arXiv:2611.32911v1 [cs.CG] 24 Nov 2026

具有少量 Radon 点的中心点

Guilherme D. da Fonseca 马克斯-马
赛大学和 LIS，法国Kunal Dutta 华沙大学
信息学研究所，波兰

摘要

若每个包含点 $z \in \mathbb{R}^d$ 的闭半空间都包含集合 P 中至少 βn 个点，则点 $z \in \mathbb{R}^d$ 是 n 点集 $P \subset \mathbb{R}^d$ 的一个 β-中心点。迭代 Radon 点可在 $\widetilde{O}(d^9)$ 时间内得到一个 $\Omega(1/d^2)$-中心点：每一轮都将一个总体替换为随机 $d+2$ 元组的 Radon 点。Har-Peled 和 Jones 将运行时间改进至 $\widetilde{O}(d^7)$。已知的分析均证明，总体中的每个点都是中心点。

我们证明，如果只输出最后一轮的一个Radon 点，那么只需进行 $O(\log^2 d)$ 轮 Radon 计算。对于每个 k，分析都会跟踪一轮中 k 个随机点落在同一个“坏”半空间内的概率，因此只需对输入样本进行一次半空间并集界。对于处于一般位置的点，且 $\varepsilon > 0$ 为常数时，可用 $O(d^3 \log^3 d)$ 次 Radon 计算，以常数概率计算出一个 $\frac{1-\varepsilon}{(d+1)(d+2)}$-中心点，运行时间为 $O(d^{3+\omega}\log^3 d) \subseteq O(d^{5.372})$（$\omega$：矩阵乘法指数）；使用高斯消元时，运行时间为 $O(d^6 \log^3 d)$。该算法仅使用线性代数；在用于计算质量为 $1/\mathrm{poly}(d)$ 的中心点的强多项式算法中，这是目前已知最快的算法。对于整数输入，网格舍入可使所有点的表示长度保持为多项式级，同时仍能得到精确中心点。

Dutta 和 Pisula 通过求解$\widetilde{O}(d^3)$个线性规划，在弱多项式时间内获得了 $\Omega(1/(d \log d \log\log d))$ 的质量；他们使用具有 $\Theta(\log d)$ 个部分的 Tverberg 点，而非 Radon 点。我们的分析可推广到这类 Tverberg 点的多轮应用：对于包含超过 $O(d)$ 个点的输入，期望使用 $O(d^2 \log^4 d \log\log d)$ 个线性规划即可获得相同的质量。

2012 年 ACM 主题分类 计算理论 →计算几何；计算理论 → 随机性、几何学与离散结构

关键词与短语 中心点、Tukey 深度、Radon点、随机化算法、高维

资助 *Kunal Dutta*：获波兰 NCN Opus 基金资助，项目编号 2023/51/B/ST6/02989。

1 引言

设 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中由 n 个点构成的集合。若每个包含 z 的闭半空间都至少包含 βn 个 P 中的点，则点 $z \in \mathbb{R}^d$ 是 P 的一个 β-中心点；等价地，z 的 Tukey 深度至少为 βn [30]。中心点定理 [24] 保证存在一个 $\frac{1}{d+1}$-中心点，而中心点是分治算法和几何分隔器[1]的基本工具

22], 以及稳健统计 [8]。已知方法计算一个 $\frac{1}{d+1}$中心点需要 $n^{O(d)}$ 时间 [6]；平面情形下已知有线性时间算法 [18], ，而 Chan 为低维空间中的最大Tukey深度提出了最优随机化算法 [4]。长期以来，在 d 多项式时间内可达到的最佳质量是 $\Theta(1/d^2)$，通过迭代 Radon 点获得（见下文）。Cherapanamjeri [5] 在 d 多项式时间内（次数较高）计算出一个点，其深度接近 $\Omega(1/d)$，这是一种较弱的近似概念。Dutta 和 Pisula [9, 10][1]通过求解 $\widetilde{O}(d^3)$ 个线性规划，在弱多项式时间内计算出一个 $\Omega(1/(d \log d \log\log d))$-中心点：他们用具有 $\Theta(\log d)$ 个部分的 Tverberg 点替代 Radon 点，这些点来自随机

[1] SODA 版本 [9] 给出了稍弱的 $\Omega\left(d^{\frac{1}{\log^2 d}}\right)$界；更精确的 $\Omega\left(d^{\frac{1}{\log\log\log d}}\right)$ 界则见于完整版 [10]。

~个大小为 O（d）的子集，并通过求解一个线性规划从随机划分中获得。其运行时间取决于输入的位长度（通过线性规划体现）；他们给出的唯一强多项式版本在 d上是次指数级的。

迭代 Radon 点。任意 $d+2$ 个 $\mathbb{R}^d$ 点都可以划分为两部分，使得它们的凸包相交（Radon 定理 [25]）；交集中的点称为 Radon 点。Radon 点相对于其 $d+2$ 个定义点是“中心”的：任何包含该点的半空间都必须包含其中至少两个点。 [6]的算法利用这一性质进行迭代：将随机分组的 $d+2$ 个点替换为其 Radon 点，并重复此过程。对于 $d=1$，这就是三个数的迭代中位数，它与 Valiant 构造多数函数 [31] 的单调公式，以及 Hoory、Magen 和 Pitassi 的分层随机电路 [16]密切相关。高度为 h 的 Radon 计算满 $(d+2)$ 叉树相对于一个固定半空间而言不具中心性的概率，在 h上呈双指数级小；但对 n^d个相关半空间应用并集界，需要 $h=\Theta(\log(d\log n))$，因此叶节点数量会达到 d的准多项式级。为了得到多项式时间算法， [6] 的作者用分层结构取代了树：每一轮都将整个 n 点总体替换为随机分组得到的 n 个 Radon 点。他们证明，对于 $n=\Omega(d^{4+\delta})$，经过 $\Theta(d+\log\log n)$ 轮后，总体中的每个点以高概率都是一个 $\Omega(1/d^2)$-中心点；结合~ ~随机抽样，这就得到一个运行时间为 $O(d^9)$ 的算法，其中进行了 $O(d^6)$ 次 Radon 计算，每次耗时 $O(d^3)$，用于计算一个 $3e\ d+1^2\ (\ )d+2$-中心点。Har-Peled 和 Jones [12, 13]重新研究了这一过程：他们抽取一个包含 $N=\cancel{\Theta(d^3\log d)}$ 个点的样本，它是半空间的相对近似；他们以迭代过程取代分轮处理，并将其分析为随机游走（“Radon urn”），其中每一步都插入一个 Radon 点并删除一个随机点。对于精度参数 $\varepsilon\in(0,1)$ 和失败概率 $\varphi\in(0,1)$，经过 $O(dN\log N\log(N/\varphi))$ 步，每步耗时 $O(d^3)$，也就是当 ε和 φ为常数时需进行 $O(d^4\log^3 d)$ 步，总体中的每个点都以至少 $1-\varphi$ 的概率成为一个 $1-\varepsilon\ (d+2)^2$-中心点；由此得到一个运行时间为 $\widetilde{O}(d^7)$ 的算法。Miller 和 Sheehy [21] 对该方法进行了去随机化，而 Har-Peled 和 Zhou [15] 则将其用于近似 Tverberg 划分。

对 [6, 13] 的分析证明，总体中的每个点都是中心点：对于每个 e^Λ 相关的“坏”半空间 h，其中 $\Lambda=\Theta(d\log N)$，总体中位于 h 内的点数以概率 $1-e^{-\Lambda}$降至零。在基于轮次的过程中， h 中的一对点以关于 d多项式级小的概率自我繁殖，因此，最后一些坏点要经过约 $\Lambda/\log d=\Theta(d)$轮才会消失。在迭代过程中，最后一个坏点只有在被删除时才会消失，删除速率为每步 $1/N$，因此需要 $O(\Lambda N\log N)$步。

我们的贡献。 我们采用与 [6] 相同的分层结构，但只有 $O(\log^2 d)$层（对于常数 ε 和 φ），并输出最后一层的单个Radon 点。我们不试图证明整个总体都是中心的。相反，对于每一层 i 以及每个 k，我们给出以下界

$$A_i(k)\ \approx \Pr\big[\,k\text{层 } i\text{中的随机点都落在同一个坏半空间内}\,\big].$$

只有当每个 k Radon 点都有两个输入点位于 h中时，层 $i+1$的 k元组才会落在坏半空间 h中；这 $2k$ 个输入点构成层 i 的一个随机子集，其大小为 $2k$ 减去碰撞的数量。这给出了从 A_i 到 A_{i+1} 的递归（引理 11）。对于这个量，半空间上的并集界仅用于输入样本：k 个不同的样本点位于同一个坏半空间中的概率至多为 $e^\Lambda\beta^k$。（我们还对半空间使用并集界，以使每一层中位于每个坏半空间内的点数低于 $R=\Theta$（Λ）（第一层中低于 $2R$）；这是由一个从第一层开始就成立的简单 Chernoff 集中界推出的。）碰撞是主要困难：它们使得

对手更容易将一个元组保持在半空间内，也使得验证整个总体的代价变高。我们通过对 $2k$ 个随机点中不同索引数量的矩母函数进行一个简单界定，证明对于单个输出点而言，碰撞并无害处（引理 12）。所得递归具有如下行为：“阈值”κ_i以下，界 $A_i(k) \le e^{\mu_i(\kappa_i-k)}$ 是平凡的；该阈值从 $\Theta(d)$ 开始，每层按因子 $1-\Theta(1/\log d)$ 几何递减，直至低于 1（引理 16），之后只需常数层即可（引理 18）。

▶ **定理 1.** 设 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中处于一般位置的 n 个点的集合，$d \ge 2$，并设 ε、$\varphi \in (0,1)$ 是常数。通过计算 $O(d^3 \log^3 d)$ 个 *Radon* 点，可以以至少 $1-\varphi$ 的概率计算出一个点，它是 P 的 $\frac{1}{4}\left(\frac{d+1}{(d+2)}\right)^{1-\varepsilon}$-中心点；所需时间为 $O(d^{3+\omega}\log^3 d)$，其中 ω 是矩阵乘法指数。若使用高斯消元而非快速矩阵乘法，运行时间为 $O(d^6 \log^3 d)$。

作为比较，Har-Peled 和 Jones 的算法计算 $O(d^4 \log^3 d)$ 个 Radon 点，运行时间为 $O(d^7 \log^3 d)$，并保证更好的质量 $\frac{1-\varepsilon}{3e}\left(\frac{d+1}{(d+2)}\right)^2$；定理 1 保证的质量约差四倍，且略优于 [6] 的 $\frac{1}{2}\left(\frac{d+1}{(d+2)}\right)$。采用已发表的最佳界 $\omega < 2.371339$ [1] 时，定理 1 的运行时间为 ~~$O(d^{5.372})$~~。定理 19 给出了对 ε 和 φ 的依赖关系：层数增加 $O(\log(1/\varphi) + \log d \ln^+ \log \frac{1}{\varepsilon})$，除抽取样本外，运行时间对 $1/\varepsilon$ 仅呈多对数依赖。表 1 比较了定理 1 与先前的算法。定理 1 保证的质量比 Dutta 和 Pisula [9, 10] 的结果差 $\bar{\Theta}(d/(\log d \log\log d))$ 倍；另一方面，定理 1 的算法不求解线性规划，且是强多项式算法。[2] 下文的定理 2 达到与 [9]，相同的质量，但需要求解线性规划，且是弱多项式算法。

Tverberg 点的层。分析只用到了 Radon 点的一个性质：包含该点的半空间也包含它的两个输入点。Dutta 和 Pisula [9, 10] 计算具有更强性质的点：包含这些点的半空间也包含其 s t 个输入点。为此，他们利用 Sarkaria [26] 和 Soberón [29]的提升论证，为输入点的一种随机 s着色求解线性规划。在第 4 节中，我们用这些*Tverberg* 门进行分层分析。递归的常数 $\binom{t}{2}$ 变为 $\binom{t}{s}$，输入点对则变为 s元子集。由此带来两项改进。当 $s = \Theta(\log d)$ 且 $t = \Theta(s^2 d \log s)$ 时，质量为 $\Theta(s/t)$。此外，现在阈值 κ_i 在每一层都会减半，因此只需 $O(\log d)$ 层。综合来看，使用 $O(d^2 \log^4 d \log\log d)$ 个门，可得到质量 $\Theta(1/(d \log d \log\log d))$。

▶ 定理 *2*。设 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中处于一般位置的一组 n 点，令 ε、$\varphi \in$ 为 *(0,1)* 中的常数，并假设 $n \ge t$，其中 $t = O(d\log^2 d \log\log d)$ 是一个门的输入点数。通过求解期望数量为 $O(d^2 \log^4 d \log\log d)$ 的线性规划，可以以至少 $1-\varphi$ 的概率计算出一个 P 的 ~~$\Omega\left(\frac{1}{d}\right)$~~ $\log\log\log d$-中心点。每个线性规划都是一个可行性问题，包含 $O(d\log^2 d \log\log d)$ 个非负变量和 $O(d \log d)$ 个等式约束。

Dutta 和 Pisula 的算法可求解 $\Theta(d^3 \operatorname{polylog} d)$ 个同类线性规划，并保证相同的质量。若每个线性规划使用耗时 $O_w(d^{2.5} \operatorname{polylog} d)$ 的求解器，他们给出的界为 $O_w(d^{5.5} \operatorname{polylog} d)$，其中 O_w 表示弱多项式界。定理 2 将他们的子程序与我们的分析结合起来。

[2] 我们将一种算法称为强多项式算法，如果在实数 RAM 中，其算术运算次数关于 d （采样后）为多项式级，且与输入的位长度无关。图灵机概念还要求数值的位长度为多项式级；精确的迭代 Radon 计算不具备这一性质，无论是对我们的算法还是对 [6, 13] 都如此。

表 1 d ε φ $T_{\mathrm{Radon}}=$ 中心点算法在 O d^{ω} 3 T_{LP} $\widetilde{O}$ d（常数，）方面为多项式时间。已知的最佳运行时间采用（）（引理）。这是精确求解具有（）个变量和约束的线性规划所需的时间；该时间取决于位长度，而两个基于线性规划的算法的位长度不同，因此我们不比较它们的运行时间。强：按脚注 2 的含义，为强多项式时间。

算法	质量	Time	已知的最佳运行时间	强
[6]	$\frac{2}{3e(d+1)(d+2)}$	$\widetilde{O}(d^6)\cdot T_{\mathrm{Radon}}$	$\widetilde{O}(d^{8.372})$	yes
Har-Peled、Jones [13]	$\frac{1-\varepsilon}{(d+2)^2}$	$\widetilde{O}(d^4)\cdot T_{\mathrm{Radon}}$	$\widetilde{O}(d^{6.372})$	yes
Cherapanamjeri [5]	$\Omega(\frac{1}{d})$，较弱概念	poly(d)	poly(d)	no
Dutta、Pisula [9, 10]	$\Omega\left(\frac{d \text{ 对数 对数}}{\text{对数 } d}\right)$	$\widetilde{O}(d^3)\cdot T_{\mathrm{LP}}$	–	no
定理 1	$\Omega\left(\frac{1-\varepsilon}{d(d+1)(d+2)}\frac{1}{\text{对数 对数 对数 } d}\right)$	$\widetilde{O}(d^3)\cdot T_{\mathrm{Radon}}$	$\widetilde{O}(d^{5.372})$	yes
定理 2		$\widetilde{O}(d^2)\cdot T_{\mathrm{LP}}$	–	no

备注。 (i) 仅在 Har-Peled 和 Jones 的算法中用快速矩阵乘法替代高斯消元，就可得到 $\widetilde{O}(d^{4+\omega})$；而我们在 Radon 计算次数方面的改进与此无关。(ii) 在精确算术中，点的位长度会随轮数 [6, Section 9]呈几何增长。对于具有 B 位整数输入坐标、 n 至少等于样本大小且满足 $\varepsilon \le \frac{1}{3}$ 的情形，将每个 Radon（或 Tverberg）点舍入到网格间距为 $2^{-O(d(B+\log d))}$ 的网格上，只会通过每个坏半空间损失 d 个点这一因素影响分析。因此，输出仍然是一个精确中心点，其质量为 $(1-\varepsilon)^2\beta$，而不是 $(1-\varepsilon)\beta$；所有计算得到的点的每个坐标均具有 $O(d(B+\log d))$ 位。(iii) 加速迭代 Radon 计算的一种自然思路，是重复利用一个由 $d+1$ 个点构成的因式分解矩阵，以每个 $O(d^2)$ 的时间计算具有许多不同末点的 Radon 点。然而，由同一公共基点计算出的 Radon 点具有很强的相关性，我们尚未找到利用这种共享的方法。

组织结构。 第 2 节汇集预备知识。第 3 节介绍并分析基于 Radon 点的算法，并由此证明定理 1。第 4 节将分析推广到 Tverberg 点的层，并证明定理 2。第 5 节分析并讨论位长复杂度。

2 预备知识

全文中， $d \ge 2$, $t := d+2$, 且 $c := \binom{t}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2} \ge 6$，但第 4 节除外，该节中 t 重新定义。我们用 $(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$ 表示下降阶乘，并令 $\ln^+ x = \max\{0, \ln x\}$。半空间是集合 $\{x : a, x > b\}$（开）或 $\{x : a, x \ge b\}$（闭），其中 $a \ne 0$。我们采用实数RAM模型，并假设 P 以数组形式给出，因此可以在常数时间内从 P 中均匀随机抽取一个点。点序列 $Q = (q_1, \ldots, q_m)$ 可以包含重复点；序列的子集始终是其索引集 $[m] = \{1, \ldots, m\}$ 的子集，对于 $J \subseteq [m]$，我们记 $Q[J] = \{q_j : j \in J\}$。

2.1 Radon点

▶ **引理 3。** 设 $X = (x_1, \ldots, x_t)$ 是 $t = d+2$ 个 $\mathbb{R}^d$中的点组成的序列。在 $O(d^{\omega})$时间内（或通过高斯消元在 $O(d^3)$ 时间内），可以计算出一个划分 $[t] = I^+ \cup I^-$，其分块均非空，并计算出一个点 $z \in \operatorname{conv} X[I^+] \cap \operatorname{conv} X[I^-]$，称为 X的 Radon 点 。

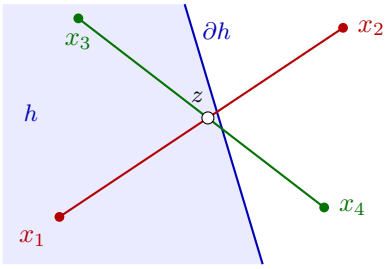

图 1 一个 Radon 点 z；半空间 $h \ni z$ 包含两部分各自的一个点。

此外，任何包含 z 的半空间（开半空间或闭半空间）都包含 x_i 和 x_j，其中 $i \in I^+$和 $j \in I^-$；特别地，它包含 X 中具有两个不同索引的点。

证明。设 M 为 $(d+1) \times (d+2)$ 矩阵，其第 i 列为 $(x_i, 1)$。由于 M 的列数多于行数，因此它存在一个非零核向量 λ，可通过 LSP 分解 [17] 在$O(d^\omega)$时间内求得（另见 [3]），也可通过高斯消元在 $O(d^3)$ 时间内求得。由于 $\sum_i \lambda_i = 0$ 和 $\lambda \neq 0$，集合 $I^+ = \{i : \lambda_i > 0\}$ 非空，$\{i : \lambda_i < 0\}$ 也非空；令 $I^- = [t] \setminus I^+$ 和 $\sigma = \sum_{i \in I^+} \lambda_i > 0$。由 $\sum_i \lambda_i x_i = 0$ 可得 $z := \sum_{i \in I^+} \frac{\lambda_i}{\sigma} x_i = \sum_{i \in I^-} \frac{-\lambda_i}{\sigma} x_i$，这是 $X[I^+]$ 和 $X[I^-]$ 的凸组合（系数 $-\lambda_i/\sigma$、$i \in I^-$均非负且总和为 1）。如果半空间 h 不包含任何满足$i \in I^+$的 x_i，那么 h的补集（它是凸的）包含 $X[I^+]$，因而也包含 z。对 I^- 同样适用（满足 $\lambda_i = 0$ 的指标不会对该组合产生贡献）。◀

我们将 Radon(X) 记作由引理 3 计算得到的 Radon 点；见图 1。

2.2 中心点与坏半空间

对于有限点集 $S \subset \mathbb{R}^d$ 和整数 $k \geq 1$，如果点 z 满足：每个包含 z 的闭半空间都至少包含 k 个 S 中的点，则称 z 是 S 的 $k/|S|$-中心点。下面的引理将关于 S 的中心性归结为避开有限个开半空间。这实质上是 Danzer、Grünbaum 和 Klee [7] 提出的 [6], 的定理 2.3；为完整起见，我们给出证明。若点集 $S \subset \mathbb{R}^d$ 中没有 $d+1$ 个点位于同一个超平面上，则称其处于一般位置。

▶ **引理 4**。设 $S \subset \mathbb{R}^d$ 是由 ν 个处于一般位置的点组成的集合，且 $1 \leq k_0 \leq \nu - d$。令 H 为满足以下条件的开半空间 h 组成的族：其边界超平面经过 d 个 S 中的点，且 $|h \cap S| \leq k_0 - 1$。则 $|H| \leq 2\binom{\nu}{d}$，并且 H 中的每个点 $z \notin \bigcup$都是 S 的 k_0/ν-中心点。

证明。 d 点确定唯一的超平面，该超平面界定两个开半空间，因此$|\mathrm{H}| \leq 2\binom{\nu}{d}$。假设 z 不是 S的 k_0/ν-中心点：存在一个闭半空间 $h \ni z$，满足T：其中$= h \cap S$ 的数量至多为 $k_0 - 1$。h 的补集是凸集，且包含 $S \setminus T$，因此$z \notin \mathrm{conv}(S \setminus T)$。由于 $|S \setminus T| \geq \nu - k_0 + 1 \geq d + 1$ 且 S处于一般位置，$\mathrm{conv}(S \setminus T)$是一个满维多胞体，并且它是其面定义的闭半空间的交。因此，某个面 F 使 z 严格位于其外侧。根据一般位置， F的超平面恰好包含 S中的 d 个点，而 h^* 的开外半空间 F 不包含$S \setminus T$中的任何点。因此 $|h^* \cap S| \leq |T| \leq k_0 - 1$，所以 $h^* \in \mathrm{H}$且 $z \in h^*$。◀

我们将$\mathcal{H}$ 的成员称为坏半空间。

2.3 相对近似与尾界

设 P 为一个包含 n 个点的集合。如果对于每个半空间 h，$\left|\frac{|h\cap S|}{|S|} - \frac{|h\cap P|}{n}\right| \le \varepsilon \max\left\{\frac{|h\cap P|}{n}, \rho\right\}$，子集 $S \subseteq P$ 是半空间的（ρ, ε）相对近似；对于点序列 S（其中的点来自 P并按重数计数），同一定义也适用。由于半空间的范围空间具有 VC 维数 $d+1$ [20]，一个点序列

$$n_0 = \left\lceil \frac{C_0}{\varepsilon^2 \rho}\left(d \ln \tfrac{1}{\rho} + \ln \tfrac{1}{\varphi'}\right)\right\rceil \tag{1}$$

P 个相互独立的均匀随机点以至少 $1-\varphi'$ 的概率构成一个（ρ，ε）-相对近似，其中 $C_0 \ge 1$ [19, 14, 11] 为绝对常数。我们需要一个无重复的样本，这可以通过拒绝抽样获得。

▶ **引理 5**。设 $n \ge n_0^2$，且 Y 是由 n_0 个相互独立的均匀随机点组成的序列，这些点取自 P。则 Y 以至少 $\frac{1}{2}$ 的概率不含重复点；在此事件的条件下，Y 是 P 的均匀随机 n_0-子集，并以至少 $1-2\varphi'$ 的概率构成一个（ρ，ε）-相对近似。

证明。发生重复的概率至多为 $\binom{n_0}{2}/n \le \frac{1}{2}$。在不发生重复的条件下，由对称性，所有 n_0-子集等可能；不是相对近似的概率至多为 $\varphi'/\frac{1}{2}$。◀

▶ **引理 6.** 设 S 是针对半空间的 P 的(ρ,ε)相对近似，且 z 是 S 的一个β-中心点，其中 $\beta \ge (1+\varepsilon)\rho$。那么，$z$ 是 P 的一个$(1-\varepsilon)\beta$-中心点。

证明。设 $h \ni z$ 为一个闭半空间，且 $x = |h\cap P|/n$。那么 $\beta \le |h\cap S|/|S| \le x + \varepsilon \max\{x,\rho\}$。若 $x < \rho$，则得到 $\beta < (1+\varepsilon)\rho$，矛盾。因此 $x \ge \rho$ 且$\beta \le (1+\varepsilon)x$，所以 $x \ge \beta/(1+\varepsilon) \ge (1-\varepsilon)\beta$。◀

▶ **引理 7** (Chernoff界，参见 [23])。设 X 是相互独立的指示变量之和，且 $\mathbb{E}[X] \le \mu$，并设 $a \ge \mu$, $a > 0$。那么 $\Pr[X \ge a] \le (e\mu/a)^a$。

证明。如果 $\mu = 0$ 那么 $X = 0$，结论显然成立。否则，对于 $\vartheta = \ln(a/\mu) \ge 0$，我们有 $\mathbb{E}[e^{\vartheta X}] \le e^{\mu(e^\vartheta - 1)}$，因此根据马尔可夫不等式 $\Pr[X \ge a] \le e^{-\vartheta a + \mu(e^\vartheta - 1)} = (\mu/a)^a e^{a-\mu} \le (e\mu/a)^a$。◀

3 层 Radon 点

该算法首先抽取一个大小为 S 的样本，其中包含 P，然后构造 L 层 $Q_1, \ldots, Q_L$，每层包含 m 个点：Q_i 中的每个点都是在不同随机索引处从 Q_{i-1} 中选取的 t 个点的 Radon 点，其中 $Q_0 = S$。输出是最后一层中 t 个随机点的 Radon 点；参见算法 1 和图 2。该算法是 [6, 的多项式时间算法算法 4]，作了四处修改：层数为 $O(\log^2 d + \log(1/\varphi) + \log d \ln^+ \log(1/\varepsilon))$，而不是 $\Theta(d + \log\log n)$；每层的大小为 $m = \Theta(d^2 R)$，其中 R 定义如下；一组中的 t 个点在不同索引处选取（不放回抽样）；输出是最后一层的单个 Radon 点，而不是其中任意一个点。

参数。参数列于表2中。目标质量为 $\beta := \frac{1}{8c} = 4^{-(d+1)}(d+2)^{-(d+2)}$。如果 $n \le 1/\beta$，则 P中的每个点都是一个 β-中心点，因为每个包含该点的闭半空间都至少包含 $1 \ge \beta n$ 个点；因此从现在起我们假设 $n > 1/\beta$。样本 S 包含 $\nu := |S| \in \{n_0, n\}$ 个点，并且 $\mathcal{H}$ 是引理 4 中的坏半空间族

算法 1 LayeredRadon(P, ε, φ)

$\beta \leftarrow \frac{1}{4^{d+1}d+2}$ $n \leq 1/\beta$ P: ( )( ); 如果 则返回 :

$n_0 \leftarrow$ ( ) 中的任意点，其中 $\rho = \beta/2$ 且 $\varphi' = \varphi/12$3: 如果 $n \leq n_0^2$ 则 $S \leftarrow P$4: 否则 5: 最多重复 $\lceil \log_2(6/\varphi) \rceil$ 次: 从 P中均匀随机抽取 n_0 个相互独立的点；如果它们互不相同，则令 S 为这些点并停止 6: 如果没有尝试成功，则返回 P中的任意点 7: $Q_0 \leftarrow S$; 根据 ν计算表2中的参数 Λ、L、R、m: $= |S|$8: 对于 $i = 1$、.....、L 执行 9: 对于 $u = 1$、.....、m 执行 10: 从 Q_{i-1}的不同索引中均匀随机选择一个序列 (j_1、.....、j_t) 11: $Q_i[u] \leftarrow$ Radon($Q_{i-1}[j_1]$、.....、$Q_{i-1}[j_t]$) 12: 从 Q_L的不同索引中均匀随机选择一个序列 (j_1、.....、j_t) 13: 返回 $z =$ Radon($Q_L[j_1]$、.....、$Q_L[j_t]$)

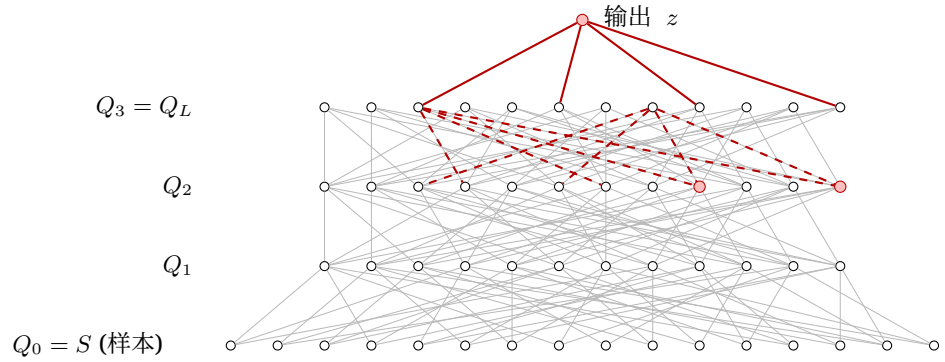

图 2 $d = 2$的层。Q_3 中的两个点（虚线）共享两个父节点：一次碰撞。

对于 S 和 $k_0 := \lceil \beta\nu \rceil$。每个坏半空间最多包含 S中的 $k_0 - 1 < \beta\nu$ 个点。请注意，Λ 是根据 ν计算出的数值，而不是根据 $\mathcal{H}$计算的，并且 $|\mathcal{H}| \leq 2\binom{\nu}{d} \leq e^{\Lambda}$。层数 $L = 1 + L_1 + L_2$ 由第一层、包含 L_1 层的主要阶段 以及包含 L_2 层的最终阶段组成。

3.1 分析概述

▶ **引理 8.** 以至少 $1 - \varphi/3$ 的概率，算法 *1* 要么在第一行返回（此时结果正确），要么 S 是 P 的一个由不同点组成的 $(\beta/2, \varepsilon)$-相对近似。此外，$\nu > 1/\beta$ 和 $k_0 \leq \nu - d$。

证明。 如果 $n \leq n_0^2$，那么 $S = P$ 显然是一个相对近似。否则，根据引理 5，每次尝试成功的概率至少为 1 2，因此所有 $\lceil \log_2(6/\varphi) \rceil$ 次尝试均失败的概率至多为 $\varphi/6$，而成功的样本不是相对近似的概率至多为 $2\varphi' = \varphi/6$。由于 $n > 1/\beta$ 和 $n_0 \geq 1/(\varepsilon^2\rho) > 1/\beta$，我们有 $\nu > 1/\beta$ =4$(d+1)(d+2)$，因此 $k_0 \leq \beta\nu + 1 \leq \nu - d$，因为 $(1-\beta)\nu \geq \nu/2 \geq d + 1$。◀

在本节余下部分，我们始终以引理 8 的结果为条件，并假设 S 是不同点的一个（$\beta/2$, ε）-相对近似。由于 P 处于一般位置，

表2 算法1的参数；$t = d+2$ 和 $c = \binom{t}{2}$。

质量	$\beta = \frac{1}{8c} = \frac{1}{4(d+1)(d+2)}$
样本	$\nu = \lvert S\rvert, \quad \Lambda := \ln\ 2 + d\ln\frac{e\nu}{d}$
层	$\kappa_1 = \frac{\Lambda}{\ln(64c)}, \quad L_1 = \lceil(\ln(4c)\ +2)\ln^+\kappa_1\rceil,$ $L_2 = 1 + \lceil\frac{1}{3}\ln\frac{1}{\varphi}\rceil, \quad L = 1 + L_1 + L_2$
计数阈值	$R = \lceil\frac{3}{2}\left(\Lambda + \ln\frac{3L}{\varphi}\right)\rceil$
层大小	$m = \lceil 8ecR\rceil, \quad x := \frac{2R}{m} \le \frac{1}{4ec}, \quad \ell := \ln\ \frac{m}{2R} = \ln\frac{1}{x} \ge \ln(4c)\ +1$

S 也处于一般位置。根据引理 6，只需证明输出 z 以至少 $1 - 2\varphi/3$ 的概率是 S 的一个 β-中心点；根据引理 4，只需证明 z 不属于任何坏半空间。我们将由 Q_0、……、Q_i 生成的 σ-代数记为 $\mathcal{F}_i$；注意，$\mathcal{H}$ 由 $\mathcal{F}_0$ 决定。一般位置仅用于 S；各层可能包含重复点或退化点，但这并无妨碍，因为引理 3 对任意序列均成立。

分析过程如下。引理10将输出的失败概率降低为 $A_L(2)$，即最后一层中的两个随机点位于同一个坏半空间内的概率；引理 11 根据 A_i 和碰撞次数界定 A_{i+1}，而引理 12 对碰撞次数进行控制。引理 13 确保每个层中的点在每个坏半空间内的数量低于计数阈值。对 A_1 的界（引理 14）以 $e^{\mu(\kappa-k)}$ 形式的界开始递归；当 $k \le \kappa$ 时，该界显然成立。在主要阶段（引理 15 和 16）中，阈值 κ 几何级缩小，直到 $\kappa \le 1$；此时，该界在 k 中是一个纯几何界；而在最终阶段（引理 18）中，其底数不断减小，直到 $A_L(2)$ 变小。定理 19 综合了这些步骤。

3.2 元组泛函

对于一个由 m' 个点组成的序列 Q 和 $1 \le k \le m'$，令

$$\pi_k(Q) := \Pr_J\left[\exists h \in \mathcal{H} : Q[J] \subseteq h\right],$$

其中 J 是从 $[m']$ 中均匀随机选取的 k 元子集，并令 $\pi_k(Q) := 0$，其中 $k > m'$。对于 $h \in \mathcal{H}$，令 $r_h(Q) := |\{u \in [m']:\ q_u \in h\}|$ 表示 h 中 Q 的指标个数。

▶ **观察 9.** 我们有 $\pi_k(Q) \le 1$，$\pi_k(Q)$ 关于 k 单调不增，并且

$$\pi_k(Q) \le \sum_{h\in\mathcal{H}} \frac{(r_h(Q))_k}{(m')_k}.$$

特别地，若对所有 $h \in H$ 都有 $\pi_k(Q) = 0$ 且 $r_h(Q) < k$，则

证明。 均匀随机选取的 k 元子集可以通过从均匀随机选取的 $(k+1)$ 元子集中删除一个随机元素得到；若一个集合中的点都位于同一个 h 中，那么其任意子集中的点也如此，因此这说明了单调性。最后一个界是对 h 使用并集界得到的，因为 $\Pr_J[Q[J] \subseteq h] = \binom{r_h(Q)}{k}/\binom{m'}{k}$。◀

为控制计数 r_h，令 $\mathcal{E}_1$ 表示事件：对所有 $h \in \mathcal{H}$，$r_h(Q_1) \le 2R$；对于 $i \ge 2$，令 $\widetilde{\mathcal{E}}_i$ 表示事件：对所有 $h \in \mathcal{H}$，$r_h(Q_i) \le R$；令 $\mathcal{E}_0$ 表示必然事件，$\mathcal{E}_i := \mathcal{E}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{E}_i$，并定义

$$A_i(k) := \mathbb{E}\left[\pi_k(Q_i)\cdot \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{E}}_i}\right] \qquad (1 \le i \le L,\ k \ge 1).$$

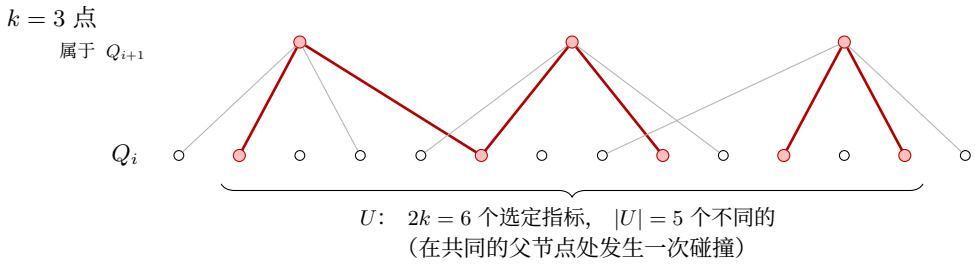

图3 引理 11： h 中的每个选定点在 h 中都有一对父节点（粗线）。

根据观察 9， $A_i(k) \le 1$， A_i 单调不增， $A_1(k) = 0$ 对 $k > 2R$成立，而 $A_i(k) = 0$ 在$k > R$ 若 $i \ge 2$ 时成立。

↝▶ **引理10** (输出)。 $\Pr[z \in \bigcup \mathcal{H}] \le \Pr[\overline{\mathcal{E}_L}] + c \cdot A_L(2)$。

证明。以 $\mathbf{F}_L$ 为条件。若 $z \in h$ 对于某个 $h \in \mathbf{H}$ 成立，那么根据引理 3， h 在两个所选的 t 索引处包含 Q_L 的点。由于所选索引序列是均匀随机的，对于每一对 c 位置，所选索引对都是从 $[m]$ 中均匀随机选取的二元子集，因此条件概率至多为 $c\,\pi_2(Q_L)$。因此 $\Pr[z \in \bigcup \mathbf{H}] \le \Pr[\mathbf{E}_L] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{E}}_L}\, c\,\pi_2(Q_L)]$。◀

对于 $k \ge 1$ 和长度为 $m' \ge 2$ 的序列，令 U_k 表示 $[m']$ 中 k 个相互独立、均匀随机选取的二元子集的并集，并令 $|U_k|$ 表示其大小，即在所选的 $2k$ 个索引中不同索引的数量； $2k - |U_k|$ 表示碰撞的数量。

▶ **引理 11** （元组递归）。 对于 $1 \le i < L$ 和 $1 \le k \le m$,

$$\mathbb{E}\big[\pi_k(Q_{i+1}) \,\big|\, \mathcal{F}_i\big] \le c^k \sum_j \Pr\big[|U_k| = j\big]\, \pi_j(Q_i),$$

其中， U_k 表示 Q_i的索引集 $[m]$ 。因此，对所有 $k \ge 1$,

$$A_{i+1}(k) \le \min\Big\{1,\; c^k \sum_j \Pr\big[|U_k| = j\big]\, A_i(j)\Big\}.$$

证明。令 $J = \{u_1 < \cdots < u_k\}$为从 Q_{i+1}的索引中均匀随机选取的 k子集。对于 $p \in [k]$, 点 $Q_{i+1}[u_p]$ 是由不同索引组成的均匀随机序列（$\sigma_p(1), \ldots, \sigma_p(t)$）对应的 Q_i 的 Radon 点; 这些序列彼此独立，且独立于J和 $\mathbf{F}_i$。若 $Q_{i+1}[J]$ 中的所有点都落在某个 $h \in \mathbf{H}$ 中，则由引理 3 可知，对每个 $p \in [k]$，在 $[t]$ 中都存在位置 $a_p < b_p$ ，使得 $Q_i[\sigma_p(a_p)], Q_i[\sigma_p(b_p)] \in h$。我们对位置（$a_p, b_p$）的 c^k 种选择应用并集界$p \in [k]$。固定一种选择后，集合$\{\sigma_p(a_p)\ \sigma_p(b_p)\}$, $p \in [k]$是从 Q_i的索引中均匀随机选取的二元子集，且彼此独立；因此，它们的并集U 服从 U_k分布。由于该分布在索引置换下保持不变，在给定 $|U| = j$的条件下， U 是均匀随机的 j子集，且独立于 $\mathbf{F}_i$。因此， $Q_i[U]$ 中的所有点都落在同一个坏半空间内这一事件的条件概率为 $\sum_j \Pr[|U_k| = j]\, \pi_j(Q_i)$，这就证明了第一个断言；见图3。对于第二个断言，若 $k > m$ ，则 $A_{i+1}(k) = 0$。否则，由于 $\mathbf{E}_{i+1} \subseteq \mathbf{E}_i$ ，且 $\mathbf{E}_i$ 由 $\mathbf{F}_i$决定，$A_{i+1}(k) \le \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{E}}_i}\, \mathbb{E}[\pi_k(Q_{i+1}) \mid \mathbf{F}_i]]$，并且第一个断言适用。最后， $A_{i+1}(k) \le 1$。◀

▶ **引理 12** (碰撞)。 设 $m' \ge 2$、 $k \ge 1$ 和 $w \in (0, 1]$。那么 $\mathbb{E}\big[w^{|U_k|}\big] \le w^2\big(w + \frac{2k}{m'}\big)^{2k-2}$。

—

证明。逐个揭示 $2k$ 指标 y_1、……、y_{2k}，其中 $\{y_{2p-1}, y_{2p}\}$ 是第 p 对；因此 y_{2p-1} 在 $[m']$ 中均匀分布，而 y_{2p} 在 $[m']\setminus\{y_{2p-1}\}$ 中均匀分布。令 D_q 表示 y_1、……、y_q 中不同值的个数，因此 $D_2 = 2$，且 $D_q = D_{q-1} + \xi_q$ 满足 $\xi_q \in \{0, 1\}$。在给定 y_1、……、y_{q-1} 的条件下，$\xi_q = 0$ 的概率，也就是说 y_q 重复了此前出现过的值的概率，对于奇数 q 为 D_{q-1}/m'，对于偶数 q 为 $(D_{q-1}-1)/(m'-1)$；两种情况下该概率都至多为 $\frac{q-1}{m'}$，因为 $D_{q-1} \le q-1$ 且 $\frac{q-2}{m'-1} \le \frac{q-1}{m'}$ 对于 $q \le m'+1$ 成立（当 q 较大时，该上界超过 1）。因此 $\mathbb{E}[w^{\xi_q} \mid y_1, \dots, y_{q-1}] = w + (1-w)\Pr[\xi_q = 0 \mid \cdot] \le w + \frac{2k}{m'}$，将这些界对 $q = 3$、……、$2k$ 相乘即可得出结论。◀

3.3 有界计数

▶ **引理 13**。$\Pr[\widetilde{\mathcal{E}_L}] \le L\, e^{\Lambda}\, e^{-2R/3} \le \varphi/3$。

证明。我们有 $\Pr[\widetilde{\mathrm{E}_L}] \le \sum_{i=1}^{L} \Pr[\widetilde{\mathrm{E}}_{i-1} \cap \mathrm{E}_i]$。固定 $h \in \mathrm{H}$ 和 i，并以 F_{i-1} 为条件。m 指示变量 $[Q_i[u] \in h]$ 相互独立；根据引理 3，每个变量仅当 Q_{i-1} 的 t 个选定索引中有两个落在 h 内时才取值为 1。对 c 个位置对应用并集界可知，其概率至多为 $c\,(r)_2/(m')_2 \le c(r/m')^2$，，其中 $r = r_h(Q_{i-1})$，且 $m' = |Q_{i-1}|$。我们使用$c \ge 6$、$R \ge 1$和 $8ecR \le m \le 8ecR + 1$。

对于 $i = 1$、$r \le k_0 - 1 < \beta\nu$ 和 $m' = \nu$，因此概率至多为 $c\beta^2 = \frac{1}{64c}$，且$\mathbb{E}[r_h(Q_1)] \le \frac{m}{64c} \le \frac{eR}{8} + \frac{1}{64c}$。根据引理 7，取 $a = 2R$，则 $\Pr[r_h(Q_1) \ge 2R] \le \left(\frac{e^2}{16} + \frac{e}{128cR}\right)^{2R} \le 0.47^{2R} \le e^{-2R/3}$。

对于 $i \ge 2$，在 $\widetilde{\mathcal{E}}_{i-1}$ 下，我们有 $r \le 2R$ 以及 $m' = m$，因此 $\mathbb{E}[r_h(Q_i) \mid \mathcal{F}_{i-1}] \le 4cR^2/m \le R/(2e)$，由引理 7 及 $a = R$ 可得 $\Pr[r_h(Q_i) \ge R \mid \mathcal{F}_{i-1}] \le 2^{-R} \le e^{-2R/3}$。

对至多 e^{Λ} 个半空间 $h \in \mathcal{H}$ 以及 $i \in [L]$ 应用并集界可得第一个不等式，第二个不等式则由 $R \ge \frac{3}{2}(\Lambda + \ln\frac{3L}{\varphi})$ 得出。◀

3.4 第一层

▶ **引理 14**。对于所有 $k \ge 1$，$A_1(k) \le \min\{1,\ e^{\Lambda}(c\beta^2)^k\} = \min\{1,\ e^{\mu_1(\kappa_1 - k)}\}$，其中 $\mu_1 := \ln(64c)$ 以及 $\kappa_1 = \Lambda/\mu_1$。

证明。根据观察 9，$A_1(k) \le \mathbb{E}[\pi_k(Q_1)] \le \sum_h \mathbb{E}[(r_h(Q_1))_k]/(m)_k$。与引理 13 的证明一样，$r_h(Q_1)$ 是 m 个独立指示变量之和，每个变量的概率至多为$p := c\beta^2$。下降阶乘 $(r_h(Q_1))_k$ 统计指示变量全为 1 的不同索引的有序 k元组，因此其期望至多为 $(m)_k p^k$。对至多 e^{Λ}个半空间求和，得到 $A_1(k) \le e^{\Lambda} p^k = e^{\Lambda - \mu_1 k}$，因为 $1/p = 64c$。◀

3.5 主要阶段：缩小阈值

下一个引理是分析的核心。它适用于任意一个元组概率呈指数衰减的层 $i \ge 1$，并表明下一层会继承一个较小“阈值”对应的指数界。

▶**引理 15 (步骤)**。设 $1 \le i < L$、$\Lambda' \ge 0$ 和 $\mu > 0$，并假设对所有 $j \ge 1$，$A_i(j) \le \min\{1, e^{\Lambda' - \mu j}\}$。设 $1 \le k \le m/2$，且 $\ell_k := \ln\frac{m}{2k}$。那么，令 $\theta := \min\{1, \ell_k/\mu\}$，

$$A_{i+1}(k) \le \tfrac{1}{4}\exp\big(\theta\Lambda' - k\,(2\theta\mu - \ln(4c))\big).$$

证明。由于对于 $\theta \in [0,1]$，$\min\{1, e^y\} \le e^{\theta y}$，由引理 11 可得 $A_{i+1}(k) \le c^k e^{\theta\Lambda'}\,\mathbb{E}[w^{|U_k|}]$，其中$w := e^{-\theta\mu} \in (0,1]$ 且 $|Q_i| = m$。由于 $\theta\mu \le \ell_k$，我们有 $w \ge 2k/m$，而引理 12 推出 $\mathbb{E}[w^{|U_k|}] \le w^2(2w)^{2k-2} = \frac{1}{4}(4w^2)^k$。因此 $A_{i+1}(k) \le \frac{1}{4}e^{\theta\Lambda'}(4cw^2)^k$，这正是所要证明的结论。◀

▶ 引理 *16*（主要阶段）。设 $1 \le i < L$、 $\kappa \ge 0$ 和 $\mu \ge \ell$，并假设对于所有 $j \ge 1$， $A_i(j) \le \min\{1, e^{\mu(\kappa - j)}\}$。令 $\mu' := 2\ell - \ln(4c)$ 且 $\kappa' := \ell\kappa/\mu'$。那么，对于所有 $k \ge 1$， $A_{i+1}(k) \le \min\{1, e^{\mu'(\kappa' - k)}\}$。此外， $\mu' \ge \ell + 1$ 和 $\kappa' \le \psi\kappa$，其中 $\psi := \ln(4c)+1\ln(4c)+2$。

证明。 由于 $i + 1 \ge 2$，我们有 $A_{i+1}(k) = 0$ 对于 $k > R$。令 $1 \le k \le R$；则 $k \le m/2$ 且 $\ell_k = \ln \frac{m}{2k} \ge \ell$。我们将引理 15 应用于 $\Lambda' = \mu\kappa$。指数变为

$$\theta\mu\kappa - 2k\theta\mu + k\ln(4c) = \theta\mu\,(\kappa - 2k) + k\ln(4c),$$

其中 $\theta\mu = \min\{\mu, \ell_k\} \ge \ell$。如果 $2k \ge \kappa$，则指数至多为 $\ell(\kappa - 2k) + k\ln(4c) = \ell\kappa - k\mu' = \mu'(\kappa' - k)$，如所声称。如果 $2k < \kappa$，则 $\mu'(\kappa' - k) = \ell\kappa - \mu' k > \ell\kappa - 2\ell k > 0$（使用 $\mu' < 2\ell$），因此所声称的界为 1，显然成立。最后， $\mu' - \ell = \ell - \ln(4c) \ge 1$，且 $\kappa'/\kappa = \ell/(2\ell - \ln(4c))$ 关于 ℓ 单调递减，因此 $\ell \ge \ln(4c) + 1$ 给出 $\kappa' \le \psi\kappa$。◀

▶ **推论 17.** 设 $i^* := 1 + L_1$。存在 $\kappa^* \le 1$ 和 $\mu^* \ge \ell$，使得对所有 $j \ge 1$， $A_{i^*}(j) \le \min\{1, e^{\mu^*(\kappa^* - j)}\}$。

证明. 根据引理 14，对于 $i = 1$，引理 16 的假设对 (κ_1, μ_1) 成立，并且 $\mu_1 = \ln(64c) \ge \ln(4ec + \frac{1}{2}) \ge \ell$，因为 $m \le 8ecR + 1$。由归纳法，应用引理 16 共 L_1 次后，我们有 $\kappa^* \le \psi^{L_1}\kappa_1$ 和 $\mu^* \ge \ell$。由于 $\ln \frac{1}{\psi} = \ln\big(1 + \frac{1}{4c\ln()+1}\big) \ge \frac{1}{4c\ln()+2}$，选择 L_1 可得 ~~$\psi^{L_1}\kappa_1 \le 1$~~（若 $\kappa_1 \le 1$，则 $L_1 = 0$）。◀

3.6 最终阶段

当阈值小于 1 时，界 $A_i(j) \le e^{\mu^*\kappa^*}(e^{-\mu^*})^j$ 等于一个前因子乘以一个几何项；根据下一个引理，该前因子每经过一层便缩小一个常数因子。

▶**引理 18** (最终阶段)。 设 $1 \le i < L$、 $\eta > 0$ 和 $0 < a \le x$，并假设对所有 $j \ge 2$，都有 $A_i(j) \le \eta a^j$。那么对所有 $k \ge 2$，都有 $A_{i+1}(k) \le \eta'(a')^k$，其中 $\eta' = \eta a^2/(4x^2)$ 且 $a' = 4cx^2 \le x/e$。

证明。由于 $i + 1 \ge 2$，我们有 $A_{i+1}(k) = 0$，其中 $k > R$。对于 $2 \le k \le R$，由于 $|U_k| \ge 2$，引理 11 和 12 给出 $A_{i+1}(k) \le c^k\eta\,\mathbb{E}[a^{|U_k|}] \le c^k\eta a^2(a + 2k/m)^{2k-2}$。由于 $a \le x$ 且 $2k/m \le x$，这至多为 $c^k\eta a^2(2x)^{2k-2} = \frac{\eta a^2}{4x^2}(4cx^2)^k$。最后，~~$4cx \le \frac{1}{e}$~~，因为 $x \le \frac{1}{4ec}$。◀

3.7 将各部分组合起来

▶**定理 19**。 设 P 是 $\mathbb{R}^d$中的一组处于一般位置的 n 个点，其中 $d \ge 2$，且令$\varepsilon, \varphi \in (0, 1)$。以至少 $1 - \varphi$ 的概率，算法 *1* 返回 P 的一个$(1 - \varepsilon)\beta$-中心点，其中 $\beta = \frac{1}{4\,d+1\,()(d+2)}$。它计算至多 ~~$Lm + 1$~~ 个*Radon*点，其中

$$m = O\big(d^2\,(d\log\tfrac{d}{\varepsilon} + \log\tfrac{1}{\varphi})\big) \quad and \quad L = O\big(\log d\,\big(\log d + \ln^+\log\tfrac{1}{\varepsilon} + \ln^+\log\tfrac{1}{\varphi}\big) + \log\tfrac{1}{\varphi}\big),$$

其运行时间为 $O\big(n_0(d + \log n_0)\log\frac{6}{\varphi} + d^\omega Lm\big)$，其中 $n_0 = O(\varepsilon^{-2}d^2(d\log d + \log\frac{1}{\varphi}))$。

证明。正确性。根据推论 17，在第 $i^* = 1 + L_1$ 层，我们有 $A_{i^*}(j) \le \eta a^j$，其中 $j \ge 1$ 满足 $\eta = e^{\mu^*\kappa^*} \le e^{\mu^*}$ 和 $a = e^{-\mu^*} \le e^{-\ell} = x$。应用一次引理 18 可得，在第 $i^* + 1$ 层， $\eta_{i^*+1} = \eta a^2/(4x^2) \le e^{-\mu^*}/(4x^2) \le 1/(4x)$，且 $a_{i^*+1} = 4cx^2 \le x$。每进一步应用一次，前因子都会乘以 $a'^2/(4x^2) = 4c^2x^2 \le \frac{1}{4e^2}$，同时保持 $a = 4cx^2$ 不变。因此，在最后一层 ~~L~~ $= i^* + L_2$，

$$c\,A_L(2) \le c \cdot \frac{1}{4x}\,(4c^2x^2)^{L_2-1}\,(4cx^2)^2 = 4c^3x^3\,(4c^2x^2)^{L_2-1} \le \frac{1}{16e^3}\,(4e^2)^{-(L_2-1)} \le \frac{\varphi}{3},$$

其中我们使用了 $cx \le \frac{1}{4e}$ 和 $(4e^2)^{-(L_2-1)} \le e^{-3(L_2-1)} \le \varphi$。根据引理 10 和引理 13，$z$ 落入坏半空间的概率至多为 $2\varphi/3$。否则，根据引理 4 和引理 8，z 是 S 的一个 k_0/ν-中心点，且 $k_0/\nu \ge \beta$。由带有 $\rho = \beta/2 \le \beta/(1+\varepsilon)$ 的引理 6，z 是 P 的一个 $(1-\varepsilon)\beta$-中心点。加上引理 8 的失败概率 $\varphi/3$，即可证明正确性。

复杂度。该算法根据引理 3 计算 $Lm+1$ 个 Radon点，每个点耗时 $O(d^\omega)$；通过拒绝抽样选择不同索引的随机序列时，每个 Radon点的期望耗时为 $O(d)$，确定性选择则耗时 $O(d\log d)$。每次抽样尝试耗时 $O(n_0(d+\log n_0))$（抽取点并对其索引进行排序以检测重复），且最多需要 $\lceil \log_2(6/\varphi) \rceil$ 次尝试。对于 m 和 L 的界，注意到 $1/\beta = O(d^2)$，因此根据 (1)，$n_0 = O(\varepsilon^{-2}d^2(d\log d + \log \frac{1}{\varphi}))$，并且 $\nu \le n_0^2$（若 $S=P$，则 $n \le n_0^2$）。因此，$\Lambda = \ln 2 + d\ln \frac{e\nu}{d} = O(d\log n_0) = O(d\log \frac{d}{\varepsilon} + d\ln^+\log \frac{1}{\varphi}) = O(d\log \frac{d}{\varepsilon} + \log \frac{1}{\varphi})$，其中最后一步对 $y>0$ 使用了 $d\ln y \le d\ln d + y$。此外，$\kappa_1 = O(\Lambda/\log d)$，所以 $\ln^+\kappa_1 = O(\log d + \ln^+\log \frac{1}{\varepsilon} + \ln^+\log \frac{1}{\varphi})$，$L_1 = O(\log d \cdot \ln^+\kappa_1)$，以及 $L_2 = O(1+\log \frac{1}{\varphi})$，从而得到 L 的界。最后，$R = O(\Lambda + \log \frac{L}{\varphi})$ 且 $m = O(cR)$。◀

对于常数 ε 和 φ，我们有 $m = O(d^3\log d)$ 和 $L = O(\log^2 d)$，由此得到定理 1：$O(d^3\log^3 d)$ 个 Radon 点，耗时 $O(d^{3+\omega}\log^3 d)$；或者使用高斯消元，耗时 $O(d^6\log^3 d)$。对于一般的 ε 和 φ，层数会额外增加 $O(\log \frac{1}{\varphi} + \log d\ln^+\log \frac{1}{\varepsilon})$，因为 $\log d\cdot\ln^+\log \frac{1}{\varphi} \le \log^2 d + \log \frac{1}{\varphi}$。

4 层 Tverberg 点

序列 X 中的点的一个 *s-Tverberg* 划分，是将其索引集划分为 s 个非空部分，使得这些部分的凸包有一个公共点；该点称为 X的 *s-Tverberg* 点。Radon 点是 2-Tverberg 点。本节中，我们将算法 1 中的 Radon 点替换为 s-Tverberg 点，这些点通过线性规划计算，如 [9]所示，耗时 $s = \Theta(\log d)$。全文中，$s \ge 3$ 为整数，门的输入点数量 t 取代 $d+2$:

$$D := (s-1)(d+1), \qquad t := \lceil 3sD\ln(3s) \rceil, \qquad c_s := \binom{t}{s}.$$

我们假设 $n \ge t$；那么这些门总是具有 t 个不同的输入点（见定理 24 的证明）。

4.1 Tverberg 门

下面的引理是 [9] 中引理 1.3 的略作修改版本，常数稍有不同；它基于 Sarkaria 提升 [26] 和 Soberón 随机划分 [29]。

▶ **引理 20。** 设 $X = (x_1, \dots, x_t)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个点序列，并设 $\chi : [t] \to [s]$ 为均匀随机着色。以至少 $1/2$ 的概率，各颜色类构成 X 的一个 *s-Tverberg* 划分。在这种情况下，任意一个线性可行性问题的可行解都能给出其凸包的一个公共点 p；该问题有 t 个非负变量和 $D+1$ 个等式约束，其系数为 0、± 1以及 X 中各点的坐标和它们的相反数。每个包含 p 的半空间（开或闭）都包含 X 中位于 s 个不同索引处的点，每种颜色各一个。

引理 20 的证明。 令 $v_1, \dots, v_{s-1}$ 为 $\mathbb{R}^{s-1}$ 的标准基，并且 $v_s := -\sum_{j<s} v_j$。则当且仅当 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s$ 时，$\sum_j \alpha_j v_j = 0$ 成立。对于 $i \in [t]$ 和 $j \in [s]$，令 $y_{i,j} := (x_i, 1) \otimes v_j \in \mathbb{R}^{d+1} \otimes \mathbb{R}^{s-1} \cong \mathbb{R}^D$，并令 $y_i := y_{i,\chi(i)}$。考虑问题

$$\lambda \in \mathbb{R}^t, \quad \lambda \ge 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1, \quad \sum_i \lambda_i y_i = 0.$$

假设 λ 是可行的，并令 $w_j := \sum_{i:\chi(i)=j} \lambda_i (x_i, 1)$。则 $\sum_j w_j \otimes v_j = 0$。考察 w_j的每个 $d+1$ 坐标，v_j的性质给出 $w_1 = \cdots = w_s$。最后一个坐标表明，每个颜色类的总权重为 $\sum_{i:\chi(i)=j} \lambda_i = 1/s$。因此，$p := s \sum_{i:\chi(i)=j} \lambda_i x_i$ 与 j 无关，并且对于每个 j，它都是颜色 j 的点的凸组合。如果一个半空间 h 不包含颜色 j的任何点，那么 h 的凸补集包含颜色 j 的所有点，因而包含 p。

当且仅当 $0 \notin \operatorname{conv}\{y_1, \dots, y_t\}$ 时，该问题不可行；也就是说，当且仅当存在 $u \in \mathbb{R}^D$，使得对所有 i 都有 $\langle u, y_i \rangle < 0$。固定 u。由于 $\sum_j y_{i,j} = (x_i, 1) \otimes \sum_j v_j = 0$，某个 j满足 $\langle u, y_{i,j} \rangle \geq 0$。因此，$\langle u, y_i \rangle < 0$ 的概率至多为 $1 - \frac{1}{s}$，并且对所有 i彼此独立；该事件对所有 i 同时发生的概率至多为 $e^{-t/s}$。

该事件仅取决于向量集合 $y_{i,j}$，其中 $u, y_{i,j} \geq 0$。$\mathbb{R}^D$ 中经过原点的闭半空间的 VC 维数至多为 D。事实上，在任意 $D+1$ 个向量中都存在非平凡的线性关系 $\sum_q \alpha_q z_q = 0$；不妨设 $I := \{q : \alpha_q > 0\} \neq \emptyset$。对于恰好 $q \in I$，没有任何 u 满足 $u, z_q < 0$，因为那样会有 $\sum_q \alpha_q \langle u, z_q \rangle < 0$。根据 Sauer–Shelah 引理，[32, 27, 28, 20], u 在 st 个向量 $y_{i,j}$上至多诱导出 $(est/D)^D$ 个不同集合。因此，并集界将失败概率界定为 $(est/D)^D e^{-t/s} = \exp\big(D(\ln(e\zeta s^2) - \zeta)\big)$，其中 $\zeta := t/(sD) \geq 3\ln(3s)$。函数 $\zeta \mapsto \ln(e\zeta s^2) - \zeta$ 在 $\zeta \geq 1$时递减。在$\zeta = 3\ln(3s)$处，它等于 $1 - 2\ln 3 - (\ln s - \ln\ln(3s)) \leq 1 - 2\ln 3 - (\ln 3 - \ln\ln 9) < -1.5$，因为 $\ln s - \ln\ln(3s)$ 关于 s递增。因此，失败概率至多为 $e^{-1.5} < \frac{1}{2}$。◀ –

一个 *Tverberg* 门 应用于 X，会持续抽取随机着色，直到引理 20 中的问题可行，然后求解该问题并返回 p。它期望求解至多两个线性规划。以下分析仅使用引理 20 的最后一个性质，而该性质对每次成功尝试都成立，因此与 [9] 不同，无需考虑失败事件。

4.2 算法与分析

LayeredTverberg 是算法 1 的一个变体，有两处改动：每次 Radon 计算（包括输出）都替换为一个应用于随机选取的不同索引处的 t 点的 Tverberg 门，并相应调整参数以适配这些门。质量为 $\beta := (x_0/(2e^2 s\, c_s))^{1/s}$，其中$x_0 := (2^s c_s)^{-1/(s-2)}$ 满足 $2^s c_s x_0^{s-2} = 1$；样本 S、ν、k_0 和 Λ 按照第 3 节中的定义给出，只是采用了此处的 β。层数为 $L = 1 + L_1 + L_2$，其中 $L_1 = \lceil \log_2^+ \kappa_1 \rceil$，$\kappa_1 := \Lambda / \ln \frac{1}{c_s \beta^s}$，且 $\log_2^+ y = \max\{0, \log_2 y\}$，而 $L_2 = \max\{1, \lceil \frac{1}{s} \ln \frac{3}{\varphi} \rceil\}$。所有层的计数阈值均为 $R = \lceil \Lambda + \ln \frac{3L}{\varphi} \rceil$，每层大小为 $m = \lceil sR/x_0 \rceil$；令$x := sR/m \leq x_0$，且 $\ell := \ln \frac{1}{x}$。

我们沿用第 3 节中的记号：π_k, r_h, $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i$和 $A_i(k)$，其中现在 $\mathcal{E}_i$ 表示对每个 $i \geq 1$，对所有 $h \in \mathcal{H}$，$r_h(Q_i) \leq R$ 这一事件。令 $U_k^{(s)}$ 为 k 个相互独立且均匀随机选取的 $[m']$ 的 s- 子集的并集。我们有

$$(s-2)\,\ell \;\geq\; (s-2)\ln\tfrac{1}{x_0} \;=\; \ln(2^s c_s). \tag{2}$$

下一个引理汇集了引理 10–14 的对应结论。

►**引理 21**。假设引理 8 的结论成立。那么：

1. $\Pr[z \in \bigcup \mathcal{H}] \leq \Pr[\mathcal{E}_L] + c_s\, A_L(s)$; *2.* $A_{i+1}(k) \leq \min\{1, c_s^k \sum_j \Pr[|U_k^{(s)}| = j]\, A_i(j)\}$，对于 $1 \leq i < L$、$k \geq 1$ 和 $m' = m$; *3.* $\mathbb{E}[w^{|U_k^{(s)}|}] \leq w^s (w + sk/m')^{s(k-1)}$，对于 $m' \geq s$、$k \geq 1$ 和 $w \in (0, 1]$; *4.* $A_1(k) \leq \min\{1, e^{\Lambda} (c_s \beta^s)^k\}$，对于所有 $k \geq 1$; *5.* $\Pr[\mathcal{E}_L] \leq L e^{\Lambda} e^{-R} \leq \varphi/3$。

14 含有较少 Radon 点的中心点

引理 21 的证明。第 1、2 和 4 项的证明与引理 10、11 和 14 类似。引理 20 的最后一个性质取代引理 3，c_s 对 s 个位置的选择 t 取代 c对，而 $(r)_s/(m')_s \le (r/m')^s$ 对 $r \le m'$成立。

对于第 3 项，逐个子集地依次揭示 sk 索引。某个索引若是其子集中的第 $(g+1)$ 个元素，即 $0 \le g < s$，则它在该子集中尚未使用的 $m'-g$ 索引中均匀分布。若目前已揭示了 Δ个不同索引，则它重复其中一个的概率为 $(\Delta-g)/(m'-g) \le \Delta/m' \le sk/m'$。前 s 个索引互不相同，而将其他 $s(k-1)$ 个索引对应的界 $\mathbb{E}[w^{\xi} \mid \cdot] \le w + sk/m'$ 相乘，即得所述结论，与引理 12 中相同。

对于第 5 项，固定 $h \in \mathbf{H}$ 和 i，并以 $\mathbf{F}_{i-1}$ 为条件。指示变量 $[Q_i[u] \in h]$ 相互独立，且每个变量的概率至多为 $c_s(r/m')^s$，其中 $r = r_h(Q_{i-1})$。对于 $i=1$，这至多为 $c_s\beta^s = x_0/(2e^2 s)$，因此 $\mathbb{E}[r_h(Q_1)] \le (sR/x_0+1)\,x_0/(2e^2 s) \le R/e^2$。对于 $i \ge 2$，在$\widetilde{\mathbf{E}}_{i-1}$上它至多为 $c_s(R/m)^s = c_s(x/s)^s$；又由于 $m = sR/x$ 和 $c_s x^{s-1} \le c_s x_0^{s-1} = 2^{-s}x_0$，可得 $\mathbb{E}[r_h(Q_i) \mid \mathbf{F}_{i-1}] \le R c_s x^{s-1} s^{1-s} \le R/e^2$。在这两种情况下，应用引理 7 并取 $a = R$，概率至多为 e^{-R}。对 h 和 i 取并集界，并考虑 R 的选择，即完成证明。◀

▶ **引理 22**（带有 Tverberg 门的主要阶段）。设 $1 \le i < L$、$\kappa \ge 0$ 和 $\mu \ge \ell$，并假设对所有 $j \ge 1$，$A_i(j) \le$ 最小值$\{1, e^{\mu(\kappa - j)}\}$。设 $\mu' := s\ell - \ln(2^s c_s)$，且 $\kappa' := \ell\kappa/\mu'$。那么，对所有 $k \ge 1$、$\mu' \ge 2\ell$ 和 $\kappa' \le \kappa/2$，$A_{i+1}(k) \le$ 最小值$\{1, e^{\mu'(\kappa'-k)}\}$。

证明。不等式 $\mu' \ge 2\ell$ 即为 (2)，由此可得 $\kappa' \le \kappa/2$。我们有 $A_{i+1}(k) = 0$ 对于$k > R$。设 $1 \le k \le R$，$\ell_k := \ln \frac{m}{sk} \ge \ell$，$\theta := $ 最小值$\{1, \ell_k/\mu\}$，并设 $w := e^{-\theta\mu} \ge sk/m$。如引理 15 中所述，引理 21 的第 2 和第 3 项给出

$$A_{i+1}(k) \le c_s^k e^{\theta\mu\kappa} w^s (2w)^{s(k-1)} = 2^{-s}\exp\bigl(\theta\mu(\kappa - sk) + k\ln(2^s c_s)\bigr),$$

且 $\theta\mu = \min\{\mu, \ell_k\} \ge \ell$。如果 $sk \ge \kappa$，则指数至多为 $\ell(\kappa - sk) + k\ln(2^s c_s) = \mu'(\kappa' - k)$。如果 $sk < \kappa$，那么 $\mu'(\kappa'-k) \ge \ell(\kappa - sk) > 0$，因为 $\mu' \le s\ell$，所以界为 1。◀

对于 $s=2$（引理 16），$\mu' - \ell = \ell - \ln(4c)$ 对于大小为 $\Theta(cR)$ 的层而言只是一个常数，因此每层的阈值仅缩小一个 $1 - \Theta(1/\log d)$ 的因子。对于 $s \ge 3$，额外的因子w^{s-2} 足以补偿 $k\ln(2^s c_s)$ 这一项，并且阈值在每一层都减半。

▶ **引理 23**（最终阶段与 Tverberg 门）。令 $1 \le i < L$、$\eta > 0$ 和 $0 < a \le x$，并假设对所有 $j \ge s$ 都有 $A_i(j) \le \eta a^j$。那么对所有 $k \ge 1$，有 $A_{i+1}(k) \le \eta\,(a/(2x))^s\,(a')^k$，其中$a' := c_s(2x)^s \le x^2$。

引理 23 的证明。对于 $k > R$，该断言成立，因为 $A_{i+1}(k) = 0$。对于 $k \le R$，我们有 $|U_k^{(s)}| \ge s$，并且 $sk/m \le x$，因此由引理 21 的第 2 和第 3 项可得 $A_{i+1}(k) \le c_s^k \eta a^s (2x)^{s(k-1)}$，这就是所要证明的结论。最后，$c_s(2x)^s = 2^s c_s x^{s-2}\,x^2 \le 2^s c_s x_0^{s-2} x^2 = x^2$。◀

▶ **定理 24**。设 P是 $\mathbb{R}^d$ 中一般位置的 n 个点的集合，$d \ge 2$，设 $\varepsilon, \varphi \in (0,1)$且 $3 \le s \le 2d$，并假设 $n \ge t$。以至少 $1-\varphi$ 的概率，LayeredTverberg返回 P 的一个$(1-\varepsilon)\beta$-中心点，其中 β 如上文所定义。它使用 $Lm+1$ 个 *Tverberg* 门，因此期望至多求解 $2(Lm+1)$ 个线性规划，每个线性规划含有 t 个变量和$D+1$ 个约束。对于 $s = \max\{3, \lceil \ln d \rceil\}$，我们有

$$\beta = \Theta\Bigl(\frac{1}{d\log d\log\log d}\Bigr), \quad t = \Theta(d\log^2 d\log\log d), \quad m = O\bigl(t\,(d\log\tfrac{d}{\varepsilon} + \log\tfrac{1}{\varphi})\bigr),$$

和 $L = O(\log d + \ln^+\log\frac{1}{\varepsilon} + \log\frac{1}{\varphi})$。

证明遵循定理 19 的证明。根据引理 21 的第 4 项以及引理 22 的 L_1 次应用，阈值在第 $1+L_1$ 层降至 1 以下。随后应用引理 23 L_2 次得到 $c_s A_L(s) \le x^{sL_2} \le \varphi/3$，而引理 21 的第 1 项和第 5 项则给出了失败概率的界。

对于常数 ε 和 φ，定理 24 使用了 $Lm+1 = O(d^2 \log^4 d \log\log d)$ 个 Tverberg 门，从而证明了定理 2。建立一个线性规划仅需 $O(tD)$ 时间。详细证明如下。

定理 24 的证明。正确性。我们使用 $c_s \ge (t/s)^s$，得到 $x_0 \le (2t/s)^{-s/(s-2)} \le s/(2t) < 1/e$。由于 $m \le sR/x_0 + 1 \le 2sR/x_0$，我们有 $x \ge x_0/2$，因此 $\mu_1 := \ln \frac{1}{c_s \beta^s} = \ln \frac{2e^2 s}{x_0} \ge \ln \frac{1}{x} = \ell$。根据引理 21 的第 4 项以及引理 22 的 L_1 次应用，在第 $i^* = 1 + L_1$ 层，我们有 $A_{i^*}(j) \le \min\{1, e^{\mu^*(\kappa^* - j)}\}$，其中 $\kappa^* \le 1$ 和 $\mu^* \ge \ell$。因此，$A_{i^*}(j) \le \eta a^j$，其中 $\eta = e^{\mu^* \kappa^*} \le e^{\mu^*}$ 和 $a = e^{-\mu^*} \le x$。应用一次引理 23 得到前因子 $e^{\mu^*} e^{-s\mu^*} (2x)^{-s} \le x^{s-1} (2x)^{-s} = 2^{-s}/x$ 和 $a' \le x^2$。每进一步应用一次，前因子都会乘以 $(a'/(2x))^s \le x^s$。在第 $L = i^* + L_2$ 层，

$$c_s A_L(s) \le c_s \frac{2^{-s}}{x} x^{s(L_2-1)} x^{2s} \le \left(c_s x^{s-2}\right) x^{s+1} x^{s(L_2-1)} \le x^{sL_2} \le e^{-sL_2} \le \frac{\varphi}{3},$$

使用 $2^{-s} \le 1$、$c_s x^{s-2} \le 2^{-s}$ 和 $x < 1/e$。其余部分与定理 19 的证明相同：引理 8 可用相同的证明得到，因为 $\nu > 1/\beta \ge t/s \ge 2d+2$ 根据 $\beta \le s/t$（见下文）。此外，$\nu \ge t$：如果 $S = P$，那么 $\nu = n \ge t$；否则，根据 $s \le 2d$，$\nu = n_0 \ge \frac{2d}{\beta} \ge \frac{2dt}{s} \ge t$。另外，$m \ge sR/x_0 \ge 2tR \ge t$，因为 $x_0 \le s/(2t)$，所以这些门始终具有 t 个不同输入。质量为 $k_0/\nu \ge \beta$，引理 6 适用于 $\rho = \beta/2$。

参数。由 $(t/s)^s \le c_s \le (et/s)^s$ 以及 β 的定义，

$$\frac{s}{et}\left(\frac{2et}{s}\right)^{-1/(s-2)} (2e^2 s)^{-1/s} \le \beta \le \frac{s}{t}.$$

对于 $s = \max\{3, \lceil \ln d \rceil\}$，我们有 $\ln \frac{2et}{s} = O(s)$，因此当 d 足够大以至于 $s = \lceil \ln d \rceil$ 时，两个修正因子都被常数从下方界定。因此，$\beta = \Theta(s/t)$，而 $t = \Theta(s^2 d \log s)$ 给出了 β 和 t 的界。类似地，$1/x_0 \le (2et/s)^{s/(s-2)} = O(t/s)$，所以 $m = O(tR)$。如定理 19 的证明中一样，$n_0 = O(\varepsilon^{-2}\beta^{-1}(d \log \frac{1}{\beta} + \log \frac{1}{\varphi}))$ 给出 $\Lambda = O(d \log \frac{d}{\varepsilon} + \log \frac{1}{\varphi})$ 以及 $R = O(\Lambda + \log \frac{L}{\varphi})$。最后，$L_1 = O(\log \Lambda)$ 和 $L_2 = O(1 + \log \frac{1}{\varphi})$。◀

5 位长度

在实数 RAM 模型中，算法 1 对每个 Radon 点执行 $O(d^\omega)$ 次算术运算，且与输入无关。在图灵机上，精确计算的代价很高。坐标为 b 位的点集，其 Radon 点可能需要多达 $O(db)$ 位，因此每一层的位长度都可能增长 $\Theta(d)$ 倍，经过 $L = \Theta(\log^2 d)$ 层后，位长度可能达到输入位长度的 $d^{\Theta(\log^2 d)}$ 倍。Dutta 和 Pisula [9, 定理 1.2] 针对他们的算法也解决了同一问题：将每个计算出的点截断为 $O(d^3 \log^4 d \log \frac{d}{p_f} + \log \frac{1}{\varepsilon'})$ 位，其中 p_f 为失败概率，可使输出与精确计算的输出之间的距离不超过 ε'。我们证明，将每个计算出的点舍入到细网格，只会使分析中每个坏半空间损失 d 个点，因此舍入后的计算本身仍会输出一个中心点。该论证仅使用引理 3 的性质，因此也适用于第 4 节中的 Tverberg 点。

假设 P 中的点的整数坐标的绝对值至多为 2^B。对于整数 $b \ge 1$，令 $\tau := \sqrt{d}\, 2^{-b}$，并令舍入 将一个点映射到网格 $2^{-b}\mathbb{Z}^d$ 上最近的点，其移动距离至多为 τ。对于开半空间 $h = \{y : \langle a, y \rangle > \alpha\}$，其中

16 点较少的 Radon 点的中心点

$\|a\| = 1$，并且对于 $\lambda \geq 0$，令 $h^{+\lambda} := \{y : \langle a, y\rangle > \alpha - \lambda\}$。如果 $y \in h^{+\lambda}$ 且 $\|y - y'\| \leq \tau$，那么$y' \in h^{+\lambda+\tau}$。

▶ **引理 25.** 设 $S \subset \mathbb{Z}^d$是由至少 $d+1$个点组成、处于一般位置且坐标绝对值至多为 2^B的集合。对于由 d 个 S 中的点张成的每个超平面 H，以及每个$y \in S \setminus H$，y到 H 的距离至少为 $\delta := d^{-d/2}\, 2^{-(B+1)(d-1)}$。

证明。设 H由 y_1、……、$y_d \in S$张成；这些点仿射独立，否则它们与 S 中的任意其他点都会落在同一个超平面上。设 $a \in \mathbb{Z}^d$ 为由（$d-1$）×（$d-1$）阶子式构成的带符号向量，这些子式取自行向量为 $y_j - y_1$、$2 \leq j \leq d$的（$d-1$）× d 矩阵。则 $a \neq 0$, a 与 $H - y_1$正交。根据 Hadamard 不等式，a 的每个元素的绝对值至多为（$\sqrt{d-1}\, 2^{B+1}$）$^{d-1}$，因此 $\|a\| \leq d^{d/2} 2^{(B+1)(d-1)}$。对于 $y \in S \setminus H$，a, $y - y_1$ 是非零整数，且距离为 $|a, y - y_1| / \|a\| \geq 1/\|a\|$。◀

▶ **命题 26。** 设 $P \subset \mathbb{Z}^d$ 是一组处于一般位置的 $n \geq n_0$ 个点，其坐标绝对值至多为 2^B，其中 n_0 如算法 *1* 中所定义，并设 $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$。修改算法 *1*，使得每个点 Q_1，……，Q_L 在计算完成后立即舍入到 $2^{-b}\mathbb{Z}^d$，其中 b 是满足 $L\tau < \delta$ 的最小整数。则 $b = O(d(B + \log d) + \log L)$，并且输出以至少 $1 - \varphi$ 的概率是 P 的一个 $(1-\varepsilon)^2\beta$-中心点。每个 *Radon* 点均由坐标为 2^{-b} 的整数倍且绝对值至多为 $2^B + 1$ 的点计算得到。

证明。 关于 b 的界由引理 25 立即得出。每个 Radon 点都位于其输入点的凸包内，而舍入使每个坐标的改变量至多为 2^{-b-1}，因此根据归纳法，层 i 的所有坐标的绝对值至多为 $2^B + i2^{-b-1} \leq 2^B + 1$。

由于 $n \geq n_0$，该样本有 $\nu \geq n_0 \geq \frac{2d}{\varepsilon^2\beta} \geq \frac{d}{\varepsilon\beta}$个点。令 $k_0' := \lceil \beta\nu \rceil - d$，使得 $1 \leq k_0' \leq \nu - d$，并令 $\mathcal{H}'$ 为引理 4 中关于 S和 k_0'的族。对于 $h \in \mathcal{H}'$，根据引理 25 和 $L\tau < \delta$，集合 $h^{+L\tau}$不包含 S 中位于 h闭包之外的任何点。h的闭包在 h 中至多包含 $k_0' - 1$ 个 S 的点，并且其边界上有 d 个点。因此

$$|h^{+L\tau} \cap S| \leq \lceil \beta\nu \rceil - 1 < \beta\nu. \tag{3}$$

我们用 $\mathcal{H}'$ 替代 $\mathcal{H}$，针对扩大的半空间 $h^{+(L-i)\tau}$，以层 i 为基准，重复第 3 节中的分析。也就是说，$\pi_k(Q_i)$ 是对于某个 $h \in \mathcal{H}'$而言 $Q_i[J] \subseteq h^{+(L-i)\tau}$ 的概率，而 $r_h(Q_i)$ 统计 $h^{+(L-i)\tau}$中 Q_i 的指标。该分析使用了关于$\mathcal{H}$ 和 Radon点的三个事实：

- $|\mathcal{H}| \leq e^{\Lambda}$；每个坏半空间包含的 $\beta\nu$ 点少于 $S = Q_0$；如果层 $i+1$ 中的一个点（或者对于 $i = L$而言，输出）位于该层对应的族的一个半空间中
- $i+1$（或其本身位于 h 中），那么该层 i 对应的族中的半空间包含其中两个输入点。第一个事实对 $\mathcal{H}'$成立，第二个事实是（3）。对于第三个事实，如果一个舍入点位于 $h^{+(L-i-1)\tau}$中，那么精确的 Radon 点位于 $h^{+(L-i)\tau}$中，于是引理 3适用。输出 z 未进行舍入。因此，在给定引理 8的结果的条件下，$z \notin \bigcup \mathcal{H}'$ 以至少 $1 - 2\varphi/3$ 的概率成立，随后根据引理 4，z 是 S 的一个 k_0'/ν-中心点。最后，由于 $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$，$k_0'/\nu \geq \beta - d/\nu \geq (1-\varepsilon)\,\beta \geq (1+\varepsilon)\,\beta/2$，引理 6完成了证明。◀

按 2^b 缩放后，命题 26 中的每次 Radon 计算都是针对一个元素含有 $O(b + B)$ 位的整数矩阵进行核计算。无分式高斯消元 [2] 可用 $O(d^3)$ 次整数运算完成该计算，运算所涉及的整数有 $O(d(b + B + \log d)) = O(d^2(B + \log d) + d\log L)$ 位。因此，该算法可在图灵机上以多项式时间运行，其输出是精确中心点，而非近似值。

我们预计，这一论证可扩展到依次生成 N 个点的过程，例如 [6, 13, 9], 中的过程，其中以 L 取代 N，并额外增加 $O(\log N)$ 位。在这种情况下，经过步骤 j 后仍存活的点将相对于 $h^{+(N-j)\tau}$进行度量。只有当某个新点在步骤 j生成时，其输入点中有两个（对于 Tverberg 点则为 s 个）位于 $h^{+(N-j+1)\tau}$中，它才会落在 $h^{+(N-j)\tau}$ 中；而在 $h^{+(N-j)\tau}$ 中存活下来的点，原本就位于更大的集合 $h^{+(N-j+1)\tau}$中。要使这一论证严谨，需要检查这些分析各自的支配论证，并将每个半空间损失的 d个点纳入其质量考量；本文不再深入探讨。

命题 26 的证明无需修改即可应用于 LayeredTverberg，在相同的假设（$P \subset \mathbb{Z}^d$、$n \geq n_0$ 和 $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$）下：如果对各层中的点进行舍入，则输出以至少 $1-\varphi$ 的概率是一个 $(1-\varepsilon)^2\beta$-中心点，属于 P。此时，所有线性规划的系数都具有 $O(d(B + \log d) + \log L)$ 位。这里，每个线性规划都必须精确求解，也就是说，必须返回一个有理可行点，例如使用椭球法，或使用内点法后再舍入为精确的基解；近似可行点不一定具有引理 20 的半空间性质。

参考文献

1 Josh Alman、Ran Duan、Virginia Vassilevska Williams、Yinzhan Xu、Zixuan Xu和Renfei Zhou。更多的不对称性带来更快的矩阵乘法。载于2025年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集（SODA 2025），第2005–2039页，2025年。doi:10.1137/1.9781611978322.63。2 Erwin H. Bareiss。Sylvester恒等式与多步保整数高斯消元。《计算数学》，22(103):565–578，1968年。3 James R. Bunch和John E. Hopcroft。通过快速矩阵乘法进行三角分解与求逆。《计算数学》，28(125):231–236，1974年。 doi:10.1090/S0025-5718-1974-0331751-8。4 Timothy M. Chan。求最大Tukey深度的最优随机化算法。载于第15届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集（SODA 2004），第430–436页，2004年。5 Yeshwanth Cherapanamjeri。在多项式时间内计算近似中心点。载于第65届IEEE计算机科学基础年会（FOCS 2024），第1654–1668页，2024年。6 Kenneth L. Clarkson、David Eppstein、Gary L. Miller、Carl Sturtivant和Shang-Hua Teng。利用迭代Radon点逼近中心点。《国际计算几何与应用学报》，6(3):357–377，1996年。 doi:10.1142/S021819599600023X。7 Ludwig Danzer、Branko Grünbaum和Victor Klee。Helly定理及其相关定理。载于《凸性》，《纯数学专题讨论会论文集》第7卷，第101–180页。美国数学学会，1963年。8 David L. Donoho和Miriam Gasko。基于半空间深度和投影离群度的位置估计的崩溃性质。《统计学年刊》，20(4):1803–1827，1992年。doi:10.1214/aos/1176348890。9 Kunal Dutta和Karol Pisula。在环境维度上以多项式时间求近最优中心点。载于2026年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集（SODA 2026），第297–313页，2026年。10 Kunal Dutta和Karol Pisula。在环境维度上以多项式时间求近最优中心点。arXiv，2026年。 doi:10.48550/arXiv.2611.24780。11 Sariel Har-Peled。《几何近似算法》，《数学调查与专著》第173卷。美国数学学会，2011年。12 Sariel Har-Peled和Mitchell Jones。点集中心之旅。载于第35届国际计算几何研讨会（SoCG 2019），《LIPIcs》第129卷，第41:1–41:14页，2019年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2019.41。

18 少量 Radon 点的中心点

13 Sariel Har-Peled和Mitchell Jones。点集中心之旅。ACM算法汇刊，17(1):9:1–9:21，2021年。 doi:10.1145/3431285。14 Sariel Har-Peled和Micha Sharir。几何中的相对（p，ε）-近似。离散与计算几何，45(3):462–496，2011年。 doi:10.1007/s00454-010-9248-1。15 Sariel Har-Peled和Timothy Zhou。改进的Tverberg 划分近似算法。载于第29届欧洲算法研讨会（ESA 2021），《LIPIcs》第204卷，第51:1–51:15页，2021年。 doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2021.51。16 Shlomo Hoory、Avner Magen和Toniann Pitassi。多数函数的单调电路。载于《近似、随机化与组合优化。算法与技术》（APPROX-RANDOM 2006），《计算机科学讲义》第4110卷，第410–425页。Springer，2006年。 doi:10.1007/11830924_38。17 Oscar H. Ibarra、Shlomo Moran和Roger Hui。快速LUP矩阵分解算法的推广及其应用。《算法学报》，3(1):45–56，1982年。 doi:10.1016/0196-6774(82)90007-4。18 Shreesh Jadhav和Asish Mukhopadhyay。在线性时间内计算有限平面点集的中心点。离散与计算几何，12:291–312，1994年。 doi:10.1007/BF02574382。19 Yi Li、Philip M. Long和Aravind Srinivasan。学习样本复杂度的改进界。《计算机与系统科学学报》，62(3):516–527，2001年。 doi:10.1006/jcss.2000.1741。20 Jiří Matoušek。《离散几何讲义》，《研究生数学教材》第212卷。Springer，2002年。 doi:10.1007/978-1-4613-0039-7。21 Gary L. Miller和Donald R. Sheehy。带证明的近似中心点。《计算几何：理论与应用》，43(8):647–654，2010年。 doi:10.1016/j.comgeo.2010.04.006。22 Gary L. Miller、Shang-Hua Teng、William Thurston和Stephen A. Vavasis。球堆积和最近邻图的分隔集。《ACM学报》，44(1):1–29，1997年。doi:10.1145/256292.256294。23 Michael Mitzenmacher和Eli Upfal。《概率与计算：随机化算法与概率分析》。剑桥大学出版社，2005年。24 Richard Rado。一般测度定理。《伦敦数学学会学报》，21:291–300，1946年。 doi:10.1112/jlms/s1-21.4.291。25 Johann Radon。包含公共点的凸集。《数学年鉴》，83:113–115，1921年。 doi:10.1007/BF01464231。26 Karanbir S. Sarkaria。通过数域证明Tverberg定理。《以色列数学学报》，79(2–3):317–320，1992年。27 Norbert Sauer。关于集合族的密度。《组合理论杂志》A辑，13(1):145–147，1972年。 doi:10.1016/0097-3165(72)90019-2。28 Saharon Shelah。一个组合问题；无穷语言中模型与理论的稳定性与序。《太平洋数学杂志》，41(1):247–261，1972年。 doi:10.2140/pjm.1972.41.247。29 Pablo Soberón。作为弱ε-网的Tverberg 划分。《组合数学》，39(2):447–458，2019年。30 John W. Tukey。数学与数据图示。载于《国际数学家大会论文集》第2卷，第523–531页，1975年。31 Leslie G. Valiant。关于多数函数的短单调公式。《算法学报》，5(3):363–366，1984年。 doi:10.1016/0196-6774(84)90016-6。32 Vladimir N. Vapnik和Alexey Ya. Chervonenkis。事件的相对频率一致收敛于其概率。《概率论及其应用》，16(2):264–280，1971年。 doi:10.1137/1116025。

人工智能声明

本文在人工智能助手 Claude（Anthropic）的鼎力协助下完成。该助手参与了算法和证明的开发、参考文献核查、图的绘制以及文本撰写。作者核查了所有结果，并对本文内容负责。