arXiv:2611.32924v1 [cs.DS] 24 Nov 2026

使用原始-对偶方法求解2-边连通生成子图问题的优于3的近似

Ana Cezara Danciu* Sharat Ibrahimpur†

2026年11月25日

摘要

在2-边连通生成子图问题（2-边连通生成子图）中，给定一个边具有非负成本的无向多重图，目标是找到总成本最低的2-边连通生成子图。两种不同的方法可得出近似比为2的近似算法：归约到最小成本根2-树形图问题，以及迭代舍入。尽管付出了大量努力，使用原始-对偶方法所能达到的最佳已知近似比仍为3。

本文的主要成果是一个用于2-边连通生成子图的原始-对偶算法，其近似比为 $\sqrt{3}+1$（≤ 2.74）。该算法在单阶段内运行，其近似保证以自然的线性松弛为基准；该松弛要求每个割上的边变量之和至少为2。算法遵循标准框架，以不均匀的速率逐步增大对应于最小违反集的对偶变量，直到某条边的对偶约束变为紧约束，此时暂时购买该边。达到可行性后，按购买顺序的逆序删除冗余边。

我们选择对偶增长速率的灵感，来自 Beyer、Chimani 和 Spoerhase（COCOON 2020）提出的单阶段 3-近似算法。与他们的工作一样，我们的算法通过反复收缩 2-边连通子图，维护一个由已购买边组成的森林，并以 1 的速率增长与该森林的叶节点和孤立顶点对应的对偶变量。我们的主要改进是：当森林不连通时，还以速率 $(\sqrt{3}-1)/2 \approx 0.37$ 增长与非平凡连通分量对应的对偶变量。

1 引言

在本文中，我们研究最小成本 2-边连通生成子图问题（2ECSS）：给定一个无向多重图 $G=(V,E)$，其边上的非负成本为 $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，求一个边子集 $F \subseteq E$，使得生成子图 (V,F) 为 2-边连通，且总成本 $c(F)=\sum_{e\in F} c_e$ 最小。特别地，G 中的每条边至多可被选取一次；平行边视为不同的边。回顾一下，若对于任意两个不同的顶点 $u,v \in V$，都存在两条边不相交的 uv-路径，且这些路径仅使用 F 中的边，则 (V,F) 是 2-边连通的。尽管 1-边连通生成子图问题可归约

寻找一棵最小成本生成树，因此该问题可在多项式时间内求解；2-边连通生成子图问题是 NP-困难的 [GJ79]。事实上，即使边成本均为单位，该问题仍是APX-困难的 [CKK02], ，因此，若假设 P $\neq$ NP，则不存在多项式时间近似方案（PTAS）。

广义斯坦纳网络问题（GSNP）是生存网络设计中的一个核心问题，而 2-边连通生成子图是其中最简单的非平凡特例之一。在 GSNP 的一个实例中，

*巴黎综合理工学院。电子邮箱：ana-cezara.danciu@polytechnique.edu。本文作者在苏黎世联邦理工学院计算机科学系工作期间完成了这项研究。

†苏黎世联邦理工学院计算机科学系，瑞士。电子邮箱：sharat.ibrahimpur@inf.ethz.ch。

给定所有不同顶点对的非负整数连通性要求 r_{uv} u， $v \in V$，我们希望找到一个成本最低的边子集 $F \subseteq E$，使得 (V, F) 对每一对 u， v都包含至少r_{uv} 条边不相交的 uv-路径。在这一表述中，对于所有不同的 u， $v \in V$，将$r_{uv} = 2$ 设为相应值即可得到 2-边连通生成子图。因此，2-边连通生成子图体现了基本的容错要求：网络在发生任意单条边故障后仍保持连通。

由于生存网络设计问题在众多现实应用中出现，人们投入了大量精力来开发此类问题的近似算法。关于 2-边连通生成子图，最早的成果之一归功于 Frederickson 和 JáJá [FJ81]，，他们通过扩充一棵3-近似算法来构造最小成本生成树。随后，Khuller 和 Vishkin [KV94] 将近似比提高到了2，其方法是将问题归约为：在输入图的双向版本中寻找一对成本最小的、弧不相交的有根生成树形图 G。他们的方法还可扩展到更一般的kECSS 问题，其中给定一个固定整数 $k \geq 2$，并且对所有互异的 $r_{uv} = k$ 都满足 u， $v \in V$通过计算一个成本最小的 k 弧不相交的有根生成树形图的集合。

另一项研究路线采用原始-对偶方法处理生存网络设计问题。Agrawal、Klein 和 Ravi [AKR95] 开创了这一路线，并针对 GSNP 在 $2\lceil \log_2(k+1) \rceil$-近似，其中 $r_{uv} \leq k$ 对所有互异的 u， $v \in V$。他们的模型允许一条边 e 被多次购买，每个副本的成本为 c_e。随后，Williamson、Goemans、Mihail 和 Vazirani [WGMV95] 研究了每条边至多购买一次的情形，并针对 $2H_k$-近似 kECSS，其中 $H_k = \sum_{i=1}^{k} 1/i$是第 k-个调和数。因此，对于 2-边连通生成子图，他们的近似比为3。其算法分为 k 个阶段，在每个阶段将连通性要求提高一。在每个阶段内，算法反复增大与包含极小的违反集合相对应的对偶变量，直到边变紧并被购买，然后执行逆向删除步骤，以移除冗余的已购买边。

Jain 取得了一项重大突破， [Jai01], 他提出了迭代舍入技术，并为具有任意成对连通性要求的 GSNP 提供了2-近似算法。Jain 的算法基于自然的割线性规划（LP）松弛，以及其极点解的一个关键性质：剩余线性规划的每个极点解都包含一条取值至少为 $1/2$的边。购买这样一条边并不断迭代，即可得到2-近似保证。

因此，两种截然不同的方法——有根树形结构和迭代舍入——都能为 2-边连通生成子图提供2-近似算法。因此，尽管针对网络设计的原始-对偶方法已经开展了三十多年积极的研究，但该框架针对 2-边连通生成子图所取得的最佳近似比一直保持在3。最近，Beyer、Chimani 和 Spoerhase [BCS20] 提出了一种富有洞察力的单阶段原始-对偶算法，直接构造2-边连通解，而不是先构造一棵生成树，再对其进行增强使之成为2-边连通解。他们的近似比同样为3，并且这一保证是紧的。

1.1 我们的贡献

我们的主要贡献是提出了首个针对 2-边连通生成子图的原始-对偶近似算法，其近似比严格优于 3。

定理 1.1. 存在一种针对 2-边连通生成子图的单阶段原始-对偶算法，相对于自然割线性规划松弛，其近似比为 $\sqrt{3}+1$。该算法的运行时间关于输入规模是多项式的。

我们的算法建立在 [BCS20]的单阶段算法之上。在算法的任意时刻，将当前已购买解2边连通的子图收缩后，(V, F)

会得到一片森林。这片森林的叶节点、孤立节点和非平凡连通分量分别对应具有不同亏缺的最小违反集。与 [BCS20], 中一样，我们以速率1增长对应于叶节点和孤立节点的对偶变量。我们的主要算法改动是：当森林不连通时，以速率 $\beta \in [0, 1/2]$额外增长对应于非平凡连通分量的对偶变量。令 $\beta = 0$ 即可恢复他们的算法，而定理 1.1 中的近似保证则通过选择 $\beta = (\sqrt{3} - 1)/2$得到。

我们的分析遵循标准的原始-对偶范式：界定活动集与逆向删除后保留的边之间的关联数。新特点是，我们以非均匀速率增长对偶变量，因此必须按相应权重对这些关联进行计数。逆向删除后，保留下来的边 A 构成对当前森林的最小增广；也就是说，$(V, F \sqcup A)$ 是 2-边连通的，但对于任意$e \in A$，$(V, F \sqcup (A \setminus \{e\}))$ 都不是 2-边连通的。因此，一条增广边的权重（或隐含成本）等于它与叶节点和孤立节点的关联数，加上 β 乘以它跨越的非平凡连通分量数。我们分析的核心是以下组合界。

定理 1.2. 设 $H = (V, F)$ 为一片森林，且 A 是 H的最小增广。令 L和I 分别表示 H中叶顶点（度1）和孤立顶点（度0）的集合，令 $\mathcal{C}$ 表示其非平凡连通分量的顶点集所组成的集合；对于 $S \subseteq V$，令 $a(S)$ 表示 A 中恰有一个端点位于 S内的边数。那么，对于任意 $\beta \in [0, 1/2]$，有：

$$\sum_{v \in L \cup I} a(v) + \beta \sum_{C \in \mathcal{C}} a(C) \leq 2(1 + \beta) \cdot (|L| + 2|I| + \frac{|\mathcal{C}|}{1 + \beta} - 2). \tag{1}$$

我们利用 定理 1.2 证明，对于任意 $\beta \in [0, 1/2]$，我们的算法支付的成本至多为$\max\{2 + 2\beta, 2 + \frac{1}{1+\beta}\}$ 倍于对偶问题所得的收益。该比值在 $\beta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 时达到最小值，等于$\sqrt{3} + 1$，由此得到 定理 1.1。

1.2 相关工作

对于一般边成本的 2-边连通生成子图问题，尚无已知的近似比低于 2 ，但在若干特殊情形下已有更好的保证。对于单位边成本，长期以来的一系列研究 [CSS01;SV14; HVV19; GGJ23; KN23; Bos+25]最终将近似比降至严格低于 5/4 [HLL26]。更多特殊情形可参见 [BIT13; Tak16] 。关于受限成本也有大量研究，特别是边成本取值属于 {0,1} 的情形，和/或要求零成本边具有指定结构，例如森林、树、路径集合或匹配。

2-边连通生成子图的自然割线性规划松弛的整数间隙介于 3/2 [CKKK08] 和2 [Jai01]之间。对于单位边成本，该间隙介于 8/7 [BFS16] 和 4/3 [SV14]之间。对于串并联图，该松弛是整数的 [Mah94]。

对于平面图，已知存在针对单位成本的多项式时间近似方案 [CGSZ04] 以及针对一般成本的多项式时间近似方案 [BG07]。对于串并联图，已知存在精确的多项式时间算法 [Win86] ；更一般地，对于有界树宽的图 [BG07]也已知存在此类算法。

2-边连通生成子图也曾在一种模型中进行研究：一条边 e 可以被购买多次，每个副本都会产生成本 c_e。该模型比我们的模型更宽松，因此针对该模型的近似保证不能直接适用于我们的设置。例如，如果输入图 G 含有一座桥，那么在我们的设置中该实例是不可行的；而在多重子图模型中，解可以将该桥购买两次。

论文结构。 第 2 节 介绍本文的记号和割线性规划松弛，第 3 节 介绍本文的算法，而第 4 节 证明定理 1.2。

2 预备知识

我们用记号 $(G=(V,\ E)\ c\colon\ E\ \to\ \mathbb{R}_{\geq 0})$ 表示一个 2-边连通生成子图实例，其中 G 是一个具有 $n:=|V|$ 个顶点的多重图， c 是定义在边上的非负成本函数。我们遇到的多重图可能包含平行边，但不含（自）环。若边集 $F\subseteq E$ 使生成子图 $(V,\ F)$ 具有 2-边连通性，则称其对给定的 2-边连通生成子图实例是可行的 。我们假设 E 是可行的，否则该实例不可行；并且假设 $|E|\leq n(n-1)$，因为任何包含极小可行解都不会包含超过两条具有相同端点的边。我们用简记 $c(F):=\sum_{e\in F}c_e$ 表示 F 中边的总成本，并用 OPT 表示最优解的成本。

如果一个 2-边连通生成子图算法的运行时间关于 n 和边成本的二进制编码长度呈多项式，则称其高效 。

对于多重图 H 和 $\emptyset\neq S\subsetneq V$（$H$），我们用 δ_H（S）：$=\{e\in E$（H）：$|S\cap V$（e）$|=1\}$ 表示恰有一个端点在 S中的边集。当上下文清楚时，我们省略下标，并使用 δ（v）$=\delta$（$\{v\}$）以避免繁琐的记号。我们用 deg（v）$=|\delta$（v）$|$表示 v 的度，用 κ（H）表示 H的连通分量数，包括孤立顶点。当 H 连通时，我们将 S 和 δ（S）互换使用，均表示 H的一个割。

现在我们描述 2-边连通生成子图的一个自然线性松弛，称为割线性规划。对于每条边 $e\in E$，原始线性规划有一个非负变量 x_e ，用于表示在最优解中边 e 被购买的比例。约束 2b 表示从 G的任意割中购买的边总量至少为两单位，而约束 2c 表示每条边至多购买一次。相应的对偶线性规划有非负变量 $\{y_S\}_{\emptyset\neq S\subsetneq V}$ 和 $\{z_e\}_{e\in E}$ ，分别对应原始割约束和上界约束。对于每条边 $e\in E$，约束 3b 要求包含 e的割的 y值总和减去 z_e 后至多为 c_e。对于 y变量的任意固定取值，令 $z_e=\max\{0,\sum_S\colon\ _{e\in\delta}$（$S$） $y_S-c_e\}$ 即可使目标值最大化。特别地，一旦边 e 的约束 3b 变为紧约束，其左侧出现的 y变量若进一步增加， z_e也会等量增加。显然，割线性规划是 2-边连通生成子图的有效松弛，因此其最优值至多为最优值。此外，根据线性规划弱对偶性，任意可行对偶解的目标值（如式 (3a) 所示）至多为原始线性规划最优值，因而也至多为最优值。

原始线性规划

$$\min \quad \sum_{e\in E} c_e x_e \tag{2a}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{e\in\delta_G(S)} x_e \geq 2 \quad \forall\,\emptyset\neq S\subsetneq V \tag{2b}$$

$$x_e\leq 1 \quad \forall\, e\in E \tag{2c}$$

$$x_e\geq 0 \quad \forall\, e\in E \tag{2d}$$

对偶线性规划

$$\max \sum_{\emptyset\neq S\subsetneq V} 2y_S-\sum_{e\in E} z_e \tag{3a}$$

$$\text{s.t.} \sum_{\substack{\emptyset\neq S\subsetneq V:\\ e\in\delta_G(S)}} y_S - z_e \leq c_e \quad \forall\, e\in E \tag{3b}$$

$$z_e\geq 0 \qquad \forall\, e\in E \tag{3c}$$

$$y_S\geq 0 \quad \forall\,\emptyset\neq S\subsetneq V \tag{3d}$$

3 我们的算法

在本节中，我们介绍一种由 $\beta\in[0,1/2]$ 参数化的原始-对偶算法，该算法输出一个可行解 $F\subseteq E$ 和一个对偶可行解（y， z）。在引理 3.4 中，我们证明 c（F）至多是（y， z）的对偶目标值（如（3a）所示）的 $\max\{2+2\beta,\ 2+\frac{1}{1+\beta}\}$倍。定理 1.1 的证明将通过运行参数为 $\beta=(\sqrt{3}-1)/2$ 的算法得出。

概括而言，我们的算法维护一个收缩图 $H = (V_H, E_H)$，其节点对应于 G 中顶点的一个划分。每当一条已购买边在 H 中形成一个环时，我们就将该环的所有节点收缩为一个节点，从而保持 H 是森林这一不变性。我们通过降低 E 中端点属于 H 的不同节点的未购买边的约化成本，来模拟对偶解中变量的增长。每当某条边 e 的约化成本降至零时，我们就购买该边，并相应地更新 H。当 H 具有单个节点时，对偶增长过程终止。最后，我们对已购买边执行逆向删除步骤，在保持可行性的同时消除冗余。

本节其余部分分为三个小节：

• 在第 3.1 节中，我们形式化地描述算法。其对偶增长以速率 H 1 提高叶节点和的孤立节点的对偶变量；当 H 不连通时，则以速率 β提高其非平凡连通分量的对偶变量。

• 在第 3.2 节中，我们证明该算法高效，并输出可行的原始解和对偶解；随后利用定理 1.2 对其输出的成本进行界定。在每次迭代开始时，输出中尚未购买的边构成当前森林的一个最小增广（引理 3.2）。为这些边支付成本的总速率恰好是该森林及其增广对应的 (1) 式左侧，而当森林不连通时，对偶目标值以速率 $|L| + 2|I| + 2\beta|\mathsf{C}|$ 增长，其中 L、I和 C 与定理 1.2 中相同（引理 3.3）。因此，定理 1.2 将为这些边支付成本的总速率界定为$2 + 2\beta$ 乘以 $|L| + 2|I|$，再加上每个非平凡连通分量对应的 2。一个非平凡连通分量对对偶速率的贡献仅为 2β，但它至少有两个叶节点；平衡这两项后得到近似比 $\max\{2 + 2\beta, 2 + \frac{1}{1+\beta}\}$（引理 3.4）。• 在第 3.3 节中，我们证明对于每个 $\beta \in [0, 1/2]$，该分析都是紧的（定理 3.5）。我们给出两族实例，在这些实例上，该算法的近似比趋近于 $2 + \frac{1}{1+\beta}$和 $2 + 2\beta$。特别地，无论如何选择 $\beta \in [0, 1/2]$，我们的算法的近似比都不可能低于 $\sqrt{3} + 1$。

3.1 算法描述

现在正式描述该算法。节点 $u \in V_H$ 表示收缩到其中的顶点集合 $V_u \subseteq VG$，而 $V_X := \bigcup_{u \in X} V_u$ 表示 $X \subseteq V_H$。若边 G 连接节点 u、$v \in V_H$，即其一个端点位于 V_u 中，另一个端点位于 V_v中，则称该边为连接这两个节点的边；若该边尚未购买，且连接 H中的两个不同节点，则称其为相关边。若节点 H 的度为 1，则称其为叶节点；若其度为 0，则称其为孤立节点。若 H 中的一个连通分量至少包含两个节点，则称其为非平凡连通分量。

(S1) 输入：算法接受一个 2-边连通生成子图实例（$G = (V, E)$ c：$E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$）和一个参数 $\beta \in [0, 1/2]$。（S2）初始化：设 $t := 1$，令 F 为空的已购买边有序列表，并设（y, z）:= (0, 0)。设 $H := (V, \emptyset)$，使得对于每个 $u \in V$，$V_u = \{u\}$，并为每条边$e \in E$ 赋予约化成本 $\bar{c}_e := c_e$。（S3）对偶增长：若 $|V_H| = 1$，则转到（S5）。令 L 和 I 分别为 H中的叶节点集合和孤立节点集合；对于每个节点 $u \in V_H$，令 $C_u \subseteq V_H$ 为包含 u的 H 连通分量的节点集合。对于连接 u 和 v的相关边 e，令

$$w_e := \mathbf{1}[u \in L \cup I] + \mathbf{1}[v \in L \cup I] + \beta \cdot \mathbf{1}[C_u \neq C_v] \cdot (\mathbf{1}[|C_u| \geq 2] + \mathbf{1}[|C_v| \geq 2]),$$

其中，若命题 P 成立，则 $\mathbf{1}[P]$ 为 1；否则为 0。因此，e 对其每个端点所在的节点 $L \cup I$ 取值为 1，并对 H 中满足 $e \in \delta_G(V_C)$ 的每个非平凡连通分量 C 取值为 β。同时，对每个节点 $u \in L \cup I$，以速率 1 增加 y_{V_u}；如果 H 不连通，则对 H 中的每个非平凡连通分量 C，以速率 β 增加 y_{V_C}。与此同时，对每条相关边 e，以速率 w_e 减少 $\bar{c}_e$；对每条已购买的边 e，增加 z_e，速率为

其速率等于包含 y 的割的总 e 值，这使得 约束 3b 对 e 保持紧约束。当某条相关边 e_t 具有 $\bar{c}_{e_t} = 0$ 时立即停止。

(S4) **购买与收缩：** 将 e_t 添加到 F，并令 u，$v \in V_H$ 为 e_t连接的节点。如果 $C_u \neq C_v$，则将 e_t 添加到 E_H。否则，e_t 与 H 中的 u-v 路径构成一个环，我们将环上的节点收缩为单个节点 x，其顶点集为这些节点的顶点集之并。将t 增加 1，然后转到 (S3)。

(S5) **逆向删除：** 对于 $j = t-1,\ t-2,\ \ldots,\ 1$，如果 $(V,\ F \setminus \{e_j\})$ 是 2-边连通的，则从 F 中删除 e_j。(S6) **输出：** 输出最终边集 F，以及在对偶增长步骤中构造的对偶解 $(y,\ z)$。

3.2 分析

一次迭代是执行一次 (S3) 和 (S4)。算法在第 t 次迭代中购买 e_t。对于一次迭代 t，令 H_t 为其开始时的森林 H，令 L_t 和 I_t 分别为 H_t 的叶节点集合和孤立节点集合，令 $\Delta_t \geq 0$ 为其对偶增长的持续时间，并令 w_e^t 表示相关边 e 在迭代 t 期间的速率w_e （约化成本的下降速率）。我们还令 $A_t \subseteq F$ 表示在迭代 t 或更晚时购买、且在逆向删除步骤后仍保留的边集。

令 T 为迭代次数，令 H_{T+1} 为最终森林，该森林只有一个节点；对于 $1 \leq t \leq T+1$，令 $F_t := \{e_1, \ldots, e_{t-1}\}$ 为在迭代 t 之前购买的边的集合。边 e 的负载为 $\ell_e := \sum_{S:\ e \in \delta(S)} y_S$，即约束 3b 左侧去除 z_e 后的值。节点只会合并，因此，如果一条边连接 H_s 中的两个不同节点，那么对于每个 $t \leq s$，它也会连接 H_t 中的两个不同节点。

以下三个引理是我们的算法设计的推论。

引理 3.1。 该算法是高效的，并且对于给定的 2-边连通生成子图实例，它输出一个可行解 F 以及割线性规划对偶问题的一个可行解 (y, z)。

证明。 每次迭代要么向 H 添加一条边，使 $\kappa(H)$ 减少 1；要么将至少两个节点收缩为一个，使 $|V_H|$ 减少。因此，$|V_H| + \kappa(H)$ 在每次迭代中都会减少，从 $2n$ 减少到 2，并且 $T \leq 2n-2$。只要其对偶增长能够结束，每次迭代都能在多项式时间内完成；这一点将在下文证明。逆向删除至多测试 $2n-2$ 次 2-边连通性，因此该算法是高效的。

接下来，我们通过对 t 进行归纳法，证明对于每个 $t \leq T+1$:

(i) H_t 是一片森林，其边是 F_t 中连接两个不同节点的边。(ii) 对于 H_t 的每个节点 x，F_t 中两个端点都位于 V_x 内的边构成一个以 V_x 为节点的 2-边连通图。

对于 $t = 1$，两者均成立。令 $t \leq T$，并令 e_t 连接 u 和 v。若 $C_u \neq C_v$，则 $H_t + e_t$ 是一片森林，且集合 V_x 不变。否则，令 P 为由 e_t 和 H_t 的 u-v 路径构成的环的节点集。新节点 x 满足 $V_x = V_P$，而 F_{t+1} 内部属于 V_x 的边由以集合 $V_{x'}$、$x' \in P$ 为节点的 2-边连通图，以及环上的边构成；这些边按环形顺序连接这些集合。该图是 2-边连通的：它的一个割要么分开某个 $V_{x'}$ 中的两个顶点，此时割包含 $V_{x'}$ 内部的两条边；要么被该环穿过两次。根据 (i)，F_{t+1} 中连接 P 两个节点的边就是环上的边，因为 H_t 是一片森林。将 $H_t + e_t$ 中一个环的节点收缩为一个节点后得到一片森林，其边是 $H_t + e_t$ 中的其他边，因此 (i) 和 (ii) 对 $t+1$ 成立。

接下来，每次迭代的对偶增长 $t \leq T$ 都会结束。森林 H_t 至少有两个节点，因此它有一个节点 u 满足 $\deg_{H_t}(u) \leq 1$，且 V_u 是 V的非空真子集。由于 E 是可行的，$\delta_G(V_u)$至少包含两条边，并且其中每条边都将 u 与另一个节点连接起来。根据 (i)，其中至多一条边是已购买的，因此某条相关边的一个端点位于 V_u中，且其速率至少为 1。

在每次迭代开始时，相关边的约化成本均为非负，并且只会不断下降，直到其中第一条边的约化成本达到 0。如果某条相关边的约化成本已经为 0，则 $\Delta_t = 0$。否则，对偶增长会在经过时间 $\Delta_t =$ 后结束$\{\bar{c}_e/w_e^t:\ e$ 相关 $w_e^t > 0\}$。

最后， H_{T+1} 只有一个节点 x，且具有 $V_x = V$，因此根据 (ii)，所有已购买边构成的集合是可行的。逆向删除仅在剩余边仍然可行时才删除一条边，因此输出 F 是可行的。

接下来需要证明 (y, z) 是可行的。在迭代 t 中，每个生长的集合都是 V 的非空真子集：集合 V_u 是真子集，因为 H_t 至少有两个节点；集合 V_C 是真子集，因为此时 H_t 不连通。每个生长的集合都是若干集合 V_x 的并，其中 x 是 H_t 的一个节点，因此，两个端点位于同一集合 V_x 内的边，不属于任何生长集合的割。由于节点只会合并，一旦一条边的两个端点位于同一个节点中，该边的负载就不再变化。连接 u 和 v 的相关边 e，对于节点 x，当且仅当 $x \in \{u, v\}$ 时，属于 $\delta(V_x)$；对于连通分量 C，当且仅当 $C_u \neq C_v$ 和 $C \in \{C_u, C_v\}$ 时，属于 $\delta(V_C)$。因此，它的负载以 w_e^t 的速率增加，也就是 $\bar{c}_e$ 下降的速率。因此，对于任何未购买的边 e，在任何时刻都有 $\bar{c}_e = c_e - \ell_e$，由 $\bar{c}_e \geq 0$ 可得 $\ell_e \leq c_e$ 和 $z_e = 0$。在迭代 t 中购买的边 e，在迭代 t 结束时满足 $\ell_e = c_e$ 和 $z_e = 0$；之后， z_e 的增加速率恰好与 ℓ_e 相同，因此 $\ell_e - z_e = c_e$ 和 $z_e \geq 0$。所以 (y, z) 满足对偶线性规划的所有约束。

□

引理 3.2. 对于任意迭代 t， A_t 中的每条边都连接 H_t中的两个不同节点；将其视为这些节点之间的边时， A_t 是 H_t的包含极小增广。

我们使用 (i) 和 (ii) 的以下推论。对于 $t \leq T$ 以及任意由边组成的集合 B，其中的边连接 H_t 中的两个不同节点，

$$(V, F_t \cup B) \text{ is 2-edge-connected} \iff H_t + B \text{ is 2-edge-connected.} \tag{4}$$

事实上，设 $\emptyset \neq S \subsetneq V$。若 S 将某个集合 V_x中的两个顶点分隔开，则根据 (ii)， $\delta(S)$ 至少包含 F_t中的两条边。否则， $S = V_X$ 对应于H_t中节点的一个非空真子集 X，并且根据 (i)， $\delta(V_X)$ 中属于 $F_t \cup B$ 的边，恰好是 $\delta(X)$ 中属于 $H_t + B$ 的边。因此，要么两个图都有一个至多包含一条边的割，要么两者都没有。

证明。设 $e \in A_t$ 是在迭代 $s \geq t$中已购买的。于是， e 在迭代 s中是相关的，因此它连接 H_s中的两个不同节点，也就连接 H_t中的两个不同节点。输出 F包含于 $F_t \cup A_t$ 且是可行的，因此根据 (4)， $H_t + A_t$ 是 2-边连通的。逆向删除处理 e时，剩余的边包括在 e之前购买的边、边 e，以及在 e 之后购买且属于输出的边。若去掉 e，这些边就不可行，因为 e 被保留了。这些去掉 e 后的边包含$F_t \cup (A_t \setminus \{e\})$，因为 F_t 中的边是在 e之前购买的，而 $A_t \setminus \{e\}$中的每条边要么是在 e 之前购买的，要么属于输出。因此，$(V, F_t \cup (A_t \setminus \{e\}))$ 不是 2-边连通的，根据 (4)， $H_t + (A_t \setminus \{e\})$ 也不是。

□

引理 3.3。我们有：

（i）对于任意迭代 $t \in [T]$， A_t 的边的约化成本以总速率下降

$$w^t(A_t) \coloneqq \sum_{e \in A_t} w_e^t.$$

因此，

$$c(F) = \sum_{t=1}^{T} \Delta_t \, w^t(A_t).$$

(ii) 对偶目标值以如下速率增长

$$D(t) := \begin{cases} |L_t| + 2|I_t| + 2\beta(\kappa(H_t) - |I_t|) & \text{if } H_t \text{ is disconnected,} \\ |L_t| & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，

$$\sum_{\emptyset \neq S \subsetneq V} 2y_S - \sum_{e \in E} z_e = \sum_{t=1}^{T} \Delta_t \, D(t).$$

证明。根据引理 3.2，每条边 $e \in A_t$ 连接 H_t中的两个不同节点，并且它在迭代 t 或之后被购买，因此在迭代 t 期间与 $\bar{c}_e$ 以 w_e^t的速率下降。

以速率 σ 增加y_S，会使$\sum_S 2y_S$ 以速率 2σ增加；而$\sum_e z_e$ 以速率 $\sigma\, d_{F_t}(S)$增加，这是因为 z_e恰好随y_S 中的已购买边 e 在 $\delta(S)$中增加。增长后的集合是集合V_x的并，因此根据引理 3.1 证明中的 (i)，增长后集合的割中的已购买边都是 H_t的边。所以 $d_{F_t}(V_u) = \deg_{H_t}(u)$，叶节点对应 1，孤立节点对应 0；并且 $d_{F_t}(V_C) = 0$对 H_t的每个连通分量 C 均成立。因此，每个叶节点使对偶目标值的速率增加 1，每个孤立节点使其增加 2；若 H_t 不连通，则每个非平凡分量使其增加 2β。非平凡分量的数量为 $\kappa(H_t) - |I_t|$，因为 H_t 中只有一个节点的连通分量就是其孤立节点。若 H_t 连通，则它没有孤立节点，因为它至少有两个节点，而且没有连通分量增长。由此得到速率 $D(t)$。

在迭代 t_e 中购买的边 $e \in F$ 在每次迭代 $t \le t_e$ 中都相关，并且其约化成本在这些迭代期间从 c_e 降至 0，因此 $c_e = \sum_{t \le t_e} \Delta_t \, w_e^t$。由于 $e \in A_t$ 恰好针对 $t \le t_e$ 成立，对 $e \in F$ 求和可得 $c(F) = \sum_t \Delta_t \, w^t(A_t)$。对偶目标值在初始时为 0，且仅在对偶增长期间变化；在迭代 t 中，变化速率为 $D(t)$，持续时间为 Δ_t。 □

由引理 3.2 可知，在每次迭代 t 中，A_t 都是森林 H_t 的包含意义下最小增广，因此我们可以将定理 1.2 应用于 H_t 和 A_t。回顾一下，定理 1.2 给出的界为：森林 H_t 的叶节点和孤立节点处，A_t 中边的端点数，加上 A_t 中边的总数的 β 倍；该界由 H_t 的叶节点数、孤立节点数和连通分量数决定。这个界的左侧恰好是引理 3.3 中的速率 $w^t(A_t)$，而右侧仅取决于决定对偶速率 $D(t)$ 的量。比较每次迭代中的这两个速率，可得以下保证。

引理 3.4. 我们有 $c(F) \le$ 最大值$\{2 + 2\beta, 2 + \frac{1}{1+\beta}\}(\sum_S 2y_S - \sum_e z_e)$。

证明. 令 $\lambda :=$ 最大值$\{2 + 2\beta,\ 2 + 1/(1+\beta)\}$。

固定一次迭代 t，并令 $L = L_t$、$I = I_t$ 和 $\kappa = \kappa(H_t)$。由于 H_t 中仅含一个节点的连通分量就是其孤立节点，H_t 有 $\kappa - |I|$ 个非平凡连通分量。根据引理 3.2，A_t 是森林 H_t 的最小增广，而该森林至少有两个节点。若 $C_u \neq C_v$，则 A_t 中连接 u 和 v 的一条边会使连通分量 C_u 和 C_v 成为叶节点；否则，不会使任何连通分量成为叶节点。因此，w_e^t 等于 e 在 $L \cup I$ 中节点上的端点数，加上 H_t 中其割包含 e 的非平凡连通分量数乘以 β；而 $w^t(A_t)$ 是定理 1.2 中针对 H_t 和 A_t 的不等式左侧。

如果 H_t 是连通的，则 $I = \emptyset$，$\kappa = 1$，且没有边位于某个连通分量的割中，因此定理 1.2 结合 $\beta = 0$ 可得 $w^t(A_t) \le 2|L| - 2 \le \lambda D(t)$。否则，定理 1.2 给出$w^t(A_t) \le (2 + 2\beta)(|L| + 2|I|) + 2(\kappa - |I|)$，因此

$$w^t(A_t) - \lambda D(t) \le (2 + 2\beta - \lambda)(|L| + 2|I|) + (2 - 2\beta\lambda)(\kappa - |I|).$$

第一项至多为 0，因为 $\lambda \ge 2 + 2\beta$；因此当 $2 - 2\beta\lambda \le 0$ 时结论显然成立。否则，由于每个非平凡分量至少有两个叶节点，所以 $2(\kappa - |I|) \le |L| \le |L| + 2|I|$，而右侧至多为 $(3 + 2\beta - (1+\beta)\lambda)(|L| + 2|I|) \le 0$，因为 $\lambda \ge 2 + 1/(1+\beta)$。 □

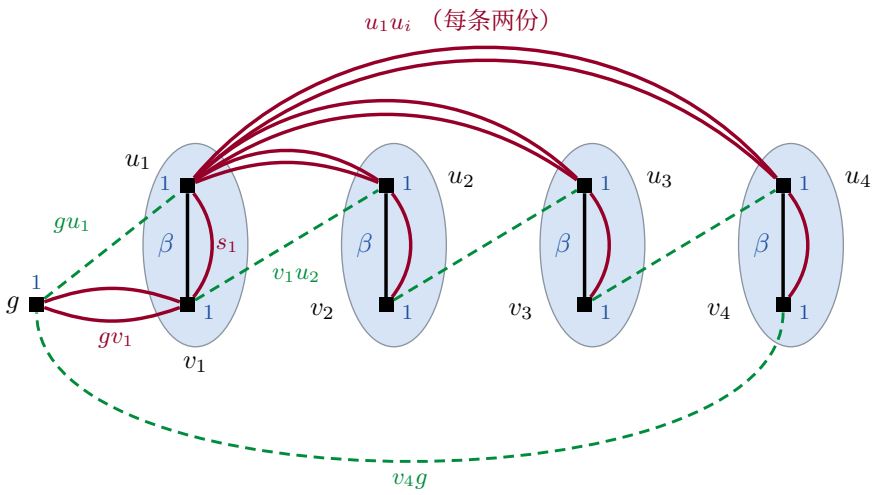


图 1： $k = 4$的第一个例子。黑色边构成森林 H_0，数字表示叶节点、孤立节点 g 以及 H_0 的连通分量的对偶变量增长速率。算法购买深红色边，而黑色边和绿色边构成一个哈密顿回路。

定理 定理 *1.1* 的证明。 运行算法 $\beta = \beta^\star = (\sqrt{3}-1)/2$。[1] 则 $2+2\beta = 2+\frac{1}{1+\beta} = \sqrt{3}+1$，定理由引理 3.1 和 3.4 得证。 □

3.3 成本分析的紧确性

我们通过证明 引理 3.4 中的成本分析对任意$\beta \in [0, 1/2]$都是紧确的，来结束本节。

定理 3.5。 固定 $\beta \in [0, 1/2]$ 和 $\varepsilon > 0$。存在一个 2-边连通生成子图实例，使得使用参数 β运行的算法输出的解的成本至少为 $\left(\max\left\{2+2\beta, 2+\frac{1}{1+\beta}\right\} - \varepsilon\right) \cdot$ 最优值。

证明。 令 $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ 和 $\varepsilon > 0$。下面的第一个例子给出了一个实例，其输出成本至少为（$2 + \frac{1}{1+\beta} - \varepsilon$）· 最优值；第三个例子给出了一个实例，其输出成本至少为（$2 + 2\beta - \varepsilon$）· 最优值。取对应于两个项中较大者的例子，即可证明该定理。 □

我们用 ALG 表示算法输出的成本，而 $\eta > 0$ 很小。在这两个例子中，黑色边的成本为 0，且构成一个非连通森林 H_0；其他每条边的成本要么等于其速率（$H = H_0$ 深红色边），要么等于该速率的 $1+\eta$ 倍（绿色边，在图中以虚线表示）。因此，算法先购买黑色边，然后将对偶问题增长一个单位时间，使对偶目标值增加 $D(t)$（引理 3.3），接着恰好购买深红色边，从而构成一个 2-边连通图。逆向删除会保留所有边，因为每条边都位于一个恰有两条已购买边的割中。黑色边和绿色边构成一个成本为 $(1+\eta)D(t)$ 的可行解，因此 $D(t) \le$ 最优值 $\le (1+\eta)D(t)$，而算法达到的对偶目标值在最优值的 $1+\eta$ 倍以内。

第一个例子（图 1）。取 $k \ge 2$ 对 u_i，v_i，它们由一条边相连 u_iv_i，成本为 0，以及一个顶点 g。深红色的边是每条 s_i 的一个平行副本 u_iv_i，成本为 2，以及 u_1u_i的两个副本

[1]若要仅使用有理数进行计算，可以使用一个有理数 β $|\beta - \beta^\star| \le 2^{-\Theta(b)}$ 运行算法，使得，其中 b 是输入的二进制编码长度，并获得相同的保证。

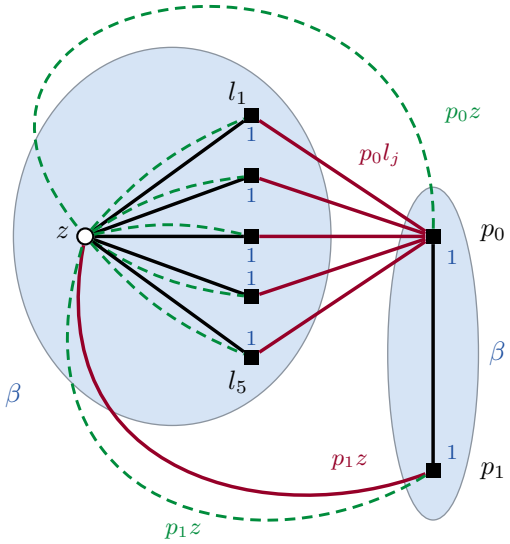


图2：第二个例子 $K = 5$，绘制方式如图 1所示。算法购买深红色的边，而黑色和绿色的边构成一个成本更低的可行解。

对每条 $i \geq 2$，成本为 $2+2\beta$，以及 gv_1 的两个副本，成本为 $2+\beta$。绿色的边是每条 $i < k$ 的 v_iu_{i+1}，成本为 $(1+\eta)(2+2\beta)$，以及 v_kg 和 gu_1，成本为 $(1+\eta)(2+\beta)$；它们与黑色边共同构成一个哈密顿回路。这里 H_0 有 $2k$ 个叶节点、一个孤立节点和 k 个非平凡连通分量，因此 $D(t) = k(2+2\beta) + 2$ 并

$$\text{ALG} = k(6+4\beta) - 2\beta, \qquad \text{OPT} \leq (1+\eta)\big(k(2+2\beta)+2\big),$$

且 ALG/最优值趋于 $2 + \frac{1}{1+\beta}$，当 $k \to \infty$ 且 $\eta \to 0$时。

第二个例子（图2）。取一个星形图，其中心为 z，叶节点为 l_1、……、l_K，其中 $K \geq 2$，并有一条边 p_0p_1，所有边的成本均为 0。深红色的边为每个 j对应的 p_0l_j，成本为 $2+2\beta$，以及成本为 $1+2\beta$的 p_1z。绿色的边是每个 zl_j的另一份副本，成本为 $1+\eta$，以及 p_0z 和 p_1z的另一份副本，成本为 $(1+\eta)(1+2\beta)$。这里 H_0 有 $K+2$ 个叶节点和两个非平凡连通分量，因此 $D(t) = K+2+4\beta$ 并

$$\text{ALG} = K(2+2\beta) + 1 + 2\beta, \qquad \text{OPT} \leq (1+\eta)(K+2+4\beta),$$

并且当 $K \to \infty$ 和 $\eta \to 0$ 时，ALG/OPT 趋近于 $2+2\beta$。

4 森林的最小增广

本节的主要目标是证明定理 1.2。我们首先回顾定理设定和相关记号。

在本节中，我们固定一棵森林 $H = (V, F)$、H的一个最小增广 A 以及一个参数 $\beta \in [0, 1/2]$。我们可以假设 $|V| \geq 2$，否则定理显然成立。我们分别将 F 和 A 的边称为森林边和增广边。对于任意顶点集 $S \subseteq V$，我们定义 $d(S)$ 和 $a(S)$ 分别为恰有一个端点位于

S中的森林边数和增广边数。为简便起见，对于任意 $v \in V$，我们用 $d(v) = d(\{v\})$ 和 $a(v) = a(\{v\})$ 表示。对于 $S \subseteq V$，我们将由 S 诱导的 H 的子图记为 $H[S]$ 。根据最小增广的定义，对于任意 $\emptyset \neq S \subsetneq V$，都有 $d(S) + a(S) \geq 2$ 。此外，对于任意增广边 e，存在一个 $\emptyset \neq S_e \subsetneq V$，使得 $e \in \delta(S_e)$ 且 $d(S_e) + a(S_e) = 2$ 成立。这样的S_e 称为 e的见证。

现在定义叶节点集合 $L := \{u \in V : d(u) = 1\}$ 和孤立顶点集合$I := \{u \in V : d(u) = 0\}$，它们均在 H 中。我们将 $L \cup I$ 中的顶点称为活跃顶点。我们还定义 C 为 H的非平凡连通分量的顶点集所组成的集合。注意，对于任意 $C \in \mathsf{C}$，$d(C) = 0$；如果 $C \neq V$，则我们也有 $a(C) \geq 2$。对于每条增广边 $e \in A$，我们将其隐含成本（或权重） w_e 定义为：e 的活跃端点数量，加上β 乘以 e所跨越的非平凡连通分量数量 $C \in \mathsf{C}$。注意，不等式 1 的左侧恰好是 $w(A) = \sum_{e \in A} w_e$，因此证明定理 1.2 就等价于证明任意最小增广的隐含成本至多为 $2(1+\beta) \cdot (|L| + 2|I| + |\mathsf{C}_{1+\beta}| - 2)$。

本节余下内容分为四个小节：

- 在第 4.1 节中，我们将增广边分为孪生和混合两类。孪生边 e 具有一个“孪生割”见证 S_e ，其 $d(S_e) = 0$ 和 $a(S_e) = 2$。混合边则根据其端点是否位于同一或不同连通分量中，进一步分为内部边和跨越边。 H。
- 在第 4.2 节中，我们为每条增广边精心选取一个最小见证，并证明由此得到的见证集族是层状的。
- 在第 4.3 节中，我们用一棵有根树表示这个层状族，并为每个见证关联其专属区域，即该见证中不属于其任何子节点的顶点所构成的集合。我们证明，每条混合增广边及其伙伴森林边（位于该见证中）都连接该见证及其父节点的专属区域。
- 在第 4.4 节中，我们分别统计孪生边、顶点 $L \cup I$处混合边的关联次数，以及混合边相对于$\mathcal{C}$的交叉次数，从而界定隐含成本。

在所有图中，我们采用相同的约定。活动顶点用黑色方块表示，非活跃顶点用白色圆圈表示，灰色圆点表示顶点可能属于任一类型。森林的非平凡连通分量用阴影椭圆表示。每个活动顶点标记为1 ，每个非平凡连通分量标记为 β，与（1）左侧出现的系数一致。森林边用黑色绘制，增广边用红色绘制。在增广边中，交叉边用锯齿线绘制，内部边用点线绘制，孪生边用虚线绘制；实心红线表示类型无关紧要的增广边。在区域树中，混合弧绘制为并排的黑色和红色边，孪生弧绘制为红色虚线。彩色轮廓和阴影集合用于标示割、见证集和区域。

4.1 增广边的分类

回顾一下，集合 $\emptyset \neq S \subsetneq V$见证 增广边 e，当且仅当 $e \in \delta(S)$ 且 $a(S) + d(S) = 2$。由于 $e \in A \cap \delta(S)$，e 的每个见证 S 都满足以下情况之一：$a(S) = 2$ 且 $d(S) = 0$；或者 $a(S) = d(S) = 1$。在前一种情况下，我们称 S 为孪生见证 ；在后一种情况下，称其为混合见证 。

定义 4.1（孪生边、混合边、内部边和交叉边）。 增广边 e 若存在孪生见证，则为孪生边；否则为混合边 。若混合边的端点位于 H的同一连通分量中，则为内部边 ；否则为交叉边 。

我们分别用 A^{twin}、 A^{mixed}、 A^{inner}和 A^{cross}表示相应的边集合。因此， $A = A^{\text{twin}} \sqcup A^{\text{mixed}}$ 和 $A^{\text{mixed}} = A^{\text{inner}} \sqcup A^{\text{cross}}$。注意，每个孪生见证都是 H的若干连通分量的并。因此，端点位于 H 同一连通分量中的任何增广边必然是内部边。此外，混合边的每个见证都是混合

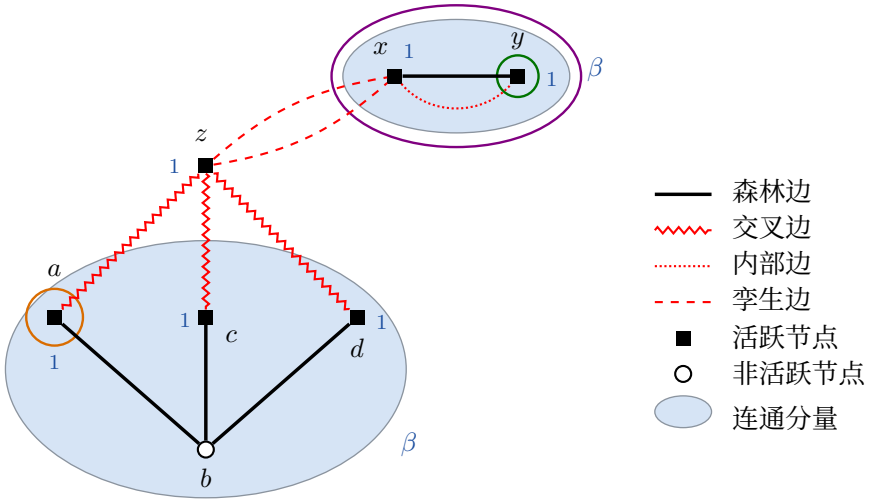


图 3：三种增广边。交叉边 za 和森林边 ab构成 $\delta(\{a\})$，因此 $\{a\}$ （橙色）是 za的混合见证，zc 和 zd的情况相同。内部边与森林边 xy平行，这两条边构成 $\delta(\{y\})$，因此 $\{y\}$ （绿色）是内部边的混合见证。两条孪生边 zx 构成 $\delta(\{x, y\})$，因此 $\{x, y\}$ （紫色）是二者的孪生见证。

见证，因此其割中恰有一条森林边。图 3 展示了不同类型的增广边。

上述分类使我们能够将 A 的隐含成本上界估计为三个简单量之和：

$$w(A) \le (2 + 2\beta)|A^{\text{twin}}| \; + \sum_{e \in A^{\text{mixed}}} |V(e) \cap (L \cup I)| \; + \; 2\beta|A^{\text{cross}}|, \tag{5}$$

其中， $V(e)$表示 e的端点集合。事实上，孪生边的隐含成本至多为$2 + 2\beta$，内部边不穿过 H 的任何非平凡连通分量，因此只通过其活动的端点产生贡献，而交叉边至多穿过 H的两个非平凡连通分量。

4.2 见证集及其层叠结构

固定任意一个根顶点 $r \in V$。由于 $(V, \; F \cup A)$ 是连通的，每个非空割都有唯一表示 $\delta(S)$，其中 $r \notin S$。对于每条增广边 $e \in A$，我们按照以下规则选择一个避开 r 的见证集W_e：

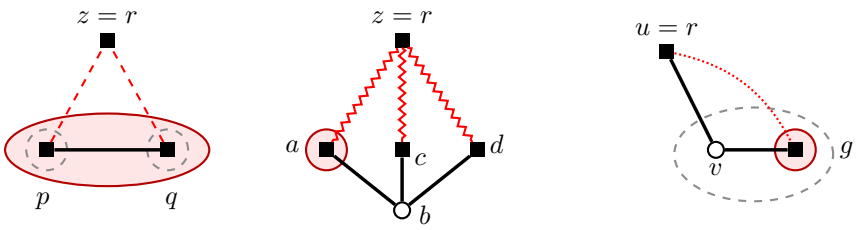
- 如果 e 是一条孪生边，则从所有避开 r 的 e 的孪生见证中选取 W_e 包含极小的一个。
- 如果 e 是一条混合边，则从所有避开 r 的 e 的见证中选取 W_e 包含极小的一个。

在这两条规则下，对于 W_e都有一个或两个包含极小的选择；当有两个时，我们任意选择其中一个。

我们称 W_e 为 的 e，并称 e 为 主边，属于 W_e。由此得到的见证族 为 $\mathcal{W} = \{W_e : \; e \in A\}$。图 4 展示了选择规则。

引理 4.2。设 $e \in A$ 和 $W = W_e$。

(a) 如果 e 是一条混合边，那么对于某条森林边 f_W，有 $\delta(W) = \{e, f_W\}$，且 e 是 W 的唯一主边。我们将这条主边记为 e_W。(b) 如果 e 是一条孪生边，那么 W 是一个孪生见证，因此是 H 的若干连通分量的并。割 $\delta(W)$ 由两条孪生边组成，其中一条或两条都是 W 的主边。



(a) 孪生边 pz 和 qz 具有见证集 $\{p,\ q\}$。

(b) 交叉边 za 具有见证集 $\{a\}$。

(c) 内部边 ug 具有见证集 $\{g\}$。

图4：三个小例子中的见证集。见证集以红色阴影标出，虚线轮廓标出了另一个避开 r的边见证。(a) 集合$\{p\}$ 和$\{q\}$ 是混合见证，因此选择规则不会将它们选为孪生边的见证。若没有该规则，这两个集合都会是见证集，而森林边 pq 将同时位于它们的割中。(b) 避开 r 的za 的唯一见证是$\{a\}$。(c) $\{g\}$ 和$\{v, g\}$ 都见证 ug 且避开 r，其中较小的那个是见证集。

(c) 如果 $S \subsetneq W$ 见证 e，那么 e 是一条孪生边，而 S 是一个混合见证。

证明。由于 W见证 e，我们有 $e \in \delta(W)$和 $d(W)+a(W) = 2$。此外， W 的每条主边都位于 $\delta(W)$中，因为 W 见证了它。(a) 由于 e 是混合边，它没有孪生见证，因此 W是混合见证，且 $d(W) = a(W) = 1$。因此，对于某条森林边 f_W，有 $\delta(W) = \{e, f_W\}$。 W 的一条主边是 $\delta(W)$ 中的一条增广边，因此它是 e。(b) 根据选择规则，W 是孪生见证，因此 $d(W) = 0$ ，且 W 是 H的若干连通分量之并。因此，$\delta(W)$由两条增广边组成，而 W 是它们各自的孪生见证，所以两者都是孪生边。 W 的主边位于 $\delta(W)$中，而 e 是其中一条。(c) S 避开 r，因为$S \subsetneq W$。若 e 是混合边，则 S 将是 e 的一个避开 r 且严格包含于W内的见证，这与 W的极小性矛盾。因此 e是孪生边。根据 W的极小性，S不是孪生见证，因此它是混合见证。最后，根据(a)和(b)，对于每条混合边e'， $d(W_{e'}) = 1$ ；对于每条孪生边 e'， $d(W_{e'}) = 0$ 。因此，没有任何见证集同时包含两种类型的主边。

□

令 $\mathcal{W}^{\text{twin}}$ 和 $\mathcal{W}^{\text{mixed}}$ 分别表示 $\mathcal{W}$ 中孪生见证和混合见证集的族，因此 $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\text{twin}} \sqcup \mathcal{W}^{\text{mixed}}$。由于每条增广边恰好是一个见证集的主边，引理 4.2（a）和（b）推出以下结论。

引理 4.3。 有 $|A^{\text{mixed}}| = |\mathcal{W}^{\text{mixed}}|$ 和 $|A^{\text{twin}}| \leq 2|\mathcal{W}^{\text{twin}}|$。

所选见证的主要结构性质是其层状性。这使我们能够将 $\mathcal{W} \cup \{V\}$ 表示为一棵有根树，我们将在 第 4.3 节中研究它。我们用标准的解交叉论证证明以下引理。

引理 4.4。 $\mathcal{W}$ 构成一个层状族。

证明。 反设两个见证集 W， $W' \in \mathcal{W}$既非嵌套关系，也不互不相交。由于见证避开 r，可知以下四个导出集合均非空：

$$P := W \setminus W', \qquad Q := W \cap W', \qquad R := W' \setminus W, \qquad T := V \setminus (W \cup W').$$

为避免繁琐的记号，对于任意$S \subseteq V$，我们用简记 $d'(S)$ 表示 $d(S) + a(S)$。由于每个 $S \in \{P, Q, R, T\}$ 都是 V 的真子集，因此可得 $d'(S) \geq 2$。

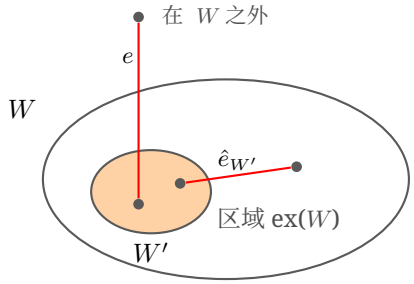


图 5：引理 4.5的证明。如果 e 在 W 的某个子节点 W' 中，且 W的端点位于其中，那么$\delta(W')$将由 e和一条主边 $\hat{e}_{W'}$构成，而它属于 W'。二者都是增广边，因此 W'将是孪生的，这与引理 4.2(c)矛盾。

由于 $d'(W) = d'(W') = 2$，根据割函数的次模性和对称性，可得以下紧不等式：

$$4 = d'(W) + d'(W') \geq d'(Q) + d'(T) \geq 4,$$
$$4 = d'(W) + d'(W') \geq d'(P) + d'(R) \geq 4.$$

因此，$d'(P) = d'(Q) = d'(R) = d'(T) = 2$成立。

设 e 是 W 的一条主边，并设 $S \in \{P, Q\}$包含 e 在 W 中的端点。注意，$S \subsetneq W$ 是 e 的见证，因为 $e \in \delta(S)$和 $d'(S) = 2$成立。根据引理 4.2(c)，e 是一条孪生边，而 S 是一个混合见证。特别地，W 是一个孪生见证。对 W'的一条主边使用相同的论证，并利用 Q 和 R，可知 W'也是一个孪生见证。

由于 W和 W'是孪生见证，因此二者都是 H的连通分量的并集。于是，它们的差集 P和交集 Q 也都是 H的连通分量的并集。由于$S \in \{P, Q\}$，我们有 $d(S) = 0$，这与 S是混合见证相矛盾。 □

4.3 见证集及其专属区域的树表示 s

由于 W 是层状的，我们可以将 W $\cup\{V\}$ 表示为一棵有根树，称为见证树，其根为 V。对于每个 $W \in$ W，其父节点 p(W) 是 W $\cup\{V\}$ 中严格包含 W 的最小集合。对于 $W \in$W $\cup\{V\}$，我们用 ch(W) 表示其子节点的集合，即父节点为 W 的那些集合。注意，ch(W) 可能为空。接下来，对于任意 $W \in$W $\cup\{V\}$，我们将其专属区域（简称区域）定义为 ex(W) := $W \backslash \bigcup_{W' \in \text{ch}(W)} W'$。根据层状性（引理 4.4），各区域两两不相交，且覆盖 V。注意，根区域 ex(V) 包含 r，因为每个见证集都避开 r。

引理4.5。对于每个 $W \in W \cup \{V\}$，$\text{ex}(W) \neq \emptyset$。更确切地说，如果 e 是W的一条主边，那么 e 在 W中的端点位于$\text{ex}(W)$中。

证明。由于 ex(V)包含 r，只需考虑 $W \in$ W。令 e 为 W的一条主边。如果 e在 W中的端点不在 ex(W)中，则它位于 W的一个子节点 $W' \in$W中。e的另一个端点在 W之外，因此 $e \in \delta($ $W')$。由于 $W' \subsetneq W$见证 e，引理 4.2(c)表明 e是一条孪生边，且 W'是一个混合见证。由于 e 是 W的一条主边，因此它不可能是W'的一条主边。所以，$\delta(W')$包含两条不同的增广边：e以及 W'的一条主边 e'。这与我们先前关于 W' 是一个混合见证的结论相矛盾。证明示意见图 5。 □

由于这些区域非空且两两不相交，每个区域 X 都唯一对应于见证集 wit(X) $\in \mathcal{W} \cup \{V\}$，使得 $X =$ ex(wit(X))。将见证树的每个节点 W 重新标记为 ex(W)，即可得到以 ex(V) 为根的区域树 $\mathcal{T}$。我们将非根区域的父节点记为

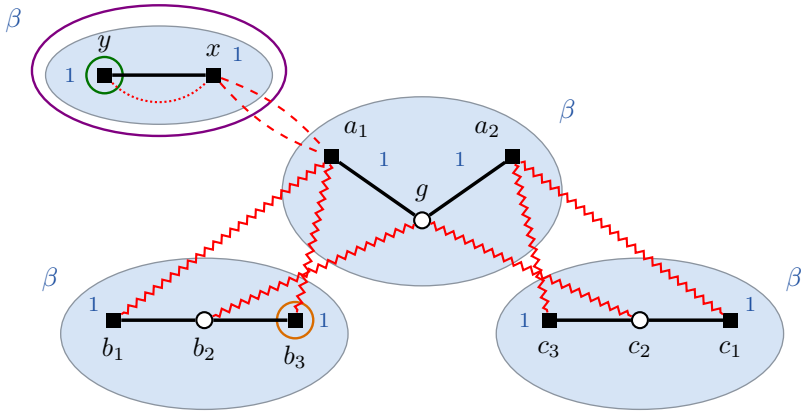


图6：一个示例，我们还会在图 7 和 11中再次使用。它有四个非平凡连通分量、六条交叉边、一条内部边（与森林边平行 xy）和两条孪生边 xa_1。彩色轮廓显示了 2-割 $\delta(\{b_3\})$（橙色）、$\delta(\{y\})$（绿色）和 $\delta(\{x,y\})$（紫色）。

X p(X)，并将任意区域 X 的子节点记为 ch(X)。特别地，对于每个非根区域 X，都有 p(X) = ex(p(wit(X)))。

我们将$\mathcal{T}$的每条边都朝向根定向。对于一个非根区域 X，令 W =wit(X)。我们将从 X 指向 p(X) 的$\mathcal{T}$-弧分类如下：

- 如果 $W \in \mathcal{W}_{\text{是混合的}}$，那么该弧就是一条混合弧，并将 $\delta(W)$ 中的两条边分配给它：增广边 $e_W \in A$ 和森林边 $f_W \in F$。根据e_W 是内部边还是交叉边，它分别是内部弧或交叉弧。

- 如果 $W \in \mathcal{W}_{\text{是孪生的}}$，那么该弧就是一条孪生弧，并将 W 的主边分配给它。

注意，每条增广边都恰好分配给一条$\mathcal{T}$-弧，即与其所选见证集对应的弧。显然，树$\mathcal{T}$有 $|\mathcal{W}|+1$ 个节点和 $|\mathcal{W}|$ 条弧，其中 $|\mathcal{W}^{\text{mixed}}|$ 条是混合弧，$|\mathcal{W}^{\text{twin}}|$ 条是孪生弧。图7展示了图6中图的区域树。

以下引理表明，分配给每条混合弧的两条边连接其相邻区域，并且每条连接不同区域的森林边都恰好分配给一条混合弧。

引理4.6。(i) 对于 T 中的每条混合弧$(X,\text{p}(X))$，分配给它的两条边各有一个端点位于 X，另一个端点位于$\text{p}(X)$。(ii) 每条连接不同区域的森林边都恰好分配给 T 中的一条混合弧。

证明。对于每个 $U \in \mathcal{W}$，以 ex(U) 为根的子树中各区域的并集是 U。因此，对于 $U \in \mathcal{W}$和 $g \in F \cup A$，当且仅当弧 (ex(U), ex(p(U))) 位于 T 中连接分别包含 g 端点的区域的唯一无向路径上时，$g \in \delta(U)$ 成立。

固定 $W \in \mathcal{W}^{\text{mixed}}$。令$e = e_W$和 $f = f_W$，使得 $\delta(W) = \{e, f\}$。我们证明，这两条边都不属于任何其他所选见证的割。令 $W' \in \mathcal{W} \setminus \{W\}$，并令 e' 为 W'的一条主边。由于每条增广边恰好有一个所选见证集，$e' \neq e$。若 $e \in \delta(W\prime)$，则 $\delta(W\prime) = \{e, e'\}$，从而 W'成为 e的孪生见证，这与 e为混合见证相矛盾。

若 $f \in \delta(W\prime)$，则 $\delta(W\prime) = \{f, e'\}$。注意到 $\delta(W \triangle W') = \delta(W) \triangle \delta(W')$，其为$\{e, e'\}$。由于 $W \neq W\prime$和二者都避开 r，集合 $W \triangle W'$非空且为真子集。因此，它是 e的孪生见证，再次产生矛盾。于是，e 和 f 各自恰好属于一个所选见证割，即 $\delta(W)$。根据上文的路径观察，包含其端点的区域由对应于 W的单条弧连接。因此，这两条边都连接 ex(W) 和 ex(p(W))，从而证明 (i)。

对于 (ii)，现在令 $f \in F$ 连接两个不同的区域。它们在 $\mathcal{T}$中的无向路径包含某个 $W \in \mathcal{W}$ 的弧 (ex(W)，ex(p(W)))，因此 $f \in \delta(W)$。由于 W是一个选定的见证

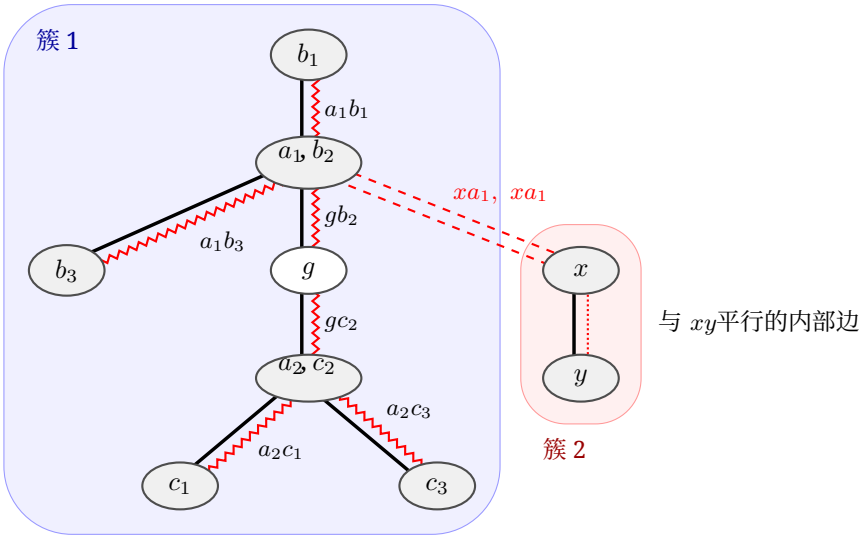


图7：图6中的示例的区域树，带有 $r = b_1$。每个区域均绘有其节点，每条弧均绘有其承载的边。弧的标签表示其增广边。例如，$\{g\}$ 是 $W = \{g, a_2, c_1, c_2, c_3\}$所在的区域，而它通往$\{a_1, b_2\}$ 的弧承载着$f_W = ga_1$ 和 $e_W = gb_2$。区域$\{g\}$ 是唯一的非活动区域，移除孪生弧后，树会分成两个簇。

且 f 是一条森林边， W 是混合弧，并且 $f = f_W$。因此， f 被分配给这条混合弧。前面的论证表明， f 不属于其他任何选定的见证割，因此不会被分配给其他弧。

□

引理4.7。 每个集合 $S \subseteq V$都满足 $|L \cap S| + 2|I \cap S| + d(S) \geq 2\kappa(H[S])$。

证明。 设 $q = \kappa(H[S])$ 为 $H[S]$的连通分量数。我们先考虑 $H[S]$ 连通的情形（图 8）。其顶点及其中的森林边构成一个连通且无环的图，因此这样的边有 $|S| - 1$ 条。将 H中 S 各顶点的度相加， S 内部的每条边都被计数两次，而 $\delta(S)$ 中的每条森林边都被计数一次，因此 $\sum_{v \in S} d(v) = 2(|S| - 1) + d(S)$。将其改写为

$$\sum_{v \in S} (2 - d(v)) = 2 - d(S).$$

在这个求和中，度为 1 的顶点是叶节点，贡献为 1。度为 0 的顶点单独构成一个连通分量，因此是孤立点，贡献为 2。其他顶点的贡献均不超过 0。因此 $|L \cap S| + 2|I \cap S| \geq 2 - d(S)$。

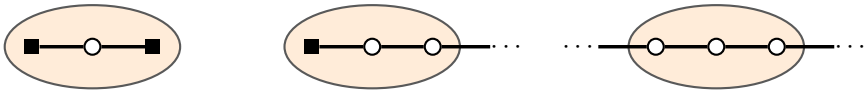
现在令 S 为任意集合，并令 S_1、……、S_q 为 $H[S]$ 的各个连通分量的顶点集。由于没有森林边连接其中的两个集合，因此 $\delta(S_i)$ 中的每条森林边都属于 $\delta(S)$，而 $\delta(S)$ 中的每条森林边恰好属于某个 i 对应的 $\delta(S_i)$。因此， $d(S_1) + \cdots + d(S_q) = d(S)$，对 S_1、……、S_q 将上面的不等式相加可得

$$|L \cap S| + 2|I \cap S| \geq 2q - d(S).$$

□

引理4.6 中的对应关系使我们能够通过计算在某个区域内恰有一个端点的森林边数量，来计算该区域中的混合边端点数量。

引理 4.8。 对于每个区域 X，与 X关联的 T 的混合弧数量（入弧和出弧均计入）既等于 $d(X)$，也等于 X 中混合边端点的数量。如果 X 不包含活动顶点，即 $X \cap (L \cup I) = \emptyset$，那么 $d(X) \geq 2$。



(a) $d(S)=0$：一个整体连通分量，具有至少两个叶节点。

(b) $d(S)=1$：远 S 的末端是一个叶节点。

(c) $d(S)=2$：S 可能不含叶节点。

图8：引理 4.7 对于集合 S（阴影部分），使得 $H[S]$ 连通。它至少包含$2-d$（S） 个叶节点，其中孤立节点按两个计数。森林在点线处继续延伸。

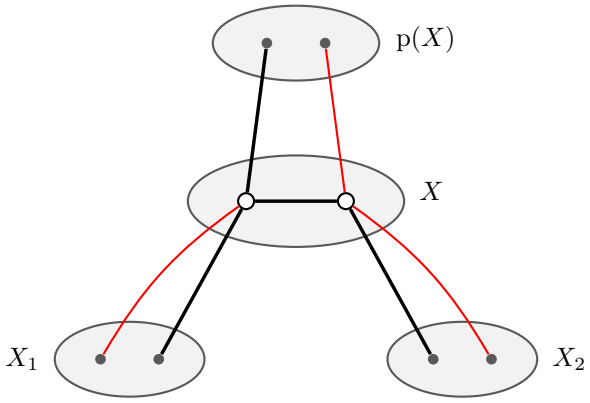


图9：引理 4.8 对于区域 X 有三条混合弧：一条通往其父区域p(X)，还有一条分别来自其每个子节点 X_1 和 X_2。每条弧都向 X带入一条森林边和一条混合边。因此 d（X） $=3$ 既是 δ（X） 中的森林边数，也是混合边在 X中的端点数。

证明。取一条与 X 关联的混合弧，设它是区域 X'的弧，因此 X 是 X' 或 p(X')，并令$W'=$见证集(X')。根据引理4.6(i)，它的两条边 $f_{W'}$和 $e_{W'}$都连接 X'与 p(X')，因此每条边在 X 中恰有一个端点（图9）。特别地， $f_{W'}$ 属于 $\delta(X)$。

反过来， $\delta(X)$中的每条森林边，以及端点位于 X 中的每条混合边，都来自这样一条弧。$\delta(X)$中的一条森林边连接 X 与另一个区域，因此根据引理4.6(ii)，它恰好对应一个 $W\prime\in\mathcal{W}^{\text{mixed}}$，而 ex($W'$) 的弧连接其端点所在的两个区域，其中一个是 X。一条混合边 e 是其见证集 $W\prime=W_e$的$e_{W'}$（引理4.2(a)），并连接 ex($W\prime$) 和 ex(p($W\prime$))，因此若 e 有一个端点位于 X中，则 ex(W') 的弧位于 X。不同的弧承载不同的边，因此 X 处的混合弧数既是 $d(X)$，也是端点位于 X中的混合边的端点数。

最后，假设 X 不包含任何活跃顶点。于是 X 非空（引理 4.5），因此$\kappa(H[X])\geq 1$，而引理 4.7 给出 $d(X)\geq 2\kappa(H[X])\geq 2$。 □

最后，考虑从 $\mathcal{T}$中删除所有孪生弧并忽略方向后得到的森林。我们将其连通分量称为簇，并将每个簇视为其所含区域的并集。 图 10展示了这一分解。

引理 4.9。 恰有 $|\mathcal{W}^{\text{twin}}|+1$ 个簇，孪生弧将它们连接成一棵树。每个簇都是 H 的若干连通分量的并集。特别地， H 至少有 $|\mathcal{W}^{\text{twin}}|+1$ 个连通分量。

证明。 每个集合 $W\in\mathcal{W}$ 恰好给出区域树的一条弧，连接其区域 ex(W) 与其父节点的区域 ex(p(W))；当 $W\in\mathcal{W}^{\text{twin}}$ 时，该弧是孪生弧，而当 $W\in\mathcal{W}^{\text{mixed}}$时，该弧是混合弧。因此，区域树有 $|\mathcal{W}|+1$ 个节点，即这些区域，以及 $|\mathcal{W}|$ 条弧，其中

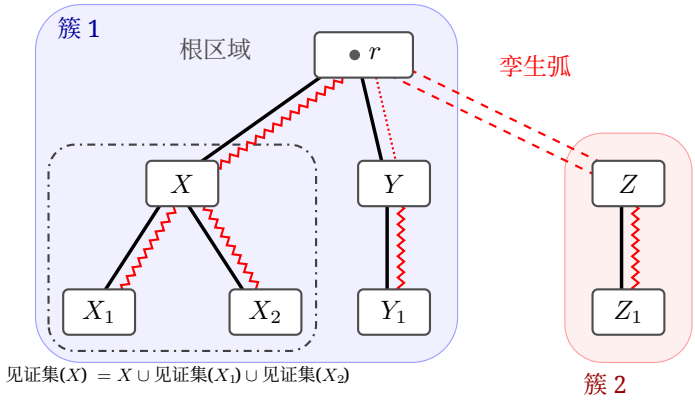


图 10：区域示意树。每个方框代表一个区域，根区域包含 r，其他每个区域都有一条弧连向其上方的区域。移除孪生弧后，树被分割成若干簇（阴影部分）。点划线方框表示，见证集(X)是 X下方子树中各区域的并集。这里， X_1 和 X_2 是 X的子节点。

$|\mathcal{W}^{\text{twin}}|$ 条是孪生弧， $|\mathcal{W}^{\text{mixed}}| = |\mathcal{W}| - |\mathcal{W}^{\text{twin}}|$ 条是混合弧。簇是由区域构成的图中混合弧所对应的连通分量。

对于每个 $W \in \mathbf{W}^{\text{twin}}$，其代表元是其主边的集合：$\delta(W)$ 的一条孪生边；如果两条边都以 W 为其见证集，则为 $\delta(W)$ 的两条边。每个孪生见证集都有自己的代表元，其他见证集都没有，因为每条增广边恰好是一个见证集的主边。 W 的孪生弧恰好携带 W 的代表元，因此删除孪生弧就意味着删除代表元；我们删除的代表元数量恰好等于孪生见证集的数量，即 $|\mathbf{W}^{\text{twin}}|$。从森林中删除一条弧，会将包含该弧的连通分量分成两个：由于不存在环，被删除弧的两个端点无法再相互连通，而其他连通分量保持不变。因此每次删除恰好增加一个连通分量；由于这棵树只有一个连通分量，簇的数量就是被删除的代表元数量加一，即 $|\mathbf{W}^{\text{twin}}| + 1$。等价地，混合弧构成一片具有 $|\mathbf{W}| + 1$ 个节点和 $|\mathbf{W}| - |\mathbf{W}^{\text{twin}}|$ 条弧的森林，而森林的连通分量数等于节点数减去弧数：$(|\mathbf{W}| + 1) - (|\mathbf{W}| - |\mathbf{W}^{\text{twin}}|) = |\mathbf{W}^{\text{twin}}| + 1$。森林边要么位于某个区域内部，要么连接两个区域；后一种情况下，它是某个 $W \in \mathbf{W}^{\text{mixed}}$ 的 f_W，并连接 $\mathbf{ex}(W)$ 的弧所对应的两个区域（引理 4.6 ），这两个区域位于同一个簇中。因此，没有森林边连接两个簇，且 H 的每个连通分量都位于一个簇内。区域非空（引理4.5）且互不相交，因此簇也非空且互不相交。每个簇都是若干完整连通分量的并集，且至少包含一个，因此 H 至少有 $|\mathbf{W}^{\text{twin}}| + 1$ 个连通分量。

□

4.4 计数关联

要界定式（5）的右侧，还需要计数三个量：孪生边的数量、活动顶点处混合边端点的数量，以及交叉边的数量。

孪生边的数量由引理 4.3给出，得到 $|A^{\text{twin}}| \le 2|\mathcal{W}^{\text{twin}}|$。

接下来，我们通过统计每个区域中的混合弧数量，来界定活动顶点处混合边端点的数量。若一个区域包含活跃顶点，则称该区域为活动的；否则称为非活跃。

引理 4.10. $\sum_{e \in A^{\text{mixed}}} |V(e) \cap (L \cup I)| \le 2(|L| + |I| - |\mathcal{W}^{\text{twin}}|) - 2$。

证明。 设 q 为活动区域的数量。各区域互不相交，且每个活动区域都包含一个活跃顶点，因此 $q \le |L| + |I|$。根据引理 4.8， $d(X)$ 是

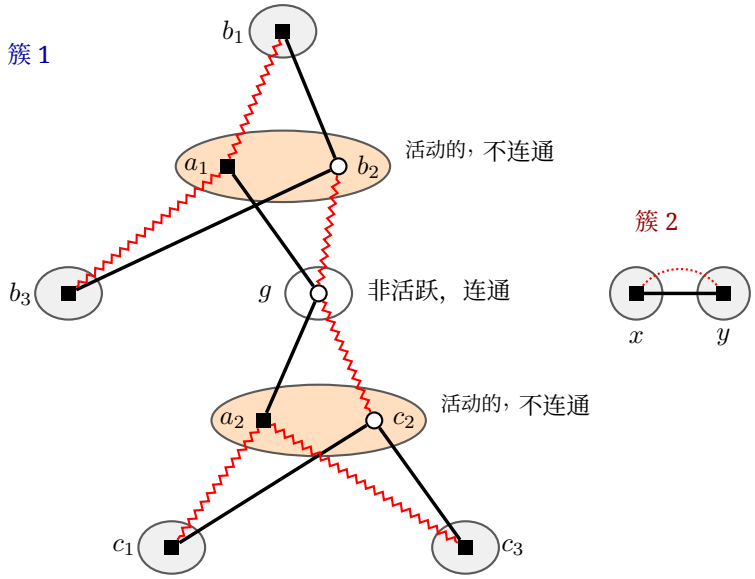


图 11：图 7 中两个簇的区域，以及森林边和混合边。孪生边 xa_1 未显示。橙色区域 $\{a_1、\ b_2\}$ 和 $\{a_2、\ c_2\}$ 是不连通的，因为它们各自都包含森林的两个连通分量中的节点。所有其他区域都是连通的，并且 $\{g\}$ 是唯一的非活动区域。

区域 X 中的数量。每条混合弧连接两个区域，且共有 $|\mathsf{W}^{\text{mixed}}| = |\mathsf{W}| - |\mathsf{W}^{\text{twin}}|$ 条混合弧，因此 $\sum_X d(X) = 2|\mathsf{W}| - 2|\mathsf{W}^{\text{twin}}|$。有 $|\mathsf{W}| + 1 - q$ 个非活跃区域，根据引理 4.8，每个区域都有 $d(X) \geq 2$。因此，$\sum_X$ 活动的$d(X) \leq 2|\mathsf{W}| - 2|\mathsf{W}^{\text{twin}}| - 2(|\mathsf{W}| + 1 - q) = 2q - 2 - 2|\mathsf{W}^{\text{twin}}|$。活跃顶点处每条混合边的端点都位于活动区域内$X$，并且根据引理 4.8，$X$ 恰好包含 $d(X)$ 条混合边的端点。因此，活跃顶点处的混合边端点至多有 $2q - 2 - 2|\mathsf{W}^{\text{twin}}| \leq 2(|L| + |I| - |\mathsf{W}^{\text{twin}}|) - 2$ 个。 □

回顾一下，$H[S]$ 表示由 H 诱导的 S 的子图，其中任意 $S \subseteq V$。接下来仍需对交叉边进行计数，我们逐个簇地完成此操作。固定一个簇 C。根据引理 4.9，C是 H的完整连通分量的并，因此 $\kappa(H[C])$ 是 H 在 C中的连通分量数，而 C 的区域及其之间的混合弧构成一棵树。的交叉边 C 是由这棵树的交叉弧承载的交叉边。每条交叉弧恰好承载一条交叉边，而树的弧数比节点数少一条，因此

$$\#\,\text{cross edges of } C \;=\; \#\,\text{regions of } C \;-\; 1 \;-\; \#\,\text{inner arcs of } C. \tag{6}$$

区域 X 是连通的，当且仅当 $H[X]$ 是连通的，且非连通的则否则（图11）。

引理 4.11。对于每个簇 C，

$$\sum_X (\kappa(H[X]) - 1) = \kappa(H[C]) - 1,$$

其中，求和范围为 C的所有区域 X。因此，C 至多有 $\kappa(H[C]) - 1$个非连通区域。

证明。 C 是 $\kappa(H[C])$个 $H[C]$的连通分量的并集。在每个连通分量中，删除连接不同区域的森林边。连通分量中剩余的部分分裂成若干连通部分，且每个部分都位于一个区域内。区域中由区域内部的森林边连接的两个顶点属于同一个部分，因此这些部分恰好是图 $H[X]$ 的连通分量的顶点集。从 H 的一个连通分量中删除边后，剩余部分的数量比

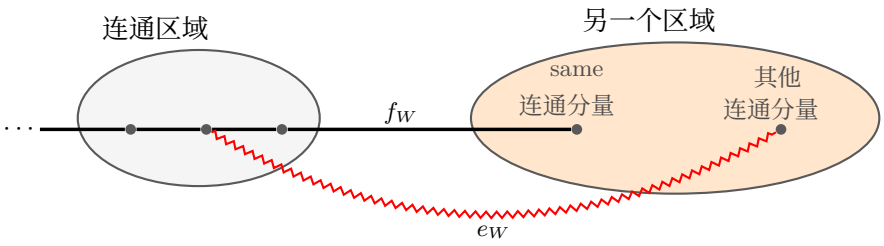


图12：引理的证明 4.12。森林边 f_W 和交叉边 e_W 均连接交叉弧的两个区域。如果其中一个区域是连通的，那么 f_W 将其连接到森林中同一连通分量的一个节点，而 e_W 将其连接到另一个连通分量的一个节点。因此，另一个区域是不连通的。

删除边数多一个，因为连通分量是连通的且不含环。对各连通分量求和，$\sum_X \kappa(H[X])$ 等于删除边数加上 $\kappa(H[C])$。根据引理 4.6，被删除的边恰好是 C的弧所对应的森林边，每条弧对应一条森林边，并且 C 比区域少一条弧。因此 $\sum_X (\kappa(H[X]) - 1) = \kappa(H[C]) - 1$。每个非连通区域至少为该总和增加 1 。 □

引理 4.12. 对于每条交叉弧，它连接的两个区域中至少有一个是不连通的。

证明. 根据引理4.6(i)，该弧对应的森林边和交叉边都连接它的两个区域（图 12）。如果其中一个区域是连通的，那么它的所有顶点都属于H的同一个连通分量。于是，森林边的另一个端点位于这个连通分量中，而交叉边的另一个端点不在其中。两个端点都位于第二个区域内，因此第二个区域是不连通的。 □

引理4.13. 如果 $\kappa(H[C]) \geq 2$，那么 C 至多有 $\kappa(H[C]) - 2$ 个非活动连通区域，此外每条 C的内部弧至多对应一个。

证明. 在整个证明中，父子关系仅限于 C内的混合弧树。当 C 没有非活动连通区域时，结论显然成立，因此不妨设其至少有一个非活动连通区域。的 C 中，父区域不属于 C的区域，或根区域，称为最高区域。与某个区域关联的弧将它连接到其父区域和子区域，而区域 的子节点 C 是 C 中以该区域为父区域的区域（图 13）。一个非活动连通区域至少有两条与其关联的混合弧（引理4.8）。由于至多一条这样的弧通向父区域，因此必定存在一个子节点。

在每个非连通区域上放置一个标记 C 并在 C的每条内部弧上放置一个标记。每个非活动连通区域 X 选择一个子节点 X'；如果它们之间的弧是内部弧，则取走该弧上的标记；如果是交叉弧，则取走 X' 上的标记。我们知道这个标记存在，因为 X'根据引理4.12，随后会变得不连通。

现在证明没有一个标记会被取走两次。如果最高区域是不连通的，则没有人会取走它的标记，因为其父区域不在 C中。否则它是连通的，并且在 C中有一个子节点，因为 C 包含一个非活动连通区域及其子节点。如果它是非活跃的，则它的所有混合弧都将其连接到 C中的子节点，因此它至少有一个子节点 X' 没有被它选择。如果它是活动的，则它不会取走任何标记，而 X' 可以是任意子节点。因此在这两种情况下，X' 的标记或通向 X' 的弧上的标记至少有一个存在，且没有人会取走它。因此，非活动连通区域的数量至多为非连通区域的数量加上内部弧的数量再减一，引理4.11即得结论。 □

引理 4.14. 每个簇 C 至多有 $|L \cap C| + 2|I \cap C| + 2\kappa(H[C]) - 4$ 条交叉边。总计，$|A^{\text{cross}}| \leq |L| + 2|I| + 2\kappa(H) - 4 - 4|W^{\text{twin}}|$。

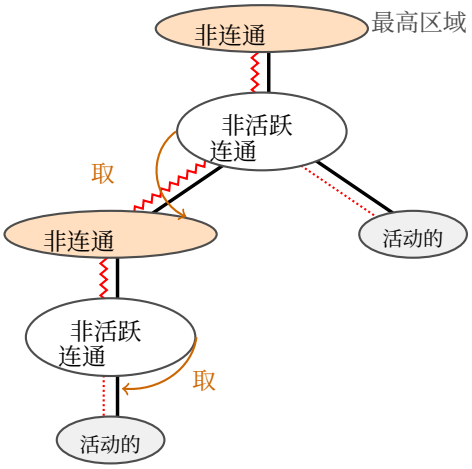


图13：引理证明中的标记4.13，位于簇的一部分中，其最高区域在顶部。灰色区域是活动的，白色区域是非活跃且连通的，橙色区域是不连通的。每个白色区域都会取用其下方的一个标记：如果它们之间的弧是交叉弧，则取用子节点的标记；如果是内部弧，则取用该弧的标记。这里最高区域是不连通的，其标记从未被取用。

证明。如果 $\kappa(H[C]) = 1$，那么 C 是 H的一个连通分量，因此根据引理4.6(i)，它没有交叉边；而这个界至少为 0，因为 C 是一个孤立顶点，或者至少有两个叶节点。现在设 $\kappa(H[C]) \geq 2$。根据引理 4.11，至多有 $\kappa(H[C]) - 1$ 个 C 区域不连通。至多有 $|L \cap C| + |I \cap C|$ 个区域是活动的连通区域，因为每个区域都包含一个活跃顶点。根据引理4.13，非活跃连通区域至多有 $\kappa(H[C]) - 2$ 加上内部弧的数量。由 (6) 可得， C 至多有 $|L \cap C| + |I \cap C| + 2\kappa(H[C]) - 4$ 条交叉边，这正是我们要证明的。

总的来说，每条交叉边和的每个连通分量 H 恰好属于以下各项之一$|\mathcal{W}^{\text{twin}}|+1$簇（引理 4.9），因此将各簇上的第一个界相加即可得到第二个界。 □

定理 *1.2*的证明。 定理 1.2 的左侧为 w（A），我们逐一界定（5）中的三项。根据 $|A^{\text{twin}}| \leq 2|\mathcal{W}^{\text{twin}}|$ 有条孪生边，由引理 4.3可知。根据引理 4.10，混合边在活动顶点处至多有$2(|L|+|I|-|\mathcal{W}^{\text{twin}}|)-2$个端点。根据引理 4.14，有 $|A^{\text{cross}}| \leq |L| + 2|I| + 2\kappa$（$H$） $- 4 - 4|\mathcal{W}^{\text{twin}}|$ 条交叉边。将这三个界代入（5），得到

$$\begin{aligned} w(A) &\leq (2+2\beta)\cdot 2|\mathcal{W}^{\text{twin}}| + 2(|L| + |I| - |\mathcal{W}^{\text{twin}}|) - 2 \\ &\quad + 2\beta(|L| + 2|I| + 2\kappa(H) - 4 - 4|\mathcal{W}^{\text{twin}}|) \\ &= (2+2\beta)(|L| + 2|I|) + 2(\kappa(H) - |I|) - 4 - 4\beta \\ &\quad - (2-4\beta)(\kappa(H) - 1 - |\mathcal{W}^{\text{twin}}|). \end{aligned}$$

最后， H 根据引理 $|\mathcal{W}^{\text{twin}}| + 1$ 4.9 至少有个连通分量，并且$\beta \leq \frac{1}{2}$，因此最后一项至多为0。剩下的就是（1）的右侧，因为 $|\mathcal{C}| = \kappa$（H） $- |I|$。 □

人工智能披露

本研究中的数学结果并未借助任何 AI 工具得出。作者使用 ChatGPT（OpenAI）改进语法和表达、获取对证明草稿的反馈，并协助绘制图表。

参考文献

[AKR95] A. Agrawal、P. N. Klein 和 R. Ravi。“树木相遇时：网络上广义斯坦纳问题的近似算法”。载于：SIAM 计算杂志 24.3（1995），第 440–456 页。doi：10.1137/S0097539792236237。[BCS20] S. Beyer、M. Chimani 和 J. Spoerhase。“一种用于 2-边连通生成子图的简单原始-对偶近似算法”。载于：第 26 届计算与组合学会议论文集。2020 年，第 347–359 页。doi：10.1007/ 978-3-030-58150-3 28。[BFS16] S. Boyd、Y. Fu 和 Y. Sun。“利用环流和指定边，为次三次 2-边连通问题实现 5/4 近似”。载于：离散应用数学 209（2016），第 48–58 页。doi：10.1016/j.dam.2015.10.014。[BG07] A. Berger 和 M. Grigni。“平面图中的最小权重 2-边连通生成子图”。载于：第 34 届国际自动机、语言与程序设计研讨会论文集。2007 年，第 90–101 页。doi：10.1007/978- 3-540-73420-8 10。[BIT13] S. Boyd、S. Iwata 和 K. Takazawa。“在三次图中寻找更接近 TSP 巡回的 2-因子”。载于：SIAM 离散数学杂志 27.2（2013），第 918–939 页。doi：10.1137/110843514。[Bos+25] M. Bosch-Calvo、M. Garg、F. Grandoni、F. Hommelsheim、A. Jabal Ameli 和 A. Lindermayr。“2-边连通性的 5/4 近似”。载于：第 57 届计算理论研讨会论文集。2025 年，第 653–664 页。doi：10.1145/ 3717823.3718275。[CGSZ04] A. Czumaj、M. Grigni、P. Sissokho 和 H. Zhao。“平面图中最小 2-边连通子图和双连通子图的近似方案”。载于：第 15 届离散算法研讨会论文集。2004 年，第 496–505 页。[CKK02] B. Csaba、M. Karpinski 和 P. Krysta。“最小 2-连通性、TSP 和路径问题中稠密与稀疏实例的可近似性”。载于：第 13 届离散算法研讨会论文集。2002 年，第 74–83 页。doi：10.5555/ 545381.545390。[CKKK08] J. Cheriyan、H. Karloff、R. Khandekar 和 J. Könemann。“论树增广的整数性比”。载于：运筹学快报 36.4（2008），第 399–401 页。doi：10.1016/j.orl.2008.01.009。[CSS01] J. Cheriyan、A. Sebő 和 Z. Szigeti。“改进最小 2-边连通生成子图的 1.5 近似”。载于：SIAM 离散数学杂志 14.2（2001），第 170–180 页。doi：10.1137/S0895480199362071。[FJ81] G. N. Frederickson 和 J. JáJá。“若干图增广问题的近似算法”。载于：SIAM 计算杂志 10.2（1981），第 270–283 页。doi：10.1137/0210019。[GGJ23] M. Garg、F. Grandoni 和 A. Jabal Ameli。“改进的 2-边连通性近似算法”。载于：第 34 届离散算法研讨会论文集。2023 年，第 2368–2410 页。doi：10.1137/1.9781611977554.ch92。[GJ79] M. R. Garey 和 D. S. Johnson。《计算机与难解性：NP 完全性理论指南》。W. H. Freeman，1979 年。[HLL26] F. Hommelsheim、A. Lindermayr 和 Z. Liu。“优于 5/4 的 2-边连通性近似”。载于：第 37 届离散算法研讨会论文集。2026 年，第 1468–1520 页。doi：10.1137/1.9781611978971.54。

[HVV19] C. Hunkenschröder、S. Vempala 和 A. Vetta。《最小二边连通子图问题的 4/3-近似算法》。载于：ACM 算法汇刊 15.4（2019），55:1–55:28。doi: 10.1145/3341599。[Jai01] K. Jain。《广义斯坦纳网络问题的因子 2 近似算法》。载于：Combinatorica 21.1（2001），第 39–60 页。doi: 10 . 1007 / s004930170004。[KN23] Y. Kobayashi 和 T. Noguchi。《通过无三角形二边覆盖求解二边连通子图问题的近似算法》。载于：第 34 届国际算法与计算研讨会论文集。2023，49:1–49:10。doi: 10.4230/LIPIcs.ISAAC.2023.49。[KV94] S. Khuller 和 U. Vishkin。《双连通性近似与图切割》。载于：ACM 期刊 41.2（1994），第 214–235 页。doi: 10.1145/174652.174654。[Mah94] A. R. Mahjoub。《二边连通生成子图与多面体》。载于：数学规划 64.1–3（1994），第 199–208 页。doi: 10 . 1007 / BF01582572。[SV14] A. Sebő 和 J. Vygen。《更优耳分解带来更短巡回：图旅行商问题的 7/5-近似、路径版本的 3/2-近似，以及二边连通子图的 4/3-近似》。载于：Combinatorica 34.5（2014），第 597–629 页。doi: 10.1007/s00493-014-2960-3。[Tak16] K. Takazawa。《二部三次图中最小二边连通子图问题的 7/6-近似算法》。载于：信息处理快报 116.9（2016），第 550–553 页。doi: 10.1016/j.ipl.2016.04.011。[WGMV95] D. P. Williamson、M. X. Goemans、M. Mihail 和 V. V. Vazirani。《广义斯坦纳网络问题的原始-对偶近似算法》。载于：Combinatorica 15.3（1995），第 435–454 页。doi: 10.1007/BF01299747。[Win86] P. Winter。《串并联网络中的广义斯坦纳问题》。载于：算法杂志 7.4（1986），第 549–566 页。doi: 10.1016/0196-6774(86)90018-0。