. Terhal 和 L. Jiang，《物理评论 A》97，10.1103/physreva.97.032346（2018）。[40] W. Cai、Y. Ma、W. Wang、C.-L. Zou 和 L. Sun，Fundamental Research 1，50–67（2021）。[41] J. T. Selvam、S. S. Veni 和 R. R. Joseph，在超导量子处理器上对三能级 Jaynes-Cummings 动力学进行一阶和二阶数字量子模拟（2026），arXiv:2602.20614 [quant-ph]。[42] E. Decker、E. Gustafson、E. McKinney、A. K. Jones、L. Goetz、A. Li、A. Schuckert、S. Stein、G. Li 和 E. Crane，面向混合量子比特–玻色子处理器的符号哈密顿量编译器（2025），arXiv:2506.00215 [quant- ph]。