arXiv:2611.32912v1 [math.DS] 24 Nov 2026

计算不变代数曲面和 Hopf 分岔的消元方法*

Changbo Chen[a]、Bo Huang[b]、†Valery Romanovski[c, d, e]和 Linpeng Wang[b]

[a]中国科学院重庆绿色智能技术研究院（*CIGIT*）重庆市自动推理与认知重点实验室

，

中国重庆
400714 *chenchangbo@cigit.ac.cn*

[b]*LMIB* – 北京航空航天大学数学科学学院，中国北京
100191 *bohuang0407@buaa.edu.cn*，*linpengwang@buaa.edu.cn*

[c]应用数学与理论物理中心，*SI-2000* 马里博尔，斯洛文尼亚[d]马里博尔大学自然科学与数学学院，*SI-2000* 马里博尔，斯洛文尼亚[e]马里博尔大学电气工程与计算机科学学院，*SI-2000* 马里博尔，斯洛文尼亚
valerij.romanovskij@um.si

谨以此文献给董栋明教授，祝贺他*65*岁寿辰。

摘要。 本文提出了用于计算参数多项式微分系统中的不变代数曲面和Hopf分岔的高效算法方法。对于给定的有界次数不变代数曲面的存在性，我们建立了两种互补的消元框架：将格罗布纳基与饱和和素分解相结合，可简洁表示参数存在轨迹的Zariski闭包（必要条件）；而通过三角分解得到强正则系统，则利用投影性质恢复精确的逐点可构造存在轨迹（充要条件）。此外，我们提出一种混合方法，将素分解与逐分支三角求解相结合，以识别此类曲面，从而高效导出充要条件、增强计算灵活性，并纠正一类Liénard系统中细微的分类错误。

关于Hopf分岔，平衡点成为Hopf分岔点的必要条件已在 [SIAM J. Numer. Anal. **34** （1997年）], 中得到刻画，而一类充分条件则分别独立发表于 [J. Math. Anal. Appl. **182** （1994年）] 和 [J. Symbolic Comput. **30** （2000年）]。本文通过两种等价表述，给出了Hopf分岔点完整的代数刻画，涵盖充要条件：一种基于Hurwitz行列式和子结式序列，
另一种则由特征多项式实部和虚部的最大公因式（GCD）导出。利用多项式最大公因式的表述，我们首次建立了 Hopf分岔横截条件新颖且完整的半代数描述，并通过半代数系统的三角分解和启发式实量词消去，得到一种算法判定程序。我们证明，该方法能够解决当前最先进的 Hopf分岔基于多项式的方法无法处理的问题。实验结果有力地验证了所提出算法框架的可行性和性能。

数学主题分类（2020年）。34C08；37G10；68W30
关键词。消元方法、格罗布纳基、Hopf分岔、Hurwitz行列式、不变代数曲面、子结式序列、三角分解。

*Changbo Chen 得到中国国家重点研发计划项目（资助编号：2023YFA1009402）和重庆市人才计划青年拔尖项目（2021000263）的资助。Bo Huang 的工作得到中国国家自然科学基金（NSFC 12671551、12561026）和北京市自然科学基金（1262015）的资助。Valery Romanovski 感谢斯洛文尼亚研究与创新局（核心研究计划 P1-0306）以及项目 101183111-DSYREKI-HORIZON-MSCA-2023-SE-01“动力系统与反应动力学网络”的支持。

†通讯作者。

目录

1 引言 2

2 预备结果 **5**

2.1 消元理想与格罗布纳基.62.2 三角分解.72.3 半代数系统的三角分解.92.4 Hurwitz行列式与子结式序列.103 不变代

通过消元理论研究代数曲面 12

3.1 格罗布纳基方法 .143.2 三角分解方法 .163.3 计算结果 .183.3.1 Belousov–Zhabotinsky反应模型 .183.3.2 一类 Liénard微分系统 .23

4 Hopf分岔与 Lyapunov 系数 28

4.1 Hopf分岔点的代数刻画 .304.1.1 方法一：通过 Hurwitz 行列式和子结式进行刻画 .304.1.2 方法二：通过多项式最大公因式进行刻画 .34

5 Hopf分岔的半代数判据及其应用 36

5.1 Hopf分岔的半代数描述 .365.2 通过 RealTriangularize 进行启发式实量词消去 RealTriangularize .405.3 说明性示例.425.4 其他模型与说明 .475.4.1 Rabinovich–Fabrikant 模型 .475.4.2 四维商业周期模型 .48

6 总结性评论 **49**

1 引言

许多现实世界现象都使用自治系统的参数微分方程进行建模。在本文中，我们研究以下形式的多项式微分系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad F : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n, \tag{1.1}$$

其中 $\mathbb{K}$ 是特征零的有效域（通常为 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$），$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 是变量列表，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots\ldots, \mu_m)$ 是实参数列表，并且 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = (F_1, \ldots\ldots, F_n)$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}]$中的多项式列表。我们关注关于形式为（1.1）的微分系统的两个基本问题。第一个问题是讨论如何计算不变代数曲面，第二个问题则聚焦于Hopf分岔的代数描述。更确切地说，本文考虑以下两个算法问题：

（$\mathcal{P}_1$）：给定系统（1.1）中一个具有有界次数的不变代数曲面的预设形式，我们推导出参数 μ 所必须满足的条件，使得该系统存在此曲面，或者证明其不存在。

($\mathcal{P}_2$)：给定形式为 (1.1) 的系统，如何确定 μ发生 Hopf分岔的临界参数值？这种分岔的具体性质是什么？

上述两个问题之所以受到关注，主要有两个原因：其一，对这两个问题的研究所采用的技术都基于消元理论；其二，这两个问题之间存在联系，即系统（1.1）的不变代数曲面可能定义其中心流形，因此问题（$\mathcal{P}_1$）可用于进一步研究问题（$\mathcal{P}_2$）在

中心流形上的情形（例如参见 [5, 60] ）。在本文中，除非另有说明，问题（$\mathcal{P}_1$）均在复数域 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$上讨论，而问题（$\mathcal{P}_2$）则在实数域 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$上考虑。

与问题（$\mathcal{P}_1$）相关的结果。

对问题（$\mathcal{P}_1$）的研究是微分方程定性理论中的经典课题之一。给定一个平面微分系统，求不可约不变代数曲线次数上界的问题众所周知十分困难，这就是所谓的庞加莱问题。文献对此进行了深入研究，也已有许多部分性结果（见 [6, 8-11, 22, 32, 35, 54, 69, 72, 74, 75, 87] 及其中的参考文献），但问题迄今尚未完全解决。需要注意的是，完全取决于所考虑微分系统次数的统一上界可能并不存在。事实上，有些多项式微分系统拥有不可约不变代数曲线，其次数取决于系统的系数（见 [24, 99]）。

自 1983 年以来，人们提出了多种用于求不变代数曲线的算法。Prelle–Singer方法 [75] 的出现重新激发了人们对不变代数曲线的兴趣。在算法设计和计算机代数实现方面也取得了重大进展。例如，Man 和 MacCallum [65, 66] 说明了如何在实践中使用 Prelle-Singer 方法。特别是，Man 在[65] 中解释了如何利用格罗布纳基求解所涉及的多项式系统。由于对所考虑系统的特殊结构一无所知，该多项式系统的求解十分困难。Coutinho 和 Menasché Schechter [28, 29] 给出了相应算法，可用于检验给定向量场（具有有理系数）是否存在不变代数曲线，并讨论了这些算法在计算机代数系统 SINGULAR 中的实现性能。Prelle–Singer方法及其所有变体的瓶颈，是通过待定系数法计算所有次数有界的不可约不变代数曲线，这会导致求解一个多项式系统，进而产生数量呈指数增长的可约不变代数曲线（见 [19]）。更确切地说，Chéze 在 [19]，中进一步证明，如果一个多项式微分系统（具有整数系数）至多只有有限条次数不超过 N 的不可约不变代数曲线，那么就可以利用所谓的狂喜曲线从 [71]中将它们全部计算出来。据我们所知，这是关于计算不变代数曲线的首个多项式时间结果。该结果的重要性主要在于理论层面，因为多项式复杂度估计中的指数大于 10。最近，Bostan 及其合作者提出了一种高效算法，用于计算平面多项式微分系统（无参数）中所有给定次数的不可约不变代数曲线。与此前的多项式时间算法 [19] 相比，该算法表现良好。

最近，文献 [33] 提出了一种寻找不变代数曲线的新方法，我们将其称为 Puiseux 级数方法。该方法用于建立平面上广泛一类多项式微分系统的不可约不变代数曲线的一般结构，参见 [18, 34, 35]。不变代数曲线在多项式微分系统的定性分析中也发挥着关键作用。例如，反积分因子构成一种特殊类型的不变代数曲线，而代数极限环则作为其因子出现（见 [44]）。在 [45] 中，读者可以找到一些未解决问题，以及不变代数曲线的计算与希尔伯特第十六问题之间的一些联系。关于不变代数曲线的其他结果、参考文献或应用，读者可以参阅例如 [36, 47, 99]。

尽管取得了这些进展，不变代数曲线的算法确定仍然是一个具有挑战性的计算问题。计算机代数技术首次系统应用于参数多项式微分系统中不变代数曲面计算的工作之一见于 [3, 5]。他们的方法使用格罗布纳基消元，推导出关于系统参数的代数条件，从而得到达布多项式存在的条件。这一思想促使我们从计算代数几何的角度对该问题进行形式化，并引入更多计算机代数工具开展进一步分析。这正是本文所做的工作：我们利用消元技术和三角分解，发展计算代数方法以确定不变代数曲线。我们证明，通过格罗布纳基得到的代数

条件是给定次数有界的不变代数曲面存在的必要条件。更具体地说，我们改进了 [3, 5] 中所使用的消元技术，并以更一般的方式发展了该方法。此外，我们证明三角分解是 Gröbner基消元的一种强有力的替代方法，它能够将参数空间分解为不可约分支，并为不变代数曲线的存在性给出充要条件（详见第 3节）。与问题（$\mathcal{P}_2$）相关的结果。

需要指出的是，关于Hopf分岔及其应用的文献确实非常丰富。Marsden and McCracken 的著作是其中一部经典的综合性文献 [67]。在讨论Hopf分岔的微分方程和动力系统专著中，我们仅列举几部：Guckenheimer and Holmes [49,定理 3.42], Amann [2, 定理 2621],Han and Yu [52,第 4], 以及Chicone [20, 第8节3]。此前的研究者提出了多种确定Hopf分岔点的方法，这些方法大致可分为两类：Hopf分岔点的数值检测（参见 [43, 48, 78, 79] 及其中的参考文献）和Hopf分岔点的符号计算。下面，我们回顾一些关于Hopf分岔点的非数值研究成果，这些成果与该问题（$\mathcal{P}_2$）尤其相关。Liu [61]提出了一个用于检测多项式微分系统中特殊类型Hopf分岔点的代数判据。在该点处，雅可比矩阵的一对共轭复特征值穿过虚轴，而所有其他特征值的实部均为负。这类Hopf分岔被称为简单Hopf分岔，以区别于其他特征值位于右半平面的Hopf分岔。Guckenheimer及其合作者 [50, 51]基于关于多项式方程根的经典代数结果以及矩阵克罗内克积的性质，提出了检测Hopf分岔点的算法。他们的算法给出了微分系统的孤立平衡点成为Hopf分岔点的必要条件（参见注5.9）。另一方面，El Kahoui and Weber [38]在不了解Liu [61], 研究成果的情况下，独立地重新发现了这一简单Hopf分岔判据，并获得了传统Hopf分岔点的完全代数判据。此外，他们证明，问题（$\mathcal{P}_2$）可以在实数有序域的一阶理论语言中形式化为一个存在量词公式。该技术已经成功应用于具有质量作用动力学的系统 [40, 83]。特别是，Errami及其合作者 [40]将这一代数判据与化学计量网络分析中的技术相结合，设计出一种高效的算法方法，用于检测具有符号速率常数的化学反应网络中的Hopf分岔点。值得注意的是，用于识别参数多项式向量场中Hopf分岔点的完全代数判据最初由El Kahoui and Weber [38]提出。Chen and Moreno Maza [14] 后续的研究揭示，[38, 定理 3.5] 中给出的条件仅仅是Hopf分岔点的充分条件，而非充要条件。Chen and Moreno Maza 试图为这一分岔情形推导出修订后的完整代数刻画，具体概要见 [14,注 3]。然而，我们注意到，这一修正对于一般参数多项式系统中Hopf分岔点的严格代数描述仍留下了一个关键缺口。这个尚未解决的问题，以及我们为建立充要代数判据而提出的系统性修正，将在本文定理 4.3中进行全面而正式的阐述。

我们还要指出，上述所有研究都未考虑 Hopf分岔的性质。大多数教科书中确定分岔性质的一种常见方法是计算正规形（例如参见 [58]）。然而，计算标准形是一项非常繁琐的工作。多年来，研究者在坐标无关框架下讨论了正规形及其后续约化（包括计算它们的算法），参见 [68, 80]。原则上，这些结果可用于确定 Hopf分岔性质所需的计算，但这种通用方法的缺点是计算代价高昂。关于计算 Poincaré–Dulac正规形的一些新进展，参见 [57, 73] 。

主要的 t　本文的理论与算法贡献总结如下　s:

• **不变代数曲面的精确可构造轨迹（$\mathcal{P}_1$）：**我们明确区分通过格罗布纳基消元与饱和得到的存在轨迹的 Zariski闭包（命题 3.6），以及通过强正则系统分解与可构造集差恢复的精确逐点可构造存在轨迹（命题 3.8）。将两者混合整合（命题 3.11）兼顾了整体简洁性与逐点精确性，使高次曲面的分类成为可能，并揭示了已发表文献中的手工计算错误（注 3.19）。

• **Hopf分岔点的完整代数刻画（$\mathcal{P}_2$）：**通过将 Hurwitz 行列式的定义扩展至退化指标（$\Delta_{-1} = \Delta_0 = a_0$，定理 2.23），我们弥补了先前代数判据中一个微妙的漏洞 [14, 38]，涉及边界情形 $i = m$。由此，我们给出了 Hopf分岔点完整的充要刻画（定理 4.3 和推论 4.4），并辅以一种基于多项式最大公因式的新颖且相互一致的刻画（定理 4.7）。

• **半代数Hopf判定过程与符号-数值稳定性分析（$\mathcal{P}_2$）：**利用多项式最大公因式表述，我们建立了一种新颖且首创的Hopf横截条件完整半代数描述（引理5.1和命题5.4）。通过 RealTriangularize （算法4），将半代数系统的三角分解与启发式实量词消去过程相结合，我们得到一种判定程序，能够投影出精确的参数条件，同时保留平衡曲线的代数结构。为进一步确定分岔的具体性质，我们将样本点隔离与符号-数值投影算法（算法3）相结合，以计算第一Lyapunov系数。

本文其余部分安排如下。第2节介绍消元理想、格罗布纳基和三角分解的基本理论与概念，并讨论Hurwitz行列式和子结式序列的一些改进。第3 节分析参数微分系统的不变代数曲面与消元方法之间的联系。我们首先提出一种格罗布纳基算法来求解问题（$\mathcal{P}_1$），并由此推导出给定不变代数曲面存在的必要条件。随后，基于三角分解的第二种算法给出此类曲面存在的充要条件。作为副产品，我们提出一种结合格罗布纳基与三角分解计算不变代数曲面的混合方法。第3节还介绍了别洛乌索夫–扎博廷斯基反应模型和一类Liénard微分系统上的实验结果，以及这两种算法之间的联系。第4节研究Hopf分岔点的充要条件，并开发了用于计算第一Lyapunov系数的高效算法。接着，第5 节给出Hopf分岔的代数判据，并提出一种利用半代数系统三角分解方法检测Hopf分岔的算法判定程序。我们通过一些示例展示该算法程序的效率。最后，第6 节给出总结性评论。

2 预备结果

本节将回顾消元理想、格罗布纳基和三角分解的一些基本概念及其性质，这些内容将在全文中使用。有关更详细的介绍，请参阅 [30, 31, 37, 53, 84, 90, 97]。我们还将讨论 Hurwitz 行列式与子结式序列之间联系的一些改进。

设 $\mathbb{K}$ 是一个域，x_1、……、x_n 是 $\mathbb{K}$ 上的不定元。形式幂乘积 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}(\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 称为变量 x_1、……、x_n 中的一个 项，记作 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$，其中 $\boldsymbol{x} = x_1$、……、x_n 和

$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1$、……、$\alpha_n$。此外，对于 $i = 1$、……、n，我们记 $\boldsymbol{x}_i = x_1$、……、x_i（前 i 个不定元组成的序列）。

有限和

$$P = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \text{ where } c_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$$

称为 $\mathbb{K}$ 上关于 x_1、...、x_n 的多项式。我们称 $c_{\boldsymbol{\alpha}}$ 为 P 中项 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ 的系数，记作 $\mathsf{coef}(P, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}})$。我们称 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ 为 P 的一个项，并将 P 中所有项的集合记作 $\mathsf{term}(P)$。设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{K}$ 的扩域，即 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$。对于任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}^n$，定义求值同态

$$\mathrm{ev}_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{F}[\boldsymbol{x}] \to \mathbb{F}, \ \mathrm{ev}_{\boldsymbol{a}}(P) := \sum_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

并将其作用于 P 的结果记作 $P(\boldsymbol{a})$。如果 $P(\boldsymbol{a}) = 0$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为多项式 P 在 $\mathbb{F}^n$ 中的一个零点。

在 $\mathbb{K}$ 上关于 x_1、...、x_n 的所有多项式的通常加法和乘法构成一个含幺交换环，称为 $\mathbb{K}$ 上的 n元多项式环，记作$\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$。除非另有说明，我们固定变量序为 $x_1 < \cdots < x_n$。

2.1 消元理想与格罗布纳基

定义 2.1。令 $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 为一个理想，$<$ 为一个项序。复数域 $\mathfrak{I}$ 中的有限多项式集$\{G_1, \ldots, G_s\}$ 称为关于 $<$ 的 $\mathfrak{I}$ 的格罗布纳基，若 $\langle \mathsf{lt}(G_1) \ldots, \mathsf{lt}(G_s) \rangle = \langle \mathsf{lt}(\mathfrak{I}) \rangle$，其中 $\mathsf{lt}(\mathfrak{I})$表示 $\mathfrak{I}$中所有多项式的首项集合。如果多项式集 $\mathcal{P}$ 是理想 $\mathfrak{I}$的一组生成元，我们也称 $\mathcal{G}$ 为关于 $<$的 $\mathcal{P}$ 的格罗布纳基。

命题 2.2 ([31, 第2.5节，推论 2])。令 F 为复数域 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中的多项式，且 $\mathfrak{I}$ 为一个理想。令 $\mathcal{G}$ 为 $\mathfrak{I}$的格罗布纳基。那么，F 模 $\mathcal{G}$ 的标准形是唯一的，记作$\mathrm{nform}(F, \mathcal{G})$，并且 $F \in \mathfrak{I}$ 当且仅当 $\mathrm{nform}(F, \mathcal{G}) = 0$。

定义 2.3。设 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的一个理想。$\mathfrak{I}$ $(\ell = 1, \ldots, n-1)$的 ℓ阶消元理想 为

$$\mathfrak{I}_\ell := \mathfrak{I} \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-\ell}].$$

这里对变量进行了排序，使得要保留的变量排在前面，要消去的变量排在后面。因此，$\mathfrak{I}_\ell$ 表示通过消去最后 ℓ 个变量得到的理想。

设 $F \in \mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 是一个多项式，$<$是一个项序。若对于任意整数 $\ell = 1, \ldots, n-1$，F 相对于 $<$ 的首项 $\mathsf{lt}_<(F)$ 满足以下性质：如果 $\mathsf{lt}_<(F)$ 属于子环 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-\ell}]$，那么 F也属于该子环，则称项序$<$ 为消元序。

定理 2.4 ([31, 第3节. 定理 2])。设 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中的一个理想，$\mathcal{G}$ 是 $\mathfrak{I}$关于消元序 $<$的一个格罗布纳基。则多项式集 $\mathcal{G} \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-\ell}]$ 是消元理想 $\mathfrak{I}_\ell$ 关于 $<$的格罗布纳基。

容易验证，字典序是消元序。设 $\mathcal{G} = \{G_1, \cdots, G_s\}$ 是一个格罗布纳基。若对于 $i = 1, \ldots, s$，每个 G_i 都是首一的，且 G_i 中没有任何项能被任意一个 $\mathsf{lt}(G_j)$ $(j \neq i)$ 整除，则称 $\mathcal{G}$ 是约化的。在不会引起歧义时，我们也称 $\mathcal{G}$ 是一个约化格罗布纳基。

对于给定的理想 $\mathfrak{I}$ 和固定的项序，理想 $\mathfrak{I}$ 关于此项序的约化格罗布纳基是唯一的（参见 [31] 第 2.9 节中的命题 6）。

定义 2.5. 设 $\mathfrak{I}$和 $\mathfrak{J}$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的理想。$\mathfrak{I}$ 关于 $\mathfrak{J}$ 的理想商和饱和分别定义为

$$\mathfrak{I} : \mathfrak{J} := \{F \in \mathbb{K}[\boldsymbol{x}] \mid FG \in \mathfrak{I} \text{ for all } G \in \mathfrak{J}\},$$

$$\mathfrak{I} : \mathfrak{J}^\infty := \{F \in \mathbb{K}[\boldsymbol{x}] \mid FG^N \in \mathfrak{I} \text{ 对某个 } N \geq 0 \text{ 及所有 } G \in \mathfrak{J}\}. \text{成立}$$

存在一个充分大的正整数 N，使得 $\mathfrak{I} : \mathfrak{J}^\infty = \mathfrak{I} : \mathfrak{J}^N$。称多项式 F 在 $\mathfrak{I}$ 模意义下正则模意义下正则，如果 $\mathfrak{I} : \langle F \rangle = \mathfrak{I}$。

设 $\mathcal{F}$ 是环 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 的任意子集，并令 $\overline{\mathbb{K}}$ 表示 $\mathbb{K}$ 的代数闭包。本文将 $\mathcal{F}$ 中所有多项式在 $\overline{\mathbb{K}}^n$ 中的公共零点集称为 $\mathcal{F}$ 的零点集，记作

$$\mathsf{Z}(\mathcal{F}) := \{\boldsymbol{a} \in \overline{\mathbb{K}}^n \mid F(\boldsymbol{a}) = 0, \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

对于 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中的理想 $\mathfrak{I}$，将其视为 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 的子集，我们同样可以定义 $\mathsf{Z}(\mathfrak{I})$。特别地，如果 $\mathbb{K}$ 本身是一个代数闭域，那么 $\mathsf{Z}(\mathfrak{I})$ 与由理想 $\mathfrak{I}$ 确定的（不一定不可约的）代数簇 $\mathsf{V}(\mathfrak{I})$ 完全一致。

中多项式集的零点集是 *Zariski*拓扑在 $\overline{\mathbb{K}}^n$上的闭集；其补集是 *Zariski*开集。集合 $W \subseteq \overline{\mathbb{K}}^n$的 *Zariski*闭包，记作 $\overline{W}$，是包含 W 的最小 Zariski闭集（例如，参见第 4]章[31, ）。如果一个集合是 Zariski闭集与 Zariski开集的交集，则称其为 局部闭集；如果它是有限个局部闭集的并集，则称其为 可构造集。

定义 2.6。设 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中的一个理想。将 $\mathfrak{I}$ 的根式定义为

$$\sqrt{\mathfrak{I}} := \{F \in \mathbb{K}[\boldsymbol{x}] \mid F^m \in \mathfrak{I}, \exists\, m \in \mathbb{N}\}.$$

如果 $F^m \in \mathfrak{I} \implies F \in \mathfrak{I}$，或者等价地，如果 $\mathfrak{I} = \sqrt{\mathfrak{I}}$，那么我们称 $\mathfrak{I}$ 是一个根式理想 $l.$

定义 2.7。如果对于任意 F、 $G \in \mathbb{K}[\boldsymbol{x}$，理想 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中称为素理想],

$$FG \in \mathfrak{p} \implies F \in \mathfrak{p} \text{ or } G \in \mathfrak{p}.$$

如果一个零点集不能写成两个严格更小的零点集的并集，则称其为不可约。如果

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{I}) = \mathsf{Z}(\mathfrak{I}_1) \cup \cdots \cup \mathsf{Z}(\mathfrak{I}_s)$$

其中每个 $\mathsf{Z}(\mathfrak{I}_i)$ 都是不可约的，且对于 $i \neq j$，$\mathsf{Z}(\mathfrak{I}_i) \nsubseteq \mathsf{Z}(\mathfrak{I}_j)$，那么这个表达式称为 $\mathsf{Z}(\mathfrak{I})$ 的最小不可约分解。

由于所有零点集都定义在代数闭包 $\overline{\mathbb{K}}$ 上，希尔伯特零点定理表明，除了分量的排列顺序外，该分解是唯一的。

2.2 三角分解

设 F 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中的一个非零多项式。假设变量序为 $x_1 <$ $\cdots < x_n$。对于任意 $i = 1$，.....，n，F可写为

$$F = c_k x_i^k + c_{k-1} x_i^{k-1} + \cdots + c_1 x_i + c_0,$$

其中 $c_j \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ $(j = 0$,....., $k)$ 且 $c_k \neq 0$。称整数 k 为 F 关于变量 x_i 的次数，记作 $\deg(F, x_i)$；称系数 c_k 为 F 关于变量 x_i 的首项系数，记作 $\mathrm{lc}(F, x_i)$。

Fur此外，定义 F 的类为出现在 F 中的变量的最大下标 :

$$\mathrm{cls}(F) := \max\{i \mid \deg(F, x_i) > 0, i = 1, \ldots, n\};$$

若 $F \in \mathbb{K}$，则定义 $\mathrm{cls}(F) = 0$。当 $\mathrm{cls}(F) > 0$ 时，分别将 F 的主变量和主次数定义为

$$\mathrm{mvar}(F) := x_{\mathrm{cls}(F)}, \quad \mathrm{mdeg}(F) := \deg(F, \mathrm{mvar}(F)).$$

将 F 的初始项定义为

$$\mathrm{init}(F) := \mathrm{lc}(F, \mathrm{mvar}(F)).$$

对于 $\mathcal{F}$ 中的多项式集 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$，将 $\mathcal{F}$ 中所有多项式的初式构成的集合记为 $\mathrm{init}(\mathcal{F})$:={$\mathrm{init}(F)$ $\mid F \in \mathcal{F}$}。

设 F、G 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的两个多项式，$x_i$ 是一个变量，并设 $\ell = \mathsf{deg}(G, x_i)$，$m = \mathsf{deg}(F, x_i)$。若 $\ell > 0$，则存在两个多项式 Q 和 R 属于 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$，以及一个整数 $0 \le s \le m - \ell + 1$，使得

$$\mathrm{lc}(G, x_i)^s F = QG + R, \text{ and } \deg(R, x_i) < \ell.$$

若固定 s，则 Q 和 R 唯一确定。我们称 R 为 F 关于 x_i对G的伪余式，记作 $\mathsf{prem}(F, G, x_i)$。若 $x_i = \mathsf{mvar}(G)$，则也简记为 $\mathsf{prem}(F, G)$。在这种情况下，若 $m < \ell$，则称 F 关于多项式 G 是约化的。显然，$\mathsf{prem}(F, G)$总是关于 G约化的。

定义 2.8。设 $\mathcal{T} = [T_1, \ldots, T_r]$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的一个有限非空有序集。若 $0 < \mathsf{cls}(T_1) < \cdots < \mathsf{cls}(T_r)$，则称 $\mathcal{T}$为一个三角集。

显然，对于三角集 $\mathcal{T} = [T_1, \ldots, T_r]$，由前$i$ 个多项式$(i = 1, \ldots, r)$构成的有序集（记作 $[T_1, \ldots, T_i]$）也是一个三角集，记作 $\mathcal{T}^{[i]}$。设P 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的一个多项式。定义 P 关于三角集 $\mathcal{T}$的伪余式如下：

$$\mathrm{prem}(P, \mathcal{T}) = \mathrm{prem}(\ldots \mathrm{prem}(\mathrm{prem}(P, T_r), T_{r-1}), \ldots, T_1).$$

若 P关于 T_1，……，T_r是约化的，则称 P关于三角集$\mathcal{T}$是约化的。容易看出，多项式伪余式$(P, \mathcal{T})$关于 $\mathcal{T}$总是约化的。

设 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{H}$ 为 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的两个多项式集。我们引入如下记号，用以描述 $\mathcal{F}$ 的零点集中使 $\mathcal{H}$ 中所有多项式均不为零的点的集合：

$$\mathsf{Z}(\mathcal{F}/\mathcal{H}) := \{\boldsymbol{a} \in \overline{\mathbb{K}}^n \mid \text{for any } F \in \mathcal{F},\ F(\boldsymbol{a}) = 0, \text{ and for any } H \in \mathcal{H},\ H(\boldsymbol{a}) \neq 0\}.$$

集合 $\mathsf{init}(\mathcal{T}) := \{\mathsf{init}(T) \mid T \in \mathcal{T}\}$ 由三角集 $\mathcal{T}$中多项式的所有初式组成。由多项式关于三角集的伪除法公式，我们容易得到如下零点集包含关系。

命题 2.9. 对 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的任意三角集 $\mathcal{T}$与多项式 P，若 伪余式$(P, \mathcal{T}) = 0$，则$\mathsf{Z}(\mathcal{T}/\operatorname{init}(\mathcal{T})) \subseteq \mathsf{Z}(P)$。

对 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的任意两个多项式集 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{H}$，将 $\mathsf{Z}(\mathcal{F}/\mathcal{H})$ 到前 i个坐标的投影定义为

$$\mathrm{Proj}_i\, \mathsf{Z}(\mathcal{F}/\mathcal{H}) := \{(a_1, \ldots, a_i) \in \overline{\mathbb{K}}^i \mid \exists\, a_{i+1}, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{K}},\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{Z}(\mathcal{F}/\mathcal{H})\}.$$

对于任意多项式集 $\mathcal{F}$，记 $\mathcal{F}^{(\le i)} := \mathcal{F} \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_i]$ 为其关于前 i 个变量的截断。若 $[\mathcal{F}, \mathcal{H}]$ 满足投影性质，则

$$\mathsf{Z}(\mathcal{F}^{(\le i)}/\mathcal{H}^{(\le i)}) = \mathrm{Proj}_i\, \mathsf{Z}(\mathcal{F}/\mathcal{H}) \tag{2.1}$$

对任意 $i = 1$，...，$n - 1$，均成立。

定义 2.10。设 $\mathcal{T} = [T_1, \ldots, T_r]$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中的一个三角集。若 $\mathcal{T}$ 为空，则定义 $\mathsf{sat}(\mathcal{T}) = \langle 0 \rangle$。否则，将其饱和理想定义为

$$\mathrm{sat}(\mathcal{T}) := \langle \mathcal{T} \rangle : \langle J \rangle^{\infty},$$

其中 $J = \mathsf{init}(T_1) \cdots \mathsf{init}(T_r)$。若对于每个 $i = 1$，...，r，初始项 $\mathsf{init}(T_i)$ 在饱和理想 $\mathsf{sat}(\mathcal{T}^{[i-1]})$ 模意义下正则，则称三角集 $\mathcal{T}$ 为正则链。

命题 2.11。设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中的一个正则链。则 $\mathsf{Z}(\mathcal{T}/\overline{\mathsf{init}(\mathcal{T})}) = \mathsf{Z}(\mathsf{sat}(\mathcal{T})) \neq \emptyset$。

定理 2.12 ([4, 定理 6.1])。多项式环中的三角集 $\mathcal{T}$ $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 是正则链，当且仅当 $\mathrm{sat}(\mathcal{T}) = \{F \mid \mathrm{prem}(F, \mathcal{T}) = 0\}$。

定义 2.13。设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 中的三角集，且 $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{x}]$。称二元组 $[\mathcal{T}, \mathcal{H}]$ 为三角系统。对于任意 $i = 1, \ldots\ldots, n$，分别令 $\mathcal{T}(i)$（相应地，$\mathcal{T}(<i)$）和 $\mathcal{H}^{(i)}$（相应地，$\mathcal{H}^{(<i)}$）表示 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{H}$ 中主变量为 x_i（相应地，小于 x_i）的多项式集合。称二元组 $[\mathcal{T}, \mathcal{H}]$ 为（弱）正则系统，如果 $\mathcal{T}$ 是正则链，且 $\mathcal{H}$ 中的每个多项式在 sat($\mathcal{T}$) 模意义下正则。若对任意 $i = 1, \ldots\ldots, n$ 均满足以下性质，则称二元组 $[\mathcal{T}, \mathcal{H}]$ 为强正则系统：(1) $\mathcal{T}(i) = \emptyset$ 或 $\mathcal{H}^{(i)} = \emptyset$；(2) 对于 $\overline{\mathbb{K}}^{i-1}$ 中的 Z($\mathcal{T}(<i)/\mathcal{H}^{(<i)}$) 上任意点 $\mathrm{a}^{(<i)} = (a_1, \ldots\ldots, a_{i-1})$，任取 $T \in \mathcal{T}(i)$ 和任意 $H \in \mathcal{H}^{(i)}$，均有 init(T)($\mathrm{a}^{(<i)}$) $\neq 0$ 且 init(H)($\mathrm{a}^{(<i)}$) $\neq 0$。

强正则系统和弱正则系统分别由 [89] 和 [13]提出。 [13] 中已指出，弱正则系统不一定是强正则系统。例如，在变量序 $x_1 < x_2 < x_3$下，系统 $[\{(x_1 + x_2)x_3 - 1, \ x_2\}, \ \{x_1 + x_2\}]$ 是弱正则系统，但不是强正则系统。系统 $[\{(x_1 + x_2)x_3 - 1, \ x_2\}, \ \{x_1\}]$ 则是强正则系统。接下来，我们证明强正则系统也是弱正则系统。

引理 2.14。 设 $R := [\mathcal{T}, \mathcal{H}]$ 是强正则系统，则 R 也是弱正则系统。

证明。 根据 [89]的定理 5.1， $\mathcal{T}$是正则链。根据 [89], 的推论 5.1， $\mathcal{H}$ 中的每个多项式 P在模 sat($\mathcal{T}$) 意义下正则。 □

命题 2.1 5 ([13, 命题 1])。 对于任意正则系统 $R := [\mathcal{T}, \mathcal{H}]$，有 $\mathrm{Z}(R) \neq \emptyset$.

定义 2.16。 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 和 $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$ 为两个多项式集。若存在有限个三角系统，使得

$$\mathrm{Z}(\mathcal{F}/\mathcal{G}) = \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{Z}(\mathcal{T}_i/\mathcal{H}_i), \tag{2.2}$$

则称集合 $\{[\mathcal{T}_1, \mathcal{H}_1], \ldots, [\mathcal{T}_s, \mathcal{H}_s]\}$ 为 Z($\mathcal{F}/\mathcal{G}$) 的三角分解 。若每个 $[\mathcal{T}_i, \mathcal{H}_i]$都是一个（强）正则系统，则称该分解为（强）正则的。当 Z($\mathcal{G}$) $= \emptyset$ and$\mathcal{H}_i$ = init($\mathcal{T}_i$) 对于 $i = 1, \ldots\ldots, s$成立时，我们也称 $\{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_s\}$ 为 Z($\mathcal{F}$) 的三角分解 。

人们提出了许多算法，用于计算不同类型的三角分解。在本文中，我们主要关注这样一种情形：分解中的三角系统是正则系统。根据命题 2.15，正则系统具有一个良好性质，即其零点集总是非空。

注 2.17。 实际中，我们可能会遇到比 $[\mathcal{F}, \mathcal{G}]$更一般的系统。我们将 $\overline{\mathbb{K}}^n$ 中的代数簇的差集的有限并称为 可构造集，它属于 $\overline{\mathbb{K}}^n$。在 [13], 的引理 5 中证明了，每个可构造集都可以表示为有限个正则系统零点集的并。此外，文中还提供了一种算法，通过专门的运算 差集运算 来计算两个正则系统的零点集之差（参见 [13, 算法 1]）。同一篇论文还提出了“良好特化”的概念（参见定义 2.18）。借助这一概念，可以将可构造集 cs 精化三角分解为有限个正则系统零点集的并 $\{R_i\}$，称为预全面三角分解；通过对 cs的定义集取并集，即可得到其到参数空间的投影 $R_i's$。

在 [89], 中提出了 RegSer 算法，用于将形如 $[\mathcal{F}, \mathcal{G}]$ 的系统分解为强正则系统。因此，任何可构造集都可以表示为强正则系统零点集的并。根据定义，强正则系统显然具有投影性质。注意，弱正则系统可能不具有投影性质，正如前文所示的例子 $[\{(x_1 + x_2)x_3 - 1, x_2\}, \{x_1 + x_2\}]$。

2.3 半代数系统的三角分解

在本节中，我们固定基域 $\mathbb{K}$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$，并回顾文献 [12] 中引入的半代数系统三角分解的相关结果。

定义 2.18。对于 $\mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$ 的正则系统 $[\mathcal{T},\mathcal{H}]$，如果对所有 $t\in\mathcal{T}$， t 关于 mvar(t) 的导数（记为 der(t)）在 sat($\mathcal{T}$) 模意义下正则，则称其为无平方因子 的。给定 $u\in\mathbb{R}^d$，如果 $h_T(u)\neq 0$ 且 $[\mathcal{T}(u)\ \mathcal{H}(u)]$ 是一个（无平方因子的）正则系统，则称（无平方因子的）正则系统 $[\mathcal{T},\mathcal{H}]$ 在 u 处良好特化 。

定义 2.19（半代数系统）。给定复数域上的有限多项式集 $F=\{f_1,\ldots,f_s\}$、$N=\{n_1,\ldots,n_k\}$、$P=\{p_1,\ldots,p_e\}$ 和 $H=\{h_1,\ldots,h_\ell\}$，令 $F_=$ 表示方程集 $f_1=0$，.....，$f_s=0$，$N_\geq$ 表示非负不等式集 $\{n_1\geq 0,\ldots,n_k\geq 0\}$，$P_>$ 表示正不等式集 $\{p_1>0,\ldots,p_e>0\}$，$H_{\neq}$ 表示不等式约束集 $\{h_1\neq 0,\ldots,h_\ell\neq 0\}$。我们将由 $F_=$、$N_\geq$、$P_>$ 和 $H_{\neq}$ 中约束的合取定义的半代数系统（SAS）记为 $S=[F_=,N_\geq,P_>,H_{\neq}]$。

定义 2.20（正则半代数系统）。设 $\mathcal{R}=[\mathcal{T},\mathcal{P}]$ 是一个由 $\mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$构成的无平方因子正则系统。分别用 $\boldsymbol{u}=u_1,\ldots,u_d$和 $\boldsymbol{y}=y_1,\ldots,y_r(r+d=n)$表示 $\mathcal{T}$的自由变量和主变量。设 $\mathcal{Q}$ 是关于 $\mathbb{Q}[\boldsymbol{u}]$的无量词公式，它定义了 $\mathbb{R}^d$的一个半代数集 S。若满足以下条件，我们称 $rsa:=[\mathcal{Q},\mathcal{T},\mathcal{P}_>]$ 为一个正则半代数系统：(*i*) $\mathcal{Q}$ 定义了 $\mathbb{R}^d$中的一个非空开子集 S；(*ii*) 正则系统 $[\mathcal{T},\mathcal{P}]$ 在 S的每个点 u 处都良好特化；(*iii*) 对于 S中的每个点 u，特化系统 $[\mathcal{T}(u)\ P(u)_>]$ 都有实解。

定理 2.21。设 $\mathfrak{S}$ 是由 $\mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$构成的一个半代数系统。那么，可以计算出 $\mathfrak{S}$的一个三角分解，即有限多个正则半代数系统，使得它们的零点集的并集就是 $\mathfrak{S}$的零点集。

注 2.22。用于计算这种三角分解的算法称为 RealTriangularize，已作为 Maple 中 RegularChains库的一部分实现。

2.4 Hurwitz行列式与子结式序列

此处的子结式术语引自 [63]。关于 Hurwitz行列式和子结式序列的主要结果引自 [14, 38]。设 $p\leq q$ 为两个正整数， M 为一个系数取自 $\mathbb{R}$的 $p\times q$ 矩阵。设 M_i 为 M 的方子矩阵，由 M的前 $p-1$ 列以及 M的第 i列组成，其中 $i=p$，.....，q。令 detM_i 为M_i的行列式。我们用 dpol(M) 表示 $\mathbb{R}[y]$中的一个元素，称为 M的行列式多项式，其定义如下：

$$\det M_p y^{q-p}+\det M_{p+1}y^{q-p-1}+\cdots+\det M_q.$$

设 $f_1(y)$，.....，$f_p(y)$ 是 $\mathbb{R}[y]$中的一组多项式。令

$$q=1+\max(\deg f_1(y),\ldots,\deg f_p(y)).$$

f_1，.....，f_p的矩阵 M定义为 $M_{ij}=$coeff(f_i,y^{q-j})。

现在引入子结式。设 $f=a_m y^m+\cdots+a_0$、$g=b_n y^n+\cdots+b_0$ 是 $\mathbb{R}[y]$ 中的两个多项式。对于 $i=0$=1，...，min(m,n)，-1，i-阶 子结式 of f 和 g 定义为

$$S_i(f,m,g,n,y):=\mathrm{dpol}(\underbrace{y^{n-1-i}f,\ldots,yf,f}_{n-i},\underbrace{y^{m-1-i}g,\ldots,yg,g}_{m-i}). \tag{2.3}$$

等式 (2.3) 右侧的定义矩阵有 $m+n-2i$ 行和 $m+n-i$ 列。因此， $S_i(f,g,y)$ 是 $\mathbb{R}[y]$ 中的一个多项式，其次数至多为 i。令 $s_i(f,g,y)$ =coeff($S_i(f,g,y)$ y^i)，并将其称为 $S_i(f,g,y)$ 的主子结式系数。令 $\delta=\min\{m,n\}$。我们扩展上述子结式和主子结式系数的定义，使得 f 和 g 本身也是子结式：

$$\begin{cases} S_{\delta+1}=f, & S_\delta=g, & s_{\delta+1}=a_m, & s_\delta=b_n, & \text{when } m\geq n \\ S_{\delta+1}=g, & S_\delta=f, & s_{\delta+1}=b_n, & s_\delta=a_m, & \text{when } m<n \end{cases}. \tag{2.4}$$

在（2.3）和（2.4）中，m 和 n 被视为形式次数，从而允许次数下降（$\deg(f)<m$当 $a_m=0$ 时，或 $\deg(g)<n$ 当 $b_n=0$时）。特别是，当 $g=0$ 且 $f\neq 0$时，或者对称地

当 $f = 0$ 且 $g \neq 0$时，零多项式仍保留其预设形式次数，其形式首项系数分别为 $b_n = 0$ 或 $a_m = 0$。

设 $f(y) = a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[y]$ 是一个次数为 n 的多项式。对于 $i = 1$、2、...、n，第 i 个 Hurwitz行列式 Δ_i 定义如下：

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_j \end{vmatrix}, \ldots, j = 4, \ldots, n.$$

记 $f(y) = f_1(y^2) + yf_2(y^2)$。如果 n 为偶数，$n = 2m$，则

$$f_1(y) = a_0y^m + a_2y^{m-1} + \cdots + a_{2m}, \quad f_2(y) = a_1y^{m-1} + a_3y^{m-2} + \cdots + a_{2m-1}.$$

另一方面，如果 n 为奇数，$n = 2m + 1$，则

$$f_1(y) = a_1y^m + a_3y^{m-1} + \cdots + a_{2m+1}, \quad f_2(y) = a_0y^m + a_2y^{m-1} + \cdots + a_{2m}.$$

下面的结果是对 [14, 定理 5] 的改进版本，同时也是对 [38,定理 3。1], 的修正版，它展示了 Hurwitz 行列式与主子结式序列之间的密切关系。

定理 2.23。设 $f(y) = a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[y]$ 是一个次数为 n 的多项式，记 $f(y) = f_1(y^2) + yf_2(y^2)$。令 $\Delta_{-1} = \Delta_0 = a_0$ 和 $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ 为 f 的 *Hurwitz* 行列式序列。则有如下结论：

(*i*) 如果 $n = 2m+1$，则对于 $i = 0$、*1*、.....、m，有 $\Delta_{n-1-2i} = (-1)^{\frac{(m-i)(m-i-1)}{2}} s_i(f_1, m, f_2, m, y)$ 成立。 (*iii*) 如果 $n = 2m + 1$，则对于 $i = 0$、*1*、.....、m，有 $\Delta_{n-2i} = (-1)^{\frac{(m-i)(m-i-1)}{2}} s_i(f_1, m, f_2, m+1, y)$ 成立。 (*iv*) 如果 $n = 2m$，则对于 $i = 0$、*1*、.....、m，有 $\Delta_{n-2i} = (-1)^{\frac{(m-i)(m-i-1)}{2}} s_i(yf_2, m, f_1, m, y)$ 成立。

~~(ii) If $n = 2m$, we have $\Delta_{n-1-2i} = (-1)^{\frac{(m-i)(m-i+1)}{2}} s_i(f_1, m, yf_2, m-1, y)$ hold, for $i = 0, 1, \ldots, m$.~~

注释 2.24。上述论述用到了扩展式 (2.4)。请注意，这一结果最初源自 [38, 定理 3.1] ，但其中存在符号错误，后来已在 [14, 定理5]中修正。然而，先前研究中 i 的取值范围无法涵盖 $i = m$ 的情形，除非是 (*iii*)。这种情形对于推导 Hopf分岔点的完整代数条件至关重要（见定理 4.3）。这里，我们通过定义 $\Delta_{-1} = \Delta_0 = a_0$来扩展 Hurwitz行列式。这样一来，定理 2.23 中 i 的取值范围便可扩展至 $i = m$。事实上，这种扩展对于充分发挥子结式的作用十分重要，这一点在定理 4.3 的证明中将会很清楚。值得注意的是，我们交换了 (*iv*) 中 f_1 和 yf_2 的位置，因为我们认同 $\Delta_0 = a_0$ 和扩展式 (2.4)。

下面两个推论是定理 2.23 的直接结果。

推论 2.25. 设多项式 f 如上，其中 $a_n \neq 0$。那么，f 在 $\mathbb{C}$ 中有非零根对$\{z, -z\}$，当且仅当 z^2 是 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$的公共零点。此外，f 在 $\mathbb{C}$ 中恰有 k对对称根 $\{z_i, -z_i\}$（按重数计），当且仅当

$$\Delta_{n-1-2j} = 0 \quad (0 \leq j < k), \qquad \Delta_{n-2k-1} \neq 0, \qquad 0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

证明。由于 $a_n \neq 0$, $f(x)$ 没有零根。因此， f 在 $\mathbb{C}$ 中有非零根对 $\{z,-z\}$，当且仅当 z^2 是 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 的公共零点。对于 $t=z^2\neq 0$， $(\lambda^2-t)^j \mid f(\lambda)$ 当且仅当 $(y-t)^j$同时整除 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$，这是通过取偶部和奇部得到的。这样的最大 j 是对称根对 $\{z,-z\}$的重数。因此， f 恰有 k 对对称根 $\{z_i,-z_i\}$，当且仅当 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 有 k 个公共根（按重数计）。由上述定理 2.23 可得结论，该定理建立了 Hurwitz 行列式与首项子结式系数之间的关系；而且，定理 5], 建立了 f_1 的最大公因式与 f_2 及子结式之间的关系，并涵盖边界情形 $k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。

□

推论 2.26. 沿用上述记号，若 $a_n \neq 0$，则 f 在 $\mathbb{C}$ 中有一对非零根 $\{z,-z\}$，当且仅当 z^2 是 $f_1(y)$ 和 $yf_2(y)$ 的公共零点。此外， f 在 $\mathbb{C}$ 中恰有 k 对对称根 $\{z_i,-z_i\}$（按重数计），当且仅当

$$\Delta_{n-2j}=0 \quad (0\leq j<k), \qquad \Delta_{n-2k}\neq 0, \qquad 0\leq k\leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

注 2.27. 请注意，当 $n=2m$ 时， $f_2(y)$ 和 $yf_2(y)$ 都不可能有 m 对非零对称根 $\{z_i,-z_i\}$，因为 $f_2(y)$ 是次数为 $m-1$ 的多项式。因此，要使 $f(y)$ 有 m对对称根， $f_2(y)$ 和 $yf_2(y)$ 必须恒等于零。[14, 38, 39], 中未考虑这种情况，现在我们的扩展定理 2.23 涵盖了这种情况。关于这一事实的结论列于推论 4.4。

3 通过消元理论求不变代数曲面

计算代数方法已广泛用于微分方程的定性分析，参见[21, 22, 93, 94]。本节将回顾基于消元理论、用于计算参数动力系统不变代数曲面的算法。我们首先介绍通过消元理想计算实现的格罗布纳基方法，遵循 Antonov、Aybar 及其合作者 [3, 5] 所建立的方法论框架。如后续小节所示，该方法只能得到不变代数曲面存在的必要条件，而其充分性则需要单独验证。

为规避这一局限性，三角分解提供了一种更为全面的消元方案：它可以直接将参数上的非零条件作为输入的一部分，并且既可以作为 Gröbner 基方法的补充，也可以独立使用。然而，现有文献中尚缺乏能够直接处理三角集的此类问题算法。为弥补这一空白，我们提出了一种基于三角分解的方法来解决这一任务。据我们所知，这是首次应用三角集方法直接计算参数动力系统不变代数曲面。重要的是，我们证明了该方法能够得到此类曲面存在的充要条件。此外，在对每个分支执行明确的可构造集后处理步骤后，该方法能够恢复非平凡不变曲面及其精确的参数条件。

考虑如下形式的参数多项式微分系统（1.1）。令

$$\mathcal{X}=F_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+F_n\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{3.1}$$

表示与系统（1.1）相关联的多项式向量场。若存在一个多项式 $L\in\mathbb{K}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}]$ ，则称*Darboux* 多项式是系统（1.1）的 Darboux 多项式，其中 $K\in\mathbb{K}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}]$ 满足

$$\mathcal{X}(L)=KL, \tag{3.2}$$

其中 K 称为 L的余因子。显然，如果 L 是系统（1.1）的 Darboux 多项式，那么对于每个固定的 $\boldsymbol{\mu}$，代数簇 $\boldsymbol{V}(L)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n \mid L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=0\}$ 在系统（1.1）的流下是不变的；也就是说，系统（1.1）中从 $\boldsymbol{V}(L)$ 出发的任意轨道，在其最大存在区间内的所有时间始终保持在 $\boldsymbol{V}(L)$ 中。

注 3.1。对于实多项式向量场 $\mathcal{X}$，其 Darboux 多项式及相应的余因子（如果存在）可能是复数。在这种情况下，它们以复共轭对的形式出现。如果 L是系统（1.1）的 Darboux 多项式，那么 $L=0$ 称为 不变代数曲线 （对于$n=2$），称为 不变代数曲面 （对于 $n=3$），并称为 不变代数超曲面 （对于 $n>3$）。在本文余下部分，当系统的维数 n 未指明时，我们将 $L=0$ 统称为不变代数曲面，而不论其维数如何。

回顾一下，系统（*1.1*）的有理首次积分是一个非常值有理函数 $H=\frac{F}{G}\in\mathbb{K}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\mu})\setminus\mathbb{K}(\boldsymbol{\mu})$（其中 F，$G\in\mathbb{K}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}]$ 且 $G\neq 0$）满足 $\mathcal{X}(H)=0$。达布多项式与有理第一积分密切相关；特别是，以下定理表明，存在足够多的达布多项式即可保证存在有理首次积分。

定理 3.2 (达布–茹阿诺卢)。假设这个 n维、次数为(1.1) 的多项式微分系统有 d个 p 不可约达布多项式。令

$$N=\binom{d+n-1}{n}.$$

(a) 若 $p\geq N+1$，系统 (1.1) 存在一个达布首次积分。

(b) 系统 (1.1) 存在有理首次积分，当且仅当 $p\geq N+n$。

定理 3.2 的 (a) 部分最初由达布于 [32] 1878 年提出，而 (b) 部分则由茹阿诺卢于 [56] 1979 年借助代数几何的复杂工具证明（参见 [23, 62]，其中给出了茹阿诺卢结果的初等证明）。

根据定理 3.2，寻找 Darboux 多项式（或等价地，不变代数曲面）是构造有理第一积分的关键步骤。受此启发，本文将重点研究参数微分系统（1.1）是否存在与余因子 $L=0$ 相关联的不变代数曲面 K，其中二者具有如下预设形式：

$$L=\sum_{i=0}^{\ell_1} f_i\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}_i}=0,\quad K=\sum_{j=0}^{\ell_2} a_j\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{q}_j},\tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{p}_0=\mathbf{0}$，因此 f_0是 L的常数项；单项式集合 $\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}_i}\}_{i=0}^{\ell_1}$和 $\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{q}_j}\}_{j=0}^{\ell_2}$是预先给定的，而所有 f_i 和 a_j 都是待定系数。

回顾一下，对于多项式 $P\in\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$，$\mathrm{term}(P)$ 表示 P中所有项的集合。对于 P中的项 $\boldsymbol{t}$，$\mathrm{coef}(\boldsymbol{t})$ 表示 $\boldsymbol{t}$ 在 P中的系数。如果方程（3.2）成立，则 $\mathcal{X}L-KL\equiv 0$可视为关于变量 $\boldsymbol{x}$的多项式恒等式。该恒等式等价于以下方程组：

$$\{\mathrm{coef}(\mathcal{X}L-KL,\boldsymbol{t})=0\mid \boldsymbol{t}\in\mathrm{term}(\mathcal{X}L-KL)\},\tag{3.4}$$

其中，将 $\mathcal{X}L-KL$视为关于 $\boldsymbol{x}$的多项式，其系数属于 $\mathbb{K}[\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a}]$，即视为多项式环 $\mathbb{K}[\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a}][\boldsymbol{x}]$中的元素，其中 $\boldsymbol{f}=(f_0,\ldots,f_{\ell_1})$ 且 $\boldsymbol{a}=(a_0,\ldots,a_{\ell_2})$。基于上述观察，我们建立以下引理。

引理 *3.3.* 对于 $(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a})$ 的固定取值，预设形式 *(3.3)* 的多项式 L和 K满足 $\mathcal{X}L=KL$，当且仅当系数方程 *(3.4)* 成立。特别地，对于固定的 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$，存在一个具有余因子 K的非恒定 L，当且仅当存在系数 $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{a})\in\overline{\mathbb{K}}^{\ell_1+\ell_2+2}$，使其在 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$处满足 *(3.4)*，且 $(f_1,\ldots,f_{\ell_1})\neq\mathbf{0}$。

除非另有说明，问题 $(\mathcal{P}_1)$ 中的系数见证 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{a}$取值于 $\overline{\mathbb{K}}$。因此，对于实参数点，属于可构造存在轨迹意味着存在一个代数闭包上的见证，但不一定存在实不变曲面。

多项式集 $\mathcal{P}:=\{\mathrm{coef}(\mathcal{X}L-KL,\boldsymbol{t})\mid \boldsymbol{t}\in\mathrm{term}(\mathcal{X}L-KL)\}\subseteq\mathbb{K}[\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a}]$完全由参数多项式构成，其中包括系统参数 $\boldsymbol{\mu}$ 和待定系数 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{a}$。因此，我们可以在参数环 $\mathbb{K}[\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a}]$中分析 $\mathcal{P}$，以研究

不变代数曲面的存在性。我们称 $\mathcal{P}$ 为微分系统的关联参数多项式集（1.1）相对于待定形式（3.3）的参数多项式集，或简称参数多项式集。一旦 ℓ_1 和 ℓ_2 确定，该集合 $\mathcal{P}$ 便是有限集。

下面，我们将介绍基于格罗布纳基计算和三角分解的一般理论结果及完整的计算方法。

3.1 格罗布纳基方法

引理 3.3 给出了判定一般 n维多项式微分系统是否具有给定有界次数的不变代数曲面的充要条件。设 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}]$ 为系统（1.1）关于 ansatz（3.3）的参数多项式集。为确定满足该判据的参数条件，我们必须研究 $\mathcal{P}$ 到系统参数空间的零点集投影。利用消元理论的一种可行方法是计算消元理想 $\langle\mathcal{P}\rangle \cap \mathbb{K}[\boldsymbol{\mu}]$. 根据定理 2.4，通过格罗布纳基计算可以得到 $(\ell_1 + \ell_2 + 2)$ 阶消元理想 $\langle\mathcal{P}\rangle$ 在变量序 $\boldsymbol{\mu} < \{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}\}$下，该消元理想恰好为 $\langle\mathcal{P}\rangle \cap \mathbb{K}[\boldsymbol{\mu}]$.

注意，方程（3.2）始终存在常数为 L 的解，即 $f_1 = \cdots = f_{\ell_1} = 0$ （当 $K = 0$ 时，$f_0 \neq 0$，而当 $f_0 = 0$时， K 任意），对所有系统参数值均成立，这意味着上述消元理想始终是零理想。常数 L不定义代数曲面：当 $f_0 \neq 0$ 时，其零点集为空；当 $f_0 = 0$时，其零点集为全空间。因此，在计算消元理想之前，必须排除常数为 L 的解；相应地，不变代数曲面 $L = 0$ 称为非平凡的，当且仅当 L 为非常数。

为排除这些解，我们使用饱和理想 $\mathfrak{I} = \langle\mathcal{P}\rangle : \langle f_1, \ldots\ldots, f_{\ell_1}\rangle^{\infty}$。令

$$cs := \mathsf{Z}(\mathcal{P}) \setminus \mathsf{Z}(f_1, \ldots, f_{\ell_1})$$

表示非平凡系数解的可构造集。根据下文的命题 3.5 ， $\mathfrak{I}$ 的零点集是 cs的 Zariski闭包，

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{I}) = \overline{cs}.$$

令 m 为系统参数 $\boldsymbol{\mu}$的个数。集合

$$S := \mathrm{Proj}_m(cs)$$

使系统（3.4）存在非平凡解的系统参数取值集合称为 ansatz（*3.3*）的存在轨迹。

注 3.4。的消元理想非零，不能仅凭饱和步骤先验地证明：当且仅当存在轨迹的 Zariski闭包为整个参数空间时，它才是零理想。这种退化情形是否出现，本身就是分类的一部分；对于具体系统，可通过计算予以验证（见第3.3.1节，其中 BZ系统的消元理想最终由十二个明确的非零多项式生成）。

命题 3.5 ([31, 定理 10，第 4 节。4])。 设 $\mathfrak{I}$ 和 $\mathfrak{J}$ 是 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的理想，则 $\mathsf{Z}(\mathfrak{I} : \mathfrak{J}^{\infty}) = \mathsf{Z}(\mathfrak{I}) \setminus \mathsf{Z}(\mathfrak{J})$，即它等于 $\mathsf{Z}(\mathfrak{I})$ 与 $\mathsf{Z}(\mathfrak{J})$之差集运算的 *Zariski*闭包。

以下结果给出了形如（1.1）的微分系统存在有界次数的不变代数曲面的必要条件。

命题 3.6。 令 $\mathcal{P}$ 表示系统 (1.1) 关于给定试探形式 (3.3)的关联参数多项式集。设 cs、 m和 S 如上所述，令

$$\mathfrak{I} = \langle\mathcal{P}\rangle : \langle f_1, \ldots, f_{\ell_1}\rangle^{\infty}, \qquad \mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2} = \mathfrak{I} \cap \mathbb{K}[\boldsymbol{\mu}].$$

Then

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{I}) = \overline{cs}, \qquad \mathsf{Z}(\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}) = \overline{S}.$$

特别地，如果系统 (1.1) 在某个参数值$\overline{\boldsymbol{\mu}}$下存在非平凡不变代数曲面，那么 $\overline{\boldsymbol{\mu}} \in \mathsf{Z}(\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2})$。反过来，$\mathsf{Z}(\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2})$ 中的每个点都属于存在轨迹的 *Zariski*闭包，尽管该闭包的边界点本身未必能提升为给定试探形式的非平凡解。

证明。 命题 3.5 给出 $\mathsf{Z}(\mathfrak{I}) = \overline{cs}$。根据消元理论中闭包定理的第 (i) 部分，应用于 $\overline{\mathbb{K}}$ （例如参见 [31, 第 3 章第 2 节，定理 3]），

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}) = \overline{\mathrm{Proj}_m(\mathsf{Z}(\mathfrak{I}))}.$$

由于到系统参数空间的坐标投影是 Zariski 连续的（多项式零点集的原像仍是多项式零点集），因此有

$$\overline{\mathrm{Proj}_m(\mathsf{Z}(\mathfrak{I}))} = \overline{\mathrm{Proj}_m(\overline{cs})} = \overline{\mathrm{Proj}_m(cs)} = \overline{S}.$$

因此 $\mathsf{Z}(\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}) = \overline{S}$。 □

为确定这些条件是否充分，可以采用以下两种方法:

（1）理论方法： 应用消元理论中的扩张定理，证明在适当的非退化条件下，消元理想的零点集中的参数值确实可以扩张为原参数多项式集的解，从而确保相应不变代数曲面的存在。

（2）构造性方法：对于每个计算得到的参数条件，将该条件施加到原参数多项式系统上，并求解所得受限系统中的其余待定系数 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{a}$。随后验证所得多项式 L满足方程（3.2）且为非常数。

算法 1 通过 Gröbner 基消元计算参数条件$\Psi := \mathsf{InvSurGB}((F_1, \ldots, F_n)\ L, K)$

输入： $(F_1, \ldots, F_n)$，动力系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = (F_1, \ldots, F_n)$ 的向量场；$L = \sum_{i=0}^{\ell_1} f_i \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}_i}$，预设的不变代数曲面；$K = \sum_{j=0}^{\ell_2} a_j \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{q}_j}$，给定余因子。

输出： $\Psi = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$，$\sqrt{\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}}$ 在 $\mathbb{K}[\boldsymbol{\mu}]$ 中的极小素理想分解；等价地，簇 $\mathsf{Z}(\mathfrak{p}_1) \ldots, \mathsf{Z}(\mathfrak{p}_s)$ 是存在轨迹的 Zariski 闭包的不可约分支，其中存在预设形式的非平凡不变代数曲面 1: 设定 $\Psi := \emptyset$，并计算向量场 $(F_1, \ldots, F_n)$ 的关联参数多项式集 $\mathcal{P}$

2: $\mathfrak{I} := \langle \mathcal{P} \rangle$: $\langle f_1, \ldots\ldots, f_{\ell_1} \rangle^{\infty}$3: 计算 $(\ell_1 + \ell_2 + 2)$-th 消元理想 $\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}$ 的 $\mathfrak{I}$4: 计算极小素理想分解 $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_s$ 的 $\sqrt{\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}}$ 5: **对于** $i = 1$ **到** s **执行**6: $\Psi := \Psi \cup \{\mathfrak{p}_i\}$7: **返回** Ψ

注记 3.7。 饱和步骤可以用主分解自然地解释。设 $\mathfrak{J} = \bigcap_r \mathfrak{Q}_r$ 为一个主分解，并令 $\mathfrak{I}_f = \langle f_1, \ldots\ldots, f_{\ell_1} \rangle$。则

$$\mathfrak{J} : \mathfrak{I}_f^{\infty} = \bigcap_{\mathfrak{I}_f \nsubseteq \sqrt{\mathfrak{Q}_r}} \mathfrak{Q}_r;$$

参见 [31, 第 4 章、第 4 节和第 8]节。因此，饱和恰好舍弃了那些其关联素理想包含 $\mathfrak{I}_f$的初等分支；从几何上说，就是完全包含于Z(f_1、……、 f_{ℓ_1})中的那些分支。在当前问题中，这些是 L 的所有待定系数恒等为零、从而 L 为常数的分支。保留的混合分支内部的平凡点不会通过此步骤被移除；当需要逐点参数条件时，必须对其另行处理。

尽管我们直接计算饱和，但其基本思路遵循 [3, 5], ，其中使用 Rabinowitsch技巧分别处理 $f_i \neq 0$ 关于 $i = 1$、……、 ℓ_1的条件。总体而言，这些计算相当于关于 $\langle f_1$、……、 $f_{\ell_1}\rangle$进行饱和。

在处理相对复杂的系统或涉及众多参数的情形时，Gröbner基方法在消元理想和饱和计算过程中可能会遇到计算瓶颈。三角分解提供了一种替代方法：它逐个分支表示解集，并将非零条件作为输入的一部分。这些特点对于当前问题尤其有用，因为必须排除平凡分支和给定的参数约束。

3.2 三角分解方法

如上所述，确定参数微分系统（1.1）的不变代数曲面，不仅需要消去变量，还需要保留参数上的某些非零条件。因此，多项式系统的三角分解尤其适合处理这一任务。

对于 $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \overline{\mathbb{K}}^n$ 和 $i = 1, \ldots, n$，回顾一下，Proj$_i(\boldsymbol{r}) = (r_1, \ldots, r_i)$ 表示将 $\boldsymbol{r}$ 投影到前 i 个坐标上。设 $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ 为两个多项式集，$\mathcal{T}$ 为 $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}]$中的一个三角集。回顾一下，Proj$_i$ Z($\mathcal{F}/\mathcal{H}$) 表示将零点集 Z($\mathcal{F}/\mathcal{H}$)投影到前 i 个坐标上，而 $\mathcal{T}^{(\leq i)}$ 表示截断三角集 $\mathcal{T} \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_i]$。

命题 *3.8.* 设 $\mathcal{P}$ 表示关于预设形式 *(3.3)* 的系统 *(1.1)* 的参数多项式集，并设 $cs := Z(\mathcal{P}) \setminus Z(f_1, \ldots, f_{\ell_1})$。设 m 为系统参数 $\boldsymbol{\mu}$ 的数量。当且仅当 $\overline{\boldsymbol{\mu}} \in Proj_m(cs)$ 时，系统 *(1.1)* 对某个系统参数值 $\overline{\boldsymbol{\mu}} \in \overline{\mathbb{K}}^m$ 存在形如 *(3.3)* 的非平凡不变代数曲面。特别地，设 $\{[\mathcal{T}_1, \mathcal{H}_1], \ldots, [\mathcal{T}_s, \mathcal{H}_s]\}$ 为强正则系统的有限集，使得 $Z(\mathcal{P}) \setminus Z(f_1, \ldots, f_{\ell_1}) = \bigcup_{j=1}^{s} Z(\mathcal{T}_j/\mathcal{H}_j)$。则有

$$\mathrm{Proj}_m(cs) = \bigcup_{j=1}^{s} \mathsf{Z}\big(\mathcal{T}_j^{(\leq m)}/\mathcal{H}_j^{(\leq m)}\big). \tag{3.5}$$

证明。 回顾一下，变量序的选取满足系统参数 $\boldsymbol{\mu}$ 小于待定系数 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{a}$。根据引理 3.3 以及L 为非平凡且非常数这一要求，当且仅当存在一个点 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$时，该系统在参数值 $(\overline{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}) \in \mathsf{Z}(\mathcal{P})$ 满足 $(f_1, \ldots, f_{\ell_1}) \neq 0$时，存在一个非平凡不变代数曲面。该结论由备注 2.17 以及每个强正则系统都具有投影性质这一事实得出（2.1）。

□

注 3.9. 根据注 2.17，Proj$_m(cs)$ 也可以通过以下方式计算：首先将 cs 分解为（弱）正则系统的零点集，然后将此分解细化为预全面三角分解。另一种做法是，在实践中，先将 $\mathcal{P}$ 三角分解为（强或弱）正则系统 $R_1, \ldots, R_t$。由于 $R := [\{f_1, \ldots, f_{\ell_1}\}, \emptyset]$显然是一个正则系统，且 Z($R$) = Z($f_1, \ldots, f_{\ell_1}$)，因此可以改为计算 Proj$_m$(Z($R_i$) \ Z($R$))，从而得到参数上的条件。算法 2 将这一方法形式化。在我们的实验中，可构造集的差集运算和投影是通过 Maple 中的 RegularChains库 [17]完成的。

注3.10。 实践中，也可以使用 EPSILON 中的 TriSer算法 将多项式系统分解为三角系统。如果其输出分支满足所需的投影性质（特别是当它们是强正则系统时），则同样适用投影论证。由于 TriSer 无需执行某些为确保强正则性而进行的细化步骤，因此它返回的分支数量通常远少于 RegSer。不具备所需投影性质的分支仍可通过一般的可构造集投影处理。与之前一样，投影前会移除平凡部分。对于 BZ系统的线性试探形式（3.7），所有 176 个 TriSer 分支均通过了投影检验，而 RegSer 返回了 632 个分支。

算法 2 通过三角分解计算参数条件$\Psi :=$ InvSurTri($(F_1, \ldots, F_n)$ L, K) 输入： $(F_1, \ldots, F_n)$,

动力系统的向量场 $\dot{x} =$**(**$F_1, \ldots, F_n$**)；** $L = \sum_{i=0}^{\ell_1} f_i \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}_i}$**，给定的不变代数曲面；** $K = \sum_{j=0}^{\ell_2} a_j \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{q}_j}$**，给定余因子。输出：参数空间中一个由可构造子集组成的有限集** $\Psi = \{\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_t\}$**，使得当且仅当** $\overline{\boldsymbol{\mu}} \in \bigcup_{j=1}^{t} \mathcal{Q}_j$ **时，该系统对**$\overline{\boldsymbol{\mu}}$ **存在具有预设形式 (3.3) 的非平凡不变代数曲面。每个** $\mathcal{Q}_j$ **都是在投影前从一个三角分支中移除所有常数-**L **点后得到的。1：计算向量场 (**$F_1, \ldots, F_n$**) 的关联参数多项式集** $\mathcal{P}$ **2：计算** $[\mathcal{P}, \emptyset]$ **的强正则系统分解** $\{R_1, \ldots, R_s\}$**；令** $\Psi := \emptyset$ **3：令** $R :=$ $[\{f_1, \ldots, f_{\ell_1}\}, \emptyset]$ **4：对于** $i = 1$ **到** s **执行 5：计算** $\mathcal{N}_i :=$ **Z(**R_i**)** $\setminus$**Z(**R**) 的可构造集表示，必要时将其细化为正则系统 6：如果** $\mathcal{N}_i = \emptyset$ **则 7：丢弃** $\mathcal{N}_i$**；此分支没有非平凡解 8：否则 9：**$\mathcal{Q}_i :=$**Proj**$_m$**(**$\mathcal{N}_i$**) 10：**$\Psi := \Psi \cup \{\mathcal{Q}_i\}$ **11：返回** Ψ

作为本节的总结，我们指出，这两种消元方法是互补的。格罗布纳基方法结合饱和与素分解，能够简洁地描述存在轨迹的 Zariski闭包，从而给出必要条件。随后，三角分解逐分支地细化每个素分支。使用强正则系统时，其投影性质可导出逐点充要条件，而不等式约束则可以在分解过程中直接施加。下面的命题将这种结合形式化。它基于命题 3.6 和 3.8。

命题 3.11。 设 $\mathcal{P}$ 表示系统 (1.1)关于预设形式 (3.3)的参数多项式集。设 $\mathfrak{I} = \langle \mathcal{P} \rangle$： $\langle f_1, \ldots\ldots, f_{\ell_1} \rangle^{\infty}$和 $\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}$分别是 $(\ell_1+\ell_2+2)$-*th eliminationideal of* $\mathfrak{I}$。假设 $\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}$ 的极小素理想分解为

$$\sqrt{\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i.$$

设 $\mathcal{G}_i$是 $\mathfrak{p}_i$的一个生成集，其中 $i \in \{1, \ldots, r\}$。那么系统 （1.1）当且仅当存在 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 使得多项式系统 $[\mathcal{P} \cup \mathcal{G}_i, \emptyset]$ 存在一个满足 $(f_1, \ldots\ldots, f_{\ell_1}) \neq \mathbf{0}$的解时，才具有 （3.3）形式的非平凡不变代数曲面。

证明。 消元理想的零点集分解为其极小素分支对应的不可约簇：

$$\mathsf{Z}(\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2}) = \mathsf{Z}(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup \mathsf{Z}(\mathfrak{p}_r).$$

充分性。若 $[\mathcal{P}\cup\mathcal{G}_i,\emptyset]$ 有解 $(\overline{\boldsymbol{\mu}},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a})$ 满足 $(f_1,\ldots,f_{\ell_1})\neq\mathbf{0}$ 对于某个 i，则 $(\overline{\boldsymbol{\mu}},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a})\in\mathsf{Z}(\mathcal{P})$，结论由引理 3.3得证。

必要性。如果该系统在参数值 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ 下存在非平凡不变代数曲面，则存在 $\boldsymbol{f}$，使得 $(f_1,\ldots,f_{\ell_1})\neq\mathbf{0}$，并且 $\boldsymbol{a}$ 满足 $(\overline{\boldsymbol{\mu}},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a})\in\mathsf{Z}(\mathcal{P})$；根据命题 3.6，$\overline{\boldsymbol{\mu}}\in\mathsf{Z}(\mathfrak{I}_{\ell_1+\ell_2+2})$，因此对于某个 $i\in\{1,\ldots,r\}$，有 $\overline{\boldsymbol{\mu}}\in\mathsf{Z}(\mathfrak{p}_i)$，这意味着 $(\overline{\boldsymbol{\mu}},\boldsymbol{f},\boldsymbol{a})$ 是 $[\mathcal{P}\cup\mathcal{G}_i,\emptyset]$ 的非平凡解。 □

实际上，第一步中得到的素分支将全局问题约化为若干个更小的系统 $[\mathcal{P}\cup\mathcal{G}_i,\emptyset]$。随后分解为强正则系统会保留所得每个分支上的投影性质。虽然可以将指定的非零条件作为不等式约束直接纳入输入，但 L 的非平凡性要求则通过算法 2 利用可构造集差 $\mathsf{Z}(R_i)\backslash\mathsf{Z}(R)$在投影之前于每个分支上进行处理。这种组合既保留了素分解所提供的紧凑全局描述，也保留了强正则系统和可构造集运算所提供的逐点精确性。图 1总结了这一组合流程。

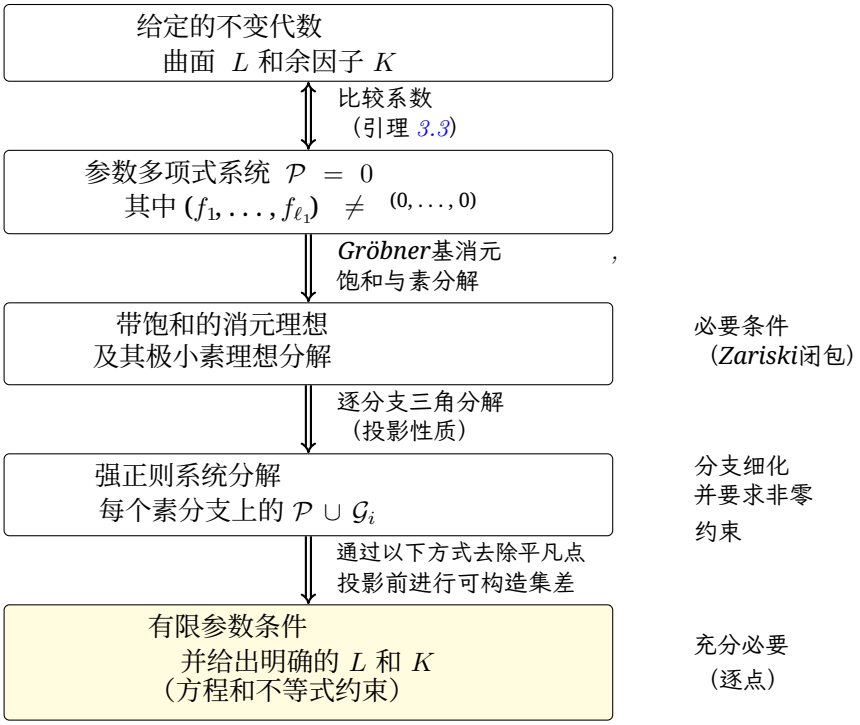


图 1：格罗布纳基与三角分解相结合的流程。

3.3 计算结果

3.3.1 Belousov–Zhabotinsky 反应模型

我们采用 Belousov–Zhabotinsky（BZ）反应模型来说明所提出的两种方法。首先，我们展示结合这两种方法可以得到不变代数平面存在的精确条件，以及具有代表性的平面-余因子对（见定理 3.13）。接下来，我们在非零参数约束下独立应用三角分解方法。最后，我们比较两种方法的计算效率及其各自结果的特征。

考虑以下描述一种改进型 BZ 反应模型（见 [85]）的三维动力系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=-k_1xy+k_2ay-2k_3x^2+k_4ax-\dfrac{1}{2}k_5xz,\\ \dot{y}=-k_1xy-k_2ay+k_6mz,\\ \dot{z}=2k_4ax-k_5xz-2k_6mz,\end{cases}\tag{3.6}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}=(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5,\ k_6,\ a,\ m)$ 为系统参数，$\boldsymbol{x}=(x,\ y,\ z)$ 分别表示化学物种的浓度。尽管 BZ 模型在反应动力学、分岔分析和数值模拟方面已得到广泛研究（见 [41, 81]），但利用符号计算对其不变代数曲面进行系统研究仍然缺乏。

首先，以线性试探形式为例，假设系统（3.6）存在如下形式的不变代数平面

$$L=1+f_1x+f_2y+f_3z=0, \tag{3.7}$$

其中 $f_1,\ f_2,\ f_3$ 为待定系数。注意，对于一般的线性试探形式 $L=f_0+f_1x+f_2y+f_3z$，可分为两种情况分别计算：（1） $f_0\neq 0$，通过缩放可令 $f_0=1$，即 $L=1+f_1x+f_2y+f_3z$；（2） $f_0=0$，即 $L=f_1x+f_2y+f_3z=0$ 表示一个经过原点的平面。本节主要关注情形（3.7），因为 $f_0=0$ 对应的情形可采用类似方法处理。

由于系统（3.6）右端多项式的最高次数为 2，我们设余因子具有如下形式 $K=s_0+s_1x+s_2y+s_3z$。展开方程 $\mathcal{X}L-KL$并收集 x、y、z中单项式的系数，可得以下多项式：

$$\begin{cases} P_1=s_0,\\ P_2=-af_1k_4-2af_3k_4+f_1s_0+s_1,\\ P_3=-f_2k_6m+2f_3k_6m+f_3s_0+s_3,\\ P_4=f_3s_3,\\ P_5=f_2s_2,\\ P_6=2f_1k_3+f_1s_1,\\ P_7=f_1k_5+2f_1s_3+2f_3k_5+2f_3s_1,\\ P_8=f_1k_1+f_1s_2+f_2k_1+f_2s_1,\\ P_9=f_2s_3+f_3s_2,\\ P_{10}=-af_1k_2+af_2k_2+f_2s_0+s_2. \end{cases} \tag{3.8}$$

恒等式 $\mathcal{X}L-KL\equiv 0$ 当且仅当 $P_1=\cdots=P_{10}=0$成立。因此，根据引理3.3，我们立即得到以下推论。

推论3.12。 系统(3.6)存在形如(3.7) 的非平凡不变代数平面，当且仅当多项式系统(3.8) 存在满足$(f_1, f_2, f_3)\neq(0,0,0)$的解。

定理3.13。 系统(3.6) 存在形如(3.7) 的非平凡不变代数平面，当且仅当系统参数满足以下条件中的至少一个：

(1) $\mathcal{C}_{1,1}=\{k_6m=0,\quad ak_4k_5\neq 0\}\ \vee\ \mathcal{C}_{1,2}=\{k_6m=0,\quad ak_4=k_5=0\}$;

(2) $\mathcal{C}_{2,1}=\{k_1=k_3=k_5,\quad ak_4k_5\neq 0\}$; *(3)* $\mathcal{C}_{3,1}=\{k_2=0,\quad k_1=k_5,\quad ak_4k_5\neq 0\}$; *(4)* $\mathcal{C}_{4,1}=\{k_5=0,\quad k_1k_4=2k_2k_3,\quad ak_3k_4\neq 0\}$; *(5)* $\mathcal{C}_{5,1}=\{k_3=k_4=k_5=0,\quad ak_1k_2\neq 0\}$; *(6)* $\mathcal{C}_{6,1}=\{k_5=0,\quad k_6m=0,\quad k_2=0,\quad ak_3k_4\neq 0,\quad k_1\ (k_1-2k_3)\ \neq 0\}\ \vee\mathcal{C}_{6,2}=\{k_5=0,\quad k_6m=0,\quad k_1=k_3,\quad ak_3k_4\neq 0,\quad k_1\ (k_1-2k_3)\ \neq 0\}$; *(7)* $\mathcal{C}_{7,1}=\{k_1=k_4=k_5=k_2k_3=0,\quad a\neq 0\}$; *(8)* $\mathcal{C}_{8,1}=\{a=k_1=k_5=0\}$; *(9)* $\mathcal{C}_{9,1}=\{k_3=ak_2=0\}$;

（10）$\mathcal{C}_{10,\ 1} = \{k_1 = k_6 m = a k_2 k_3 = 0\}$。

每种情况下，代表性不变代数平面及其对应的余因子均在表*1*中明确列出。

表1：在线性试探形式（3.7）下，BZ系统（3.6）的代表性不变代数平面及余因子，其中 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 为任意常数。

不变代数平面 L	余因子 K	参数条件
$1 - \frac{k_5}{2ak_4} z$	$-k_5 x$	$\mathcal{C}_{1,1}$
$1 + c\,z$	0	$\mathcal{C}_{1,2}$
$1 - \frac{k_5}{ak_4} x - \frac{k_5}{ak_4} y - \frac{k_5}{2ak_4} z$	$-2k_5 x$	$\mathcal{C}_{2,1}$
$1 + \frac{k_5 - 2k_3}{ak_4} x - \frac{k_5}{ak_4} y - \frac{k_5}{2ak_4} z$	$-2k_3 x$	$\mathcal{C}_{3,1}$
$1 - \frac{k_5}{ak_4} y - \frac{k_5}{2ak_4} z$	$-k_5 x$	
$1 - \frac{2k_3}{ak_4} x$	$-2k_3 x - k_1 y$	$\mathcal{C}_{4,1}$
$1 - \frac{k_1}{ak_2} x$	$-k_1 y$	$\mathcal{C}_{5,1}$
$1 - \frac{2k_3}{ak_4} x + \frac{2k_3 k_1}{ak_4(k_1 - 2k_3)} y$	$-2k_3 x$	$\mathcal{C}_{6,1}$ $\mathcal{C}_{6,2}$
$1 + c(2y + z)$ 若 $k_2 = 0$; $1 + c(2x + 2y + z)$ 若 $k_3 = 0$	0	$\mathcal{C}_{7,1}$
$1 + c(2y + z)$	0	$\mathcal{C}_{8,1}$
$1 + c(-2x + 2y + z)$	0	$\mathcal{C}_{9,1}$
$1 + c\,y$ 若 $ak_2 = 0$; $1 + c(-2x - 2y + z)$ 若 $k_3 = 0$	0	$\mathcal{C}_{10,1}$

证明。 代数计算在 $\mathbb{C}$上进行；随后通过将存在轨迹限制到实部，得到关于物理相关的实参数的结论。

充分性。 将表 1 中的各个平面及其对应的余因子直接代入$\mathcal{X}L = KL$ 即可验证，在相应条件下该恒等式成立。

必要性。根据推论3.12，只需确定系统(3.8)存在非平凡解$(f_1, f_2, f_3) \neq (0, 0, 0)$时的参数值。该计算分为两步。步骤1：消元与素分解。计算饱和理想 $\mathfrak{I} = \langle \mathcal{P} \rangle : \langle f_1, f_2, f_3 \rangle^{\infty}$在 $\mathbb{C}[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{f}]$中的消元理想 $\mathfrak{I}_7 = \mathfrak{I} \cap \mathbb{C}[\boldsymbol{\mu}]$，其中 $\boldsymbol{\mu} = (k_1, \ldots, k_6, a, m)$、 $\boldsymbol{s} = (s_0, \ldots, s_3)$且 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$。下标为7，是因为消去了七个未定量 $s_0, \ldots, s_3, f_1, f_2, f_3$；对于 $\ell_1 = \ell_2 = 3$，这是归一化后的计数 $\ell_1 + \ell_2 + 1$，因为 L 的常数系数已固定为1。极小素理想分解为

$$\sqrt{\mathfrak{I}_7} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_8,$$

其中 $\mathfrak{p}_1 = \langle m \rangle$, $\mathfrak{p}_2 = \langle k_6 \rangle$, $\mathfrak{p}_3 = \langle a, k_5, k_1 \rangle$, $\mathfrak{p}_4 = \langle k_5, k_1 k_4 - 2k_2 k_3 \rangle$, $\mathfrak{p}_5 = \langle k_1 - k_5, k_3 - k_5 \rangle$,$\mathfrak{p}_6 = \langle k_2, k_1 - k_5 \rangle$, $\mathfrak{p}_7 = \langle a, k_3 \rangle$ 以及 $\mathfrak{p}_8 = \langle k_2, k_3 \rangle$。因此，存在轨迹包含于 $\bigcup_{i=1}^{8} \mathsf{Z}(\mathfrak{p}_i)$，且其 Zariski闭包等于该并集。

步骤*2*：逐分支三角求解。对每个 $i \in \{1, \ldots, 8\}$，令 $\mathcal{G}_i$ 为 $\mathfrak{p}_i$的生成集，并通过 RegSer 将多项式系统 $[\mathcal{P} \cup \mathcal{G}_i, \emptyset]$ 分解为有限多个强正则系统 R_{ij}，所用消元序使参数 $\boldsymbol{\mu}$小于未知量$s_0, \ldots, s_3, f_1, f_2, f_3$。令 $R := [\{f_1, f_2, f_3\}, \emptyset]$。对每个所得系统 R_{ij}，令

$$\mathcal{N}_{ij} = \mathsf{Z}(R_{ij}) \setminus \mathsf{Z}(R),$$

并计算 Proj$_8(\mathcal{N}_{ij})$，而不是在移除其平凡部分之前就投影 $\mathsf{Z}(R_{ij})$。对集合 $\mathcal{N}_{ij}$ 依次进行回代，并结合析取 $f_1 \neq 0 \vee f_2 \neq 0 \vee f_3 \neq 0$，还可得到

相应的非恒定平面和余因子。在吸收冗余子分支后，对所有 i 和 j 的投影后的非平凡部分取并集，恰好就是条件 (1)–(10) 的析取。

□

上述逐分支计算提供的信息不止参数条件本身：每个分支都保留了恢复系数解所需的全部信息（事实上，对于当前的线性试探形式，可以通过回代显式计算出完整的解族）。不过，表1 仅列出每个条件对应的见证（即具有代表性的不变代数平面–余因子对），因为本文关注的是问题（$\mathcal{P}_1$），也就是参数条件的完整分类。

有了完整分类，自然要特别指出一些非退化情形，在这些情形下分类会大为简化。例如，施加一般条件$ak_4k_5 \neq 0$ 后，问题将显著简化。

推论3.14。设 $ak_4k_5 \neq 0$。那么，系统(3.6) 存在一个形如(3.7) 的非平凡不变代数平面，当且仅当系统参数至少满足以下五个条件之一：

(1) $m = 0$；(2)
$k_6 = 0$；(3)
$k_1 = k_3 = k_5$；(
4) $k_2 = 0$,
$k_1 = k_5$；(5)
$k_3 = k_2 = 0$。

证明。 假设 $ak_4k_5 \neq 0$，定理 3.13 的条件（4）–（8）均不成立，因为每个条件都要求 $ak_4k_5 = 0$。同时，条件（10）蕴含 $k_6m = 0$，因此可归入条件（1）。由于 $a \neq 0$，条件（9）简化为 $k_3 = k_2 = 0$，而条件（1）本身则简化为 $m = 0$ 或 $k_6 = 0$。

□

R注 3.15。 我们对计算方法作一些观察 ：

（i）定理 3.13 的完整存在轨迹是参数空间中的一个可构造集，但不是代数簇：条件（1）–（7）中的不等式约束不可或缺。例如，参数点 $(k_1, \ldots, k_6, a, m) = (1,1,1,1,1,1,0,0)$ 满足 $m = 0$，因此属于存在轨迹的 Zariski闭包，但它违反了条件（1）–（10）中的每一个条件（条件（1）不成立，因为 $ak_4k_5 = 0$，而 $k_5 \neq 0$）；因此，该点处的特化系统（3.8）的约化格罗布纳基为 $\{s_0, s_1, s_2, s_3, f_1, f_2, f_3\}$，且仅有平凡解。

(ii) 存在轨迹的扎里斯基闭包由消元理想精确描述：对于证明的步骤1中计算得到的素分解 $\sqrt{\mathfrak{J}_7} = \bigcap_{i=1}^{8} \mathfrak{p}_i$，由条件 (1)–(10) 确定的轨迹的闭包恰为 $\bigcup_{i=1}^{8} \mathsf{Z}(\mathfrak{p}_i)$。更具体地说，由条件 (1)、(2)、(3) 和 (4) 确定的集合，其扎里斯基闭包分别为 $\mathsf{Z}(\mathfrak{p}_1) \cup \mathsf{Z}(\mathfrak{p}_2)$、$\mathsf{Z}(\mathfrak{p}_5)$、$\mathsf{Z}(\mathfrak{p}_6)$ 和 $\mathsf{Z}(\mathfrak{p}_4)$；条件 (8) 与 $\mathsf{Z}(\mathfrak{p}_3)$ 重合，条件 (9) 与 $\mathsf{Z}(\mathfrak{p}_7) \cup \mathsf{Z}(\mathfrak{p}_8)$ 重合，其余条件则包含在这些分支中。此外，通过在各素分支的函数域上计算 $\langle \mathcal{P} \rangle$ 的约化格罗布纳基，可以系统地找到这些分支及其在表1中对应的平面：此时，所有分母和首系数都只涉及条件 (1)–(6) 的不等式约束中出现的因子，并且这些基恰好在相应超曲面之外能良好特化。证明的步骤2中的逐分支三角求解将该扎里斯基闭包细化为精确的逐点分类，并自动检测出特化失效的退化层。

（iii）在条件（7）–（10）以及条件（1）的退化情形 $ak_4 = k_5 = 0$ 下，余因子恒等为零；因此，相应的多项式 L 实际上是该系统的第一积分。

在BZ反应模型中，k_1、……、k_6表示基元反应的速率常数，它们通常为正实数，而a和m通常表示溴离子和铈离子的初始浓度（或相关参数），这些量本身也为正数 [41, 86]。因此，研究满足非零（事实上为严格正）参数约束的不变代数曲面是很自然的。理论上，柱形代数分解（CAD）为处理带有不等式约束的问题提供了通用框架（见 [16, 26]）。然而，在计算动力系统的不变代数曲面时，CAD算法往往会生成数量大得难以承受的半代数胞腔。因此，CAD更适合用于验证特定参数点，而不适合进行完整分类。相比之下，带不等式约束的三角分解方法直接作用于多项式系统 $[\mathcal{F}, \mathcal{H}]$，该系统由方程 $\mathcal{F} = 0$和不等式约束 $\mathcal{H} \neq 0$组成。它返回有限多个约束三角系统 $[\mathcal{T}_i, \mathcal{H}_i]$，其零点集满足$\mathsf{Z}(\mathcal{F}/\mathcal{H}) = \bigcup_i \mathsf{Z}(\mathcal{T}_i/\mathcal{H}_i)$（见第2节；另见 [88, 90]）。通过这种方式，对参数的非零要求作为输入的一部分直接施加，无需针对这些参数约束进行任何额外的后处理。

下文中，我们采用RegSer算法，在不等式约束下进行强正则系统分解。具体而言，我们考虑BZ系统的线性不变代数平面，其中 $P_1,\dots,P_{10}$ 定义于（3.8）中。在所有系统参数均非零这一约束下进行计算：

$$\mathrm{RegSer}([P_1,\dots,P_{10}],\{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,a,m\}),$$

我们得到所需的分解：

$$[\mathcal{T}_1,\mathcal{U}_1] = [[s_0,s_1,s_2,s_3,f_1,f_2,f_3],\{a,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,m\}],$$
$$[\mathcal{T}_2,\mathcal{U}_2] = [[k_1-k_3,k_1-k_5,s_0,2k_1+s_1,s_2,s_3,af_1k_4+k_1,f_1-f_2,f_1-2f_3],\{a,k_1,k_2,k_4,k_6,m\}],$$

在第一个分支中，$f_1 = f_2 = f_3 = 0$对应于平凡解。求解第二个分支：由 $k_1 - k_3 = 0$、$k_1 - k_5 = 0$ 得到 $k_3 = k_5 = k_1$；由 $af_1k_4 + k_1 = 0$ 解得 $f_1 = -\frac{k_1}{ak_4}$；由 $f_1 - f_2 = 0$、$f_1 - 2f_3 = 0$ 得到 $f_2 = f_1$、$f_3 = \frac{1}{2}f_1$。代入方程（3.7）并化简，得到

$$L = 1 - \frac{k_1}{ak_4}x - \frac{k_1}{ak_4}y - \frac{k_1}{2ak_4}z.$$

上述计算结果直接导出以下命题。

命题3.16。 *当所有系统参数均非零时，BZ系统 (3.6) 当且仅当 $k_3 = k_5 = k_1$时，具有形如 (3.7) 的非平凡不变代数平面。*

三角分解在不等式约束下的高效性使我们能够处理BZ系统的完整二次设定（3.9），对于该设定，格罗布纳基方法在Maple中经过3600秒仍未终止：

$$L = 1 + f_1x + f_2y + f_3z + f_4x^2 + f_5y^2 + f_6z^2 + f_7xy + f_8xz + f_9yz = 0. \tag{3.9}$$

计算结果表明，当所有系统参数均非零时，二次设定（3.9）的关联参数多项式集由 20 个多项式组成，其三角分解得到四个分支：所有待定系数均为零的平凡分支，分别恢复命题3.16 中的不变平面及其平方的两个分支，以及一个参数条件涉及 $k_1^2 - 4k_1k_3 + 8k_3^2 = 0$的分支。由于$k_1^2 - 4k_1k_3 + 8k_3^2 = (k_1 - 2k_3)^2 + 4k_3^2 > 0$ 在 $k_3 \neq 0$时成立，该分支不具有实解。因此，在$L(0) = 1$ 这一归一化条件下，3.9中所用的BZ反应模型在所有系统参数均非零时，在实空间中不具有不可约二次不变代数曲面。

我们在同一台机器上，针对相同的 BZ 拟设，评估了格罗布纳基和三角分解方法。格罗布纳基的计时结果 t_g^{MS}采用混合实现：Maple 执行饱和与消元，而 Singular 使用 minAssGTZ 计算极小关联素理想。三角分解的计时结果 t_t 使用 Epsilon 中的 TriSer，随后

依次进行可构造集差集运算、投影和并集。带横线的条目 $\overline{t_t}$ 和 $\overline{n_t}$ 表示在所有系统参数均被约束为非零时进行的计算结果。

表 2：使用 Maple–Singular 格罗布纳基方法和三角分解计算不同不变代数曲面预设形式的实验数据（单位：秒）。

不变代数曲面	n_f	t_g^{MS}	t_t	$\overline{t_t}$	n_g	n_t	$\overline{n_t}$
$\overline{L} = 1 + f_1x + f_2y + f_3z + f_5y^2 = 0$	13	0.425	7.328	0.219	8	57	2
$\widetilde{L} = 1 + f_1x + f_2y + f_3z + f_7xy = 0$	13	0.452	7.500	0.219	8	61	2
$\widehat{L} = 1 + f_1x + f_2y + f_3z + f_4x^2 + f_7xy = 0$	15	5.155	10.844	0.235	8	68	2
$L = 1 + f_1x + f_2y + f_3z + f_4x^2 + f_5y^2 + f_6z^2 + f_7xy + f_8xz + f_9yz = 0$	20	> 3600	317.766	2.282	–	222	4

表 2 中，“不变代数曲面”列记录了假设的不变代数曲面形式，而 n_f 记录了关联参数多项式集中多项式的数量。 t_g^{MS}和 t_t 列分别记录了格罗布纳基方法和三角分解方法的计算时间；前者采用 Maple–Singular 混合实现，后者采用 Epsilon 中的 TriSer。带横线的条目 $\overline{t_t}$ 和 $\overline{n_t}$ 表示在对所有系统参数施加非零约束（k_1、k_2、k_3、k_4、k_5、k_6、a、m）时的相应计算结果。n_g、n_t和 $\overline{n_t}$ 列报告得到的分支数量：n_g 表示消元理想的极小素分支数量，n_t 表示 TriSer 返回的三角系统数量，$\overline{n_t}$表示施加非零约束时相应的数量。这些数值反映了分解的规模。短横线 – 表示未能在时限内得到素分解。格罗布纳基方法通常产生较少的分支，因为它使用消元理想的极小素分支，从而得到简洁的必要条件；但是，要获得逐点充要条件，还需要进一步逐分支计算。对于次数较高的预设形式和不等式约束，三角分解方法尤为有效；对系统参数施加非零约束后，其计算效率还能进一步提高。实验使用 Maple 2026、Singular 4.0.2 和 Epsilon 0.618，在配备 32 GB 内存的 Intel Core Ultra 5 336H 上进行。表 2 报告了 CPU 时间。格罗布纳基混合方法的计时包括 Maple 的饱和与消元步骤，以及 Singular 的 facstd 和 minAssGTZ 计算。三角分解方法的计时包括 TriSer，以及后续的可构造集差、投影和并集运算。时限设为 3600 秒；条目 > 3600 表示格罗布纳基方法未能在该时限内返回素分解。

3.3.2 一类 Liénard 微分系统

我们考虑以下 Liénard 微分系统：

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\zeta x^2 + \beta x + \alpha)y - (\varepsilon x^3 + ex^2 + \sigma x + \delta); \quad \zeta \neq 0, \quad \varepsilon \neq 0. \tag{3.10}$$

变量变换 $x \mapsto A(x + B)$、$y \mapsto Ay$、$A \neq 0$ 将系统（3.10）与其在 $\zeta = 3$、$e = 0$ 处的简化形式联系起来。因此，不失一般性地令 $\zeta = 3$、$e = 0$。所有参数均取自域 $\mathbb{C}$，且满足 $\varepsilon \neq 0$。Demina [33]研究了系统（3.10）的不可约不变代数曲线的分类。在此，我们利用计算方法，给出系统（3.10）的不可约不变代数曲线的一些新发现。

引入可逆变量变换

$$x = s, \quad y = z - h(s) \quad \leftrightarrow \quad s = x, \quad z = y + h(x), \tag{3.11}$$

其中 $h(x) = x^3 + \beta x^2/2 + (\alpha - \varepsilon)x$，系统（3.10）变为如下动力系统

$$\dot{s} = z - s^3 - \frac{\beta}{2}s^2 + (\varepsilon - \alpha)s, \quad \dot{z} = \frac{\beta\varepsilon}{2}s^2 + (\varepsilon(\alpha - \varepsilon) - \sigma)s - \delta - \varepsilon z. \tag{3.12}$$

Liénard系统（F，x，y）的不可约不变代数曲线与系统（3.12）的不可约不变代数曲线 G（s，z）之间存在一一对应关系。

下面的命题是对 [33, 定理1.2]的一个小变体。

命题 **3.17.** 若 G（s，z）是系统（3.12）的不可约不变代数曲线，则 n

$$G(s,z) = \mu_0 z^N + \sum_{i=0}^{N-1} c_i(s) z^i, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{3.13}$$

其余因子为 K（s，z）$= A_2 s^2 + A_1 s + A_0$，其中 $A_2 = -M$，$M \in \{0, 3\}$ 为G（s，z）关于 s 的次数。

证明。事实 $M \in \{0, 3\}$ 直接由 [33, 定理1.2]得到。我们证明其余部分。注意，系统（3.12）的不可约不变代数曲线满足方程

$$\left(z - s^3 - \frac{\beta}{2}s^2 + (\varepsilon - \alpha)s\right) G_s + \left(\frac{\beta\varepsilon}{2}s^2 + (\varepsilon(\alpha - \varepsilon) - \sigma)s - \delta - \varepsilon z\right) G_z = KG. \tag{3.14}$$

通过直接代入，我们验证了不存在不依赖于 z 的不变代数曲线。设 G 和 K 关于 z 的次数分别为 N 和 ℓ。方程（3.14）意味着当 $K \neq 0$ 时，$\deg_z K \leq 1$。将关系式 $G = \mu(s)z^N + \cdots$、$\mu(s) \not\equiv 0$ 以及 $K = k_1(s)z + k_0(s)$ 与 $\mu(s)$ $k_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ 代入方程（3.14），并比较 z 中的高阶项，得到 $\mu_s = k_1(s)\mu(s)$。由于 $\mu(s)$ 是一个多项式，我们得到 $k_1(s) = 0$、$\mu(s) = \mu_0$，其中 μ_0 是一个常数。此外，我们看到余因子 K 不依赖于 z。

现在设 G 和 K 关于 s 的次数分别为 M 和 m。取表达式 $G = \nu(z)s^M + \cdots$、$\nu(z) \not\equiv 0$ 以及 $K = A_m s^m$，其中 $\nu(z) \in \mathbb{C}[z]$。$A_m \in \mathbb{C}$。界限$\deg_s K \leq 2$ 由（3.14）得到。按照上述方法推导并比较 s^{M+2} 可得

$$\frac{\beta\varepsilon}{2}\nu'(z) = (A_2 + M)\nu(z).$$

因此 $A_2 = -M$。当 $\beta = 0$ 时，这一点同样成立。证明完毕。

□

不失一般性，我们令 $\mu_0 = 1$。在 [33], 中，得到了 Liénard系统（3.10）的所有不可约不变代数曲线，表明 $G(s, z)$ 关于 z 的次数至多为 3（分类及论证见 [33, 定理 1。3]）。接下来，我们结合 Gröbner基消元法和三角集合方法，对系统（3.10）的不可约不变代数曲线进行分类。本文提出了一种基于消元的推导方法，纠正了现有分类中的若干错误条目。因此，当已知不变代数曲线的底层结构时，我们的算法框架将更加便捷、高效。

定理 3.18。*Liénard*系统 (3.10) 在 $\zeta = 3$, $e = 0$ 和 $\varepsilon \neq 0$ 的参数限制满足表 *3* 所列条件时，当且仅当满足这些条件，系统才存在不变代数曲线。不可约代数不变量及其余因子的表达式具有表 *3*所示的形式。

证明。这里只给出 $N = 3$ 情形的详细证明；其余两种情形可通过类似的计算和论证证明。根据命题 3.17，我们知道

表3：系统 (3.10) 的不可约不变代数曲线，其中 $\zeta = 3,\quad e = 0$ 和 $\varepsilon \neq 0$。

不变代数曲线 $F(x,y)$	余因子 $K(x,y)$	参数条件
$y + x^3 + (\alpha - \varepsilon)\, x + \frac{\delta}{\varepsilon}$	$-\varepsilon$	$C_{1,1} = \{\beta = 0,\ \sigma = \varepsilon(\alpha - \varepsilon)\}$ $C_{1,2} = \left\{\delta = -\frac{\beta\varepsilon}{(3\alpha - \varepsilon)\,27},\right.$
$y + \frac{\varepsilon}{3}x - \frac{\beta\varepsilon}{9}$	$-3x^2 - \beta x - \alpha + \frac{\varepsilon}{3}$	$\left.\sigma = \frac{\varepsilon\left(-\beta^2 + 3\alpha - \varepsilon\right)}{9}\right\}$ $C_{2,\ 1} = \left\{\alpha = 2\varepsilon,\ \beta = 0,\right.$
$y^2 + \left(x^3 + \frac{4}{3}\varepsilon x\right)y + \frac{\varepsilon}{3}x^4 + \frac{4\varepsilon^2}{9}x^2$	$-3x^2 - \frac{8\varepsilon}{3}$	$\left.\delta = 0,\ \sigma = \frac{2}{9}\alpha^2\right\}$ $C_{2,2} = \left\{\alpha = -\frac{2\varepsilon}{3}\ \beta = 0,\right.$
$y^2 + \left(x^3 - \frac{4}{3}\varepsilon x\right)y + \frac{\varepsilon}{3}x^4 - \frac{8\varepsilon^2}{9}x^2 + \frac{16\varepsilon^3}{27}$	$-3x^2$	$\left.\delta = 0,\ \sigma = -\frac{4\varepsilon^2}{3}\right\}$ $C_{2,3} = \left\{\alpha = \frac{46\varepsilon}{27},\ \beta = 0,\right.$
$y^2 + \left(x^3 + \frac{28\varepsilon}{27}x - \frac{160\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{729}i\right)y + \frac{\varepsilon}{3}x^4 + \frac{8\varepsilon^2}{27}x^2$ $- \frac{256\varepsilon^{\frac{5}{2}}i}{2187}x - \frac{80\varepsilon^3}{6561}$	$-3x^2 - \frac{64\varepsilon}{27}$	$\left.\delta = -\frac{32\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{243}i,\ \sigma = \frac{52\varepsilon^2}{81}\right\}$ $C_{2,4} = \left\{\alpha = \frac{46\varepsilon}{27},\ \beta = 0,\right.$
$y^2 + \left(x^3 + \frac{28\varepsilon}{27}x + \frac{160\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{729}i\right)y + \frac{\varepsilon}{3}x^4 + \frac{8\varepsilon^2}{27}x^2$ $+ \frac{256\varepsilon^{\frac{5}{2}}i}{2187}x - \frac{80\varepsilon^3}{6561}$	$-3x^2 - \frac{64\varepsilon}{27}$	$\left.\delta = \frac{32\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{243}i,\ \sigma = \frac{52\varepsilon^2}{81}\right\}$
$y^3 + \left(2x^3 + \frac{10}{3}\varepsilon x\right)y^2$ $+ \left(x^6 + \frac{11}{3}\varepsilon x^4 + \frac{125}{36}\varepsilon^2 x^2\right)y$ $+ \frac{\varepsilon}{3}x^7 + \frac{11\varepsilon^2}{9}x^5 + \frac{125\varepsilon^3}{108}x^3$	$-3x^2 - \frac{25\varepsilon}{6}$	$C_{3,\ 1} = \left\{\beta = 0,\right.$ $\left.\delta = 0,\ \sigma = \frac{25\varepsilon^2}{18}\quad \alpha = \frac{5\varepsilon}{2}\right\}$
$y^3 + \left(2x^3 + \frac{15}{7}\varepsilon x\right)y^2$ $+ \left(x^6 + \frac{52}{21}\varepsilon x^4 + \frac{75}{49}\varepsilon^2 x^2\right)y$ $+ \frac{\varepsilon}{3}x^7 + \frac{314\varepsilon^2}{441}x^5 + \frac{125\varepsilon^3}{343}x^3$	$-3x^2 - \frac{25\varepsilon}{7}$	$C_{3,\ 2} = \left\{\beta = 0,\right.$ $\left.\delta = 0,\ \sigma = \frac{125\varepsilon^2}{147}\quad \alpha = \frac{40\varepsilon}{21}\right\}$
$y^3 + \left(2x^3 - \frac{85}{27}\varepsilon x\right)y^2 + \left(x^6 - \frac{76}{27}\varepsilon x^4 + \frac{1075}{729}\varepsilon^2 x^2\right.$ $\left. + \frac{400000}{531441}\varepsilon^3\right)y + \frac{\varepsilon}{3}x^7 - \frac{14\varepsilon^2}{9}x^5 + \frac{15875\varepsilon^3}{6561}x^3$ $- \frac{2000000\varepsilon^4}{1594323}x$	$-3x^2 - \frac{25\varepsilon}{27}$	$C_{3,\ 3} = \left\{\beta = 0,\right.$ $\left.\delta = 0,\ \sigma = -\frac{125\varepsilon^2}{81}\quad \alpha = -\frac{20\varepsilon}{27}\right\}$

系统（3.12）的不变代数曲线及其余因子的表达式如下：

$$
\begin{aligned}
G(s,z) &= z^3 + \sum_{i=0}^{2} \left(f_{i,3} s^3 + f_{i,2} s^2 + f_{i,1} s + f_{i,0} \right) z^i, \\
K(s,z) &= a_2 s^2 + a_1 s + a_0,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

其中 $f_{i,\ j}$ 和 a_i 为待定系数。相应的多项式集

$$
\mathcal{P} := \{ \mathrm{coef}(\mathcal{X}G - KG, \boldsymbol{t}) \mid \boldsymbol{t} \in \mathrm{term}(\mathcal{X}G - KG) \}
$$

包含 21 个多项式 $\{P_1, \ldots, P_{21}\}$，可表示为

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \delta f_{1,0} + a_0 f_{0,0}, \\
P_2 &= -\alpha\varepsilon f_{1,0} + \varepsilon^2 f_{1,0} + \alpha f_{0,1} + \delta f_{1,1} + f_{1,0}\sigma - \varepsilon f_{0,1} + a_0 f_{0,1} + a_1 f_{0,0}, \\
P_3 &= 2 f_{2,0}\delta + f_{1,0}\varepsilon + a_0 f_{1,0} - f_{0,1}, \\
P_4 &= -\frac{1}{2}\beta\varepsilon f_{1,0} - \alpha\varepsilon f_{1,1} + a_1 f_{0,1} + \frac{1}{2}\beta f_{0,1} + \varepsilon^2 f_{1,1} + \sigma f_{1,1} + \delta f_{1,2} \\
&\quad + 2\alpha f_{0,2} + a_0 f_{0,2} - 2\varepsilon f_{0,2} + a_2 f_{0,0}, \\
P_5 &= -\frac{1}{2}\beta\varepsilon f_{1,1} - \alpha\varepsilon f_{1,2} + f_{0,1} + a_1 f_{0,2} - 3\varepsilon f_{0,3} + a_2 f_{0,1} + \varepsilon^2 f_{1,2} \\
&\quad + \sigma f_{1,2} + \delta f_{1,3} + \beta f_{0,2} + 3\alpha f_{0,3} + a_0 f_{0,3}, \\
P_6 &= -f_{2,1} + 3\varepsilon + a_0, \\
P_7 &= -\frac{1}{2}\beta\varepsilon f_{1,3} + 3 f_{0,3} + a_2 f_{0,3}, \\
P_8 &= -\frac{1}{2}\beta\varepsilon f_{1,2} - \alpha\varepsilon f_{1,3} + 2 f_{0,2} + a_2 f_{0,2} + \varepsilon^2 f_{1,3} + \sigma f_{1,3} + \frac{3}{2}\beta f_{0,3} + a_1 f_{0,3}, \\
P_9 &= 2\varepsilon f_{2,0} + a_0 f_{2,0} + 3\delta - f_{1,1}, \\
P_{10} &= -3 f_{2,3} + a_2, \\
P_{11} &= a_1 - 2 f_{2,2}, \\
P_{12} &= f_{2,3} a_2 + 3 f_{2,3}, \\
P_{13} &= a_1 f_{2,3} + a_2 f_{2,2} + \frac{3}{2}\beta f_{2,3} + 2 f_{2,2}, \\
P_{14} &= -\beta\varepsilon f_{2,3} + a_2 f_{1,3} + 3 f_{1,3}, \\
P_{15} &= -\beta\varepsilon f_{2,2} - 2\alpha\varepsilon f_{2,3} + 2\varepsilon^2 f_{2,3} + 2\sigma f_{2,3} + a_1 f_{1,3} + a_2 f_{1,2} + \frac{3}{2}\beta f_{1,3} + 2 f_{1,2}, \\
P_{16} &= -2\alpha\varepsilon f_{2,2} - \beta\varepsilon f_{2,1} + 2\varepsilon^2 f_{2,2} + 3\alpha f_{1,3} + \beta f_{1,2} + 2\delta f_{2,3} + 2\sigma f_{2,2} \\
&\quad - 2\varepsilon f_{1,3} + a_0 f_{1,3} + a_1 f_{1,2} + a_2 f_{1,1} + f_{1,1}, \\
P_{17} &= -\beta\varepsilon f_{2,0} - 2\alpha\varepsilon f_{2,1} - \varepsilon f_{1,2} + 2\varepsilon^2 f_{2,1} + 2\sigma f_{2,1} + 2\delta f_{2,2} + a_0 f_{1,2} \\
&\quad + a_1 f_{1,1} + a_2 f_{1,0} + \frac{1}{2}\beta f_{1,1} + 2\alpha f_{1,2} - 3 f_{0,3}, \\
P_{18} &= -2\alpha\varepsilon f_{2,0} + 2\varepsilon^2 f_{2,0} + \alpha f_{1,1} + 2\delta f_{2,1} + 2\sigma f_{2,0} + a_0 f_{1,1} + a_1 f_{1,0} - 2 f_{0,2}, \\
P_{19} &= 3\alpha f_{2,3} + \beta f_{2,2} - \varepsilon f_{2,3} + a_0 f_{2,3} + a_1 f_{2,2} + a_2 f_{2,1} + f_{2,1}, \\
P_{20} &= -3\alpha\varepsilon + \alpha f_{2,1} + 3\varepsilon^2 + \varepsilon f_{2,1} + a_0 f_{2,1} + a_1 f_{2,0} + 3\sigma - 2 f_{1,2}, \\
P_{21} &= -\frac{3}{2}\beta\varepsilon + a_0 f_{2,2} + a_1 f_{2,1} + a_2 f_{2,0} + \frac{1}{2}\beta f_{2,1} + 2\alpha f_{2,2} - 3 f_{1,3}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\varepsilon \neq 0$，因此我们向多项式集 $\mathcal{P}$ 中加入一个额外约束 $1 - \omega\varepsilon$，并得到理想 $\mathfrak{I} = \langle P_1、\ \ldots\ldots、\ P_{21}、 1 - \omega\varepsilon \rangle$。令 $\mathfrak{I}_{16}$ 为环 $\mathbb{C}[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}, \omega]$ 中理想 $\mathfrak{I}$ 的第 16 个消元理想，即消去待定系数 $\boldsymbol{f} = (f_{0,\ 0}、\ \ldots\ldots、 f_{2,\ 3})$ $\boldsymbol{a} = (a_0、\ a_1、\ a_2)$，

$_4$和 $\omega_\circ$ 对 $\mathfrak{I}_{16}$ 进行极小素理想分解，得到 $\sqrt{\mathfrak{I}_{16}} = \bigcap_{i=1} \mathfrak{p}_i$，其中

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 &= \langle \beta, \delta, 2\alpha - 5\varepsilon, -25\varepsilon^2 + 18\sigma \rangle, \\
\mathfrak{p}_2 &= \langle \beta, \delta, 21\alpha - 40\varepsilon, -125\varepsilon^2 + 147\sigma \rangle, \\
\mathfrak{p}_3 &= \langle \beta, \delta, 27\alpha + 20\varepsilon, 125\varepsilon^2 + 81\sigma \rangle, \\
\mathfrak{p}_4 &= \langle \beta, -\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 + \sigma \rangle.
\end{aligned}$$

因此，利用 Gröbner基方法，我们得到了系统（3.12）具有（3.15）形式的不变代数曲面的必要条件。接下来，我们将说明，结合三角集合方法，不仅可以验证这些条件是否充分，还可以推导出不变代数曲线的表达式。

将条件 $\mathfrak{p}_1$ 加入多项式集 $\mathcal{P}$，在约束 $\varepsilon \neq 0$下计算三角级数：

$$\mathrm{TriSer}([[\beta, \delta, 2\alpha - 5\varepsilon, -25\varepsilon^2 + 18\sigma, P_1, \ldots, P_{21}], \{\varepsilon\}], [\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}]);$$

结果包含以下一个分支

$$\begin{aligned}
[\mathcal{T}_0, \mathcal{U}_0] = [[&\beta, \delta, 2\alpha^2 - 9\sigma, 2\alpha - 5\varepsilon, 5\alpha + 3a_0, a_1, a_2 + 3, f_{0,0}, f_{0,1}, f_{0,2}, 16\alpha^3 - 3375 f_{0,3}, \\
&f_{1,0}, f_{1,1}, 8\alpha^2 - 225 f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,0}, 7\alpha + 15 f_{2,1}, f_{2,2}, 1 + f_{2,3}], \{\alpha\}].
\end{aligned}$$

求解该分支，得到

$$\begin{aligned}
a_0 = -\frac{5\alpha}{3}, a_1 = 0, a_2 = -3, \\
f_{0,0} = f_{0,1} = f_{0,2} = f_{1,0} = f_{1,1} = f_{1,3} = f_{2,0} = f_{2,2} = 0, \\
f_{0,3} = \frac{16\alpha^3}{3375}, f_{1,2} = \frac{8\alpha^2}{225}, f_{2,1} = -\frac{7\alpha}{15}, f_{2,3} = -1.
\end{aligned}$$

代入（3.15），得到系统（3.12）的不变代数曲线及其余因子的表达式：

$$G(s,z) = z^3 + \left(-s^3 - \frac{7}{15}\alpha s\right) z^2 + \frac{8\alpha^2 s^2 z}{225} + \frac{16\alpha^3 s^3}{3375}, \quad K(s,z) = -3s^2 - \frac{25\varepsilon}{6}.$$

然后，沿变量变换（3.11）逆向推导，得到微分系统（3.10）的以下不可约不变代数曲线及其余因子：

$$\begin{aligned}
&F(x,y) = y^3 + \left(2x^3 + \frac{10}{3}\varepsilon x\right) y^2 + \left(x^6 + \frac{11}{3}\varepsilon x^4 + \frac{125}{36}\varepsilon^2 x^2\right) y + \frac{\varepsilon}{3}x^7 + \frac{11\varepsilon^2}{9}x^5 + \frac{125\varepsilon^3}{108}x^3, \\
&K(x,y) = -3x^2 - \frac{25\varepsilon}{6}.
\end{aligned}$$

至此，我们完成了$C_{3,\ 1}$ 情形 $N = 3$的证明。以类似的方式，我们可以验证，理想 $\mathfrak{p}_2$ 对应于条件$C_{3,\ 2}$，而理想 $\mathfrak{p}_3$ 对应于条件$C_{3,\ 3}$。对于这两种情形，我们进一步推导出相应的不可约不变代数曲线及其对应的余因子。然而，对于理想 $\mathfrak{p}_4$，我们发现相关三角级数的计算包含以下三个分支：

$$\begin{aligned}
[\mathcal{T}_1, \mathcal{U}_1] = [[&\beta, \alpha\varepsilon - \varepsilon^2 - \sigma, a_0 + 3\varepsilon, a_1, a_2, -\varepsilon^3 f_{0,0} + \delta^3, f_{0,1}, f_{0,2}, f_{0,3}, \delta f_{1,0} - 3\varepsilon f_{0,0}, \\
&f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \delta f_{2,0} - \varepsilon f_{1,0}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}], \{\delta, \varepsilon\}], \\
[\mathcal{T}_2, \mathcal{U}_2] = [[&\beta, \delta, \alpha\varepsilon - \varepsilon^2 - \sigma, a_0 + 3\varepsilon, a_1, a_2, f_{0,0}, f_{0,1}, f_{0,2}, f_{0,3}, f_{1,0}, f_{1,1}, f_{1,2}, \\
&f_{1,3}, f_{2,0}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}], \{\varepsilon\}], \\
[\mathcal{T}_3, \mathcal{U}_3] = [[&\beta, \delta, 3\alpha^2 - 16\sigma, 3\alpha - 4\varepsilon, 4a_0 + 9\alpha, a_1, a_2 + 3, f_{0,0}, f_{0,1}, f_{0,2}, f_{0,3}, f_{1,0}, f_{1,1}, \\
&f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,0}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3} + 1], \{\alpha\}].
\end{aligned}$$

求解第一个分支，我们得到相应的不变代数曲线及其对应的余因子：

$$F(x,y)=\left(y+x^3+(\alpha-\varepsilon)\,x+\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^3,\quad K(x,y)=-3\varepsilon.$$

因此，不可约不变代数曲线为 $F(x,y)=y+x^3+(\alpha-\varepsilon)\,x+\frac{\delta}{\varepsilon}$，其余因子为 $-\varepsilon$，对应条件 $C_{1,1}=\{\beta=0,\ \sigma=\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\}$。求解第二个分支，可得相应的不变代数曲线及其余因子：

$$F(x,y)=\left(y+x^3+(\alpha-\varepsilon)\,x\right)^3,\quad K(x,y)=-3\varepsilon.$$

因此，不可约不变代数曲线为 $F(x,y)=y+x^3+(\alpha-\varepsilon)\,x$，其余因子为 $-\varepsilon$，对应条件 $\{\beta=0,\ \delta=0,\ \sigma=\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\}\subset C_{1,\,1}$。求解第三个分支，可得相应的不变代数曲线及其余因子：

$$F(x,y)=\left(y+\frac{\varepsilon}{3}x\right)\left(y+x^3+\frac{\varepsilon}{3}x\right)^2,\quad K(x,y)=-3x^2-3\varepsilon.$$

因此，不可约不变代数曲线为 $F(x,y)=y+\frac{\varepsilon}{3}x$，其余因子为 $-3x^2-\varepsilon$，以及 $F\ x\ y\ =y+x^3+\frac{\varepsilon}{3}x$ $-\varepsilon$ $C_{1\,1}\wedge C_{1\,2}=\{\beta=($, $),$ 其余因子为 $0,\ \delta=0,\ \alpha=\frac{4}{3}\varepsilon,\ \sigma=\frac{1}{3}\varepsilon^2\}$ $\mathfrak{p}_4$ ，它们对应条件 ， ， 。这证实该理想对应于情形 $N=1$ 中给出的条件。我们完成了情形 $N=3$ 的证明。

□

注记3.19。条件 $C_{1,}2$ 与 [33,表 1] 中得到的条件不同。可以检查发现，在 [33, 表 1] 的第二行中，σ 被错误地写成了 $\sigma=-\frac{\varepsilon}{18}(\beta^2+2\varepsilon-6\alpha)$。此外，$F(x,y)$ 中还有几处排版错误。例如，在条件 $C_{3,}2$ 下，项 $\frac{314\varepsilon^2}{551}x^5$（见 [33, 表 1] 倒数第二个表达式）应为 $\frac{314\varepsilon^2}{441}x^5$。这表明，我们的算法方法能够发现已发表文献中的手工计算错误。注意，定理 3.18 给出了系统 (3.10) 的不可约不变代数曲线的分类。我们想强调的是，在某些情况下，不可约不变代数曲线的形式并不唯一。事实上，在条件 $C_{1,1}\wedge C_{1,}2$（对应于理想 $\mathfrak{p}_4$）下，系统 (3.10) 有两类不可约不变代数曲线。

4 Hopf分岔与李雅普诺夫系数

本节介绍 Hopf 分岔和李雅普诺夫系数的一些基本概念。Hopf 分岔是指当参数越过临界值时，周期解从平衡点附近局部产生或消失。Andronov 及其同事早在 1930 [55] 左右就已知晓保守平面系统的 Hopf 分岔定理。Hopf 在 20 世纪 40 年代研究了一般 n 维系统在 $n>2$ 下发生的此类分岔 [55, 67]。如今，这些分岔以他的名字命名为 Hopf 分岔。关于李雅普诺夫系数的理论，可参见 [58, 第 3 章和 10]。本节旨在给出 Hopf 分岔点的充要条件，并提出一种高效算法来计算李雅普诺夫系数。

我们采用 [49] 中的记号，并做少许改动。考虑以下 n 维非线性多项式微分系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\quad f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,\tag{4.1}$$

其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ 是变量列表，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_m)$ 是实参数列表，而 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=(f_1,\ldots,f_n)$ 是 $\mathbb{R}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}]$ 中的多项式列表。根据著名的 Hopf 分岔定理，[49, 58, 67], 这种分岔类型的充分条件为：

(a) **Hopf分岔点（HBP）的存在性**。Hopf分岔点（$\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}}$）是向量场 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ 的一个平衡点，在该点处，雅可比矩阵 $D_{\boldsymbol{x}}f(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})$ 有一对单根

纯虚特征值（$\lambda(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}}) = i\omega_0, \overline{\lambda}(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}}) = -i\omega_0, \omega_0 > 0$），且没有其他实部为零的特征值。

(b) **横截条件**。假设在 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ 附近存在一条平衡点光滑曲线（$\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})$ $\boldsymbol{\mu}$），即对于所有充分接近 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ 的 $\boldsymbol{\mu}$，都有 $f(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})\ \boldsymbol{\mu}) = 0$，使得 $\boldsymbol{x}_*(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = \overline{\boldsymbol{x}}$。设 $\lambda(\boldsymbol{\mu})$ 是 $D_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})\ \boldsymbol{\mu})$ 的特征值，并满足 $\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = i\omega_0$。在固定其他参数的情况下，关于所选参数 μ_i 的横截性意味着：

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{\mu}))}{\partial \mu_i}\Big|_{\mu=\overline{\mu}} \neq 0.$$

(c) **一般性条件（或非退化条件）**。第一Lyapunov系数$\ell_1(\overline{\boldsymbol{x}})$不为零。

条件 (a) 给出了一个平衡点（$\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}}$），其雅可比矩阵 $J_f = D_{\boldsymbol{x}} f(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})$ 没有零特征值。因此，隐函数定理给出了满足 $f(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})\ \boldsymbol{\mu}) = 0$ 且 $\boldsymbol{x}_*(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = \overline{\boldsymbol{x}}$ 的唯一局部函数 $\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})$。$i\omega_0$ 的单根性给出了 $D_x f(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})\ \boldsymbol{\mu})$ 的一个局部可微特征值 $\lambda(\boldsymbol{\mu})$，并满足 $\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = i\omega_0$。当这三个条件均满足时，在（$\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}}$）处会产生一个唯一的周期轨道局部分支，其周期趋于 $2\pi/\omega_0$，且 $\ell_1(\overline{\boldsymbol{x}})$ 的符号决定了中心流形上小分岔极限环的稳定性。满足上述条件的参数值对应于 Hopf分岔的临界点；在这些临界点处，极限环尚未出现。只有当参数值越过该临界点后，才能观察到极限环（见 [49, 58]）。为了将满足 (a) 和 (b) 的 Hopf分岔类型与 Liu [61] 引入的简单Hopf分岔区分开来，我们将其称为完全 Hopf分岔（CHB）。它是超临界、亚临界还是退化的，取决于系统 (4.1) 中的高阶项。接下来需要计算 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 附近系统的李雅普诺夫系数。如果一般性条件不满足（即 $\ell_1(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$），则系统是退化的（通常会导致余维二的 Bautin分岔或广义Hopf分岔）。在这种情况下，可能会分岔出多个周期解族，或出现涉及多个极限环的复杂现象，因此需要进行高阶导数分析。下面回顾 [58] 中介绍的投影法，用于计算与 Hopf分岔相关的第一Lyapunov系数。

设 $\dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x})$ 是一个以 $\boldsymbol{x}_0 = 0$ 为平衡点的微分系统（否则，我们可以将平衡点平移到原点）。考虑 F 在 $\boldsymbol{x}_0 = 0$ 附近的三阶泰勒近似，其形式为

$$F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + \frac{1}{6}C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{x}\|^4), \tag{4.2}$$

其中，$A = F_{\boldsymbol{x}}(0)$、$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ 是多重线性函数，其分量为

$$B_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\Big|_{\xi=0} x_j y_k, \tag{4.3}$$

$$C_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \sum_{j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_\ell}\Big|_{\xi=0} x_j y_k z_\ell, \tag{4.4}$$

其中 $i = 1$、2、.....、n。以下结果可见于 [58, 第177–181]页 .

定理4.1。假设 A 具有一对单根纯虚特征值 $\pm i\omega_0$、$\omega_0 > 0$，且没有其他实部为零的特征值。设 p、$q \in \mathbb{C}^n$ 是两个复特征向量，使得

$$Aq = i\omega_0 q, \quad A^\top p = -i\omega_0 p, \quad \langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i q_i = 1, \tag{4.5}$$

其中，$A^\top$ 是 A的转置矩阵。如果 I_n 表示单位矩阵，那么我们可以将第一*Lyapunov*系数 $\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$ 定义为

$$\ell_1(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, G_{21}, \tag{4.6}$$

其中

$$G_{21} = \left\langle p,\, C(q,q,\overline{q}) + B(\overline{q},(2i\omega_0 I_n - A)^{-1}B(q,q)) - 2B(q,A^{-1}B(q,\overline{q}))\right\rangle .$$

满足 **HBP** 条件（b）和（c）的点称为余维1 Hopf点，$\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$的符号给出了中心流形上小分岔周期轨道的稳定性。当$\ell_1(\boldsymbol{x}_0) < 0$时，点 $\boldsymbol{x}_0$ 是限制在 $\boldsymbol{x}_0$ 的中心流形上的系统的弱焦点，并且从 $\boldsymbol{x}_0$ 产生的极限环是稳定的。在这种情况下，我们称 Hopf分岔为超临界。当 $\ell_1(\boldsymbol{x}_0) > 0$时，点 $\boldsymbol{x}_0$ 同样是限制在 $\boldsymbol{x}_0$的中心流形上的系统的弱焦点，但从 $\boldsymbol{x}_0$ 分岔出的极限环是不稳定的。在第二种情况下，我们称 Hopf分岔为亚临界。关于 Hopf分岔的更详细讨论（包括应用）可参见 [58]。

下面给出的算法 3基于定理 4.1 ，该定理可用于计算给定微分系统的第一Lyapunov系数 $\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$。

算法3 第一Lyapunov系数的符号数值计算**输入：** 具有**HBP** $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}_0)$的微分系统（4.1）**输出：** 第一Lyapunov系数 $\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$1: 利用参数条件 $\boldsymbol{\mu}_0$ 计算微分系统，并将点 $\boldsymbol{x}_0$平移至原点。2: 使用具有有效位数的浮点运算，在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处计算（4.2）中的矩阵 A 。3: 利用（4.5）计算复特征向量 p 和 q ，并将其转换为近似有理表达式。4: 利用（4.3）和（4.4）计算（4.2）中的多重线性函数 $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$。5: 利用（4.6）计算第一Lyapunov系数 $\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$。6: **返回** $\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$

注4.2。 算法的终止是显然的。算法 3的正确性直接由定理 4.1得出。为提高计算精度，第1行是算法的预处理阶段，将数值计算限制为仅针对参数 $\boldsymbol{\mu}$，而$\boldsymbol{x}_0$ 则保留完整的符号形式。随后，第2行使用浮点运算在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处计算矩阵 A 。我们使用 MAPLE （从第2行到第6行）实现了该算法。该 MAPLE 程序可在以下网址获取：https://github.com/Bo-Math/Computing-Lyapunov-Coefficient

在运行算法3之前，我们将首先使用SamplePoints （位于RegularChains库中的MAPLE内）推导出若干个Hopf分岔点，使微分系统呈现Hopf分岔。在第5节中，我们将应用我们的MAPLE 程序分析某些微分系统中Hopf分岔的性质，以展示其可行性。

4.1 Hopf分岔点的代数刻画

我们关注于检测**HBP**曲线。这涉及确定值$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的位置，在该位置，$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) = 0$和 $Df(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$具有一对单根纯虚特征值。我们从不同角度给出了**HBP**的完整代数刻画（其中一种基于 Hurwitz 行列式和子结式序列的性质，另一种则依赖于多项式最大公因式的性质）。所建立的结果补充并改进了 [14, 38]中关于**HBP**的结论。

4.1.1 方法一：通过 Hurwitz 行列式和子结式进行刻画

以下结果是 [14, 定理 10] 在 $k_1 = 0$ 和 $k_2 = 1$情形下的一个改进版本，它给出了多项式 $p(\lambda)$ 具有一对简单纯虚根且其他根的实部均不为零的充要条件。也就是说，它给出了形式为（**HBP**）的微分系统（4.1）发生 HBP 的充要条件。

定理 4.3. 设 $p(\lambda) = \lambda^n + a_1(x,\mu)\lambda^{n-1} + \cdots + a_n(x,\mu)$ 是雅可比矩阵 $Df(x,\mu)$ 的特征多项式。将 $p(\lambda)$ 写成如下形式： $p(\lambda) = p_1(\lambda^2) + \lambda p_2(\lambda^2)$。那么， $p(\lambda)$ 具有一对简单纯虚根 $i\omega_0$ 和 $-i\omega_0$，且 $\omega_0 > 0$，并且没有其他实部为零的根，当且仅当以下陈述之一成立：

$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$(a) 条件 $\bigcup \mathcal{C}_k$ 成立，其中 $\mathcal{C}_k$ 是关于 $p(\lambda)$ 的系数的条件，满足$k\geq 1$ $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-3} = \cdots = \Delta_{n-2k+1} = 0$和 $a_n\Delta_{n-2k-1} \neq 0$，并且 $S_k(p_1, p_2, \lambda)$ 在$(-\infty,0)$中恰有一个根，且该根是单根。

$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$(b) 条件$\bigcup \overline{\mathcal{C}}_k$ 成立，其中 $\overline{\mathcal{C}}_k$ 是关于 $p(\lambda)$ 的系数的条件，使得$k\geq 1$

$$\overline{S}_k = \begin{cases} S_k(p_1, \lambda p_2, \lambda), & when\ n = 2m+1 \\ S_k(\lambda p_2, p_1, \lambda), & when\ n = 2m \end{cases} \tag{4.7}$$

在$(-\infty,0)$中恰有一个根，且该根是单根；此外， $\Delta_n = \Delta_{n-2} = \cdots = \Delta_{n-2k+2} = 0$ 和 $a_n\Delta_{n-2k} \neq 0$。

证明。 这里我们只证明陈述 (a)，陈述 (b) 的证明类似。唯一的差别在于，证明过程中需要使用推论 2.26 而不是推论 2.25。

“⇒” 假设 $p(\lambda)$ 有一对位于虚轴上的简单纯虚根， $i\omega_0$ 和 $-i\omega_0$，且没有其他实部为零的根。于是有 $a_n \neq 0$ ，并且可写为 $p(\lambda) = p_1^*(\lambda)(\lambda^2+\omega_0^2)$，其中 $\omega_0^2 > 0$ ，且 $p_1^*(\lambda)$没有实部为零的根。注意，$p(\lambda)$可能还有其他对称根，我们将它们记为 $\pm z_1, \ldots, \pm z_j$，且 $\mathrm{Re}(z_1)\cdots\mathrm{Re}(z_j) \neq 0$，其中 $j \geq 0$ （若 $j = 0$，则表示 $p(\lambda)$没有其他对称根）。因此，$p(\lambda)$可写为

$$p(\lambda) = p_2^*(\lambda)(\lambda^2 + \omega_0^2)(\lambda^2 - z_1^2)\cdots(\lambda^2 - z_j^2),$$

其中 $p_2^*(\lambda)$没有对称根。当某些$\{z_1^2, \ldots, z_j^2\}$ 相等时，这些对称根的重数大于1。根据假设，我们知道$p(\lambda)$总共有恰好 $1 + j$ 对非零对称根。由推论 2.25，得 $\Delta_{n-1} = 0, \ldots, \Delta_{n-2j-1} = 0, \Delta_{n-2j-3} \neq 0$。另一方面，由定理 2.23，得 $s_0(p_1, p_2, \lambda) = 0, \ldots, s_j(p_1, p_2, \lambda) = 0$, $s_{j+1}(p_1, p_2, \lambda) \neq 0$，这意味着$S_{j+1}(p_1, p_2, \lambda)$ =最大公因式(p_1, p_2, λ)。由于 $\pm i\omega_0$, $\pm z_1, \ldots, \pm z_j$ 是$p(\lambda)$的非零对称根，由推论 2.25， $-\omega_0^2, z_1^2, \ldots, z_j^2$是 $p_1(\lambda)$与 $p_2(\lambda)$的公共根，也就是说，它们是 $S_{j+1}(p_1, p_2, \lambda)$的根。总之，取 $k = j + 1 \in \{1, \ldots, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$，则$S_k(p_1, p_2, \lambda)$恰有一个负实根（$-\omega_0^2$），且该根为单根；此外，

$$\Delta_{n-1} = \Delta_{n-3} = \cdots = \Delta_{n-2k+1} = 0, \quad a_n\Delta_{n-2k-1} \neq 0.$$

“⇐” 对于任意整数 $k \in \{1, \ldots, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$，根据假设，我们有 $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-3} = \cdots = \Delta_{n-2k+1} = 0$, $a_n\Delta_{n-2k-1} \neq 0$。由定理2.23 可知

$$s_0(p_1, p_2, \lambda) = s_1(p_1, p_2, \lambda) = \cdots = s_{k-1}(p_1, p_2, \lambda) = 0, s_k(p_1, p_2, \lambda) \neq 0.$$

因此， $S_k(p_1, p_2, \lambda)$的次数为 k，且 $S_k(p_1, p_2, \lambda)$ =$\gcd(p_1, p_2, \lambda)$。注意，根据假设， $p(\lambda)$恰有 k对非零对称根，记为 $\pm z_1$, ..., $\pm z_k$。因此， $p(\lambda)$可写为 $p(\lambda) = p_3^*(\lambda)(\lambda^2 - z_1^2)\cdots(\lambda^2 - z_k^2)$，其中 $p_3^*(\lambda)$没有对称根。当某些 $\{z_1^2, \ldots, z_k^2\}$ 相等时，这些对称根的重数大于1。根据推论 2.25， z_1^2, ..., z_k^2是 $p_1(\lambda)$和 $p_2(\lambda)$的公共根。因此， z_1^2, ..., z_k^2是 $S_k(p_1, p_2, \lambda)$的根。另一方面， $S_k(p_1, p_2, \lambda)$

恰有一个负实根（且为单根），这意味着 k个根 z_1^2，……，z_k^2中只有一个为负，设为 $z_1^2 = -\omega_0^2 < 0$，且对于 $j = 2$，……，k，$\mathrm{Re}(z_j) \neq 0$（否则，$S_k(p_1, p_2, \lambda)$将有另一个负实根，这与假设矛盾）。总之，$p(\lambda)$有一对简单纯虚根 $i\omega_0$ 和 $-i\omega_0$，且没有其他实部为零的根。

□

以下结果直接由定理 4.3得出，该定理描述了多项式 $p(\lambda)$ 具有$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$对非零对称根，且其中恰好有一对简单纯虚根的等价条件。这正是 [14, 定理 5]未涵盖的情形。

推论 4.4。设 $p(\lambda) = \lambda^n + a_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})\lambda^{n-1} + \cdots + a_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 是雅可比矩阵 $Df(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$的特征多项式。当 $n = 2m$时，以下陈述等价：

(i) $\overline{p}(y) = y^m + a_2 y^{m-1} + \cdots + a_{2m}$ 在$(-\infty,0)$中恰好有一个根，且该根为单根；此外，$a_{2m} \neq 0, \Delta_{2m-1} = \Delta_{2m-3} = \cdots = \Delta_1 = 0$。

(ii) $\overline{p}(y)$ 在$(-\infty,0)$中恰有一个根，且为单根；此外，$a_{2m} \neq 0, \Delta_{2m} = \Delta_{2m-2} = \cdots = \Delta_2 = 0$。

(iii) $\overline{p}(y)$ 在$(-\infty,0)$中恰有一个根，且为单根；此外，$a_{2m} \neq 0, a_1 = a_3 = \cdots = a_{2m-1} = 0$。

此外，当 $n = 2m + 1$时，以下陈述等价：

(a) $p(\lambda)$ 有 m 对非零对称根（按重数计），且 $p(0) \neq 0$，其中恰有一对简单纯虚根。

(b) $\overline{p}(\lambda)$ 在$(-\infty,0)$中恰有一个根，且为单根；此外，$a_1 a_{2m} \neq 0, a_3 - a_1 a_2 = \cdots = a_{2m+1} - a_1 a_{2m} = 0$。

证明。我们将证明分为两部分。部分（A）：当 $n = 2m$ 时。

如注 2.27 所述，当 $n = 2m$ 时，$p_2(\lambda)$ 和 $\lambda p_2(\lambda)$ 都不可能具有 m 对非零对称根 $\{z_i, -z_i\}$，因为 $p_2(\lambda)$ 是一个次数为 $m-1$ 的多项式。为了使 $p(\lambda)$ 具有 m 对对称根，$p_2(\lambda)$ 必须恒等于零。在这种情况下，我们有 $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2m-1} = 0$。此时，我们还有 $S_m(p_1, p_2, \lambda) = S_m(\lambda p_2, p_1, \lambda) = p_1(\lambda) = \lambda^m + a_2\lambda^{m-1} + \cdots + a_{2m} = \overline{p}(\lambda)$。因此，对于 $k = m$，根据定理 4.3 的（a）和（b）两项陈述，（i）与（ii）的等价性得以成立。

现在我们证明 (i) 与 (iii) 的等价性。设 $f(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{2m}$ 是一个次数为 $2m$ 的多项式。我们先建立以下恒等式：若 $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k-3} = 0$，则有

$$\Delta_{2k-1} = (-1)^{k(k-1)/2} a_{2k-1}^k. \tag{4.8}$$

注意，定义 Δ_{2k-1} 的赫尔维茨矩阵的元素为 a_{2j-i}（索引超出范围的系数视为 0）。重新排列其各行，使偶数行排在前面，奇数行排在后面，即

$$2, 4, \ldots, 2k-2; 1, 3, \ldots, 2k-1.$$

在奇数索引系数均为零这一假设下，所得矩阵具有如下分块形式

$$\begin{pmatrix} U & * \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

其中，U 是一个 $k-1$ 阶上三角矩阵，其所有对角线元素均为 1；V 是一个 k 阶上三角矩阵，其所有对角线元素均为 a_{2k-1}。该行

排列有 $k(k-1)/2$ 个逆序，这证明了恒等式（4.8）。对于 $k=1$，该恒等式可简单写为 $\Delta_1 = a_1$。

若 $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2m-1} = 0$，将（4.8）应用于 $k = 1, \ldots, m$ 可得 $\Delta_1 = \Delta_3 = \cdots = \Delta_{2m-1} = 0$。反之，假设 $\Delta_1 = \Delta_3 = \cdots = \Delta_{2m-1} = 0$。我们通过归纳法进行证明。首先，$a_1 = \Delta_1 = 0$。若 $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k-3} = 0$，则（4.8）给出

$$0 = \Delta_{2k-1} = (-1)^{k(k-1)/2} a_{2k-1}^k.$$

因此我们有 $a_{2k-1} = 0$。结论由归纳法得出。

部分（B）：当 $n = 2m+1$ 时。

“⇒”在此情况下，$p(\lambda)$可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^{2m+1} + a_1\lambda^{2m} + a_2\lambda^{2m-1} + \cdots + a_{2m}\lambda + a_{2m+1} \\ &= (\lambda + \lambda_0)(\lambda^{2m} + b_1\lambda^{2m-1} + b_2\lambda^{2m-2} + \cdots + b_{2m-1}\lambda + b_{2m}). \end{aligned}$$

根据假设和部分（A），我们知道 $\lambda_0 \neq 0$ 以及 $b_1 = b_3 = \cdots = b_{2m-1} = 0, b_{2m} \neq 0$。此外，我们有 $\overline{p}(y) = y^m + b_2 y^{m-1} + \cdots + b_{2m}$ 有一个单负实根。通过比较 $p(\lambda)$的系数，我们得到

$$a_1 = \lambda_0,\ a_2 = b_2,\ a_3 = \lambda_0 b_2,\ \ldots,\ a_{2k} = b_{2k},\ a_{2k+1} = \lambda_0 b_{2k}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4.9}$$

所需结果可直接由（4.9）得出。

“⇐”写成 $R(y) = y^m + a_2 y^{m-1} + \cdots + a_{2m}$。根据假设，多项式 $p(\lambda)$ 可写为

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^{2m+1} + a_1\lambda^{2m} + a_2\lambda^{2m-1} + a_1a_2\lambda^{2m-2} + \cdots + a_{2m}\lambda + a_1a_{2m} \\ &= \lambda^{2m}(\lambda + a_1) + a_2\lambda^{2m-2}(\lambda + a_1) + \cdots + a_{2m}(\lambda + a_1) \\ &= (\lambda + a_1)R(\lambda^2). \end{aligned}$$

由于 $\overline{p}(y) = R(\lambda^2)$ 有一个单根负实根且 $a_{2m} \neq 0$，因此根据部分（A），我们知道 $p(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 中有 m 对非零根 $\{z_i, -z_i\}$，其中恰有一对纯虚根。此外，$p(\lambda)$ 有一个非零实根 $-a_1$。

□

我们指出，推论 4.4提供了另一种推导简单等价条件的方法，使得 $p(\lambda)$ 具有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 对非零对称根，其中恰有一对简单纯虚根。表 4 列出了二维至五维向量场发生 **HBP**时关于多项式系数的充要条件。据我们所知，我们是首个给出这些表达式的。

表 4：二维至五维向量场发生**HBP**的充要条件。

n	HBP 的条件
2	$[\Delta_1 = a_1 = 0, \quad a_2 > 0]$
3	$\left[\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad a_1 a_3 > 0\right]$
4	$\left[\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad a_1 a_4 \Delta_2 > 0\right] \cup [a_1 = a_3 = 0, \quad a_4 < 0]$
5	$\left[\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = 0, \quad a_5 \Delta_3 \Delta_2 > 0\right] \cup$ $[a_3 - a_1 a_2 = a_5 - a_1 a_4 = 0, \quad a_4 < 0, \quad a_1 \neq 0]$

备注 4.5。 以下事实由定理 4.3得出，该定理建立了以下形式的微分系统（**HBP**）的半代数描述（4.1）。如果存在一个整数 $k \in\{1,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$，使得以下半代数系统

$$\mathbb{S}_{n,k}:\begin{cases} f_1(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})=\cdots=f_n(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})=0,\\ \mathbf{SAD}(\mathcal{C}_k(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}}))_{\{=,\geq,>,\neq\}}\end{cases} \tag{4.10}$$

关于变量 $\overline{\boldsymbol{x}}=(x_1,\ldots,x_n)$ 有一个实根，则相应的系统（4.1）具有一个 **HBP**。这里，记号 $\mathrm{SAD}(\mathcal{C}_k(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}}))_{\{=,\geq,>\neq\}}$ 表示特征多项式 $p(\lambda)$ 的半代数描述，其中雅可比矩阵 $D_{\boldsymbol{x}}f(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})$ 具有一对单纯纯虚根，且没有其他实部为零的根。$\mathrm{SAD}(\mathcal{C}_k(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}}))_{\{=,\geq,>,\neq\}}$ 的半代数描述可在表 4 中针对 $n=2$、...、5 找到。对于 $n\geq 6$，可以使用 Sturm–Habicht 序列 [46]，或判别式序列 [98] 等技术获得此类描述。下面介绍半代数系统的三角分解理论。在该理论中，任何形如 $\mathbb{S}_{n,k}$ 的半代数系统都可以分解为有限个正则半代数系统，使得它们的零点集的并集就是 $\mathbb{S}_{n,k}$ 的零点集。因此，每个正则半代数系统都描述了 **HBP** 的一个子集。

作为本节的总结，我们给出 [14, 定理 10], 的一个改进版本，以回答如何判定一元多项式是否有重数为 k_1 的零根和 k_2 对纯虚根，且其他根的实部均不为零。

定理 4.6. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是一个 $\mathbb{R}[x]$的一元多项式。那么，当且仅当满足以下条件时，$f(x)$ 有一个重数为 k_1 的根0，并且有 k_2 对纯虚根，且其他根的实部均不为零：

(a) $f(x)$ 的系数满足 $a_n=\cdots=a_{n-k_1+1}=0$，$a_{n-k_1}\neq 0$。

(b) 设 $d=n-k_1$，$q(x)=a_0x^{n-k_1}+a_1x^{n-k_1-1}+\cdots+a_{n-k_1}=f_1(x^2)+xf_2(x^2)$。那么，$\lfloor\frac{d}{2}\rfloor$存在一个整数 k，使得条件 $\bigcup\mathcal{C}_k$ 成立，其中 $\mathcal{C}_k$ 是关于 $f(x)$ 的系数的条件，且 $S_k(f_1,\ f_2,\ x)$ 有 k_2 个负实根（按重数计），并且

$$\Delta_{d-1-2j}(q)=0\ (0\leq j<k),\qquad \Delta_{d-2k-1}(q)\neq 0.$$

证明。 部分（a）给出了零点的确切重数。将推论 2.25 应用于 q，(b) 中的 Hurwitz行列式确定了 $k=\deg\gcd(f_1,f_2)$。该最大公因式的每个负根 t（重数为 j）恰好对应于 $\pm i\sqrt{-t}$的一对共轭虚根 q，且每个根的重数为 j。由于 q 的每个非零虚根都以这种方式出现，将这些重数相加即可得到 k_2，从而证明两个方向。 □

4.1.2 方法 2：通过多项式最大公因式进行刻画

下面给出的下一个结果提供了一种替代方法，用于确定多项式 $p(\lambda)$ 具有一对单纯纯虚根且不存在其他实部为零的根的充要条件。

定理 *4.7*。设 $p(\lambda)=\lambda^n+a_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\lambda^{n-1}+\cdots+a_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ 是雅可比矩阵 $Df(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ 的特征多项式。那么，当且仅当 $a_n\neq 0$ 且 $g(x)=gcd(u(x)\ v(x))$ 具有两个单纯非零实根 ω_0 和 $-\omega_0$ 且没有其他实根时，$p(\lambda)$ 具有一对简单纯虚根 $i\omega_0$ 和 $-i\omega_0$，其中 $\omega_0>0$，并且没有其他实部为零的根；其中，$u(x)\ v(x)\in\mathbb{R}[x]$由 $p(ix)=u(x)+iv(x)$ 定义。

证明。 我们将首先证明必要性，然后证明充分性。

“⇒”假设 p 在虚轴上的唯一根为 $\pm i\omega_0$，其中 $\omega_0 > 0$，且两个根都是单根。由于零点不是根，$a_n = p(0) \neq 0$。此外，

$$p(\pm i\omega_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u(\pm\omega_0) = v(\pm\omega_0) = 0.$$

由于 $x-\omega_0$ 和 $x+\omega_0$ 同时整除 u 和 v，因此这两个因子都整除它们的最大公因式 g。所以，$\pm\omega_0$ 是 g的实根。

为证明这些根是单根，对 $p(ix) = u(x) + iv(x)$ 求导，得到

$$ip'(ix) = u'(x) + iv'(x). \tag{4.11}$$

若 $x_0 = \omega_0$ 或 $x_0 = -\omega_0$ 是 g的重根，那么 $(x - x_0)^2$ 将同时整除u 和 v。因此 $u'(x_0) = v'(x_0) = 0$，而（4.11）将推出 $p'(ix_0) = 0$，这与 $\pm i\omega_0$是单根矛盾。因此，g 的两个实根都是单根。

若 $s_0 \in \mathbb{R}$ 是 g的任意一个根，则由 $g \mid u$ 和 $g \mid v$ 可得 $u(s_0) = v(s_0) = 0$，进而得到 $p(is_0) = 0$。因此，关于 p 的根的假设意味着 $s_0 \in \{-\omega_0, \omega_0\}$。所以 g 没有其他实根。

“⇐” 假设 $a_n \neq 0$，且 g 的实根恰好为 $\pm\omega_0$，其中 $\omega_0 > 0$，并且两个根都是单根。由于 g 同时整除 u 和 v，

$$u(\pm\omega_0) = v(\pm\omega_0) = 0, \qquad p(\pm i\omega_0) = 0.$$

这 两个根互不相同，因为 $\omega_0 > 0$。此外，$p(0) = a_n \neq 0$，因此零不是根 t.

为证明其为单根，假设对于某个 $x_0 \in \{-\omega_0, \omega_0\}$，有 $p'(ix_0) = 0$ 。由于 $u'(x_0)$ 和$v'(x_0)$ 都是实数，(4.11) 蕴含 $u'(x_0) = v'(x_0) = 0$。结合 $u(x_0) = v(x_0) = 0$，可知 $(x - x_0)^2$ 同时整除 u 和 v，因而也整除 g，这就产生了矛盾。因此，$\pm i\omega_0$ 是 p的单根。

现在，任取 p 在虚轴上的一个根 is_0，其中 $s_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。对 $p(is_0) = 0$ 取实部和虚部，得到 $u(s_0) = v(s_0) = 0$。我们知道，$s - s_0$ 同时整除 u 和 v，因此也整除 g。于是 $g(s_0) = 0$，这意味着 $s_0 \in \{-\omega_0, \omega_0\}$。因此，$p$ 没有其他实部为零的根。

□

以下结果是定理 4.7 的直接推论。

推论 4.8。令 半代数描述$_n$ 表示定理 *4.7* 中满足以下条件的 p（λ）：具有一对简单纯虚根，且没有其他根的实部为零。则对于 $n = 2$、3、4、5，这些条件可明确表示如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{SAD}_2 =& \{a_1 = 0,\ a_2 > 0\};\\
\mathbf{SAD}_3 =& \{a_1a_2 = a_3,\ a_1a_3 > 0\};\\
\mathbf{SAD}_4 =& \{a_1 = a_3 = 0,\ a_4 < 0\} \vee \{a_1^2a_4 - a_1a_2a_3 + a_3^2 = 0,\ a_3a_4(a_1a_2 - a_3) \neq 0,\\
& \quad a_1a_4(a_1a_2 - a_3) > 0\};\\
\mathbf{SAD}_5 =& \{a_1^2a_4^2 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4 - 2a_1a_4a_5\\
& \quad - a_2a_3a_5 + a_4a_3^2 + a_5^2 = 0,\\
& \quad a_5a_1\left(a_2a_5 - a_3a_4\right)\left(a_1^2a_4 - a_1a_2a_3 - a_1a_5 + a_3^2\right) \neq 0,\\
& \quad -\left(a_1^2a_4 - a_1a_2a_3 - a_1a_5 + a_3^2\right)a_5\left(a_1a_2 - a_3\right) > 0\} \vee\\
& \{a_1 = 0,\ a_2a_3a_5 - a_3^2a_4 - a_5^2 = 0,\ \left(a_2a_5 - a_3a_4\right)a_5a_3 \neq 0,\ a_3a_5 > 0\} \vee\\
& \{a_1a_2 - a_3 = a_1a_4 - a_5 = a_2a_5 - a_3a_4 = 0,\ a_1a_4a_5 \neq 0,\ a_1a_5 < 0\}.
\end{aligned}$$

注 4.9。 我们指出，定理 4.7 的实际应用涉及计算由一元多项式的实部和虚部构成的参数化一元多项式的最大公因式，并确定 $g(x)$ 是否具有除一对非零对称根之外的实根。对于前一个问题，我们采用 [91, 92]给出的算法来计算参数化一元多项式的最大公因式；对于后一个问题，我们可以使用 Sturm–Habicht 序列 [46], 或判别式序列 [98]等技术。需要注意的是，上述两个过程通常需要根据多项式系数所确定的不同情形进行详细分析，这在实际应用中通常效率不高。相比之下，定理 4.3 不仅给出了简单明确的条件，还描述了特征多项式的根的结构。因此，在随后对Hopf分岔的分析中，我们将主要依赖定理 4.3给出的代数判据。

5 Hopf分岔的半代数判据及其应用

这里我们讨论用于检测系统（4.1）Hopf分岔的代数判据。回顾一下，定理**HBP**指出，给定微分系统的 HBP 可用半代数描述表示。我们还需建立用于检测横截条件（b）的代数判据。第4.3节旨在提供一种用于检测多项式微分系统中 Hopf分岔的半代数描述。第5.1 节旨在提供一种用于检测多项式微分系统中 Hopf分岔的半代数描述。第5.2节中，我们提出一种基于半代数系统三角分解的启发式方法，用于自动检测 Hopf分岔。在第5.3 节和5.4节中，我们使用 Lorenz 微分系统、Rabinovich–Fabrikant 模型和四维商业周期模型的结果，展示算法方法的有效性。

5.1 Hopf分岔的半代数描述

在给出 Hopf分岔的半代数描述之前，我们先引入一些记号。考虑如下形式的微分系统（4.1）。假设存在一条平衡点光滑曲线$\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})$，满足 $f(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu}),\ \boldsymbol{\mu}) = 0$ 且 $\boldsymbol{x}_*(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = \overline{\boldsymbol{x}}$。定义如下等式

$$\widehat{\Delta}_{n-1}(\boldsymbol{\mu}) = \Delta_{n-1}(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}). \tag{5.1}$$

令 $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^m$ 为第 i 个参数坐标向量，即向量 $\boldsymbol{e}_i$ 在第 i 个位置上的分量为 1，其余位置上的分量均为 0。定义参数直线及其平衡曲线如下：

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \overline{\boldsymbol{\mu}} + t\boldsymbol{e}_i = (\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_{i-1}, \overline{\mu}_i + t, \overline{\mu}_{i+1}, \ldots, \overline{\mu}_m), \quad \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu}(t)). \tag{5.2}$$

令 $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{X}'(0) = \partial_{\mu_i}\boldsymbol{x}_*(\overline{\boldsymbol{\mu}})$。曲线（$\boldsymbol{X}(t)$ $\boldsymbol{\mu}(t)$）在状态-参数空间中的切向量为（$\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{e}_i$）。我们定义以下两个多项式：

$$p(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \det\{\lambda E_n - D_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})\}, \quad p_t(\lambda) = p(\lambda, \boldsymbol{\mu}(t)) = M_t(\lambda^2) + \lambda N_t(\lambda^2). \tag{5.3}$$

多项式 M_t、N_t 分别汇集了 λ 的偶次幂和奇次幂的系数。令 $J_f = D_{\boldsymbol{x}} f(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}})$ 表示在平衡点（$\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}$）处取值的雅可比矩阵，并令 $\det(J_f)$ 表示矩阵 J_f 的行列式。

下面的结果给出了横截条件的代数表示，即 Hopf分岔的条件 (b)。

引理*5.1.* 假设对于系统（*4.1*），存在一条平衡点光滑曲线（$\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})$ $\boldsymbol{\mu}$），其中 $\boldsymbol{x}_*(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = \overline{\boldsymbol{x}}$，且该微分系统在（$\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}$）处有一个*Hopf*分岔点。设 $\lambda(\boldsymbol{\mu})$ 是关于 $\boldsymbol{\mu}$ 的唯一可微函数，使得 $\lambda(\boldsymbol{\mu})$ 是特征多项式 $p(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ 的一个根，并且 $\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = i\omega_0$。则有：

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{\mu}))}{\partial \mu_i}\Big|_{\mu=\overline{\mu}} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \widehat{\Delta}_{n-1}(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i}\Big|_{\boldsymbol{\mu}=\overline{\boldsymbol{\mu}}} \neq 0, & k = 1 \\ \gcd(G, H_i) \text{ has no positive real root}, & k \geq 2 \end{cases}, \tag{5.4}$$

其中

$$G(z)=\gcd\big(M_0(-z),N_0(-z)\big),\quad H_i(z)=N_0'(-z)\dot{M}(-z)-M_0'(-z)\dot{N}(-z).$$

i 下标表示参数方向，点表示在固定 z 时 M 和 N 的系数的导数，而撇号 M'、N' 表示关于 z 的导数。

证明。**情形 1：** $k=1$。我们首先给出情形 $n\geq 4$ 和 $k=1$的证明。关于 $n\in\{2,3\}$的证明可见注 5.2。令 $\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}})=i\omega_0$。根据 [38, 命题 3。7], 对于 $n\geq 4$，有

$$\frac{\partial\widehat{\Delta}_{n-1}(\boldsymbol{\mu})}{\partial\mu_i}\Big|_{\boldsymbol{\mu}=\overline{\boldsymbol{\mu}}}=-2\Delta_{n-3}(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})\mathrm{res}\Big(\frac{p(\lambda)}{\lambda^2+\omega_0^2},\lambda^2+\omega_0^2\Big)\frac{\partial\mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{\mu}))}{\partial\mu_i}\Big|_{\boldsymbol{\mu}=\overline{\boldsymbol{\mu}}}.\tag{5.5}$$

显然，$\frac{\partial\Delta_{n-1}(\boldsymbol{\mu})}{\partial\mu_i}(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})\neq 0$ 意味着 $\partial\mathrm{Re}(\lambda)\frac{}{\partial\mu_i}(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})\neq 0$ 以及 $\Delta_{n-3}(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{\mu}})\neq 0$。$(i\omega_0)$ 的简单性说明结式非零。根据定理 4.3(a)，当 $k=1$ 时，$\Delta_{n-3}\neq 0$；当 $k\geq 2$ 时，$\Delta_{n-3}=0$。这证明了 $k=1$ 的两个方向。

情况 2： $k\geq 2$。设 $\lambda(t)=\lambda(\boldsymbol{\mu}(t))$，根据偏导数的定义，有

$$\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}})}{\partial\mu_i}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Re}\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}}+h\boldsymbol{e}_i)-\mathrm{Re}\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}})}{h}=\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\lambda(t)\Big|_{t=0}.$$

在差商中，h 正好是 μ_i 的变化量。对于 $z>0$，由（5.3）可得

$$p_0(\lambda)\equiv M_0(-z)+\lambda N_0(-z)\pmod{\lambda^2+z}.$$

当且仅当 p_0 具有根对 $\pm i\sqrt{z}$时，它才为零。由假设可知，多项式 G 具有唯一正根 $z=\omega_0^2$，且该根为单根。注意到 $p_t(\lambda)$ 可写为

$$p_t(\lambda)=h_t(\lambda)q_t(\lambda),\quad h_t(\lambda)=\lambda^2+\eta(t)\lambda+\zeta(t),\tag{5.6}$$

其中 $\eta(t)=-2\mathrm{Re}\lambda(t)$，且 $\zeta(t)=|\lambda(t)|^2$。在 $t=0$处，我们有 $h_0=\lambda^2+z=\lambda^2+\omega_0^2$，$\eta(0)=0$ 以及$\zeta(0)=\omega_0^2$。由于 $M_0(-z)=N_0(-z)=0$，我们可以写成 $M_0(y)=(y+z)m_0(y)$，$N_0(y)=(y+z)n_0(y)$。于是

$$q_0(\lambda)=m_0(\lambda^2)+\lambda n_0(\lambda^2)\equiv u+\lambda v\pmod{\lambda^2+z},$$

其中

$$u=m_0(-z)=M_0'(-z),\quad v=n_0(-z)=N_0'(-z).$$

注意，$i\omega_0$ 是 p_0的单根，因此 $q_0(i\omega_0)\neq 0$，这意味着 $d=u^2+zv^2=|q_0(i\omega_0)|^2>0$。

在固定 λ 的情况下，对 $p_t=h_tq_t$ 在 $t=0$处求导，并将结果模多项式$h_0=\lambda^2+z$约化，得到

$$\dot{M}(-z)+\lambda\dot{N}(-z)\equiv(\dot{\zeta}+\lambda\dot{\eta})(u+\lambda v)\pmod{\lambda^2+z}.$$

比较常数项和一次系数，得到 $M(-z)=u\zeta-zv\dot{\eta}$和 $N(-z)=v\zeta+u\dot{\eta}$。根据，将第一个恒等式乘以 v，再减去第二个恒等式的 u 倍，从而消去项 ζ。注意，$\dot{\eta}=-2\partial_{\mu_i}\mathrm{Re}\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}})$。代入后得到

$$H_i(z)=v\dot{M}(-z)-u\dot{N}(-z)=-d\cdot\dot{\eta}=2d\cdot\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}})}{\partial\mu_i}.$$

“⇒”由于 $i\omega_0$ 是单根 $d>0$。由上面的恒等式可得 $H_i(z)\neq 0$。假设 $\gcd(G,H_i)$ 有一个正实根 z_0。由于 $\gcd(G,H_i)$ 整除 G，因此有 $G(z_0)=0$。另一方面，我们知道 $z=\omega_0^2$ 是 G的唯一正根，因此 $z_0=z$。但 $\gcd(G,H_i)$ 也整除 H_i，这将推出 $H_i(z)=0$，矛盾。因此 $\gcd(G,H_i)$ 没有正实根。

“$\Leftarrow$” 假设 $\gcd(G, H_i)$ 没有正实根。注意，$G(z)$ 有一个唯一正根$z = \omega_0^2 > 0$。若 $H_i(z) = 0$，则有 $z - \omega_0^2$ 是 $\mathbb{R}[z]$中 G 和 H_i 的一个公因子。于是它将整除 $\gcd(G, H_i)$，这与假设矛盾。因此 $H_i(z) \neq 0$，这意味着$\partial_{\mu_i}\mathrm{Re}\lambda(\overline{\mu}) \neq 0$。

□

注 5.2. 当 $k = 1$时，方程（5.4）中的第一个等式对任意 $n \geq 2$ 都成立。事实上，设 $\lambda(\boldsymbol{\mu})$ 是关于 $\boldsymbol{\mu}$ 的唯一可微函数，使得 $\lambda(\boldsymbol{\mu})$ 是特征多项式 $p(\lambda)$ 的一个根，且 $\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = i\omega_0$。将多项式 $p(\lambda)$ 分解为如下形式

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{\mu}))\lambda + \lambda(\boldsymbol{\mu})\overline{\lambda}(\boldsymbol{\mu}))p^*(\lambda). \tag{5.7}$$

当 $n = 2$时，我们有 $p^*(\lambda) = 1$。比较（5.7）右侧与 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ 的系数，可得 $a_1 = \widehat{\Delta}_1(\boldsymbol{\mu}) = -2\mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{\mu}))$。因此，$\frac{\partial\widehat{\Delta}_1(\boldsymbol{\mu})}{\partial\mu_i}\Big|_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = -2\frac{\partial\mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{\mu}))}{\partial\mu_i}\Big|_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$。当$n = 3$时，我们有 $p^*(\lambda) = \lambda - \lambda_3$，其中 $\lambda_3 \neq 0$。然后，利用Orlando公式（见[42]），可得

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}_2(\boldsymbol{\mu}) &= -(\lambda(\boldsymbol{\mu}) + \overline{\lambda}(\boldsymbol{\mu})) \cdot (\lambda(\boldsymbol{\mu}) + \lambda_3) \cdot (\overline{\lambda}(\boldsymbol{\mu}) + \lambda_3), \\ &= -2\mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{\mu})) \cdot (\lambda(\boldsymbol{\mu}) + \lambda_3) \cdot (\overline{\lambda}(\boldsymbol{\mu}) + \lambda_3).\end{aligned} \tag{5.8}$$

对（5.8）两边关于 μ_i 求导，并注意到 $\mathrm{Re}(\lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}})) = 0$，可得

$$\frac{\partial\widehat{\Delta}_2(\boldsymbol{\mu})}{\partial\mu_i}\Big|_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = -2(\lambda_3^2 + \omega_0^2)\frac{\partial\mathrm{Re}(\lambda(\boldsymbol{\mu}))}{\partial\mu_i}\Big|_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}.$$

由此得到所需结果。

令 $\mathrm{adj}(J_f)$ 表示雅可比矩阵的伴随矩阵 $J_f = D_{\boldsymbol{x}}f(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}})$。以下结果给出了（5.4）的一个等价多项式刻画，其中 $k = 1$。

引理5.3。 我们有以下等价关系

$$\frac{\partial\widehat{\Delta}_{n-1}(\boldsymbol{\mu})}{\partial\mu_i}\Big|_{\boldsymbol{\mu}=\overline{\boldsymbol{\mu}}} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\det J_f)\,\partial_{\mu_i}\Delta_{n-1} - (\nabla_{\boldsymbol{x}}\Delta_{n-1})^{\mathsf{T}}\mathrm{adj}(J_f)f_{\mu_i} \neq 0. \tag{5.9}$$

证明。 对平衡方程 $f(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) = 0$ 关于 μ_i 求偏导，可得

$$J_f(\partial_{\mu_i}\boldsymbol{x}_*)(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = -f_{\mu_i}. \tag{5.10}$$

对（5.1）两边关于 μ_i 求导，并利用关系（5.10），可得

$$\frac{\partial\widehat{\Delta}_{n-1}}{\partial\mu_i}\Big|_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \left[\partial_{\mu_i}\Delta_{n-1} - (\nabla_{\boldsymbol{x}}\Delta_{n-1})^{\mathsf{T}}(J_f)^{-1}f_{\mu_i}\right]. \tag{5.11}$$

（5.10）和（5.11）中的右端偏导数都作用于独立变量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 中的原始多项式，并在 $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}})$处取值。注意，$\det J_f = \det D_{\boldsymbol{x}}f(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) \neq 0$。将方程（5.11）两边乘以 $\det J_f$，可得

$$(\det J_f)\frac{\partial\widehat{\Delta}_{n-1}}{\partial\mu_i}\Big|_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \left[(\det J_f)\partial_{\mu_i}\Delta_{n-1} - (\nabla_{\boldsymbol{x}}\Delta_{n-1})^{\mathsf{T}}\mathrm{adj}(J_f)f_{\mu_i}\right]. \tag{5.12}$$

上述等式双向均成立。证明完毕。

□

现在我们可以推导 Hopf分岔的半代数描述。特别地，以下结果基于引理 5.1 和 5.3，刻画了完整的 Hopf 分岔（ **CHB** ）的半代数形式。

命题 5.4。 假设对于系统 $(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})\ \boldsymbol{\mu})$ 存在一条平衡点光滑曲线 $\boldsymbol{x}_*(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = \overline{\boldsymbol{x}}$，其中 (4.1)。若析取中的半代数系统至少有一个

$$\bigvee_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mathbb{H}_{n,k}(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}})$$

关于 $\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_n)$存在实解，则该微分系统表现出**CHB**。$\mathbb{H}_{n,k}$ 的表达式如下：

$$\mathbb{H}_{n,1}: \begin{cases} \bigwedge_{j=1}^{n} \Big(f_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) = 0 \Big) \\ \bigwedge \Big(\mathbf{SAD}(\mathcal{C}_1(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}))_{\{=,\geq,>,\neq\}} \Big) \\ \bigwedge \Big((\det J_f)\, \partial_{\mu_i} \Delta_{n-1} - (\nabla_{\boldsymbol{x}} \Delta_{n-1})^{\mathsf{T}} \mathrm{adj}(J_f) f_{\mu_i} \neq 0 \Big) \end{cases}, \tag{5.13}$$

and

$$\mathbb{H}_{n,k}: \begin{cases} \bigwedge_{j=1}^{n} \Big(f_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) = 0 \Big) \\ \bigwedge \Big(\mathbf{SAD}(\mathcal{C}_k(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}))_{\{=,\geq,>,\neq\}} \Big) \\ \bigwedge \Big(T_i(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) \Big) \end{cases} \quad k \geq 2, \tag{5.14}$$

其中， μ_i 是所选参数， T_i 是gcd(G,H_i)没有正实根这一条件的半代数描述。

证明。 所需结果直接由4.3定理、引理 5.1 和5.3得到。 □

注 5.5。 对于给定的形如（4.1）的微分系统，的表达式可以通过计算两个多项式的最大公因式得到。下面，我们给出四维情形的详细推导步骤。记

$$\begin{aligned} p_t(\lambda) &= \det\{\lambda E_4 - D_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{\mu}(t))\} \\ &= \lambda^4 + a_1(t)\lambda^3 + a_2(t)\lambda^2 + a_3(t)\lambda + a_4(t) \\ &= M_t(\lambda^2) + \lambda N_t(\lambda^2), \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中， $\boldsymbol{X}(t)$和 $\boldsymbol{\mu}(t)$在（5.2）中定义。因此， $M_0(y) = y^2 + a_2(0)y + a_4(0)$，且 $N_0(y) = a_1(0)y + a_3(0)$。注意，在 $t = 0$处，我们有$a_j(0) = a_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}})$。当 $k = 2$时，由定理 4.3可得$a_1(0) = a_3(0) = 0$ 以及 $a_4(0) < 0$。此时，多项式 $G(z) = \gcd(M_0(-z)\ N_0(-z)) = z^2 - a_2(0)z + a_4(0)$。多项式 $H_i(z)$化简为

$$H_i(z) = (2z - a_2(0))(\dot{a}_3 - \dot{a}_1 z).$$

a_j 上的点表示在 $t = 0$处对 $a_j(\boldsymbol{X}(t)\ \boldsymbol{\mu}(t))$ 求导。由于 $a_2^2(0) - 4a_4 > 0$，因而因子 $2z - a_2(0)$ 在 G 的根处非零。因此， T_i 等价于条件：$\gcd(G, \dot{a}_3 - \dot{a}_1 z)$ 没有正实根。假设 $\dot{a}_3 = A$, $\dot{a}_1 = B$。我们得到半代数 T_i:

$$T_i(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) = \Big(-AB > 0 \Big) \ \vee \ \Big(A^2 - a_2(0)AB + a_4(0)B^2 \neq 0 \Big). \tag{5.16}$$

上述消元可以通过类似于推论 4.8 中所述的方法推导出来。在 $a_j(0) = a_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}})$ 处计算 A 和 B 的表达式。事实上，对相关平衡方程 $f(\boldsymbol{X}(t)\ \boldsymbol{\mu}(t)) = 0$ 以及在 $t = 0$处的系数 $a_j(\boldsymbol{X}(t)\ \boldsymbol{\mu}(t))$ 求导，并应用链式法则可得

$$J_f \boldsymbol{\xi}_i + \partial_{\mu_i} f = 0, \quad \dot{a}_j = \partial_{\mu_i} a_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) + (\nabla_{\boldsymbol{x}} a_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}))^T \boldsymbol{\xi}_i. \tag{5.17}$$

结合上述方程 ，并执行类似于（5.12）中的运算，我们有 e

$$\det(J_f)\dot{a}_j = \det(J_f)\partial_{\mu_i} a_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) - (\nabla_{\boldsymbol{x}} a_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}))^T \,\mathrm{adj}(J_f)\partial_{\mu_i} f. \tag{5.18}$$

在实际应用中，我们将 H_i 乘以 $\det(J_f)$，以消去分母并便于进行符号多项式运算。

在许多应用中，研究人员通常关注一种特定类型的Hopf分岔：雅可比矩阵的一对共轭复特征值穿过虚轴，而所有其他特征值的实部均为负。这种分岔称为简单Hopf分岔（**SHB**），由 Liu [61]提出。以下判据可用于检测形式为（**SHB**）的微分系统（4.1）。

命题5.6。 假设存在一条平衡点光滑曲线 $(\boldsymbol{x}_*(\boldsymbol{\mu})\ \boldsymbol{\mu})$ 满足 $\boldsymbol{x}_*(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = \overline{\boldsymbol{x}}$对于系统 (4.1)。若下列半代数系统

$$\mathbb{H}_n : \begin{cases} \bigwedge_{j=1}^{n} \Big(f_j(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) = 0\Big) \ \bigwedge\ \Big(\Delta_{n-1}(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) = 0\Big) \\ \bigwedge \Big(a_n(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) > 0\Big) \ \bigwedge_{\ell=1}^{n-2} \Big(\Delta_\ell(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) > 0\Big) \\ \bigwedge \Big((\det J_f)\, \partial_{\mu_i} \Delta_{n-1} - (\nabla_{\boldsymbol{x}} \Delta_{n-1})^{\mathsf{T}} \mathrm{adj}(J_f) f_{\mu_i} \neq 0\Big) \end{cases} \tag{5.19}$$

有实根 关于 $\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_n)$。则该微分系统会发生一次**SHB** .

证明。 根据定理 4.3，我们有 $k = 1$。因此，等式（5.5）成立。由此，所需结论可由引理 5.3推出。事实上，这一结果也可由 [38, 定理3.6和命题3.7], 以及 [61, 第 3] 节中给出的主要结果的一个略作修改的版本推出。 □

注5.7。 我们将使用三角分解方法求解得到的半代数系统。用于计算半代数系统三角分解的算法称为 RealTriangularize，该算法已作为 Maple 中 RegularChains库的一部分实现。实际运行 RealTriangularize 命令时，我们会在变量序中将 μ_i 设为一个合适的参数。在本文的实验部分，我们将用红色标出所需参数，以说明我们所作的选择。

5.2 通过 RealTriangularize 进行启发式实量词消去

本节将确定何时对半代数系统进行实三角分解足以导出所需的分岔条件。具体而言，算法 4通过 RealTriangularize实现启发式实量词消去过程。

命题5.8。 算法 *4* 是正确的。

证明。 如果 $\boldsymbol{x}$ 中没有变量出现在 rsa 中，该算法显然会在第 2 行返回正确的输出。

根据正则半代数系统的定义，我们有 $\mathcal{Q} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{y}, rsa$。要得到输出，我们需要求解 $\exists \boldsymbol{x}, rsa$。因此，如果 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，该算法会在第 4 行返回正确的输出。如果 $\boldsymbol{y} \subset \boldsymbol{x}$，那么 $\exists \boldsymbol{x}, rsa$ 等价于 $\exists (\boldsymbol{x} \setminus \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\ rsa$，这意味着该算法会在第 6 行正确返回。

注意，从第 7 行开始，我们必有 $\boldsymbol{x} \neq \emptyset$ 和 $\boldsymbol{y} \neq \emptyset$。如果 $\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y}$，那么 $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$ 和 $\mathcal{Q}$ 仅涉及 $\boldsymbol{\mu}$ 中的变量，这意味着 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$ 和 $\mathcal{Q}'' = \emptyset$。显然，我们有 $\pi_{\boldsymbol{\mu}}(Z_{\mathbb{R}}(rsa)) \subseteq Z_{\mathbb{R}}(rsa')$。

给定 $Z_{\mathbb{R}}(\mathcal{Q})$ 中任意一点 u，若第 10 行的条件成立，则存在唯一的 z，使得 $(u, z) \in Z_{\mathbb{R}}($ $rsa')$。因此，投影 $\pi : Z_{\mathbb{R}}(rsa') \to Z_{\mathbb{R}}(\mathcal{Q})$ 是一个双射。另一方面，由于 rsa 是一个正则半代数系统，存在 x 使得 $rsa(u, z, x)$ 成立。因此，该算法在第 12 行返回正确的输出。若第 11 行的条件成立，则第 10 行的条件显然也成立。

给定 $Z_{\mathbb{R}}(rsa')$ 中任意一点 $\mu = (u, z)$，若第 13 行的条件成立，则存在x 使得 $rsa(\mu, x)$ 成立，因此该算法在第 15 行返回正确的输出。接下来我们证明，第 14 行的条件成立蕴含第 13 行的条件成立。由于rsa 是一个正则半代数系统，正则系统 $[\mathcal{T}, \mathcal{P}]$ 在 $Z_{\mathbb{R}}(\mathcal{Q})$ 中的任意一点 u 处均良好特化，且特化后的正则链 $\mathcal{T}(u)$ 是零维的。这意味着两者都不

算法4 从正则半代数系统中提取参数条件。

输入： 一个正则半代数系统 $rsa := [\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{P}]$，其 $\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}]$为；自由变量为 $\boldsymbol{u}$，主变量为 $\boldsymbol{y}$，属于 $\mathcal{T}$。

输出： 将 $Z_{\mathbb{R}}(rsa)$投影到参数空间所得的结果。

如果 $\boldsymbol{x}$ 中没有变量出现在 rsa**中，则**
  返回 rsa // 这包括 $\boldsymbol{x} = \emptyset$ 的情况
否则如果 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$**，则**
  返回 $\mathcal{Q}$
否则如果 $\boldsymbol{y} \subset \boldsymbol{x}$**，则**
  返回量词消去问题的输出： $\exists(\boldsymbol{x} \setminus \boldsymbol{y})\ \mathcal{Q}$ // 如果 $\boldsymbol{y} = \emptyset$，则 $\mathcal{Q} \Leftrightarrow rsa$
否则如果 $\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y}$ **则**
  令 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} \setminus \boldsymbol{x}$
  令 $rsa' := rsa \cap \mathbb{Q}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}] = [\mathcal{Q}', \mathcal{T}', \mathcal{P}']$ 以及 $rsa'' := [\mathcal{Q}'', \mathcal{T}'', \mathcal{P}''] = [true, \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}', \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}']$
  如果 $rsa' = [\mathcal{Q}', \mathcal{T}', \mathcal{P}']$ 在 $\boldsymbol{z}$ 中对于任意 $u \in Z_{\mathbb{R}}(\mathcal{Q})$只有一个实解 **则**
    // 如果 $\mathcal{T}'$ 中所有多项式的主次数均为一，则此条件成立。
    返回 rsa'
  否则如果 rsa'' 在 $\boldsymbol{x}$ 中，对于 rsa' 的任意实零点都有实解**则**
    // 如果 $\mathcal{T}''$ 中所有多项式的主次数均为一，且 $\mathcal{P}'' = \emptyset$，则成立。
    返回 rsa'
  else
    返回量词消去问题的输出： $\exists \boldsymbol{x}, rsa$
否则如果 $\boldsymbol{x} \cap \boldsymbol{y} \neq \emptyset$ **则**
  令 $\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{x} \setminus \boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{x}'' := \boldsymbol{x} \cap \boldsymbol{y}$ 且 $\boldsymbol{z} := \boldsymbol{y} \setminus \boldsymbol{x}$ // 我们必须有 $\boldsymbol{x}'' > \boldsymbol{z}$ 为 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{\mu}$
  令 $rsa' := rsa \cap \mathbb{Q}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}] = [\mathcal{Q}', \mathcal{T}', \mathcal{P}']$ 以及 $rsa'' := [\mathcal{Q}'', \mathcal{T}'', \mathcal{P}''] = [true, \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}', \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}']$
  如果 $rsa' = [\mathcal{Q}', \mathcal{T}', \mathcal{P}']$ 对于任意 $u \in Z_{\mathbb{R}}(\mathcal{Q})$ 在 $\boldsymbol{z}$ 中仅有一个实解**则**
    返回 $\exists \boldsymbol{x}'\ , rsa'$
  否则，如果 $rsa'' = [true, \mathcal{T}'', \mathcal{P}'']$ 对于 rsa' 的任意实零点在 $\boldsymbol{x}''$中都有实解**则**
    返回 $\exists \boldsymbol{x}'\ , rsa'$
  else
    返回量词消去问题的输出： $\exists \boldsymbol{x}, rsa$
否则
  返回量词消去问题的输出： $\exists \boldsymbol{x}, rsa$

$\mathcal{T}''$ 中的多项式的初式以及 $\mathcal{P}''$ 中的多项式在 $Z_{\mathbb{R}}(rsa')$的任意点（u， z）处都不为零。由于 $\mathcal{T}''$ 中所有多项式的主次数都是线性且 $\mathcal{P}'' = \emptyset$，因此必然存在 x ，使得$rsa''(u,\ z,\ x)$具有实解。

在第 18 行，我们假设 $\boldsymbol{x} \cap \boldsymbol{y} \neq \emptyset$。现在， $\boldsymbol{x}'' \subseteq \boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{z} \subset \boldsymbol{\mu}$ 都是 $\mathcal{T}$的主变量，这意味着 $\boldsymbol{x}'' > \boldsymbol{z}$ ，因为 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{\mu}$。因此， rsa' 和 rsa'' 都有明确定义。按照前面的类似论证，该算法在第 22 行和第 24 行返回正确的输出。对于第 17 、 26 和 28 行，正则半代数系统本身的结构并未提供多少可加以利用的有用性质，因此必须应用一般的量词消去程序来获得投影。

□

5.3 说明性示例

我们首先以Lorenz系统为例，展示算法测试的完整流程，随后与文献中的现有方法进行有针对性的比较，以验证我们的方法在检测Hopf分岔方面的性能。著名的Lorenz系统如下（见[64]）

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \tag{5.20}$$

其中， $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$为变量， $\boldsymbol{\mu} = (\rho, \sigma, b)$为实参数。雅可比矩阵 $Df(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$的特征多项式 $p(\lambda)$为

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3, \tag{5.21}$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= b + 1 + \sigma, \\ a_2 &= b\sigma - \rho\sigma + \sigma z + x^2 + b + \sigma, \\ a_3 &= -b\rho\sigma + b\sigma z + x^2\sigma + y\sigma x + b\sigma. \end{aligned}$$

利用定理4.3、命题5.4 和5.6，我们构造如下半代数集$\mathbb{S}_{3,\ 1}$、$\mathbb{H}_{3,\ 1}$ 和 $\mathbb{H}_3$:

$$\mathbb{S}_{3,1} : \begin{cases} \sigma(y - x) = 0, \quad \rho x - y - xz = 0, \quad -bz + xy = 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad a_1 a_3 > 0, \end{cases} \tag{5.22}$$

$$\mathbb{H}_{3,1} : \begin{cases} \sigma(y - x) = 0, \quad \rho x - y - xz = 0, \quad -bz + xy = 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad a_1 a_3 > 0, \\ \frac{\partial \widehat{\Delta}_2}{\partial b} \neq 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

and

$$\mathbb{H}_3 : \begin{cases} \sigma(y - x) = 0, \quad \rho x - y - xz = 0, \quad -bz + xy = 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 > 0, \\ \frac{\partial \widehat{\Delta}_2}{\partial b} \neq 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

用于检测**HBP**、**CHB**以及**SHB** ，针对Lorenz系统（5.20）。实践中， （5.23）或（5.24）中的最后一个方程将利用引理5.3加以替换。通过运行RealTriangularize 命令处理半代数集$\mathbb{S}_{3,\ 1}$，变量序为 $x > y > z > \rho > \sigma > b$，我们得到以下三个关于**HBP** 的正则半代数系统（未指定的R_i^P为空）：

$$\mathcal{C}_{\text{HBP}} = \left(R_1^T \ \wedge \ R_1^{\mathcal{Q}}\right) \ \vee \ \left(R_2^T \ \wedge \ R_2^{\mathcal{Q}}\right) \ \vee \ \left(R_3^T \ \wedge \ R_3^{\mathcal{Q}}\right), \tag{5.25}$$

其中

$$R_1^T = \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ \sigma+1=0 \end{cases}, \quad R_1^{\mathcal{Q}} = \begin{cases} \rho-1>0 \\ b\neq 0 \end{cases}, \quad R_2^T = \begin{cases} x-y=0 \\ y^2+2\rho-2=0 \\ z-\rho+1=0 \\ b+2=0 \\ \sigma+1=0 \end{cases},$$

$$R_2^{\mathcal{Q}} = \{\ 1-\rho>0\ , \quad R_3^T = \begin{cases} x-y=0 \\ y^2+(-\rho+1)b=0 \\ z-\rho+1=0 \\ (-b+\sigma-1)\,\rho-\sigma^2+(-3-b)\,\sigma=0 \end{cases},$$

$$R_3^{\mathcal{Q}} = \begin{cases} (\sigma+b+1>0 \wedge b-\sigma+1<0 \wedge b>0 \wedge \sigma-1>0) \\ \vee(\sigma+b+1>0 \wedge b-\sigma+1>0 \wedge b<0 \wedge \sigma-1<0 \wedge \sigma>0) \\ \vee(\sigma+b+1<0 \wedge b-\sigma+1<0 \wedge b<0 \wedge \sigma<0 \wedge \sigma+1>0) \\ \vee(\sigma+b+1<0 \wedge b-\sigma+1>0 \wedge b<0 \wedge \sigma+1<0) \end{cases}.$$

由 R_1 可直接得出，当条件$\sigma+1=0$、 $\rho-1>0$ 和 $b\neq 0$ 成立时，原点是一个 Hopf分岔点。此结果与 [1, 第 2]节给出的结果一致。值得指出的是，[1] 中的作者通过分析方法，得到了Lorenz系统的非平凡平衡点发生 Hopf分岔的条件(ρ、 σ、 b)，见 [1, 命题2]。这里，我们利用半代数系统的三角分解，得到了涉及三个自由参数的简单闭式描述（见 R_2 和 R_3），经过一些初等变换后，该结果与 [1, 命题 2]中给出的手工计算结果一致。

同样，对半代数集$\mathbb{H}_{3,\,1}$ 和 $\mathbb{H}_3$ 按照变量序 $x>y>z>\rho>\sigma>b$求解，可得到使 Lorenz系统具有**CHB** 和**SHB**的相应正则半代数系统。输出结果如下:

CHB: $\longleftarrow$ $\mathbb{H}_{3,1}$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{CHB}} = \left(R_2^T \ \wedge\ R_2^{\mathcal{Q}}\right) \ \vee\ \left(R_3^T \ \wedge\ R_3^{\mathcal{Q}}\right). \tag{5.26}$$

SHB: $\longleftarrow$ $\mathbb{H}_3$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{SHB}} = R_3^T \ \wedge\ R_3^{\mathcal{Q}} \ \wedge\ (\sigma+b+1>0). \tag{5.27}$$

注5.9。 这里以 Lorenz系统为例，将我们的方法与文献中另外三种研究Hopf分岔点的方法进行比较。

- **量词消去过程**。 检测Hopf分岔点的代数判据已在 [38, 61]中介绍。更具体地说，对于Lorenz系统，发生Hopf分岔点的参数值集合的半代数描述可用以下一阶公式表示:

$$\begin{aligned} &\exists x\exists y\exists z\,\big(\sigma(y-x)=0 \ \wedge\ \rho x-y-xz=0 \ \wedge\ -bz+xy=0 \\ &\qquad \wedge\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}=0 \ \wedge\ a_3\cdot a_1>0\big), \end{aligned} \tag{5.28}$$

其中 a_1、 a_2 和 a_3 是式（5.21）中的系数。为了判定或化简生成的一阶公式，我们可以使用计算逻辑工具，例如 QEPCADB [7] （QEPCAD [27]的改进版）、Mathematica 中的 Resolve 和 Reduce 函数（如 [82]所述）、Reduce 中的 REDLOG 软件包（基于柱形代数分解方法 [25, 27] 和虚项代换 [95, 96]实现），以及MAPLE 中的 RegularChains 软件包（基于正则链的柱形代数分解量词消去算法 [16]）。

对式（5.28）中的参数 ρ、σ、b 施加额外的正性条件后，使用 Maple 中 RegularChains 库的 QuantifierElimination 命令检验 Hopf分岔点，可得到以下结果：

$$\rho b-\rho\sigma+b\sigma+\sigma^2+\rho+3\sigma=0\ \wedge\ b>0\ \wedge\ \sigma-1>0\ \wedge\ -1+\sigma-b>0.$$

我们指出，利用量词消去过程，可以确定给定微分系统存在 Hopf分岔点的参数条件。然而，这一过程无法揭示微分系统平衡点的任何信息，也就是说，系统的哪个平衡点最终可能成为 Hopf 分岔固定点。相比之下，我们的半代数系统三角分解方法能够提供有关 Hopf 分岔固定点的信息。此外，我们还可以直接读出系统相应平衡点的 Hopf曲线。

• **消去理想方法**。此处使用的技巧源于文献 [59, 70]中的思想。文献 [57]中也介绍了研究 Hopf分岔的这类方法。假设（5.21）中的特征多项式 $p(\lambda)$ 有一对虚根 $\lambda_{1,\ 2}=\pm i\omega$ 以及一个实根 $\lambda_3=b_0$，那么 $p(\lambda)$ 可以写成如下形式

$$\overline{p}(\lambda)=(\lambda-b_0)(\lambda^2+\omega^2). \tag{5.29}$$

令等式 $p(\lambda)=\overline{p}(\lambda)$ 两边的 λ 系数相等，得到代数方程组

$$\begin{aligned}
g_1&=-b\rho\sigma+b\sigma z+\omega^2b_0+x^2\sigma+y\sigma x+b\sigma=0,\\
g_2&=b\sigma-\omega^2-\rho\sigma+\sigma z+x^2+b+\sigma=0,\\
g_3&=b+1+\sigma+b_0=0.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

特征多项式 $p(\lambda)$仅当参数和系统 (5.20) 的平衡点取某些值，且系统 (5.30) 有解时，才能表示为形式 (5.29)。注意，b_0 和 ω 必须不为零。为考虑这一条件，我们在系统 (5.30) 中加入方程

$$h_1=1-\nu_1b_0=0,\quad h_2=1-\nu_2\omega=0, \tag{5.31}$$

其中 ν_1 和 ν_2 是新变量。我们将由以下多项式生成的理想记为 $\mathcal{I}$：

$$\mathcal{I}=\langle\sigma(y-x),\rho x-y-xz,-bz+xy,g_1,g_2,g_3,h_1,h_2\rangle.$$

接下来，我们必须从 $\mathcal{I}$ 中消去变量 b_0、ω、ν_1 和 ν_2。通过计算多项式环 $\mathbb{C}[b_0,\omega,\nu_1,\nu_2,b,\rho,\sigma,x,y,z]$ 中 $\mathcal{I}$ 的第四个消元理想，我们得到

$$\mathcal{I}_4=\mathcal{I}\cap\mathbb{C}[b,\rho,\sigma,x,y,z].$$

对消元理想 $\mathcal{I}_4$ 进行素分解，可得到一列不可约的素理想：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1&=\langle x,y,z,\sigma+1\rangle,\\
\mathcal{H}_2&=\langle x,y,z,-b^2-b\sigma+\rho\sigma-b-\sigma\rangle,\\
\mathcal{H}_3&=\langle y-x,\rho-z-1,bz-x^2,\sigma^2z+x^2\sigma-\sigma\,z^2+x^2z+2\sigma z+x^2+z^2+z,\\
&\quad\ b\sigma+\sigma^2-\sigma z+x^2+b+2\sigma+z+1\rangle.
\end{aligned}$$

将 $\mathcal{H}_1$ 的生成元代入多项式 $p(\lambda)$，得到

$$p(\lambda)=\left(\lambda^2+\rho-1\right)(\lambda+b).$$

因此，当条件 $\sigma+1=0$、 $\rho-1>0$ 和$b\neq 0$ 成立时，原点是一个 Hopf分岔点。然而，使用 $\mathcal{H}_2$ 中的样本点 $[b=0,\rho=1]$ ，我们得到多项式$p(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1+\sigma)$。因此，尽管我们将方程 $h_2=0$ 加入理想 $\mathcal{I}$， $p(\lambda)$也不可能有一对单根纯虚根。

事实上，根据闭包定理，对于满足条件 b， ρ， σ， x， y， z的“几乎所有”取值，$\mathcal{H}_i=0$ 相应的簇 $V(\mathcal{I})$ 都有解。不过，对于某些参数和变量取值，这一结论可能不成立。利用扩张定理，我们可以得到 $p(\lambda)$存在一对简单纯虚根的充要条件。关于这些定理的更多细节，请参阅 [31, 第 3]章。相比之下，利用我们的半代数系统三角分解方法，可以直接得到分析Hopf分岔所需的结果。

- **利用多项式结式的 Hopf算法**。 这里使用的技术源自 [50, 51]中的思想。Guckenheimer 及其合作者讨论了用于确定具有纯虚特征值的任意维矩阵的经典代数构造。他们将特征多项式系数中的一个等式条件和一个不等式表述为结式，即特殊矩阵的行列式，其元素是特征多项式系数的函数。参见 [51, 第 2] 节，了解检测 Hopf分岔点曲线的方法的更多细节。需要指出的是，[50, 51] 中提出的判据只能给出 Hopf分岔点的必要条件，因为除一对纯虚特征值外，其他特征值的实部也可能为零。例如，在条件 $b=0$下， $\sigma=-1$ 且 $\rho-1>0$，容易验证特征多项式 $p(\lambda)$ 在原点处的（5.21）可表示为

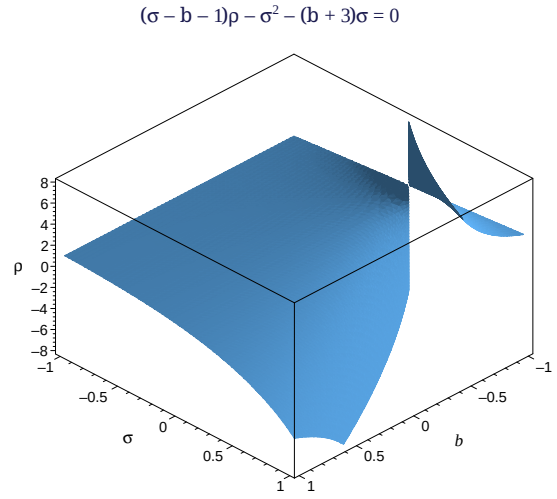
$$p(\lambda)=\lambda^3+(\rho-1)\lambda.$$

在这种情况下， $p(\lambda)$有一对纯虚特征值$\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{\rho-1}$ 以及一个特征值 $\lambda_3=0$。 $p(\lambda)$的系数满足 [51, 定理 2.1], 的条件，但不满足 Hopf分岔的条件。相比之下，利用我们的符号方法，可以推导出 Hopf分岔点的充要条件。

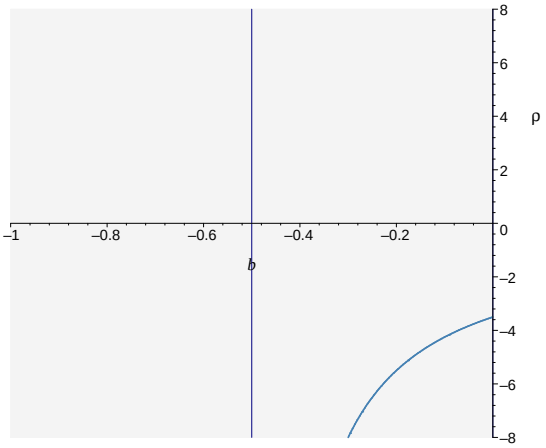
接下来，我们刻画微分系统 (5.20) 中 Hopf分岔的性质。为此，我们使用 Maple 中 RegularChains库内置的 SamplePoints 例程，求解在 (5.24) 中表述的半代数系统 $\mathbb{H}_3$ 。计算得到四个不同的样本点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$，如表 5 所示，在这些点处，微分系统 (5.20) 存在简单Hopf分岔。对于每个样本点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$，我们执行算法3，数值计算第一Lyapunov系数 $\ell_1(\mathrm{x}_0)$，其对应的值列于表 5。注意， $\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$ 的符号决定了中心流形上小分岔极限环的稳定性。系统 (5.20) 的 Hopf曲线和简单Hopf分岔的数值模拟结果如图2所示。

表 5：对应于系统 $(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{\mu}_0)$ 的 **SHB** 样本点（系统 5.20）。

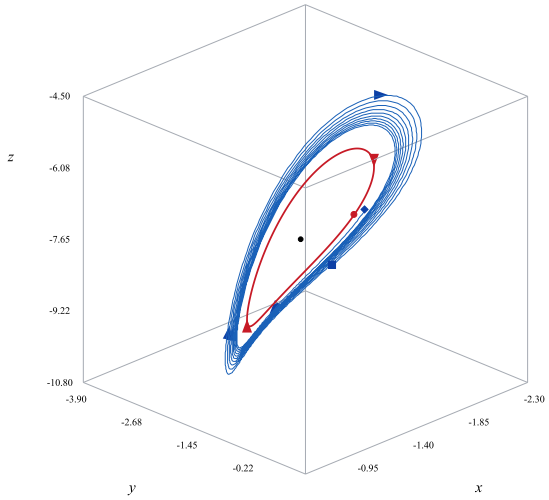
$\boldsymbol{x}_0$	$\boldsymbol{\mu}_0$	$\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$
$(-\frac{11762252359}{8589934592},-\frac{376392075483}{274877906944},-\frac{15}{2})$	$(-\frac{13}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$	$0.007408529250>0$
$(\frac{2352450471717179869184}{1881960377411137438953472},-\frac{15}{2})$	$(-\frac{13}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$	$0.007408529250>0$
$(\frac{22522998513}{8589934592},\frac{720735952423}{274877906944},\frac{55}{2})$	$(\frac{57}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4})$	$0.007366251735>0$
$(-\frac{45045997027}{17179869184},-\frac{90091994053}{34359738368},55/2)$	$(\frac{57}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4})$	$0.007366251735>0$



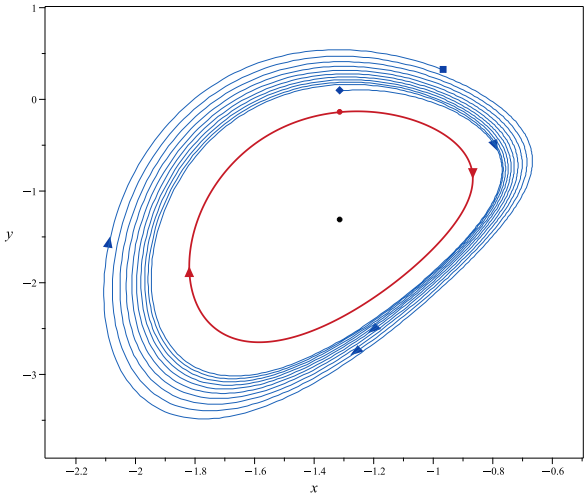
(a) Hopf 曲面： R_3^T 的某些片段



(b) $\sigma = \frac{1}{2}$ 时的Hopf曲线



(c) **SHB** 系统（5.20）在点$\boldsymbol{x}_0 =($ $-\frac{11762252359}{8589934592}, -\frac{376392075483}{274877906944}, -\frac{15}{2})$处满足条件 $\boldsymbol{\mu}_0 =(-\frac{13}{2}, 12, -\frac{1}{4})$。数值模拟所选参数为：$\rho = -6.5$、$\sigma = 0.5$ 和$b = -0.23$。蓝色曲线的初始值（$x(0)$ $y(0)$ $z(0)$）为（-1.31339255365637, 0.095533439591827, -6.26429818819526）；红色曲线的初始值为（-1.31339255365637, -0.139287559282873, -6.47024849016272）。分岔极限环不稳定。



(d) 分岔极限环在 $x - y$ 平面上的投影。

图2：系统（5.20）的Hopf曲线和Hopf分岔。

5.4 其他模型和备注

5.4.1 Rabinovich–Fabrikant 模型

我们研究以下由 [77]提出的 Rabinovich–Fabrikant 模型：

$$\begin{cases} \dot{x} = y\left(x^2 + z - 1\right) + \beta x, \\ \dot{y} = x\left(-x^2 + 3z + 1\right) + \beta y, \\ \dot{z} = -2z\left(xy + \alpha\right), \end{cases} \tag{5.32}$$

其中， $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ 为变量， $\boldsymbol{\mu} = (\alpha, \beta)$ 为实参数，且 $\alpha, \beta > 0$。该系统对非平衡耗散介质中调制不稳定性所产生的随机性进行建模。

类似地，通过对所得半代数集运行 RealTriangularize 命令$\mathbb{S}_{3,\ 1}$， $\mathbb{H}_{3,\ 1}$ 和 $\mathbb{H}_3$，对于变量序 $x > y > z > \beta > \alpha$，我们得到如下针对 **HBP** 、 **CHB** 和 **SHB** 的正则半代数系统。

HBP： $\longleftarrow$ $\mathbb{S}_{3,1}$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{HBP}} = \left(\overline{R}_1^T \ \wedge\ \overline{R}_1^Q\right) \ \vee\ \left(\overline{R}_2^T \ \wedge\ \overline{R}_2^Q\right), \tag{5.33}$$

其中

$$\overline{R}_1^T = \begin{cases} yx + \alpha = 0 \\ y^2 - \alpha = 0 \\ z - \alpha + 1 = 0 \\ \beta - 2\alpha + 2 = 0 \end{cases}, \quad \overline{R}_1^Q = \begin{cases} \alpha - 1 > 0 \\ \alpha - 2 \neq 0 \end{cases},$$

$$\overline{R}_2^T = \begin{cases} yx + \alpha = 0 \\ (z-1)\, y^2 + \alpha^2 - \alpha\beta = 0 \\ (\beta + \alpha)\, z - \beta = 0 \\ \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^4 - 3\alpha^2 = 0 \end{cases},$$

$$\overline{R}_2^Q = \begin{cases} -3\alpha^8 + 4\beta\,\alpha^7 + 3\beta^2\alpha^6 - 4\beta^3\alpha^5 + 9\alpha^6 - 18\beta\,\alpha^5 + 8\beta^2\alpha^4 > 0 \\ \beta > 0 \ \wedge\ \alpha^2 - 3 < 0 \ \wedge\ \alpha > 0 \end{cases}.$$

CHB： $\longleftarrow$ $\mathbb{H}_{3,1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathrm{CHB}} = &\left(\overline{R}_1^T \ \wedge\ \overline{R}_1^Q \ \wedge\ (3\alpha - 4 \neq 0)\right) \vee \\ &\left(\overline{R}_2^T \ \wedge\ \overline{R}_2^Q \ \wedge\ \left(3\alpha - 4 \neq 0 \ \wedge\ 112\alpha^6 - 264\alpha^4 + 183\alpha^2 - 48 \neq 0\right)\right). \end{aligned} \tag{5.34}$$

SHB： $\longleftarrow$ $\mathbb{H}_3$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{SHB}} = \left(\overline{R}_1^T \ \wedge\ \overline{R}_1^{\overline{Q}}\right) \ \vee\ \left(\overline{R}_2^T \ \wedge\ \overline{R}_2^{\overline{Q}}\right), \tag{5.35}$$

其中

$$\overline{R}_1^{\overline{Q}} = \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha < 2 \\ 3\alpha - 4 \neq 0 \end{cases},$$

$$\overline{R}_2^{\overline{Q}} = \begin{cases} -2\alpha^7 + 2\beta\,\alpha^6 + 3\alpha^5\beta^2 - \beta^3\alpha^4 + 6\alpha^5 - 8\beta\,\alpha^4 > 0 \\ \alpha - \beta > 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha^2 - 3 < 0 \\ \alpha > 0 \\ 3\alpha - 4 \neq 0 \\ 112\alpha^6 - 264\alpha^4 + 183\alpha^2 - 48 \neq 0 \end{cases}.$$

由于 $\overline{R}_1$ 满足算法第11 行的条件4，其具有实解的参数条件恰好是其涉及参数 α 和 β的约束的合取。

对于 $\overline{R}_2$，第 14 行的条件不成立。要检查第 13 行的条件是否仍然成立，等价于验证唯一的（二次主变量）多项式 $(z-1)\,y^2+\alpha^2-\alpha\beta$ 的判别式是否非负。通过在 Maple 中使用 RegularChains库的 QuantifierElimination 命令，结果表明该条件为真。因此，$\overline{R}_2$具有实解的参数条件也恰好是其涉及参数 α和 β的约束的合取。

将 SamplePoints 例程应用于所得半代数系统 $\mathbb{H}_3$ 可得到十个不同的样本点 $(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{\mu}_0)$。从中选取四个点，通过算法 3分别计算所需的 Lyapunov 系数$\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$ 。计算结果汇总于表 6。为便于阅读，此处给出的所有较大的有理数均为近似值。

表 6：对应于系统（5.32）的 **SHB** 的样本点 $(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{\mu}_0)$ 。

$\boldsymbol{x}_0$	$\boldsymbol{\mu}_0$	$\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$
$\left(\frac{37071315507\ 34359738368}{8589934592},\ -\frac{9267828877}{21},\ \frac{21}{128}\right)$	$\left(\frac{149}{128},\frac{21}{64}\right)$	$-0.1358788031<0$
$\left(\frac{433355034582832159\ 335544320000000000}{171798691841},\ -\frac{22187777773}{171},\ 256\right)$	$\left(\frac{427}{256},\frac{171}{128}\right)$	$-2.188145314<0$
$\left(\frac{24581621255970767}{167772160000000000},\ -\frac{4249256123014107}{10485760000000000},\ \frac{232138666295}{549755813888}\right)$	$\left(\frac{19}{32},\frac{1908565127415}{4398046511104}\right)$	$0.08969396095>0$
$\left(\frac{20846503569\ 17179869184},\ -\frac{285817634399}{274877906944},\ \frac{10178247162347 9}{281474976710656}\right)$	$\left(\frac{323}{256},\frac{1571576075581}{2199023255552}\right)$	$0.2048564397>0$

5.4.2 四维商业周期模型

我们考虑由 Puu [76]提出的以下四维商业周期模型：

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_1 &= W_1,\\
\dot{Y}_2 &= W_2,\\
\dot{W}_1 &= -(s_1+m_1)Y_1+m_2Y_2+(v_1-1-s_1)W_1-\frac{v_1}{3}W_1^3,\\
\dot{W}_2 &= m_1Y_1-(s_2+m_2)Y_2+(v_2-1-s_2)W_2-\frac{v_2}{3}W_2^3,
\end{aligned}\tag{5.36}$$

其中，下标 $i\in\{1,2\}$ 表示经济区域（或国家），$\boldsymbol{x}=(Y_1,Y_2,W_1,W_2)$ 是变量，$\boldsymbol{\mu}=(m_1,m_2,s_1,s_2,v_1,v_2)$ 是实参数。更具体地说，Y_i=表示区域收入，W_i=表示区域收入变化率，m_i=表示边际进口倾向（$0<m_i<1$），s_i=表示储蓄倾向（$0<s_i<1$），ν_i=表示投资加速系数（$v_i>0$）。

为更好地展示输出结果，实际应用中我们设定 $[m_1=m_2=s_2=s_1]$ 和 $v_2=2v_1$ 为$s_1\in(0,1)$，并将 $v_1>0$。对所得半代数集 $\mathbb{S}_{4,1}$, $\mathbb{H}_{4,1}$ 和 $\mathbb{H}_4$ 按照变量序 $Y_1>Y_2>W_1>W_2>s_1>v_1$运行 RealTriangularize 命令，可得到以下适用于 **HBP**、**CHB** 和 **SHB**的正则半代数系统。

HBP: $\longleftarrow$ $\mathbb{S}_{4,1}$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{HBP}}=\left(\widetilde{R}_1^T\ \wedge\ \widetilde{R}_1^Q\right)\ \vee\ \left(\widetilde{R}_2^T\ \wedge\ \widetilde{R}_2^Q\right),\tag{5.37}$$

其中

$$\widetilde{R}_1^T=\begin{cases}Y_1=0,\quad Y_2=0\\ W_1=0,\quad W_2=0\\ 2s_1-2v_1+1=0\end{cases},\quad \widetilde{R}_1^Q=\begin{cases}3-2v_1>0\\ 2v_1-1>0\\ v_1-1\neq 0\end{cases},$$

$$\widetilde{R}_2^T=\begin{cases}Y_1=0,\quad Y_2=0\\ W_1=0,\quad W_2=0\\ s_1-2v_1+2=0\end{cases},\quad \widetilde{R}_2^Q=\begin{cases}3-2v_1>0\\ v_1-1>0\end{cases}.$$

CHB: $\longleftarrow$ $\mathbb{H}_{4,1}$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{CHB}} = \big(\widetilde{R}_1^T \ \wedge \ \widetilde{R}_1^Q\big) \ \vee \ \big(\widetilde{R}_2^T \ \wedge \ \widetilde{R}_2^Q\big). \tag{5.38}$$

SHB： $\longleftarrow \quad \mathbb{H}_4$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{SHB}} = \widetilde{R}_1^T \ \wedge \ \big(1 - v_1 > 0 \ \wedge \ 2v_1 - 1 > 0\big). \tag{5.39}$$

注释 5.10。 将 RealTriangularize 应用于所得半代数集 $\mathbb{S}_{4,\ 2}$ 得到空输出，这表明系统 (5.36) 仅在 **HBPs** 中存在于 $\mathbb{S}_{4,\ 1}$。事实上，即使有六个自由参数 $\boldsymbol{\mu}$ 取值于具有经济意义的区域 $[0 < m_i < 1, 0 < s_i < 1, v_i > 0]$，仍有$a_4 = s_2 m_1 + m_2 s_1 + s_1 s_2 > 0$，根据定理 4.3 可确认 $\mathbb{S}_{4,\ 2}$ 为空。另一方面，若将 s_1、v_1和 v_2 保留为自由参数，RealTriangularize 会将 **HBPs** 的系统分解为 28 个正则半代数分支（在变量序 $Y_1 > Y_2 > W_1 > W_2 > s_1 > v_2 > v_1$下耗时约 2.484 秒），为简洁起见，此处省略。如前所见，随着自由参数数量增加，所需的符号计算很容易变得成本高昂且难以处理。

与半代数系统 $\mathbb{H}_4$ 相关的算法 3 7 的实验结果汇总于表 **HBP**、**CHB** 和 **SHB** 在三个微分模型中的计算时间列于表 8。

表 7：系统（5.36）中对应于 **SHB** $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}_0)$ 的样本点。

$\boldsymbol{x}_0$	$\boldsymbol{\mu}_0$	$\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$
(0, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$	$-0.7116035710 < 0$
(0, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2})$	$-1.421874998 < 0$
(0, 0, 0, 0)	$(\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5})$	$-1.911342351 < 0$
(0, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3})$	$-2.138888890 < 0$

表 8：微分模型中**HBP**、**CHB** 和**SHB** 的计算时间（单位：秒）。

模型	**HBP**	**CHB**	**SHB**
Lorenz	0.219	0.281	0.250
Rabinovich–Fabrikant 模型	0.531	1.594	1.016
商业周期模型	0.110	0.125	0.109

6 总结性评论

本文介绍了两种算法方法，用于确定参数多项式微分系统存在给定有界次数不变代数曲面的参数条件。具体而言，我们结合格罗布纳基、饱和与素分解，得到存在轨迹 Zariski闭包的简洁表示（必要条件）；另一方面，我们通过三角分解投影非恒定解，从而恢复精确的可构造轨迹（充要条件）。我们在表 2 中报告了这两种方法在 BZ反应模型中的性能。结果表明，三角分解方法效率更高、灵活性更强，因此特别适用于计算次数更高的不变代数曲面，或对系统

参数施加额外约束。此外，本文还讨论了一种将格罗布纳基与三角分解相结合的替代方法。作为应用，本文刻画了一类 Liénard 微分系统中若干类型的不变代数曲面。研究表明，只要了解该微分系统的不变代数曲线的结构，我们的算法方法就能更便捷、更有效地发挥作用。所得结果表明，所提出的方法能够发现已发表文献中的手工计算错误。

我们利用半代数系统的三角分解方法，提出了一种研究Hopf分岔的系统方法。我们通过两种等价表述，对Hopf分岔点给出了完整的充要刻画：一种基于Hurwitz 行列式和子结式序列的性质，另一种则由特征多项式实部和虚部的最大公因式决定。我们通过多项式最大公因式，推导出了Hopf分岔横截条件的半代数描述。该描述自然导出了一种用于检测所研究系统中Hopf分岔的算法判定程序。此外，我们提出了一种用于计算第一Lyapunov系数的符号-数值投影算法。实验结果表明，所提出的算法方法是有效的。

未来的研究仍有几个富有前景的方向。首先，将我们的符号-数值框架扩展到利用验证区间算术认证第一Lyapunov系数的符号，将为超临界性和亚临界性提供严格的计算机辅助证明。其次，当一般性条件不成立时（即，$\ell_1(\boldsymbol{x}_0) = 0$），将我们的半代数方法和投影技术推广到高阶Lyapunov系数，为算法化检测余维二Bautin（广义Hopf）分岔提供一条系统途径。最后，利用参数多项式系统中的结构稀疏性和对称性，有望进一步降低高维情形下逐分支三角分解的复杂度。

致谢

第二作者谨向王定康教授致以感谢，感谢他在2026年6月27日至28日于杭州举行的“符号计算及其前沿研讨会”期间进行的宝贵讨论。特别感谢他分享用于计算参数多项式最大公因式的软件包。论文的核心数学思想和总体方法归功于作者。作者确认使用了 GPT-6-Astra，以协助完成 MAPLE 代码，该代码用于数值模拟，并展示于图 2中；此外，还用于校对和提升论述的清晰度（具体涉及定理 4.3、推论 4.4以及定理 4.7中的简单性表述）。作者对论文内容及其参考文献的准确性承担全部责任。

参考文献

[1] A. Algaba、M. Domínguez-Moreno、M. Merino 和 A. J. Rodríguez-Luis。Lorenz、Chen 和 Lü系统中的Hopf分岔研究。《非线性动力学》，2015(79):885–902，1999。[2]H. Amann。常微分方程：非线性分析导论，第13卷。德格鲁伊特出版社，柏林，1990。[3]V. Antonov、D. Dolićanin、V. G. Romanovski 和 J. Tóth。May–Leonard非对称模型中的不变平面与周期振荡。*MATCH*数学与计算化学通讯，76:455–474，2016。[4] P. Aubry、D. Lazard 和 M. Moreno Maza。关于三角集理论。符号计算杂志，28(1–2):105–124，1999。

[5]I. K. Aybar、O. O. Aybar、B. Fercec、V. G. Romanovski、S. S. Samal 和 A. Weber。利用计算机代数算法研究化学反应系统的不变量。

*MATCH*数学与计算化学通讯，74:465–480，2015年。[6] A. Bostan、G. Chéze、T. Cluzeau 和 J.-A. Weil。高效计算平面多项式向量场的有理第一积分和达布多项式的算法。计算数学，85(299):1393–1425，2016年。[7] C. W. Brown。QEPCAD B：一个使用柱形代数分解计算半代数集的程序。*ACM SIGSAM* 通讯，37(4):97–108，2003年。[8]A. Campillo 和 M. M. Carnicer。由 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 的叶层给出的不变曲线次数的邻近不等式与界。美国数学会汇刊，349(6):2211–2228，1997年。[9] M. M. Carnicer。非非临界情形下的庞加莱问题。数学年刊，140(2):289–294，1994年。[10] D. Cerveau 和 A. Lins Neto。 $CP(2)$ 中具有不变代数曲线的全纯叶状结构。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，41(4):883–903，1991年。[11] J. Chavarriga 和 I. A. García。非共振情形下的庞加莱问题：一种代数方法。微分几何—动力系统，8:55–68，2006年。[12] C. Chen、J. H. Davenport、J. P. May、M. Moreno Maza、B. Xia 和 R. Xiao。半代数系统的三角分解。符号计算杂志，49:3–26，2013年。[13] C. Chen、O. Golubitsky、F. Lemaire、M. M. Maza 和 W. Pan。全面三角分解。载于 V. G. Ganzha、E. W. Mayr 和 E. V. Vorozhtsov 编，《第十届科学计算中的计算机代数国际研讨会论文集，*CASC 2007*》，计算机科学讲义第4770卷，第73–101页。施普林格，2007年。[14] C. Chen 和 M. Moreno Maza。动力系统平衡点的半代数描述。载于 V. P. Gerdt、W. Koepf、E. W. Mayr 和 E. V. Vorozhtsov 编，《科学计算中的计算机代数》，第101–125页，柏林、海德堡，2011年。施普林格柏林海德堡。[15]C. Chen 和 M. Moreno Maza。计算多项式系统三角分解的算法。符号计算杂志，47(6):610–642，2012年。[16] C. Chen 和 M. Moreno Maza。基于正则链的柱形代数分解量词消去。符号计算杂志，75:74–93，2016年。[17] C. Chen、M. Moreno Maza、W. Pan 和 Y. Xie。关于多项式系统求解器的验证。中国计算机科学前沿，2(1):55–66，2008年。[18] H. Chen、L. Fang 和 X. Zhang。一类 Rayleigh–Liénard 系统的不变代数曲线。数学进展，483:110667，2025年。[19] G. Chéze。多项式时间内计算有界次数的达布多项式和有理第一积分。复杂性杂志，27(2):246–262，2011年。[20] C. Chicone。常微分方程及其应用，第34卷。施普林格，纽约，2006年。[21] C. Christopher。二阶多项式微分方程的刘维尔第一积分。微分方程电子期刊，1999(49):1–7，1999年。[22] C. Christopher 和 J. Llibre。多项式系统可积性的代数方面。动力系统定性理论，1:71–95，1999年。

[23] C. Christopher 和 J. Llibre。通过平面多项式微分系统的不变代数曲线实现可积性。微分方程年刊，16:5–19，2000年。[24] C. Christopher 和 J. Llibre。一族具有任意高次数不变代数曲线、但没有有理第一积分的二次多项式系统。美国数学会会刊，130(7):2025–2030，2002年。[25]G. E. Collins。利用柱形代数分解消去实闭域初等理论中的量词。载于计算机科学讲义，第134–183页。施普林格出版社，柏林，1975年。[26]G. E. Collins。利用柱形代数分解消去实闭域中的量词：概述。*ACM SIGSAM* 通讯，10(1):10–12，1976年。[27]G. E. Collins 和 H. Hong。用于量词消去的部分柱形代数分解。符号计算杂志，12:299–328，1991年。[28] S. C. Coutinho 和 L. Menasché Schechter。全纯叶状结构的代数解：一种算法方法。符号计算杂志，41(5):603–618，2006年。[29] S. C. Coutinho 和 L. Menasché Schechter。平面向量场的代数解。纯粹与应用代数杂志，213(1):144–153，2009年。[30] D. A. Cox、J. Little 和 D. O'Shea。代数几何入门。施普林格，柏林、海德堡，第2版，2005年。[31] D. A. Cox、J. Little 和 D. O'Shea。理想、簇与算法：计算代数几何与交换代数导论。施普林格，Cham，楚格，2015年。[32] G. Darboux。关于一阶一次数代数微分方程的论文。数学与天文学科学通报，2(1):151–200，1878。[33] M. V. Demina。重新探讨 Liénard 动力系统的不变代数曲线。应用数学快报，2018(84):42–48，2018年。[34]M. V. Demina。二维多项式动力系统刘维尔可积性的新代数方面。物理快报 *A*，382(20):1353–1360，2018年。[35] M. V. Demina。Puiseux 级数方法与不变代数曲线。当代数学通讯，24(3):2150007，2022年。[36] F. Dumortier、J. Llibre 和 J. Artes。平面微分系统定性理论。施普林格出版社，柏林，2006年。[37] D. Eisenbud。交换代数：从代数几何的视角出发。施普林格，柏林、海德堡，1995年。[38] M. El Kahoui 和 A. Weber。基于软件组件架构，通过量词消去判定 Hopf分岔。符号计算杂志，30(2):161–179，2000年。[39] M. El Kahoui 和 A. Weber。参数化多项式向量场的符号平衡点分析。载于 V. Ganzha、E. Mayr 和 E. Vorozhtsov 编，《科学计算中的计算机代数》，第71–83页，柏林、海德堡，2002年。施普林格柏林海德堡。[40] H. Errami、M. Eiswirth、D. Grigoriev、W. M. Seiler、T. Sturm 和 A. Weber。利用凸坐标检测化学反应网络中的 Hopf分岔。计算物理杂志，291:279–302，2015年。

[41] R . J. Field, E. Körös, an d R. M. Noyes。 Oscillations in chemical 系统。 II. Thorough 溴酸盐–铈–丙二酸系统中时间振荡的分析。美国化学会志, 94(25):8649–8664, 1972.[42] F. R. Gantmakher。《矩阵理论的应用》。Interscience Publisher, 纽约, 1959.[43] T. J. Garratt, G. Moore, 和 A. Spence。数值检测Hopf分岔的两种方法。载于 R. Seydel, F. W. Schneider, T. Küpper, 和 H. Troger 编，分岔与混沌：分析、算法与应用，第129–133页。Birkhäuser Basel, 巴塞尔, 1991.[44] H. Giacomini, J. Llibre, 和 M. Viano。关于极限环的不存在性、存在性与唯一性。《非线性》, 9(2):501–516, 1996.[45] J. Giné。关于平面微分系统与希尔伯特第十六问题中的若干未决问题。《混沌、孤子与分形》, 31(5):1118–1134, 2007.[46] L. Gonzalez, H. Lombardi, T. Recio, 和 M.-F. Roy。Sturm–Habicht 序列。载于 G. H. Gonnet 编，*ISSAC' 89*：*ACM-SIGSAM 1989*年国际符号与代数计算研讨会论文集，第136–146页，美国纽约州纽约市，1989。ACM出版社。[47]A. Goriely。《动力系统的可积性与不可积性》，第19卷。世界科学出版公司，新泽西州里弗埃奇, 2001年。[48] A. Griewank 和 G. Reddien。用直接方法计算Hopf点。*IMA*数值分析杂志, 3:295–303, 1983.[49]J. Guckenheimer 和 P. J. Holmes。《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》。施普林格出版社, 纽约, 1983.[50] J. Guckenheimer 和 M. Myers。Hopf分岔的计算 II：神经生理学中的三个实例。*SIAM*科学计算杂志, 17:1–27, 1996.[51] J. Guckenheimer, M. Myers, 和 B. Sturmfels。Hopf分岔的计算 I。*SIAM*数值分析杂志, 34:1–21, 1997.[52] M. Han 和 P. Yu。《正规形、Melnikov函数与极限环分岔》，《应用数学科学丛书》第181卷。施普林格, 伦敦, 2012.[53] E. Hubert。关于三角集与三角化分解算法的札记 I：多项式系统。载于 F. Winkler 和 U. Langer 编，《符号与数值科学计算》，第1–39页，柏林、海德堡，2003。施普林格柏林海德堡。[54] Y. Ilyashenko 和 S. Yakovenko。《解析微分方程讲义》。《数学研究生教材》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2008.[55] E. A. Jackson。《非线性动力学展望》。剑桥大学出版社，剑桥，1989。[56]J.-P. Jouanolou。《代数Pfaff方程》。《数学讲义》。施普林格出版社，柏林，1979。[57] N. Kruff 和 S. Walcher。Hopf分岔的坐标无关判据。《离散与连续动力系统：*S*辑》, 13(4):1319–1340, 2020年。[58] Y. Kuznetsov。《应用分岔理论基础》，第112卷。施普林格，纽约，2023年。

[59] Y. Li 和 V. G. Romanovski。含杂食动物的捕食者–被捕食者模型中的Hopf分岔。动力系统定性理论, 18:1201–1224, 2019.

[60] Y. Li 和 V. G. Romanovski。对称三维二次系统的可积性与极限环。应用分析与计算杂志, 11(5):2230–2244，2021年。[61] W.-M. Liu。不使用特征值的 Hopf 分岔判据。数学分析与应用杂志，182:250–256，1994年。[62] J. Llibre 和 X. Zhang。关于多项式微分系统的 Darboux 可积性。动力系统定性理论，11:129–144，2012年。[63] R. Loos。广义多项式余式序列。载于 B. Buchberger、G. E. Collins 和 R. Loos（编），计算机代数：符号与代数计算，第115–137页。施普林格出版社，维也纳，1982年。[64]E. Lorenz。确定性非周期流。大气科学杂志, 20(2):130–141，1963年。[65] Y.-K. Man。使用 Prelle–Singer过程计算一阶常微分方程的闭式解。符号计算杂志，16(5):423–443，1993年。[66] Y.-K. Man 和 M. A. H. MacCallum。Prelle–Singer算法的有理方法。符号计算杂志，24(1):31–43，1997年。[67] J. E. Marsden 和 M. McCracken。*Hopf*分岔及其应用。施普林格出版社，纽约，1976年。[68] S. Mayer、J. Scheurle 和 S. Walcher。向量场的实用正规形计算。应用数学与力学杂志，84:472–482, 2004年。[69] J. Moulin-Ollagnier、A. Nowicki 和 L. M. Strelcyn。关于导子的常数不存在性：Jouanolou定理的证明及其发展。数学科学通报，119:195–233，1995年。[70] C. Pantea 和 V. G. Romanovski。若干生化模型的定性研究。圣彼得堡大学学报：数学，53:214–222, 2020年。[71] J. V. Pereira。向量场、不变簇与线性系统。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊, 51(5):1385–1405，2001年。[72] J. V. Pereira。关于一般型叶层的庞加莱问题。数学年刊, 323(2):217–226，2002年。[73] T. Petek 和 V. G. Romanovski。关于 Poincaré–Dulac正规形的计算。微分方程杂志，452:113781，2026年。[74] H. Poincaré。由微分方程定义的曲线（第四部分）。纯粹与应用数学杂志，2:151–217，1886年。[75] M. J. Prelle 和 M. F. Singer。微分方程的初等第一积分。美国数学会汇刊，279(1):215–229，1983年。[76] T. Puu。吸引子、分岔、& 混沌。施普林格出版社，柏林、海德堡，2003年。[77] M. Rabinovich 和 A. Fabrikant。非平衡介质中波的随机自调制。实验与理论物理杂志，50(2):311，1979。[78] D. Roose。Hopf分岔点的计算算法及其与其他方法的比较。计算与应用数学杂志，12/13:517–529，1985年。

[79] D. Roose 和 V. Hlavaček。一种计算 Hopf分岔点的直接方法。*SIAM 应用数学杂志 pp应用数学*，45:879–894，1985年。[80] J. Scheurle 和 S. Walcher。关于正规形计算。载于 P. Newton、P. Holmes 和 A. Weinstein（编），几何、力学与动力学。施普林格出版社，纽约，2002年。[81] S. K. Scott。化学动力学中的振荡、波与混沌。牛津大学出版社，牛津，1994年。[82] A. Strzeboński。使用柱形代数公式表示的半代数集计算。载于*2010*年国际符号与代数计算研讨会论文集，第61–68页，2010年。[83] T. Sturm、A. Weber、E. O. Abdel-Rahman 和 M. E. Kahoui。研究用于解决代数生物学中 Hopf分岔问题的代数与逻辑算法。计算机科学中的数学，2:493–515，2009年。[84] B. Sturmfels。多项式方程组求解。CBMS区域会议系列。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002年。[85] J. Tóth、A. L. Nagy 和 D. Papp。反应动力学：练习、程序与定理。施普林格出版社，纽约，2018年。[86] J. J. Tyson。别洛乌索夫–扎博廷斯基反应。施普林格出版社，柏林、海德堡，1976年。[87] S. Walcher。关于庞加莱问题。微分方程杂志，166(1):51–78，2000年。[88]D. Wang。将多项式系统分解为简单系统。符号计算杂志，25(3):295–314，1998年。[89]D. Wang。计算三角系统和正则系统。符号计算杂志，30(2):221–236，2000年。[90] D. Wang。消元方法。施普林格出版社，维也纳，2001年。[91] D. Wang、H. Wang、J. Wei 和 F. Xiao。参数化一元多项式矩阵的扩展 GCRD算法及其在参数化史密斯标准形中的应用。符号计算杂志，115:248–265，2023年。[92] D. Wang、H. Wang 和 F. Xiao。参数化一元多项式的扩展 GCD算法及其在参数化史密斯标准形中的应用。载于*2020*年国际符号与代数计算研讨会论文集，第442–449页，2020年。[93] D. Wang 和 B. Xia。具有实解分类的生物系统稳定性分析。载于*2005*年国际符号与代数计算研讨会论文集，第354–361页，纽约，2005年。美国计算机协会。[94] D. Wang 和 Z. Zheng。符号计算中的微分方程。比克豪泽，巴塞尔，2005年。[95] V. Weispfenning。实代数的量词消去——三次情形。载于*1994*年国际符号与代数计算研讨会论文集，第258–263页，1994年。[96] V. Weispfenning。实代数的量词消去——二次情形及其他。工程、通信与计算中的应用代数，8:85–101，1997年。[97] W.-T. Wu。数学机械化：机械化几何定理证明、机械化几何问题求解与多项式方程求解。克吕维尔学术出版社，马萨诸塞州诺韦尔，2001年。

[98] L. Yang. 关于确定参数多项式实根数量的最新进展。符号计算杂志，28：225–242，1999。

[99] X. Zhang。 动力系统的可积性：代数与分析，第47卷。施普林格，新加坡，2017年。