arXiv:2611.32916v1 [cond-mat.supr-con] 24 Nov 2026

从费米子到涡旋： d波超导体中相位序化的微观模拟

AliRayat[1] 和 Gia-Wei Chern[1]1 *Department of Physics, University of Virginia, Charlottesville, Virginia 22904, USA*（日期：2026年11月25日）

直接从微观费米子哈密顿量描述浴诱导的超导相序，仍然是一项极具挑战性的工作。在此，我们利用近期提出的绝热变分原理（AVP），为这一问题构建了一个微观框架，并展示其在二维 d波超导体中的应用。其核心构造将演化中的空间非均匀键配对场映射为受约束的Bogoliubov–de Gennes态，并由相应的拉格朗日乘子确定热力学驱动力。该方法在保留微观电子结构的同时，实现了超导序的耗散演化，而无需假设现象学的金兹堡–朗道自由能泛函。从无序的配对构型出发，我们解析了相干性通过涡旋–反涡旋湮灭而产生的过程，以及局域电子谱随之发生的演化。涡旋衰减和动力学标度再现了二维相位排序的特征动力学，为该框架提供了非平凡的基准检验。与条纹序和对密度波序相互交织的超导体中，这一与求解器无关的AVP表述为微观研究耗散序化和亚稳性开辟了路径。

超导性是集体量子有序和自发对称性破缺的一种显著表现 [1, 2]。它的出现不仅需要电子配对，还需要复序参量在空间上具有相干性 [3]。快速冷却进入超导区后，最初无序的配对场可以通过涡旋–反涡旋湮灭以及相位相干区域的扩展而形成相干性 [4–6]。这一过程在非常规d波超导体中尤其引人关注，因为其符号变化的配对可由晶格键上的复场表示 [7–10]。不断演化的纹理会重塑电子谱，包括与节点配对和涡旋核相关的低能准粒子态 [11–13]。因此，理解超导相干性与电子结构如何协同发展，是一个重要的非平衡多体问题。

超导相序通常用含时金兹堡–朗道理论（TDGL）及相关相场方法来描述 [14–16]。这些理论通过粗粒化自由能泛函以及针对序参量的唯象演化方程，刻画涡旋运动、缺陷湮灭和动力学标度。微观推导依赖于对配对振幅及其时空变化所作的严格展开 [17, 18]，而在弛豫过程中出现强烈非均匀纹理时，这些展开通常会失效。这类描述将电子自由度吸收到有效系数中，而不是对其进行显式解析。因此，要解析不断演化的超导纹理中的电子结构，就需要直接联系到底层的费米子哈密顿量。

相互作用晶格模型为研究非常规配对及其与电荷序和磁序之间的竞争提供了天然的框架。在平均场处理下，Bogoliubov–de Gennes (BdG) 理论求解空间非均匀配对构型及其电子准粒子态 [2, 19–25]。自洽解描述平衡态或亚稳定定态，而这些状态本身也可能在空间上不均匀。其动力学拓展——含时 BdG 理论——可在一般含时变分原理 (TDVP) 框架内构建，并已广泛用于研究相互作用淬火后的超导动力学 [26–31]。这里考虑的弛豫过程具有耗散性，并非这类相干的封闭系统动力学所能描述。核心任务是构建随演化的序参量而变化的热力学景观，其中微观电子态须能一致地再现瞬时序，并提供驱动其弛豫的力。

近期提出的绝热变分原理（AVP）通过将序参量作为约束施加于微观多体态 [32]，以一种与求解器无关的方式构建这一景观。假设电子弛豫相对于集体演化足够迅速，AVP 会将每个指定构型与一个受约束准平衡态相关联。其配对期望值再现瞬时序

参量，而共轭拉格朗日乘子则确定自由能导数。由此得到的微观力既不需要唯象金兹堡–朗道泛函，也不需要局域梯度展开。非线性 Mori–Zwanzig 投影理论为相应的约化动力学提供了系统的理论基础，其中包括可逆演化、耗散和涨落 [32–35]。

本文构建了该框架的受限BdG实现，用于研究具有吸引性最近邻相互作用的方格子扩展 Hubbard 模型中的相位序化。我们保留独立的复键配对场，从而允许局部偏离纯 d波构型，并使其演化

遵循纯弛豫的模型 A 动力学。从无序构型出发，模拟通过涡旋–反涡旋湮灭再现超导相干性的增长，同时追踪局域电子谱的演化。涡旋衰减和关联标度为二维相位排序的既有动力学提供了非平凡的基准 [4–6]。这些结果展示了从费米子配对到集体涡旋动力学的微观路径，并在整个弛豫过程中保持演化中的序参量与电子态相互一致。

我们考虑具有吸引性最近邻相互作用且格点上相互作用为零的方格子扩展 Hubbard 模型 [19, 36, 37],

$$\hat{\mathcal{H}} = -t \sum_{\langle ij\rangle,\sigma} (\hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}\hat{c}_{j\sigma} + \text{h.c.}) - V \sum_{\langle ij\rangle} \hat{n}_i\hat{n}_j - \mu \sum_i \hat{n}_i, \quad (1)$$

其中 $\hat{n}_i = \sum_\sigma \hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}\hat{c}_{i\sigma}$, $V > 0$，且每条无向键仅计数一次。密度吸引支持单态和三态键配对通道。在相互竞争的配对态中，半填充附近更有利于单态 $d_{x^2-y^2}$ 序 [19, 36, 38]。因此，我们聚焦于自旋单态通道 [39], ，其键算符和序参量为

$$\hat{B}_{ij} = \hat{c}_{j\downarrow}\hat{c}_{i\uparrow} - \hat{c}_{j\uparrow}\hat{c}_{i\downarrow}, \qquad \Delta_{ij} = -\frac{V}{2}\langle \hat{B}_{ij}\rangle. \quad (2)$$

对称复场 $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$ 是动力学变量。均匀的 $d_{x^2-y^2}$ 态在水平键和垂直键上的配对符号相反。为表征空间非均匀序，我们使用局域投影

$$\Delta^d_i = \frac{1}{4}\left(\Delta_{i,i+\hat{x}} + \Delta_{i,i-\hat{x}} - \Delta_{i,i+\hat{y}} - \Delta_{i,i-\hat{y}}\right), \quad (3)$$

如图1所示。该投影提取一般键构型的局域 d波分量，该构型也可能包含扩展 s 分量。

我们假设，集体配对场的演化速度远低于其余电子自由度的弛豫速度。时间尺度分离启发了一个类似于 Born–Oppenheimer 近似的绝热描述：准粒子在每个瞬时键构型下达到平衡，从而为其缓慢演化提供热力学景观。由于配对场本身就是电子期望值，准平衡态必须复现给定的 Δ_{ij} （由方程（2）给出）。通过受约束的变分极小化来强制满足这一一致性，是近期提出的绝热变分原理（AVP）的核心构造 [32]。

在固定温度和化学势下，
电子巨势的受应变极小值定义了 $F[\Delta]$。其导数给出驱动集体弛豫的热力学力。我们在配对通道平均场

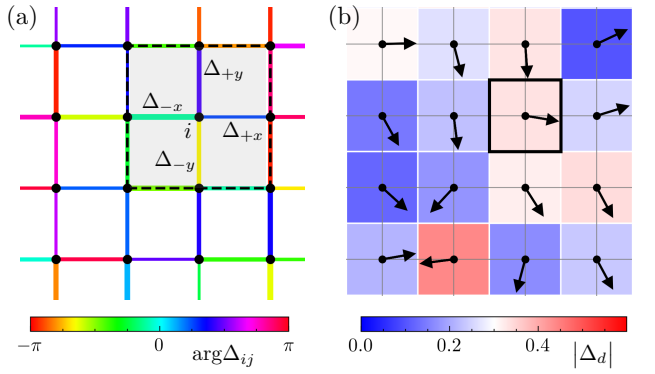


图 1. 从键配对到局域 d波序的映射。(a) 键场 Δ_{ij}，按相位着色。格点 i相邻的四条键，标记为 $\Delta_{\pm x}$ 和 $\Delta_{\pm y}$，通过公式 Δ^d_i （3）确定 d波场，其颜色表示其幅值，箭头表示其相位。黑色方框标识格点 i。

近似中实现这一构造，将电子态限制为归一化的高斯密度算符 $\hat{\rho}_{\mathrm{G}}$。辅助拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_{\mathrm{G}}\hat{\mathcal{H}}) + T\,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_{\mathrm{G}}\ln\hat{\rho}_{\mathrm{G}}) - \sum_{\langle ij\rangle}\left[f^*_{ij}\left(\Delta_{ij} + \frac{V}{2}\langle\hat{B}_{ij}\rangle\right) + \text{c.c.}\right], \quad (4)$$

其中，相互作用期望值在保留的自旋单态配对通道中计算。复拉格朗日乘子 f_{ij} 强制每个给定键序的两个分量，并且是与 Δ_{ij}共轭的热力学力。在高斯流形内进行变分，可得到受约束 BdG 哈密顿量的热态，

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{BdG}} = -t\sum_{\langle ij\rangle,\sigma}(\hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}\hat{c}_{j\sigma} + \text{h.c.}) - \mu\sum_i \hat{n}_i + \sum_{\langle ij\rangle}(\Delta^{\mathrm{eff}}_{ij}\hat{B}^{\dagger}_{ij} + \text{h.c.}), \quad (5)$$

其中 $\Delta^{\mathrm{eff}}_{ij} = -(V/2)(\langle\hat{B}_{ij}\rangle + f_{ij})$。在这种配对通道近似中，正常态能带保持不变。

在数值计算中，我们直接迭代组合有效势 $\Delta^{\mathrm{eff}}_{ij}$，对 BdG 矩阵进行对角化，并调节这些势，直到热态配对期望值重现给定的 Δ_{ij}。收敛时，$\Delta^{\mathrm{eff}}_{ij} = \Delta_{ij} - (V/2)f_{ij}$，因此可通过给定配对场与有效配对场之差恢复热力学力。受约束变分问题的驻定性给出

$$f_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial\Delta^*_{ij}} = \frac{2}{V}\left(\Delta_{ij} - \Delta^{\mathrm{eff}}_{ij}\right), \quad (6)$$

将 Δ_{ij} 和 Δ^*_{ij} 视为相互独立。因此，拉格朗日乘子就是自由能的负导数，无需计算或数值微分 F即可提供热力学力。在

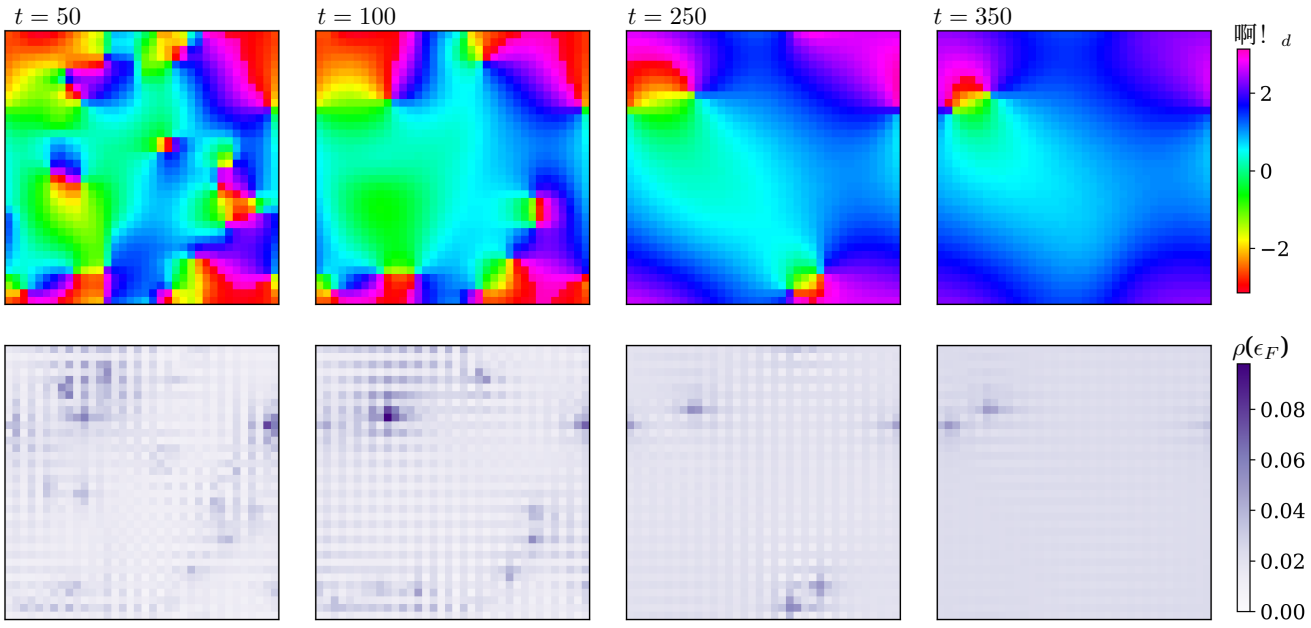


图2. 超导相序及其伴随的电子重构。从左到右，列出在 $t = 50$、100、250 和 350 时的代表性快照，时间以 t_0为单位。顶行：局域 $\theta_i = \arg \Delta_i^d$-波配对场的相位。涡旋和反涡旋以相位奇点的形式出现，并通过附录D中所述的整数晶格面绕数加以识别。底行：对应的费米能级局域态密度 $\rho_i(\epsilon_F)$，能量相对于化学势测量。随着涡旋和反涡旋湮灭，相位纹理逐渐粗化；增强的费米能级谱权重则集中在残留的涡旋核附近。

无约束的平衡解处，乘子为零，此时恢复通常的 BdG 能隙条件。

实部和虚部配对算符并不构成封闭的对易代数：它们的对易子会生成密度算符和跃迁算符。我们关注纯弛豫动力学，即非守恒配对场的模型 A 动力学 [15], ，并忽略涉及这些额外期望值的可逆贡献。确定性的运动方程为

$$\frac{d\Delta_{ij}}{dt} = -\Gamma \frac{\partial F}{\partial \Delta_{ij}^*} = \Gamma f_{ij}, \tag{7}$$

其中 $\Gamma > 0$是一个唯象动力学系数，单位为能量/时间。我们将 $t_0 = V/(2\Gamma)$定义为时间单位。该演化过程沿电子态的光滑分支降低约束自由能 F。在整个弛豫过程中，每一瞬时键构型下都会求解受约束的 BdG 问题，以确保演化中的配对场与其微观期望值 [40]保持一致。

现在，我们将受限 AVP 动力学应用于 36×36 方格晶格上的超导相位序化，并施加周期性边界条件。我们以空间上无序的复数值初始化键场，并在固定电子温度下，使用 $V = 4t$、$T = 0.05t$和 $\mu = 0$跟踪其弛豫过程。初始配对场的实部和虚部分别从高斯分布中独立采样，不对水平键与垂直键施加局域的 t-波关系。能量以跃迁 t为单位测量，时间以 t_0为单位。

图 2 展示了配对相位的代表性快照 $\theta_i = \arg \Delta_i^d$及其对应的费米能级局域态密度。局域相干性迅速形成：在 $t = 50$这一最早展示的快照中，相位已在广阔区域内平滑变化。然而，全局相干性尚未建立，因为纹理中仍有大量涡旋和反涡旋，其周围的相位分别绕转 $+2\pi$ 和 -2π。随后，系统通过涡旋–反涡旋湮灭继续弛豫，缺陷数量随之减少，相干性得以延伸至越来越大的距离。

随附的局域态密度图揭示了与这一演化中的相位纹理相关的电子重构。费米能处的局域谱权重 $\rho_i(\epsilon_F)$ 根据瞬时的约束 BdG 本征态计算得到。增强的谱权重集中在相位奇点附近。随着涡旋和反涡旋湮灭，局域态密度背景变得更加均匀，而剩余核心附近的局域增强仍然存在。这种空间对应关系将集体相位序化与其微观电子特征联系起来，而二者均由同一组不断演化的受限态获得。

我们通过涡旋密度来量化有序化动力学 $\rho_v(t)$，其中同时统计涡旋和反涡旋的数量。图 3 显示，初始瞬态之后出现了大致的反时间衰减。

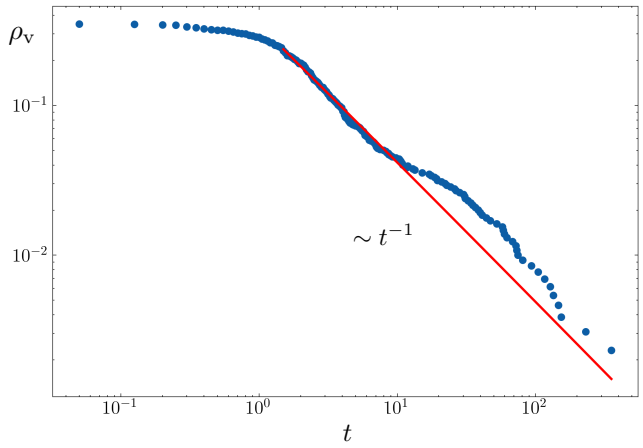


图 3. 超导相序过程中的涡旋密度 $\rho_v(t)$，包括涡旋和反涡旋。时间以 t_0 为单位。蓝色符号表示模拟结果；红线表示参考行为 t^{-1}。文中讨论了一种包含对数修正的探索性拟合。

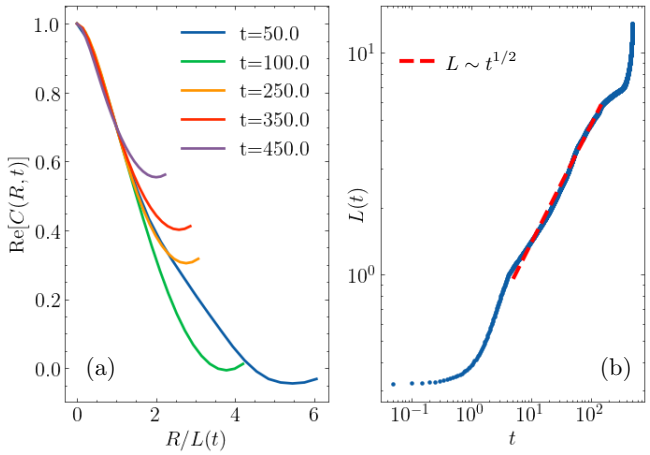


图 4. 超导关联的动力学标度。（a）在 $t = 50$、100、250、350 和 450 时的归一化配对关联，绘制为 $r/L(t)$ 的函数。较小标度间距处近似发生塌缩，而在较晚时刻，较大距离处的偏离变得更加明显。（b）提取的增长长度 $L(t)$。红色虚线表示参考增长定律 $L(t) \sim t^{1/2}$。时间以 t_0 为单位。

为考察这一主导行为可能存在的偏离，我们考虑对数修正形式

$$\rho_v(t) \simeq \frac{A}{t}\left[1 + \gamma \ln t\right], \tag{8}$$

其中 A 是振幅，而 t 以以上指定的时间单位表示。探索性拟合得出一个较小的正系数 $\gamma \simeq 0.05$，但鉴于晶格尺寸有限且标度窗口较窄，这一估计仍属初步结果。这种修正与二维相位涡旋已确立的动力学规律一致：对数形式的涡旋–反涡旋吸引在迁移率近似恒定时会导致密度按反时间衰减，而涡旋阻力额外的对数增长则会减缓湮灭，并产生渐近行为 $\rho_v(t) \sim \ln(t)/t$ [5, 6]。我们的结果支持近似反时间衰减，并显示出对数减缓效应较弱，但不足以精确确定渐近修正。

空间关联提供了互补性的表征。图 4(a) 展示了归一化等时配对关联 $C(r,t)$ 的实部随 $r/L(t)$ 的变化。较小标度化间距处近似的曲线塌缩支持动力学标度的出现，$\mathrm{Re}\, C(r,t) \simeq \mathcal{C}[r/L(t)]$。在较大间距处，尤其是在较晚时刻出现的偏离，与有限尺寸效应相符，因为不断增长的相干长度逐渐接近晶格维数。图 4(b) 中提取的长度与领先的扩散定律 $L(t) \sim t^{1/2}$ 一致。在二维情况下，$\rho_v(t) \sim L(t)^{-2}$，将这种平方根增长与领先阶的反时间涡旋衰减联系起来；微弱的对数修正对应于长度增长的轻微减缓。总体而言，缺陷衰减和关联标度为微观框架提供了一个非平凡的基准用于检验其与既有的相位有序化动力学 [4–6] 的一致性。

总之，我们首次直接从扩展哈伯德哈密顿量模拟了耗散性超导相位序化。AVP 构造确保演化中的配对场与受约束电子态之间保持一致，拉格朗日乘子提供热力学力，而 BdG 本征态则解析相应的局域谱。与传统二维粗化相一致的涡旋衰减和关联标度提供了一个非平凡的基准：集体涡旋动力学从微观热力学景观中涌现，而无需预先设定唯象金兹堡–朗道泛函。

除了突发热淬火之外，AVP 还可用于研究其他浴耦合协议，包括泵浦–探测实验中的超导恢复，以及 Kibble–Zurek 退火中与冷却速率相关的缺陷形成[41–46]。这些应用要求电子平衡相对于集体演化保持快速；在光激发之后，绝热描述将适用于准粒子快速弛豫后的恢复过程。通过引入适当的耗散项和涨落项，该框架可用于研究无序诱导的配对不均匀性、涡旋的钉扎与动力学阻滞，以及无序诱导或自发生成的配对玻璃态，从而解析超导相干性的微观势垒[24, 47–50]。

求解器无关表述允许纳入超越当前高斯近似的、更具关联性的电子态。其主要计算瓶颈——反复进行受约束电子计算——也自然成为机器学习加速的目标。基于原子级力场和晶格方面的进展——

哈密顿量模拟 [51–58]，受约束 AVP 解可用于训练模型，使其直接根据配对构型预测热力学力，同时保持全局相位协变性和晶格对称性。此类模型可减少对迭代电子求解的需求，并支持更大型的缺陷网络和更长的弛豫时间。

一个特别重要的研究方向是超导性与条纹序或向列序的耦合演化。将配对场、电荷场、自旋场和向列场一并纳入模型，便可对交织弛豫开展微观研究，包括空间调制的配对密度波态。这类模拟可以揭示电荷畴或向列畴如何引导涡旋运动、竞争序如何在涡旋晕中形成，以及耦合缺陷是否会在全局相干性建立之前将系统困住 [59–70]。这将把电子序之间的微观竞争与超导序的形成、恢复及亚稳性联系起来。

致谢

本研究得到美国能源部基础能源科学办公室资助，合同编号为 DE- SC0020330。作者感谢弗吉尼亚大学研究计算中心提供计算资源和技术支持，为本文报告的研究成果作出了贡献。

附录 A：配对通道与半填充超导态

仅靠最近邻密度吸引并不能选定自旋单态通道。定义式（ B_{ij}2）中的未归一化单态算符 ˆ，再引入三重态矢量 ˆ $\boldsymbol{T}_{ij} = (\sqrt{2}\hat{c}_{j\uparrow}\hat{c}_{i\uparrow}, \hat{c}_{j\downarrow}\hat{c}_{i\uparrow} + \hat{c}_{j\uparrow}\hat{c}_{i\downarrow}, \sqrt{2}\hat{c}_{j\downarrow}\hat{c}_{i\downarrow})^{T}$。对于不同格点，费米子反对易关系给出精确恒等式

$$\hat{n}_i\hat{n}_j = \frac{1}{2}\left(\hat{B}^{\dagger}_{ij}\hat{B}_{ij} + \hat{\boldsymbol{T}}^{\dagger}_{ij}\cdot\hat{\boldsymbol{T}}_{ij}\right). \tag{A1}$$

因此，相互作用中包含 $-(V/2)\,\hat{}B^{\dagger}_{ij}\,\hat{}B_{ij}$，以及耦合常数相同的相应三重态贡献。保留单态反常通道是一种平均场限制，此处的依据是其在半填充附近具有有利的配对不稳定性。扩展哈伯德模型的平均场研究发现， $d_{x^2-y^2}$ 配对在半填充附近更受青睐；随着填充率降低， p波配对和扩展-s配对逐渐具有竞争力 [19, 36]。相关的弱耦合计算也发现，随着费米面随掺杂而改变， d波超导性与手性 p波超导性之间存在竞争 [38]。

为明确比较我们实现中采用的正常态能带各通道，取 $\xi_{\boldsymbol{k}} = -2t(\cos k_x + \cos k_y) - \mu$ 以及归一化方式相同的形状因子

$$g_d = \frac{\cos k_x - \cos k_y}{\sqrt{2}}, \qquad g_s = \frac{\cos k_x + \cos k_y}{\sqrt{2}}, \qquad g_{p_x} = \sin k_x, \qquad g_{p_y} = \sin k_y, \tag{A2}$$

其布里渊区平均值满足 $N^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}} |g_\nu|^2 = 1/2$。这里， s 表示扩展的-s 键通道，而非位点内配对。将线性化配对方程投影到某一通道上，可得

$$\chi_\nu(T) = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} |g_\nu(\boldsymbol{k})|^2 \frac{\tanh[\xi_{\boldsymbol{k}}/(2T)]}{2\xi_{\boldsymbol{k}}}, \qquad 2V\chi_\nu(T_c) = 1, \tag{A3}$$

其中， $\xi_{\boldsymbol{k}} = 0$ 处的比值应理解为 $1/(4T)$。公因子 $2V$ 来自每条无向键只计一次的相互作用以及方程（A2）中的归一化；比较单态和三重态通道时，这一点至关重要。

对于固定正常态能带的半填充情形， $\mu = 0$。在范霍夫点（ d波形状因子在此处非零（π、0）和（0， π），而 p波形状因子在这些点处为零。此外， g_s 在整个半填充费米面上均为零。因此，低温下的 d波磁化率受益于库珀奇异性的范霍夫增强，而其他通道得到的贡献奇异性较弱。在 $T/t = 0.05$ 处进行数值布里渊区积分，得到 $\chi_d/\chi_{p_x} = 2.1614$，数值见表 I。

磁化率检验正常态的不稳定性。作为补充，我们在配对转变以下，分别在各个纯通道内使均匀配对巨势最小化。对于准粒子能隙 $\Delta_{\boldsymbol{k}} = \delta g_\nu(\boldsymbol{k})$，相对于未配对态的每格点巨正则势差为

$$\frac{F_\nu - F_{\mathrm{normal}}}{N} = \frac{|\delta|^2}{2V} - \frac{2T}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \ln\left[\frac{\cosh\left(\sqrt{\xi^2_{\boldsymbol{k}} + |\delta g_\nu(\boldsymbol{k})|^2}/(2T)\right)}{\cosh[\xi_{\boldsymbol{k}}/(2T)]}\right]. \tag{A4}$$

对于手性三重态的比较，$g_{p_x+ip_y} = (\sin k_x + i \sin k_y)/\sqrt{2}$ 具有相同的归一化。在 $V/t = 4$ 和 $T/t = 0.05$ 时，d 波态在表 I 所比较的均匀纯配对态中具有最低的巨正则势。这些计算验证了本文所研究的超导扇区；但它们并未证明，相对于电荷有序或相分离，该态是完整密度相互作用哈密顿量的无约束基态。在整个配对通道实现中，均忽略正常态的 Hartree 和 Fock 重整化，因此 $\mu = 0$ 指的是其固定的半填充能带。

配对通道	$t\chi_\nu$	$(F_\nu - F_{\mathrm{normal}})/(Nt)$
单态 $d_{x^2-y^2}$	0.852926	−0.206139
扩展单态 s	0.101185	0
三重态 p_x 或 p_y	0.394615	−0.145948
三重态 $p_x + ip_y$	0.394615	−0.161517

表 I. $\mu = 0$ 与 $T/t = 0.05$ 的配对通道比较。第二列是式（A3）中的正常态磁化率。最后一列是在 $V/t = 4$ 处、以 t 为单位的每格点最小化巨正则势差。布里渊区求和在 1200×1200 中点网格上计算；在 800×800 网格上，所列数位保持不变。扩展 s 通道在这些参数下没有非零的纯通道解。

附录 B：约束平均场理论与电子观测量

1. 约束自由能

演化中的场 Δ_{ij} 通过式（2）规定反常期望值。平均场AVP在满足这些约束的条件下，对归一化高斯密度算符 $\hat{\rho}_{\mathrm{G}}$ 上的配对通道巨正则势泛函进行最小化：

$$
\begin{aligned}
F[\Delta] &= \min_{\substack{\hat{\rho}_{\mathrm{G}} \\ \langle \hat{B}_{ij} \rangle = -(2/V)\Delta_{ij}}} F_{\mathrm{MF}}[\hat{\rho}_{\mathrm{G}}], \\
F_{\mathrm{MF}}[\hat{\rho}_{\mathrm{G}}] &= -t \sum_{\langle ij \rangle, \sigma} \langle \hat{c}^\dagger_{i\sigma} \hat{c}_{j\sigma} + \mathrm{h.c.} \rangle - \mu \sum_i \langle \hat{n}_i \rangle - \frac{V}{2} \sum_{\langle ij \rangle} |\langle \hat{B}_{ij} \rangle|^2 + T \,\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_{\mathrm{G}} \ln \hat{\rho}_{\mathrm{G}}).
\end{aligned}
\tag{B1}
$$

泛函中的所有期望值均在试探态中计算。特别是，在改变该态之前，不得将它们替换为目标值。式（4）中的拉格朗日量施加了每个约束的实部和虚部。其平稳高斯态是式（5）所示热态，其中 $\Delta_{ij}^{\mathrm{eff}} = -(V/2)(\langle \hat{B}_{ij} \rangle + f_{ij})$。收敛时，反常期望值等于其目标值，该关系简化为 $\Delta_{ij}^{\mathrm{eff}} = \Delta_{ij} - (V/2) f_{ij}$。

包络恒等式为 $dF = -\sum_{\langle ij \rangle} (f_{ij}^* d\Delta_{ij} + f_{ij} d\Delta_{ij}^*)$，从而得到 $f_{ij} = -\partial F / \partial \Delta_{ij}^*$ 如式（6）所示。因此，拉格朗日乘子正是驱动式（7）的热力学力。由于 F 和 Δ_{ij} 均具有能量单位，f_{ij} 是无量纲的。对于 $\Delta_{ij} = x_{ij} + i y_{ij}$，我们使用 $\partial / \partial \Delta_{ij}^* = (\partial/\partial x_{ij} + i \partial/\partial y_{ij})/2$，因此 $\partial F / \partial x_{ij} = -2 \,\mathrm{Re}\, f_{ij}$ 和 $\partial F / \partial y_{ij} = -2 \mathrm{Im}\, f_{ij}$。这些恒等式确定了动力学中所涉及的符号和因子。

为数值计算 F，令 $F_{\mathrm{BdG}}[\Delta^{\mathrm{eff}}] = -T \ln \mathrm{Tr} \exp[-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{BdG}}(\Delta^{\mathrm{eff}})/T]$ 表示辅助二次算符的巨正则势。用其正能量本征值表示，$F_{\mathrm{BdG}} = \mathrm{Tr}\; h - 2T \sum_{E_\nu > 0} \ln[2 \cosh(E_\nu / 2T)]$；$\mathrm{Tr}\; h$ 项保留了约化Nambu表示中的正常态常数。在收敛的约束解处，

$$
F[\Delta] = F_{\mathrm{BdG}}[\Delta^{\mathrm{eff}}] + \frac{2}{V} \sum_{\langle ij \rangle} \left[(\Delta_{ij}^{\mathrm{eff}})^* \Delta_{ij} + \Delta_{ij}^{\mathrm{eff}} \Delta_{ij}^* - |\Delta_{ij}|^2 \right]. \tag{B2}
$$

该修正去除了辅助配对源能量，并恢复了物理平均场相互作用能。当乘子为零时，它退化为熟知的凝聚能修正 $(2/V) \sum_{\langle ij \rangle} |\Delta_{ij}|^2$。因此，若不加入这一修正，仅凭源项二次巨正则势不足以在非平衡状态下监测约束自由能。当存在多个约束驻态解时，力恒等式适用于所跟踪的光滑分支。

2. BdG 本征态与配对响应

在约化Nambu基底（$\hat{c}_{1\uparrow}$，……，$\hat{c}_{N\uparrow}$，$\hat{c}^{\dagger}_{1\downarrow}$，……，$\hat{c}^{\dagger}_{N\downarrow}$）^{T}中，受约束二次算符的矩阵及其本征值问题为

$$H_{\mathrm{BdG}}[\Delta^{\mathrm{eff}}]=\begin{pmatrix} h & \Delta^{\mathrm{eff}} \\ (\Delta^{\mathrm{eff}})^{\dagger} & -h^{T} \end{pmatrix}, \qquad h_{ij}=-tA_{ij}-\mu\delta_{ij}, \qquad H_{\mathrm{BdG}}\begin{pmatrix} u_\nu \\ v_\nu \end{pmatrix}=E_\nu\begin{pmatrix} u_\nu \\ v_\nu \end{pmatrix}. \tag{B3}$$

这里 A_{ij} 是最近邻邻接矩阵，而对称矩阵 Δ^{eff} 包含最近邻键上的有效势。本征矢具有单位范数，$\sum_i[|u_\nu(i)|^2+|v_\nu(i)|^2]=1$。自旋无关单态问题具有成对出现的正、负能量。热占据数为 $n_F(E)=[\exp(E/T)+1]^{-1}$，其中化学势已包含在 h 中。

为区分输入的配对势与计算得到的反常响应，定义

$$D_{ij}[\Delta^{\mathrm{eff}}]\equiv-\frac{V}{2}\langle\hat{B}_{ij}\rangle_{\Delta^{\mathrm{eff}}}=\frac{V}{2}\sum_{E_\nu>0}[u_\nu(i)v_\nu^{*}(j)+u_\nu(j)v_\nu^{*}(i)]\tanh\!\left(\frac{E_\nu}{2T}\right). \tag{B4}$$

期望值上的下标表示由指定有效势生成的热态。此公式中不额外引入自旋简并因子。内部电子计算求解逆问题

$$D_{ij}[\Delta^{\mathrm{eff}}]=\Delta_{ij}. \tag{B5}$$

右侧的目标是固定的瞬时序，而不是试探有效势。普通的平衡自洽性则将响应设为进入 BdG 哈密顿量的同一场。只有当 $f_{ij}=0$ 时，这两个条件才会重合。逆问题只需在动力学所探索的受约束分支上求解；不假设全局唯一性或可逆性。

3. 局域配对对称性

动力学场定义在键上，其以格点为中心的 d-波投影为式（3）。相应的扩展 s分量为

$$\Delta_i^{s}=\frac{1}{4}\left(\Delta_{i,i+\hat{x}}+\Delta_{i,i-\hat{x}}+\Delta_{i,i+\hat{y}}+\Delta_{i,i-\hat{y}}\right). \tag{B6}$$

我们用上标 d和 s 标记局域配对对称性。具有水平键和垂直键Δ_0 与 $-\Delta_0$ 的均匀态满足 $\Delta_i^{d}=\Delta_0$ 和 $\Delta_i^{s}=0$，而键值相等时则对应扩展-s 态。这两个投影均由实际演化的 Δ_{ij}计算，而非由 $\Delta_{ij}^{\mathrm{eff}}$计算。键的独立演化允许局部混入扩展-$s$ 分量，即使是在强烈非均匀纹理附近也是如此，尽管分析聚焦于 d-波相干性。

4. 局域态密度

同一组瞬时受限本征态决定电子谱 [2, 11, 23]。对于一个自旋分量，分格点局域态密度为

$$\rho_i(\omega)=\sum_{E_\nu>0}\left[|u_\nu(i)|^2\delta_\eta(\omega-E_\nu)+|v_\nu(i)|^2\delta_\eta(\omega+E_\nu)\right], \qquad \delta_\eta(x)=\frac{\eta}{\pi(x^2+\eta^2)}. \tag{B7}$$

频率是相对于 μ测量的，而 $\eta>0$ 是谱展宽。每个自旋的归一化为 $\int d\omega\,\rho_i(\omega)=1$；自旋求和局域态密度是该表达式的两倍。局域态密度不乘以费米占据因子，因为它是谱观测量，而不是占据态密度。如果存在恰好位于零能量的模式，则必须单独计入其零模谱权重，而不能通过正能量筛选将其舍弃。通过在B7式中取 $\omega=0$，即可得到费米能级图。低能谱权重的增强需结合配对振幅和相位绕数进行解读，因为节点准粒子在 d波超导体中也会有所贡献。

附录 C：耗散动力学与数值实现

1. 约化动力学与键代数

对于每个瞬时键构型，都在固定温度下求解电子问题。系统以绝热方式重新计算其本征态和热占据数，而非在实时间中进行演化。我们仅保留式（7）所述的确定性耗散动力学；唯象系数 Γ 定义了时间单位 $t_0 = V/(2\Gamma)$。对于光滑受约束分支上的收敛内层求解，式（6）意味着

$$\frac{dF}{dt} = -2\Gamma \sum_{\langle ij \rangle} |f_{ij}|^2 \leq 0. \tag{C1}$$

有限电子温度决定受限态。此处报告的序参量演化未包含随机力。图5 总结了嵌套的电子与动力学更新。

耗散演化这一限制与选定算符的代数结构不同。它们的对易子包括

$$[\hat{B}_{ij}, \hat{B}_{ij}^\dagger] = 2 - \hat{n}_i - \hat{n}_j, \qquad [\hat{B}_{ij}, \hat{B}_{ik}^\dagger] = -\sum_\sigma \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} \quad (i, j, k \text{ distinct}). \tag{C2}$$

因此，实部和虚部配对正交分量会生成密度双线性项和跃迁双线性项，并不构成闭合代数。在一般的 AVP 表述中，可逆贡献可能涉及这些额外算符的期望值 [32]。不闭合并不会使该贡献消失；在此处省略它定义了纯弛豫动力学模型。

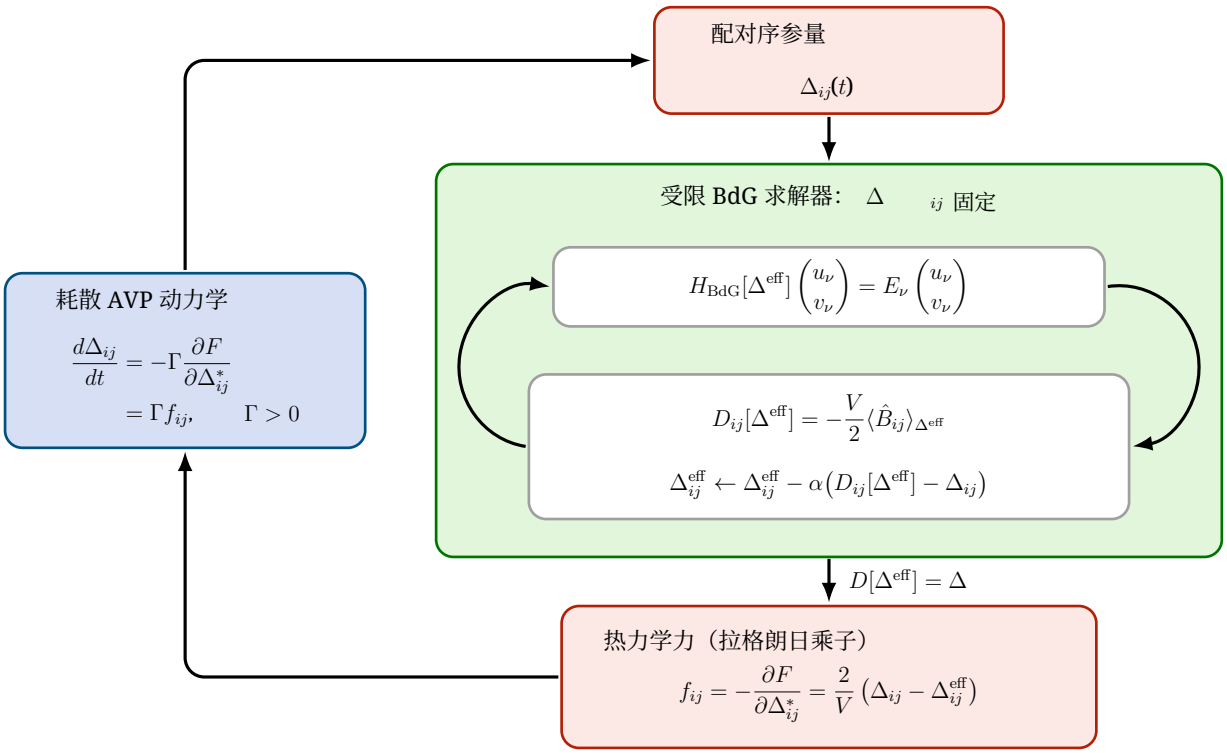


图 5. 超导 AVP 动力学的受限BdG实现。瞬时配对序参量 Δ_{ij} 被提供给受限 BdG 求解器，其内迭代会调整 $\Delta_{ij}^{\mathrm{eff}}$，直到热配对响应复现规定的构型。收敛后的拉格朗日乘子 $f_{ij} = (2/V)(\Delta_{ij} - \Delta_{ij}^{\mathrm{eff}}) = -\partial F/\partial \Delta_{ij}^*$ 是进入耗散运动方程的热力学力。所得演化会更新配对场，从而完成外部动力学循环。内混合参数 α 属于约束求解器；物理时间单位为 $t_0 = V/(2\Gamma)$。

2. 逆迭代与外层时间步长

在固定的外层构型下，定义键残差 $R_{ij}^{(k)} = D_{ij}[\Delta^{\mathrm{eff},(k)}] - \Delta_{ij}$。有效势调整为

$$\Delta_{ij}^{\mathrm{eff},(k+1)} = \Delta_{ij}^{\mathrm{eff},(k)} - \alpha_k R_{ij}^{(k)}. \tag{C3}$$

实现中采用 Barzilai–Borwein 型步长 [71]。将 $s^{(k)} = \Delta^{\mathrm{eff},\,(k)} - \Delta^{\mathrm{eff},\,(k-1)}$ 和 $y^{(k)} = R^{(k)} - R^{(k-1)}$表示为定义在独立键上的数组，试探步长为

$$\alpha_k^{\mathrm{BB}} = \frac{\mathrm{Re}\langle y^{(k)}, s^{(k)}\rangle}{\mathrm{Re}\langle y^{(k)}, y^{(k)}\rangle}, \qquad \langle X, Y\rangle = \sum_{\langle ij\rangle} X_{ij}^* Y_{ij}. \tag{C4}$$

步长被限制在 $[-1, 1]$以内，初始值为 1；若分母低于数值单位中的 10^{-24}，则重用上一步长。这是非线性求根迭代，并不保证 F 或残差范数会下降。收敛要求实部和虚部残差分量的最大绝对值分别低于 10^{-6}；内层迭代次数上限为 50000。

提取 f_{ij}之前，必须在最终接受的有效势下计算响应。只有约束求解成功，才能为外层步提供力。对于重标度时间 $\tau = t/t_0 = 2\Gamma t/V$，显式欧拉更新为

$$\Delta_{ij}(\tau + \delta\tau) = \Delta_{ij}(\tau) + \frac{V}{2}\delta\tau\, f_{ij}(\tau) = \Delta_{ij}(\tau) - \delta\tau\,[\Delta_{ij}^{\mathrm{eff}}(\tau) - \Delta_{ij}(\tau)]. \tag{C5}$$

无量纲的 τ 在正文和图中记为 t 。数值实现中基于响应的更新将括号替换为 $\Delta_{ij}^{\mathrm{eff}} - D_{ij}[\Delta^{\mathrm{eff}}]$后，在内层残差容差范围内与之吻合。某个外层步骤收敛后的势可作为下一步的初始猜测。欧拉积分对$\delta\tau$是一阶的；式（C1）中的连续时间恒等式本身并不能保证任意有限步长下的单调性。内层残差、时间步长依赖性和约束自由能可作为互补的数值收敛检查。

参数	数值
晶格与边界	36×36 （$N = 1296$），周期性边界条件
跃迁与吸引	$t = 1, V = 4$
电子温度和化学势 $T = 0.05, \mu = 0$	
外层时间步长	$\delta\tau = 0.02$
外层步数；最终重标度时间	10 000； $\tau_{\mathrm{final}} = 200$
内层残差容差	10^{-6} 每个实部/虚部
最大内层迭代次数	50 000
初始内层步长；裁剪区间	1； $[-1, 1]$
BB 步长的小分母阈值	10^{-24}
GPU 相关核每个线程块的线程数	256

表 II。文档化的 Julia/CUDA 实现的基准参数。能量以跃迁 t 为单位，外层演化使用 $\tau = t/t_0 = 2\Gamma t/V$，其中 $t_0 = V/(2\Gamma)$。

3. 存储、GPU 评估和基准参数

对于周期性边界条件 $N_x \times N_y$ 晶格，其中 $N = N_x N_y$，每条无向键仅存储一次，记作$\Delta_i^x = \Delta_{i,\ i+\hat{x}}$ 和$\Delta_i^y = \Delta_{i,\ i+\hat{y}}$。反向键可通过索引移位获得，例如$\Delta_{i,\ i-\hat{x}} = \Delta_{i-\hat{x}}^x$。有效势采用相同的存储方式。Julia 实现 [72] 组装复厄米 $2N \times 2N$ BdG 矩阵，通过 CUDA 和 cuSOLVER 在图形处理器上对其进行对角化 [73], ，并使用自定义内核在独立键上计算公式（B4）。每个线程块使用 256 个线程。稠密对角化的计算开销为 $O(N^3$次运算， $O(N^2$存储空间；根据本征矢计算键响应的开销为 $O(N^2$次运算。

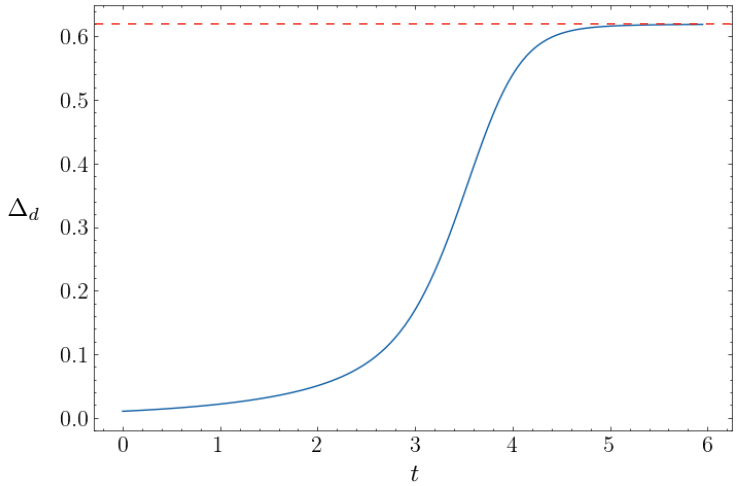


图 6. 超导 AVP 动力学的均匀序参量基准测试。键场被限制为具有空间均匀 d-波构型，其中 $\Delta_i^d = \Delta^d(t)$ 为实数，并且水平键与垂直键上的符号相反。蓝色曲线显示了在纯弛豫 AVP 演化下配对振幅的增长与饱和；红色虚线表示标准自洽 BdG 基态值。时间以 $t_0 = V/(2\Gamma)$ 为单位，配对振幅以跃迁 t 为单位。

表II 列出了数值说明中记录的基线实现参数。对于 $N = 1296$，约化 BdG 矩阵的维度为 2592；一个双精度复数矩阵约占 107.5 MB（十进制单位），不包括特征向量副本和求解器工作区。初始键目标为相互独立的复高斯变量，$\Delta_i^a(0) = [X_i^a + iY_i^a]/2$，其中 $a = x,\ y$ 且实变量为相互独立的标准高斯变量。初始试探有效势为零。与后续构型一样，只有当初始目标对应的受约束电子问题可解时，该目标才可用；任意复数目标不一定能由高斯态表示。复数格点中心 d波场随时间存储为按时间和两个空间坐标索引的数组，采用兼容 NPZ 的输出。

4. 均匀序参量基准测试与动量空间粗化

在给定数值实现的基础上，我们提出另外两个结果，以补充正文中的粗化分析。首先，我们将配对场限制为空间均匀的 d 波形式，对受约束力及其动力学实现进行基准测试，即 $\Delta_{i,\ i+\hat{x}}(t) = \Delta^d(t)$ 和 $\Delta_{i,\ i+\hat{y}}(t) = -\Delta^d(t)$，其中 $\Delta^d(t)$ 取为

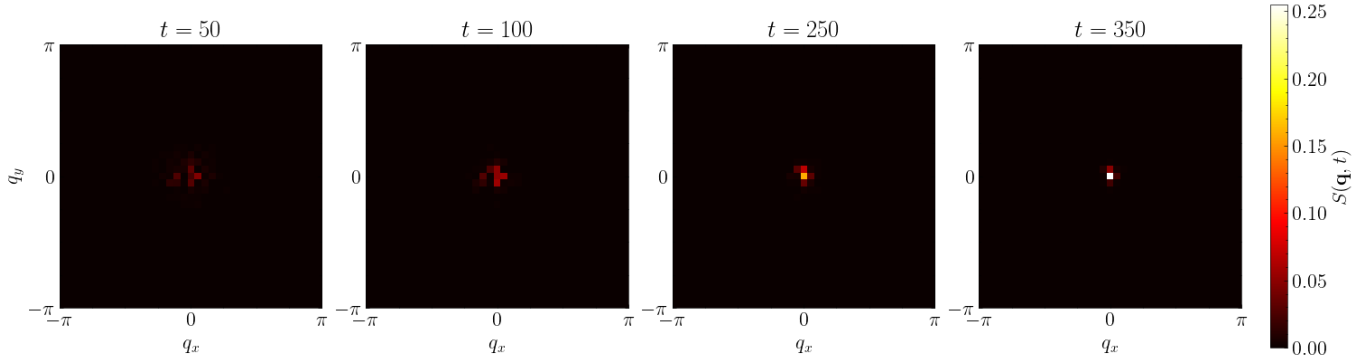


图 7. 动量空间中超导相干性的增长。各面板显示了局域 $S(\mathbf{q}\ t)$ d-波配对场 Δ_i^d 在 $t = 50$、100、250 和 350 时的结构因子，从左至右排列，分别对应图 2 中的实空间快照。峰值 $\mathbf{q} = 0$ 高度增加且宽度减小，反映出相位相干区域不断增长并趋向全局相干性。动量以晶格间距的倒数为单位，时间以 t_0为单位。

实数。从一个很小的非零振幅开始，AVP 演化使 Δ^d 增大，并趋近于常规自洽 BdG 基态值，如图 6 中的红色虚线所示。在稳态点，热力学力为零，且受约束有效配对势与物理序参量重合，从而恢复通常能隙方程。这一均匀测试验证了受约束动力学能够恢复预期的微观稳态。

接下来讨论正文中提到的无约束、空间非均匀粗化模拟。结构因子 $S(\mathbf{q}\ t)$ 从另一个角度展现了相干性的形成过程。它由复场 $\Delta_i^d(t)$ 的空间傅里叶变换的模平方得到。图 7 展示了其在与图 2 中实空间快照相同时间点的演化。尽管在所示的最早时刻，较大的区域已经具有局部相干的相位，但这些区域的相对相位仍然无序，低动量权重分散在多个波矢上。随着涡旋和反涡旋湮灭，这些权重逐渐集中到 $\mathbf{q} = 0$附近：随着相干性延伸至更远距离，峰值不断增高并变窄。因此，动量空间中的演化补充展现了正文讨论的实空间粗化和关联长度增长。

附录 D：相位对称性与涡旋识别

对于固定的 $d_{x^2-y^2}$ 空间形式，剩余的序参量自由度是其复相位。在全局费米子变换 $\hat{c}_{i\sigma} \mapsto e^{i\varphi}\hat{c}_{i\sigma}$ 下， Δ_{ij} 和 Δ_i^d 都按 $e^{2i\varphi}$变换。在远离涡旋核心处，写作 $\Delta_i^d(t) = |\Delta_i^d(t)|e^{i\theta_i(t)}$。配对场的相位取值于 $U(1) \simeq S^1$，相关的基本群为 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$[74]。因此，环绕缺陷的回路可以具有整数相位绕数。水平键与垂直键之间固定的符号变化确定了 d-波形状因子；它不会改变普通相位涡旋的这一整数分类。对于以格点为中心场中的有向闭合轮廓 C，绕数为

$$q_C = \frac{1}{2\pi} \sum_{(i\to j)\in C} \mathrm{Arg}\left[\Delta_j^d (\Delta_i^d)^*\right], \qquad \mathrm{Arg} \in (-\pi, \pi]. \tag{D1}$$

这是通常采用的离散相位环流规定：先将每个相位差约化到其主值区间，再求和 [6, 75]。对于逆时针方向的基本晶格面， $q_p = +1$ 表示涡旋， $q_p = -1$ 表示反涡旋；规则晶格面的绕数为零。数值上，将总和除以 2

π 会与最近的

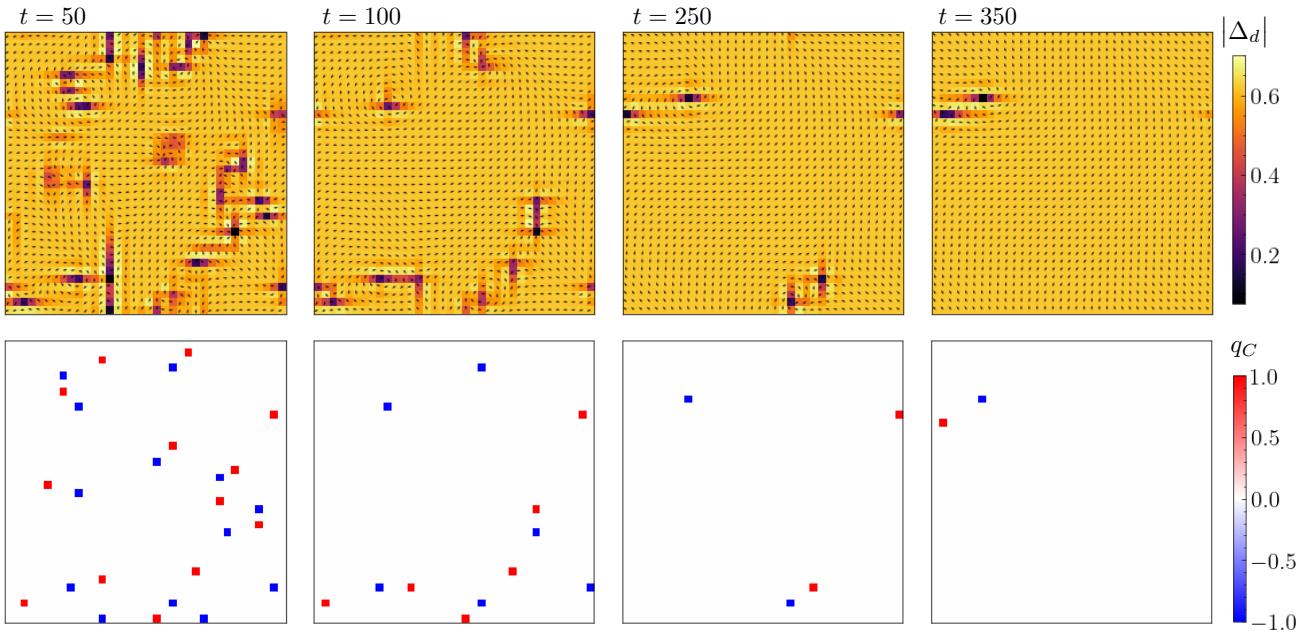


图 8. 超导相序过程中涡旋的识别。各列从左到右分别对应 $t = 50$、100、250 和 350，时间以 t_0 为单位。上排：局域配对振幅 $|\Delta_i^d|$，箭头表示 Δ_i^d 的相位。下排：根据式（D1）计算的整数绕数 q_C，在逆时针基本格点上进行评估。红色和蓝色分别标记涡旋（$q_C = +1$）和反涡旋（$q_C = -1$）；白色表示零绕数。识别出的缺陷与配对振幅显著受抑的区域重合，并且随着涡旋–反涡旋对湮灭，其数量逐渐减少。

整数进行比较。直接累加解缠端点相位会因望远镜式求和而漏掉缺陷，而仅检测 $|\Delta_i^d|$ 是否较小，则会将涡旋与其他振幅抑制混淆。

图8 展示了图2所示同一组构型序列的这一识别过程。上排面板显示 $|\Delta_i^d|$ ，并用箭头标示局部相位；下排面板则显示相应的格点方环绕数。非零荷量子化为 $+1$ 和 -1，由此识别出配对振幅局部极小值附近的涡旋和反涡旋。在涡旋核心区域，振幅受到强烈抑制，相位快速绕转；离开核心后，振幅逐渐恢复。由于涡旋核心可能位于格点之间，因此在采样格点处不一定会出现严格为零的数值。因此，绕数用于识别缺陷，而振幅与相位纹理则提供一致的空间验证。它们的演化表明，缺陷数量逐渐减少，这正是正文中相位序化过程的基础。

格点方环中心给出了晶格尺度上的缺陷位置。如果振幅在选定轮廓上为零，则其相位无定义，必须移动或扩大轮廓，使其经过振幅非零的格点。对于分辨不足的涡旋核心，在更大的包围轮廓上计算绕数可作为有效的检验。基本格点方环构造假设相位纹理在晶格尺度上可分辨；它无法分辨位于同一个格点方环内、彼此距离任意近的涡旋–反涡旋对。在周期性边界条件且未施加磁通的情况下，对于非奇异且分辨充分的构型，带符号格点方环荷之和为零，不过环面的不可缩闭合回路可能携带全局相位扭转。

基本缺陷的总数及其每个晶格面元的密度分别为 $N_v = \sum_p |q_p|$ 和 $n_v = N_v/(N_x N_y)$。对两种符号的缺陷均进行计数，可以测量在有序化过程中通过涡旋–反涡旋湮灭而衰减的缺陷数量 [5, 6]；这一计数并不意味着还要进一步区分束缚涡旋和自由涡旋。在二维 $U(1)$ 系统 [76], 中，这种拓扑解释与涡旋物理所依据的解释相同，而无需对当前的确定性弛豫进行平衡 BKT 分析。由于这里采用的哈密顿量不含电磁规范场或佩尔斯链路，式（D1）可直接根据固定晶格规范下的配对场进行计算。若引入空间规范场，则需要相应的规范协变相位环流和磁通贡献。

[1] J. Bardeen、L. N. Cooper 和 J. R. Schrieffer，《超导理论》，《Physical Review》108，1175（1957）。[2] P.-G. de Gennes，《 *Superconductivity of Metals and Alloys* 》（W. A. Benjamin，纽约，1966）。[3] V. J. Emery 和 S. A. Kivelson，超导体中相位涨落的重要性：小超流密度，《Nature》374，434（1995）。[4] A. Bray，相序动力学理论，《Advances in Physics》43，357（1994）。[5] B. Yurke、A. N. Pargellis、T. Kovacs 和 D. A. Huse，XY 模型的粗化动力学，《Physical Review E》47，1525（1993）。[6] A. J eli´c 和 L. F. Cugliandolo，二维 XY 模型的淬火动力学，《Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment》2011，P02032（2011）。[7] M. Sigrist 和 K. Ueda，非常规超导的唯象理论，《Reviews of Modern Physics》63，239（1991）。[8] C. C. Tsuei 和 J. R. Kirtley，铜酸盐超导体中的配对对称性，《Reviews of Modern Physics》72，969 2000（）。[9] D. J. Scalapino，共同主线：非常规超导体中的配对相互作用，《Reviews of Modern Physics》84，1383（2012）。[10] B. Keimer、S. A. Kivelson、M. R. Norman、S. Uchida 和 J. Zaanen，从量子物质到铜氧化物中的高温超导，《Nature》518，179（2015）。[11] Y. Wang 和 A. H. MacDonald，d-波超导体的混合态准粒子谱，《Physical Review B》52，R3876（1995）。[12] M. Franz 和 Z. Teˇsanovi´c，$d_{x^2-y^2}$ 和 $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$ 涡旋的自洽电子结构，《Physical Review Letters》80，4763（1998）。[13] S. H. Pan、E. W. Hudson、A. K. Gupta、K.-W. Ng、H. Eisaki、S. Uchida 和 J. C. Davis，$Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$中涡旋核电子结构的扫描隧道显微镜研究，《Physical Review Letters》85，1536（2000）。[14] A. Schmid，含时金兹堡–朗道方程及其在混合态电阻率问题中的应用，Physik der Kondensierten Materie 5，302 1966（）。[15] P. C. Hohenberg 和 B. I. Halperin，动态临界现象理论，《Rev. Mod. Phys.》49，435（1977）。[16] M. Tinkham，《 *Introduction to Superconductivity* 》，第 2 版（McGraw-Hill，纽约，1996）。[17] L. P. Gor'kov，超导理论中金兹堡–朗道方程的微观推导，Soviet Physics JETP 9，1364（1959）。[18] E. Abrahams 和 T. Tsuneto，金兹堡–朗道序参量的时间变化，《Physical Review》152，416（1966）。[19] R. Micnas、J. Ranninger 和 S. Robaszkiewicz，具有局域非延迟吸引相互作用的窄带系统中的超导性，《Reviews of Modern Physics》62，113（1990）。[20] E. Dagotto，高温超导体中的关联电子，《Rev. Mod. Phys.》66，763（1994）。[21] E. Dagotto、J. Riera、Y. C. Chen、A. Moreo、A. Nazarenko、F. Alcaraz 和 F. Ortolani，关联模型中相分离附近的超导性电子，《Physical Review B》49, 3548 (1994)。[22] C. B. Bishop、G. Liu、E. Dagotto 和 A. Moreo，超导体的格点内吸引性多轨道哈密顿量，d波，《Physical Review B》93, 224519 (2016)。[23] F. Gygi 和 M. Schl¨uter，II型超导体中涡旋线的自洽电子结构，《Physical Review B》43, 7609 (1991)。[24] A. Ghosal、M. Randeria 和 N. Trivedi，无序 d 波超导体中的空间非均匀性，《Physical Review B》63, 020505 (2000)，于2000年12月20日在线发表；收录于第63卷（2001）。[25] C. Berthod，涡旋玻璃中的涡旋谱学：一种实空间数值方法，《Physical Review B》94, 184510 (2016)。[26] R. A. Barankov、L. S. Levitov 和 B. Z. Spivak，含时BCS配对问题中的集体拉比振荡与孤子，《Physical Review Letters》93, 160401 (2004)。[27] R. A. Barankov 和 L. S. Levitov，BCS配对动力学中的同步：一种临界现象，《Physical Review Letters》96, 230403 (2006)。[28] E. A. Yuzbashyan 和 M. Dzero，费米子凝聚体中序参量的动力学消失，《Physical Review Letters》96, 230404 (2006)。[29] M. S. Foster、M. Dzero、V. Gurarie 和 E. A. Yuzbashyan，$p+ip$ 超流体中的量子淬火：远离平衡态的绕数与拓扑态，《Physical Review B》88, 104511 (2013)。[30] M. S. Foster、V. Gurarie、M. Dzero 和 E. A. Yuzbashyan，淬火诱导的Floquet拓扑 p波超流体，《Physical Review Letters》113, 076403 (2014)。[31] G.-W. Chern 和 K. Barros，吸引性Hubbard模型中的超导非平衡动力学，《Physical Review B》99, 035162 (2019)。[32] Y. Yang、A. Rayat、H. Jang、Y. Fan、S. S. Bakshi 和 G.-W. Chern，绝热变分原理：涌现电子序动力学的Born–Oppenheimer理论（2026），arXiv:2610.40117。[33] R. Zwanzig，不可逆性理论中的系综方法，《化学物理学杂志》33, 1338 (1960)。[34] H. Mori，输运、集体运动与布朗运动，《理论物理进展》33, 423 (1965)。[35] H. Grabert，非线性输运与涨落动力学，《统计物理学杂志》19, 479 (1978)。[36] R. Micnas、J. Ranninger、S. Robaszkiewicz 和 S. Ta- bor，二维窄带系统中具有格点间电子配对的超导性：一项平均场研究，《Physical Review B》37, 9410 (1988)。[37] W.-C. Chen、Y. Wang 和 C.-C. Chen，方格子扩展 Hubbard 模型的超导相，《Physical Review B》108, 064514 (2023)。[38] W.-M. Huang、C.-Y. Lai、C. Shi 和 S.-W. Tsai，方格晶格上二维扩展 Hubbard 模型的非常规超导相，《Phys. Rev. B》88, 054504 (2013)。[39] 关于单态–三态分解以及配对易感性和均匀平均场自由能的比较，参见附录A。[40] 关于受约束的平均场泛函、BdG响应和局域态密度、动力学实现与键代数，以及涡旋识别过程，参见附录B–D。

序。[41] T. W. B. Kibble，宇宙畴与弦的拓扑，《物理学杂志A：数学与综合》9, 1387 (1976)。[42] W. H. Zurek，超流氦中的宇宙学实验？，《Nature》317, 505 (1985)。[43] A. del Campo 和 W. H. Zurek，相变动力学的普适性：对称性破缺产生的拓扑缺陷，《国际现代物理学杂志A》29, 1430018 (2014)。[44] R. Monaco、J. Mygind 和 R. J. Rivers，祖瑞克-基布尔畴结构：环形约瑟夫森隧道结中自发涡旋形成的动力学，《Physical Review Letters》89, 080603 (2002)。[45] A. Maniv、E. Polturak 和 G. Koren，超导薄膜快速淬火期间自发产生磁通的观测，《Physical Review Letters》91, 197001 (2003)。[46] D. Golubchik、E. Polturak 和 G. Koren，Nb超导薄膜中自发形成的磁涡旋阵列内存在长程关联的证据，《Physical Review Letters》104, 247002 (2010)。[47] D. S. Fisher、M. P. A. Fisher 和 D. A. Huse，II型超导体中的热涨落、淬火无序、相变与输运，《Physical Review B》43, 130 (1991)。[48] C. Reichhardt 和 C. J. O. Reichhardt，超导涡旋系统中的堵塞、脆性与钉扎现象，《科学报告》10, 11625 (2020)。[49] D. F. Mross 和 T. Senthil，自旋与配对密度波玻璃，《物理评论X》5, 031008 (2015)。[50] L. Yang 和 G.-W. Chern，无无序体系中由破缺规范对称性产生的电子玻璃，《Physical Review B》113, L100201 (2026)。[51] J. Behler 和 M. Parrinello，高维势能面的广义神经网络表示，《Phys. Rev. Lett.》98, 146401 (2007)。[52] R. Drautz，用于构建准确且可迁移原子间势的原子团簇展开，《Physical Review B》99, 014104 (2019)。[53] S. Batzner、A. Musaelian、L. Sun、M. Geiger、J. P. Mailoa、M. Kornbluth、N. Molinari、T. E. Smidt 和 B. Kozinsky，用于高效数据利用和准确原子间势的E(3)等变图神经网络，《自然通讯》13, 2453 (2022)。[54] I. Batatia、D. P. Kov´acs、G. N. C. Simm、C. Ortner 和 G. Cs´anyi，MACE：用于快速、准确力场的高阶等变消息传递神经网络，载于 *Advances in Neural Information Processing Systems*，第35卷（2022），第11423–11436页。[55] P. Zhang 和 G.-W. Chern，双交换模型中的受阻相分离：机器学习助力大规模模拟，《Phys. Rev. Lett.》127, 146401 (2021)。[56] C. Cheng、S. Zhang 和 G.-W. Chern，用于电荷密度波相序动力学的机器学习，《Phys. Rev. B》108, 014301 (2023)。[57] Y. Fan、S. Zhang 和 G.-W. Chern，巡游电子磁体中手性畴的粗化：一种机器学习力场方法，《Phys. Rev. B》110, 245105 (2024)。[58] Y. Fan 和 G.-W. Chern，用于晶格哈密顿量绝热动力学的图神经网络力场，《APL机器学习》4

[59] J. M. Tranquada、B. J. Sternlieb、J. D. Axe、Y. Nakamura 和 S. Uchida，铜氧化物超导体中自旋与空穴条纹关联的证据，《Nature》375，561（1995）。[60] S. A. Kivelson、E. Fradkin 和 V. J. Emery，掺杂莫特绝缘体的电子液晶相，《Nature》393，550（1998）。[61] S. A. Kivelson、I. P. Bindloss、E. Fradkin、V. Oganesyan、J. M. Tranquada、A. Kapitulnik 和 C. Howald，如何探测高温超导体中的涨落条纹，《Rev. Mod. Phys.》75，1201（2003）。[62] E. Fradkin、S. A. Kivelson、M. J. Lawler、J. P. Eisenstein 和 A. P. Mackenzie，凝聚态物理中的向列费米流体，《Annu. Rev. Condens. Matter Phys.》1，153（2010）。[63] R. M. Fernandes、A. V. Chubukov 和 J. Schmalian，是什么驱动了铁基超导体中的向列序？《Nature Physics》10，97（2014）。[64] R. M. Fernandes、P. P. Orth 和 J. Schmalian，量子材料中的交织残余序：向列性及其他，《Annu. Rev. Condens. Matter Phys.》10，133（2019）。[65] E. Dagotto，强关联电子系统中的复杂性，《Science》309，257（2005）。[66] E. Fradkin、S. A. Kivelson 和 J. M. Tranquada，专题评论：高温超导体中交织序的理论，《Rev. Mod. Phys.》87，457（2015）。[67] E. Berg、E. Fradkin、E.-A. Kim、S. A. Kivelson、V. Oganesyan、J. M. Tranquada 和 S. C. Zhang，条纹有序高温T_c超导体中的动态层解耦，《Physical Review Letters》99, 127003（2007）。[68] M. H. Hamidian、S. D. Edkins、S. H. Joo、A. Kostin、H. Eisaki、S. Uchida、M. J. Lawler、E.-A. Kim、A. P. Mackenzie、K. Fujita、J. Lee 和 J. C. S. Davis，$Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+x}$中的库珀对密度波探测，《Nature》532，343（2016）。[69] D. F. Agterberg、J. S. Davis、S. D. Edkins、E. Fradkin、D. J. Van Harlingen、S. A. Kivelson、P. A. Lee、L. Radz- ihovsky、J. M. Tranquada 和 Y. Wang，对密度波的物理：铜酸盐超导体及其他，《Annu. Rev. Condens. Matter Phys.》11，231（2020）。[70] S. D. Edkins、A. Kostin、K. Fujita、A. P. Mackenzie、H. Eisaki、S. Uchida、S. Sachdev、M. J. Lawler、E.-A. Kim、J. C. S. Davis 和 M. H. Hamidian，铜酸盐涡旋晕中磁场诱导的对密度波态，《Science》364，976（2019）。[71] J. Barzilai 和 J. M. Borwein，两点步长梯度方法，《IMA J. Numer. Anal.》8，141（1988）。[72] J. Bezanson、A. Edelman、S. Karpinski 和 V. B. Shah，Julia：数值计算的新方法，《SIAM Rev.》59，65（2017）。[73] T. Besard、C. Foket 和 B. De Sutter，高效可扩展编程：释放 Julia 在图形处理器上的能力，《IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.》30，827（2019）。[74] N. D. Mermin，有序介质中缺陷的拓扑理论，《Rev. Mod. Phys.》51，591（1979）。[75] W. Bietenholz、U. Gerber 和 F. G. Rej´on-Barrera，带约束晶格作用量的贝列津斯基–科斯特利茨–索洛斯转变，《J. Stat. Mech.: Theory Exp.》2013（12），P12009，arXiv:1307.0485 [hep-lat]。[76] J. M. Kosterlitz 和 D. J. Thouless，二维系统中的有序、亚稳态与相变，《Journal of Physics C: Solid State Physics》6

’ 036107（2026）。

，1181 (1973)。