图中连通性切换的算法与复杂性*

ChristophKern, Alexander Firbas 和 Manuel Sorge

奥地利维也纳工业大学 christoph@kern.codes, {afirbas,manuel.sorge}@ac.tuwien.ac.at

arXiv:2611.32927v1 [cs.DS] 24 Nov 2026

摘要

我们研究开关图中的计算问题。开关图由一个顶点集和一组开关构成，每个开关都是一个边集的集合。目标是找到一种配置——为每个开关选取一个边集——使所得图满足所需性质。这一通用框架统一了先前研究中的若干切换模型，并应用于求解布尔方程组、网络路由和 SNP 基因分型。我们聚焦于连通性相关切换问题，例如寻找一种配置，使所得图成为连通图（全局连通性），或使特定顶点对连通（局部连通性）；我们针对不同的开关结构给出多项式时间算法，并证明相应问题为 NP完全。对于局部连通性，我们得到了完整的复杂度二分性。此外，我们引入一种自然的加权变体，并分析其参数化复杂度，通过从受限版本的加权可满足性问题（WSAT）归约，证明该问题关于解权重是 W[1]-困难的。作为附带结果，我们解决了 Kanj 和 Szeider [13] 提出的一个关于特定 WSAT 变体参数化复杂度的开放问题。

关键词： 切换图；连通性；图算法；复杂性；参数化复杂度；加权可满足性；拟阵

1 引言

在各种应用中，我们会遇到一种互连网络，其结构可以通过小幅调整来控制，而我们的目标是实现某些特定目的。例如，在酿酒厂阀门系统中，我们希望通过开启或关闭阀门来连接某些终端对 [9, 10], ；在铁路轨道系统中，我们希望通过配置铁路道岔，使列车能够到达某些地点 [19],；在图聚类中，我们希望添加或删除噪声边，以获得清晰的聚类 [1], ，等等 [17, 20, 8, 14]。抽象而言，我们可以将这些问题建模如下：给定一个所谓的开关图，我们希望找到一种开关配置，使所得的图满足某种期望的性质。

形式化地说，一个开关图 G 由一个顶点集合 $V(G)$ 和一个集合 $\mathcal{S}(G)$ 为索引，其中每个位置 $s[i]$ 是一个边集 $s[i] \subseteq \binom{V(G)}{2}$。（注意，普通边可以建模为平凡开关。）

G 的配置是一个函数 $c\colon \mathcal{S}(G) \to \mathbb{N}_{\geq 0}$，它将每个开关 $s \in \mathcal{S}(G)$ 映射到恰好一个开关位置 $i \in [|s|]$。图1给出了一个开关图及其配置示例。

受实际应用的启发，我们在此重点研究如何寻找一种配置，以确保局部连通性（Local-Con Switching），即连接给定的两个顶点 a, b；或确保全局连通性（Global-Con Switching），即将所有顶点两两连接。一般而言，

*本工作基于 Christoph Kern 的硕士论文 [15]。Alexander Firbas 感谢维也纳科学与技术基金（WWTF） [10.47379/ICT22029]和奥地利科学基金（FWF）[10.55776/Y1329]的资助。

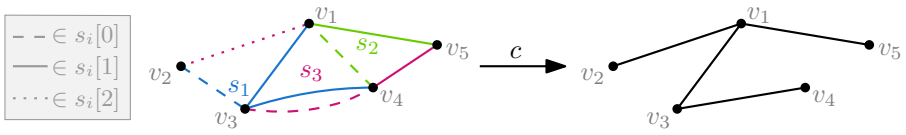


图1：一个开关图 G 包含 $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 以及 $\mathcal{S}(G) = \{s_1, s_2, s_3\}$，以及一个配置 c，其中 G 满足 $c(s_1) = 1$，$c(s_2) = 1$，且 $c(s_3) = 2$。

正如我们所证明的，这两个问题都是NP困难，但对于某些受限类型的开关 [14]，存在可高效求解的情形。

本研究的目标有两个方面。首先，我们希望确定开关的形式如何影响 Local-Con Switching 和 Global-Con Switching 的复杂性。也就是说，哪些类型的开关仍然是多项式时间可解的？在这里，我们主要区分两个特征：开关是否连通（其位置的并集所诱导的图是连通图），以及每个位置中的边数。例如，我们将具有两个位置的开关称为 $\{2, 1\}$-有界开关，其中一个位置至多有两条边，另一个位置至多有一条边。类似地，a $\{1^\star\}$-有界开关具有任意数量的位置，且每个位置至多有一条边。（详见第2节。）其次，我们希望研究权重对这两个问题复杂性的影响：自然的一种设定是，为开关指定开和关位置，并且我们最多只能将给定整数 k 个开关切换到开位置。更一般地，我们可以为开关位置赋予权重，并寻找总权重不超过给定值的配置。我们分别用 On-Off 和 Weighted 限定词来指称这两种设定。

我们得到了一系列二分结果（另见图2）：首先来看 Local-Con Switching。需要注意的是，将问题限制在 $\{1, 0\}$-有界开关时，问题变得平凡。然而，即使是第一个非平凡情形，即 $\{1, 1\}$-有界开关，也会使 Local-Con Switching 成为 NP完全问题。事实上，在 $\{1^\star\}$-有界情形下，我们得到了一个精确的二分结果：若每个开关都导出一个完全多部图，则 Local-Con Switching 属于 P类；否则为 NP完全问题（定理1）。将开关限制为连通开关时，Katz等人 [14] 证明，$\{1, 1\}$-有界开关使 Local-Con Switching 成为多项式时间可解问题。我们进一步给出了相匹配的下界：$\{2, 1\}$-有界连通开关会导致 NP完全性（定理2）。

Local-Con Switching 的开关式和加权情形更为一般，因此我们拓宽了对可处理性的定义：对于开关式局部连通性切换，只需尝试所有至多开启 k 个开关的可能性，即可在 $|I|^{k+\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解，其中 $|I|$ 为实例规模。若能将其改进为固定参数运行时间 $f(k) \cdot |I|^{\mathcal{O}(1)}$，将会很有意思。然而，我们证明，即使在第一个非平凡情形（$\{1, 1\}$-有界开关）以及 $\{2, 1\}$-有界连通开关的情形下，开关式局部连通性切换也不太可能是固定参数可处理的，而且即便对平凡运行时间作出微小改进，也不太可能实现（定理5和定理6）。为证明这一点，我们展示了串并联开关图与布尔公式之间的关系。借助这一关系，我们在一定程度上可以利用已知的加权可满足性问题困难性结果，证明开关式局部连通性切换的困难性。然而，对于 $\{1, 1\}$-有界开关，当时尚无相应的困难可满足性变体。本文给出了一种新的困难性归约（定理 4），从而回答了 Kanj 和 Szeider [13]提出的一个开放问题。这一结果本身也可能具有独立的研究价值。

对于 Global-Con Switching，Katz等人 [14] 观察到它与拟阵存在紧密联系，并利用这一点证明：对于 $\{1^\star\}$-有界的星形开关，Global-Con Switching 是多项式时间可解的。我们将其方法推广到任意 $\{1^\star\}$-有界开关，并且也推广到了加权情形（定理 8）；在非加权情形下，则推广到所有其位置构成拟阵的开关（定理 7）。为展示这一思想的局限性，我们还给出了一个匹配的下界：最简单的不一定构成拟阵的开关是 $\{2, 1\}$-有界的，

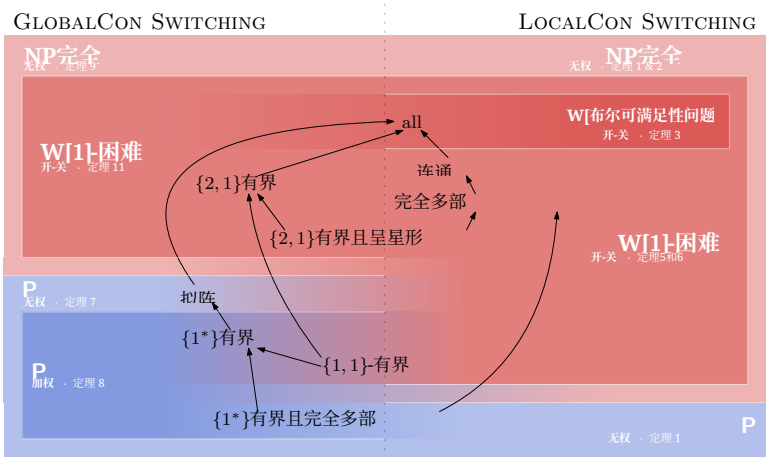


图 2：主要开关结构约束的哈斯图，其中从A 到 B 的箭头表示 A 是 B的特殊情况。对于 Local-Con Switching 和 Global-Con Switching，在无权、加权和开-关情况下，分别给出了每种约束的复杂性。请注意，W[1]- 和 W[SAT]-困难性均表明，该问题不太可能是固定参数可处理的。

而一旦采用这种开关，Global-Con Switching（定理 9）和开关变体（定理 11）就变得困难起来，即使将范围限制为连通开关也是如此。

2 预备知识

对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，令 $[n]$ 表示集合 $\{i \in \mathbb{N}_{\geq 0} \mid 0 \leq i < n\}$。关于参数化复杂性理论的介绍，可参阅标准教科书 [4, 7, 6]；我们回顾一下，指数时间假设 （ETH）指出，可满足性问题 （布尔可满足性问题，SAT）无法在次指数运行时间内求解 [11, 12]。关于拟阵理论的综述，可参阅 Oxley [18] ；并假设读者了解基本的拟阵概念以及常见拟阵，例如图拟阵和分割拟阵。

简单图 G 由顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ 组成。为提高可读性，我们通常将边 $\{u, v\} \in E(G)$ 表示为 uv。对于顶点 $v \in V(G)$，令$N_G(v) := \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ 表示其邻点，并令 $\deg_G(v) := |N_G(v)|$ 表示其顶点度。本文中的所有路径都是简单的，即不含重复的顶点或边。对于此处未定义的其他图论概念，我们参考 Diestel [5]。

给定每个配置关图 $\widehat{G}$，令 $\mathcal{C}(\widehat{G})$表示所有配置的集合，$c \in \mathcal{C}(G)$实现一个简单图 $G \circ c$（读作“由 c 配置的 G”），其顶点集为 $V(G \circ c) := V(G)$，边集为 $E(G \circ c) := \bigcup_{s \in \mathcal{S}(\widehat{G})} s[c(s)]$，，即所选开关位置的边集之并。

为了更好地对开关 s 的结构进行分类，我们通常考察其图结构，该结构由开关诱导图 $G[s]$ 给出，其边集为 $E(G[s]) := \bigcup_{i \in [|s|]} s[i]$ 包含出现在 s 至少一个位置中的所有边，而顶点集为 $V(G[s]) := \bigcup_{e \in E(G[s])} e$ 由与 $E(G[s])$ 中至少一条边关联的所有顶点组成。给定一个图族 Π，如果 s 同构于图 $G \in \Pi$，我们称开关 s 是 Π 形的 。我们常考虑的图族包括完全多部图 $\mathcal{K}_{\text{multi}}$ 和星图 $\mathcal{K}_{1, \star}$。

我们还根据位置的大小对开关进行分类。对于一个由正整数组成的多重集 Σ，如果存在一个单射 π: $[|s|] \to \Sigma$，使得对所有 $i \in [|s|]$，都有 $|s[i]| \leq \pi(i)$，那么称开关 s 是-有界的。我们使用指数记法表示 Σ 中的重数，并用 $\star$ 表示任意大的数。例如，一个 $\{\star^2\}$-有界开关 s，也称为开-关开关，至多有两个位置——$s[0]$ 称为关闭位置， $s[1]$ 称为

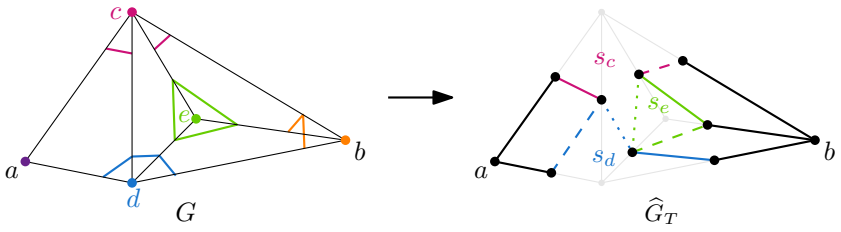


图3：一个带有转移系统 T （左）的图 G 及其对应的开关图 G_T （右），该开关图依据构造1构造。

开启位置——二者的大小均可任意大；而一个 $\{1^\star\}$-有界开关有任意多个位置，每个位置至多包含一条边。此外， $\{1\}$-有界的 $\{K_2\}$-形开关称为**静态边开关**，因为它的作用类似于一条永久边，会出现在开关图的每种配置中。

开关图 G 也可以看作边集为 $E(G) := \biguplus_{s\in\mathcal{S}(\widehat{G})} E(G[s])$ 的多重图，其中每条边 $e \in E(G)$恰好关联一个开关 $s \in \mathcal{S}$ G $P \subseteq [|s|]$ ( ) 及其开关位置的一个子集 $(P \neq \emptyset)$。令 $n := |V(G)|$， $m := |E(G)|$，以及 $\sigma := |\mathcal{S}(G)|$。

请注意，本文所考虑的所有问题变体，都是要求给定开关图的一个配置，并满足某个可在多项式时间内验证的性质。因此，本文提出的所有NP困难问题也都是NP完全问题。

3 局部连通性

在本节中，我们研究通过一条路径连接两个指定顶点 a 和 b 的配置，其形式化定义如下判定问题：

定义 1. Local-Con Switching

输入： 一个开关图 G 和两个不同的顶点 a， $b \in V$ （G）。

问题： 是否存在一个配置 $c \in \mathcal{C}$ （G），使得 a 和 b 在 $G \circ c$ 中连通?

3.1 与转移兼容路径的联系

Szeider [20] 提出了一个称为转移兼容路径的问题，该问题与本文研究的 Local-Con Switching 问题密切相关。给定一个图 G，令 $T[v]$ 为顶点 $v \in V$ （G）的转移图，其顶点是与 v 相 incident 的 G 的边。若两条这样的边通过 v 构成一个**允许转移**，则它们在 $T[v]$ 中相邻。**转移系统** T 是对每个顶点 $v \in V$ （G）的所有转移图 $T[v]$ 的集合。图 G 中的一条路径 $P := \langle v_0, v_1, \ldots\ldots, v_k\rangle$ 称为 T-**兼容** 路径，当且仅当它仅由允许转移组成；也就是说，对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$，边 $v_{i-1}v_i$ 在 $T[v_i]$ 中与边 v_iv_{i+1} 相邻。由此得到如下问题定义：

定义 2. 转移兼容路径

输入： 一个带有转移系统 T 的图 G，以及两个不同的顶点 a， $b \in V(G)$。

问题： 在 G 中，是否存在一条从 a 到 b 的 T-兼容路径?

我们可以将转移兼容路径归约为限制为 $\{1^\star\}$ 有界切换的 Local-Con Switching，反之亦然。在从左到右的方向上，我们使用如下构造，图 3 通过一个示例对此进行了说明：

构造1。 设 G 是一个带有转移系统 T的图，且 a， $b \in V(G)$是两个不同的顶点。我们按如下方式构造相应的开关图 G_T：

- Let $V(\widehat{G}_T) := \{a, b\} \cup E(G)$.

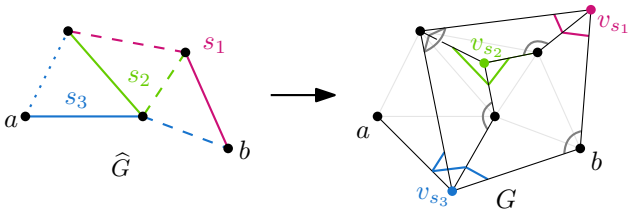


图4：开关图示例 G （左）及其对应的带有转移系统的图 G T （右），按照构造2构造。

- 对于每个 $v \in V(G)\backslash\{a,b\}$，我们创建一个 $\{1^\star\}$有界的开关 s_v，使得 $E(G[s_v]) = E(T[v])$。

对于每条与终端 $v \in \{a,b\}$ 关联的边 e，我们引入一个静态边开关 s_e，其满足$s_e[0] := \{ve\}$。

直观而言，图 G 中从 a 到 b 的 T-兼容路径，可以看作由相邻边对之间的一系列允许转移组成，且每个顶点至多发生一次转移。（请记住，我们的所有路径都是简单路径。）在 G_T 中，每个顶点 $v \in V$（G）及其转移图 $T[v]$，都由一个 $\{1^\star\}$-有界开关 s_v 表示，其中每个位置对应一个这样的允许转移。按照这些转移配置开关，即可得到一条从 a 到 b、位于 G_T 中且遵循相同序列的路径。反向论证也类似。因此我们得到：

引理1. 设 G 是一个带有转移系统 T的图，且 a、$b \in V(G)$ 是两个不同的顶点。那么，当且仅当由构造*1*构造的 G_T在某个配置 $c \in \mathcal{C}(G_T)$下存在一条从 a 到 b 的路径时，G 中才存在一条从 a到 b的 T-兼容路径。

证明. 我们分别证明等价性的两个方向。

(⇒) 设 $P := \langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k\rangle$ 是 G中一条从 $a = v_0$到 $b = v_k$的 T-兼容路径。对于每个满足 $i \in \{1,2,\ldots,k-1\}$的内部顶点 v_i，顶点对 $\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\}$ 在 $T[v_i]$中构成一个允许的转移。我们通过将每个相应开关s_{v_i} 设为包含边 $\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\}$的位置，定义 G_T 的配置 c。所有其他开关均设为位置0。于是，序列 $P' := \langle v_0, v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k, v_k\rangle$ 在配置 c下构成一条从 a到 b的路径，因为 P 是一条路径，因此不会重复经过任何边转移，这意味着在 P'中不会重访任何边顶点。

(⇐) 设 c 是 G_T 的一个配置，它包含路径 $P' := \langle a, e_1, e_2, \ldots, e_k, b\rangle$。对于 P' 中每一对相邻的边顶点 $\{e_i, e_{i+1}\}$，根据构造可知，这对顶点共享一个公共端点 $v \in V(G)$，并且它在 $T[v]$ 中构成一个有效转移，因为$\{e_i, e_{i+1}\} \in s_v[c(s_v)]$。这意味着，在 G 中的一条转移兼容路径上，路径可以经由 v 从边 e_i 转移到 e_{i+1}。由于 $\{e_i, e_{i+1}\}$ 是配置 c中开关 s_v 唯一贡献的边，因此它也是 P' 中任意一对相邻边顶点之间经由 v 转移的唯一边。因此，边序列 $\langle e_1, e_2, \ldots, e_k\rangle$ 构成一条 T兼容路径，因为这可以防止同一个顶点被多次访问。最后，根据静态边 $\{a, e_1\}$ 和 $\{e_k, b\}$ 的定义，e_1 与 a 关联，且 e_k 与 b 关联，因此我们得出结论：G 存在一条从 a 到 b 的 T兼容路径。 □

为了将 Local-Con Switching 归约到转移兼容路径，我们采用如下构造，图 4 通过一个示例展示了该构造：

构造2. 设 G 是一个开关图，且其开关受限于 $\{1^\star\}$有界切换；$a, b \in V(G)$ 是两个不同的顶点。我们按如下方式构造相应的图 G 及其转移系统 T：

- 设 $V(G)$由原始顶点 $V(G)$以及每个 $s \in \mathcal{S}(G)$对应的一个切换顶点 v_s 组成

- 令 $E(G) := \bigcup_{s\in\mathcal{S}(\widehat{G})}\{v_s u \mid u \in V(G[s])\}$。

- 对于每个切换顶点 $v_s \in V(G)$，令 $T[v_s]$ 为一个转移图，使得 $E(T[v_s]) := \{\{uv_s, wv_s\} \mid uw \in E(G[s])\}$。
- 对于每个原始顶点 $v \in V(\widehat{G})$，令 $T[v]$ 为一个完全图，即 $E(T[v]) := \binom{V(T[v])}{2}$。

注意，开关 s 中的每条边 uw 都对应于 $T[v_s]$ 中的一个允许转移，从而能够通过切换顶点 v_s 在 u 和 w 之间建立连接。直观地说，这使得 G 的实现图中的任意路径都可以转换为 G 中的 T-兼容路径。反向方向可通过类似的推理得到。这引出了以下引理：

引理2。 </style}令 为一个限制为 -有界开关的开关图。那么，在某个配置 (G) 下， G 中存在一条从 a 到 b 的路径，当且仅当通过构造 *2* 构造的图 G 中存在一条从 a 到 b的 T-兼容路径。

证明。 我们分别证明等价性的两个方向。

(⇒) 设 c是 G的一个配置，它存在一条路径 $P := \langle v_0, v_1, \ldots, v_k\rangle$，从 $a = v_0$到 $b = v_k$。由于每个开关至多向 $G \circ c$添加一条边，因此 P中每一对相邻的顶点 v_i, v_{i+1} 都可以映射到一个不同的开关 $s_i \in \mathcal{S}(G)$，其中 $v_i v_{i+1} \in E(G[s_i])$。根据构造，顶点对 $\{v_i v_{s_i}, v_{i+1} v_{s_i}\}$ 是 $T[v_{s_i}]$中的一个允许转移。因此， $P' := \langle v_0, v_{s_0}, v_1, v_{s_1}, \ldots, v_{k-1}, v_{s_{k-1}}, v_k\rangle$ 是 T-兼容路径，它从 a到达 G中的 b。

(⇐) 设 P'是 G中一条从 $a = v_0$到 $b = v_k$的 T-兼容路径。由于每个切换顶点只与原始顶点相邻，反之亦然，因此路径 $P' := \langle v_0, v_{s_0}, v_1, v_{s_1}, \ldots, v_{k-1}, v_{s_{k-1}}, v_k\rangle$在原始顶点和切换顶点之间交替。因此，对于路径中的每个切换顶点v_{s_i}，顶点对 $\{v_i v_{s_i}, v_{i+1} v_{s_i}\}$ 必定是 $T[v_{s_i}]$中的一个允许转移。根据 G的构造，这意味着 $v_i v_{i+1} \in E(G[s_i])$。我们构造一个 G的配置 c，使得对于每个 $i \in [k]$，都有 $v_i v_{i+1} \in s_i[c(s_i)]$。然后，路径 $P := \langle v_0, v_1, \ldots, v_k\rangle$ 就是一条从 a 到 b 的路径，位于 $G \circ c$中。 □

除了上述与转移兼容路径的等价性之外，为了后续的复杂性结果，我们还需要一种变换：将任意形状的 $\{1^\star\}$-有界开关替换为 $K_{1,\star}$-形开关，同时不改变哪些顶点对能够连通。下面的构造实现了这一点，图 5 中通过两个示例对此进行了说明：

构造 3。 设 G 是一个开关图，$s \in \mathcal{S}(G)$ 是一个 $\{1^\star\}$-有界开关。我们通过引入一个新顶点 w，并将 s 替换为一组新开关来构造一个等价的开关图 G'；这些开关的边都与 w 关联。

设 $\{V_0, \ldots, V_{k-1}\}$ 是 $V(G[s])$ 的一个划分，使得对于每一对索引 $i \neq j$，V_i 中的顶点与 V_j 中的顶点之间的所有可能边都包含在 $E(G[s])$ 中。对于每个索引$i \in [k]$，我们引入一个新开关 s_i，以局部模拟 $G[s][V_i]$的结构。

令 $\{V_{i,0}, \ldots, V_{i,\ell-1}\}$ 为 $G[s][V_i]$的边团覆盖，即 V_i的一个子集集合，使得对于每个 $j \in [\ell]$，导出子图 $G[s][V_{i,j}]$ 是一个团，并且 $G[s][V_i]$ 中的每个顶点和边都至少包含在一个 $V_{i,j}$ 中。对于每个子集 $V_{i,j}$，我们定义一个开关位置$s_i[j] = \{wv \mid v \in V_{i,j}\}$。

直观地说，该构造确保对于任意一对顶点 u、$v \in V$（$G[s]$），当且仅当可以配置原开关 s 以连接 u 和 v 时，才能配置新的开关，使其通过新顶点 w 连接这两个顶点。由于在任意路径中，w 至多只能被经过一次，因此只能使用这样的一条连接，从而复现原有的 $\{1^\star\}$ 有界开关 s 的行为。构造 3 的正确性由以下引理确立：

引理 3。 设 G 为一个开关图，且 $s \in \mathcal{S}$（G） 为一个 $\{1^\star\}$-有界开关。那么，G 在某个配置下存在一条从 a 到 b 的路径，当且仅当通过构造 *3* 获得的变换开关图 G'在某个配置下也存在一条从 a到 b的路径。

^证明。设 $\{V_0, \ldots, V_{k-1}\}$ 为在构造 G'中使用的 $V(G[s])$ 的一个划分。我们分别证明等价性的两个方向。

^(⇒) 设 c 是一个 G 配置，该配置允许存在一条从 a 到 b 的路径 P。我们将其扩展为 ^ 配置 c'，具体如下：

- 如果 P 不使用 s 中的任何边，那么 c' 可以为 G' 中新增的 ^ ^个开关任意分配位置，而 P 仍然是 $G' \circ c'$ 中从 a 到 b 的有效路径。

- 否则，设 $uv \in s[c(s)]$ 是 P 使用的边。– 如果对于某个 $i \neq j$ 有 $u \in V_i$ 和 $v \in V_j$，那么我们配置 s_i，使得 $uw \in s_i[c'(s_i)]$，并配置 s_j，使得 $wv \in s_j[c'(s_j)]$。其余新增的开关可以任意配置。将 P 中的 uv 替换为子路径 $u \to w \to v$，即可得到 $G' \circ c'$ 中从 a 到 b 的有效路径 ^。– 若对于某个 $i \in [k]$ 有 u、$v \in V_i$，则根据构造中使用的边团覆盖 $\{V_{i,0}, \ldots, V_{i,\ell-1}\}$，存在一个 V_i、$_j$，使得 $\{u, v\} \subseteq V_i$、$_{j}$。我们设置 $c'(s_i) = j$，使得 uw、$wv \in s_i[j]$。同样，将 P 中的 uv 替换为 $u \to w \to v$，即可得到 $G' \circ c'$ 中从 a 到 b 的一条路径 ^。

^(⇐) 设 c' 为一个 G' 的配置，该配置中存在一条从 a 到 b的路径 P。我们如下将 c' 扩展为 G 的 ^配置 c：

- 如果 P 不经过新顶点 w，那么它会避开所有用于替代 s的边，而 ^和 s 可以任意配置。因此，P也是 $G \circ c$中从 a到 b的一条路径。
- 否则，设 u 和 v 为 P中 w 的邻点。– 如果对于某个 $i \neq j$，有 $uw \in s_i[c'(s_i)]$ 且 $wv \in s_j[c'(s_j)]$，那么 $u \in V_i$ 和 $v \in V_j$。根据构造，$uv \in E(G[s])$，因此我们配置 s，使得 $uv \in s[c(s)]$。将 P中的子路径 $u \to w \to v$ 替换为边 uv，即可得到 $G \circ c$中从 a到 b的一条路径。– 如果相反，uw 和 wv 都属于某个 $i \in [k]$的 $s_i[c'(s_i)]$，那么 u 和 v都位于 V_i中，$_j$ 满足 $j := c'(s_i)$。由于 $G[s][V_{i,j}]$ 是一个团，因此有 $uv \in E(G[s])$，于是我们设置 $c(s)$，使得 $uv \in s[c(s)]$。再次将 P中的 $u \to w \to v$ 替换为 uv，即可得到 $G \circ c$中从 a到 b的一条路径 ^。 □

Szeider 关于转移兼容路径的复杂性结果，结合上述归约和变换，得出了 Local-Con Switching 在受限于 $\{1^\star\}$-有界切换时的复杂度二分性；该二分性取决于开关的形状，具体如下述定理所示。

定理1. 对于不含孤立顶点的图族 Π，若 Local-Con Switching 限制为 $\{1^\star\}$-有界的 Π形开关，则可在 $\mathcal{O}(n+m)$ 时间内求解，当且仅当 $\Pi \subseteq \mathcal{K}_{\text{multi}}$；否则该问题是 ***NP*完全的。**

^证明. **多项式时间结果.** 固定一个开关图 G，其开关为 $\{1^\star\}$-有界的 $\mathcal{K}_{\text{multi}}$形开关。我们根据构造2，构造相应的图 G 及其转移系统 T。如前所述，引理2保证了该归约的正确性。

我们首先分析构造2的运行时间。为 G 中的每个顶点和每个开关创建一个顶点需要 $\mathcal{O}(n + \sigma)$时间。对于每个开关 $s \in \mathcal{S}(G)$，我们向 G 中添加$|V(G[s])|$ 条边，并为其对应的切换顶点构造一个转移图。该转移图包含 $|V(G[s])|$ 个顶点和 $|E(G[s])|$ 条边。每个开关所需的时间为 $\mathcal{O}(|V(G[s])| + (|V(G[s])| + |E(G[s])|))$。由于 $G[s]$ 没有孤立顶点，因此有$|V(G[s])| \leq 2|E(G[s])|$，从而每个开关的总运行时间可简化为 $\mathcal{O}(|E(G[s])|)$。

请注意，原始顶点对应的转移图无需显式存储，因此不会影响总体复杂度。因此，构造的总运行时间为

$$\mathcal{O}\left(n+\sigma+\sum_{s\in\mathcal{S}(\widehat{G})}|E(G[s])|\right)=\mathcal{O}(n+\sigma+m).$$

^图 G 本身由 $n+\sigma$ 个 $|V$顶点和每个开关 $s\in\mathcal{S}(G)$对应的$G[s](|\ )$条 $|V$边组成。由于$|V(G[s])|\leq 2|E(G[s])|$，这至多包含$\sum_{s\in\mathcal{S}(\widehat{G})}2|E(G[s])|$ 条 G中的 T边。随后，可以使用 [20, 命题 9]的算法，在 $\mathcal{O}(|V(G)|+|E(G)|)$时间内判定 G中是否存在一条从 a 到 b 的 T-兼容路径。这将得到总运行时间

$$\mathcal{O}(|V(G)|+|E(G)|)=\mathcal{O}\left(n+\sigma+\sum_{s\in\mathcal{S}(\widehat{G})}2|E(G[s])|\right)=\mathcal{O}(n+\sigma+m).$$

因此，归约和转移兼容路径算法的运行时间相同，总运行时间为 $\mathcal{O}(n+\sigma+m)$。我们可以安全地假设每个开关至少包含一条边，因为 $\sigma\leq m$ （没有边的开关对解决该问题没有用处，可以任意配置）。因此，可以将运行时间简化为 $\mathcal{O}(n+m)$，从而证明多项式时间结果。

NP困难性。 设 H 是一个不含孤立顶点且不是完全多部的图。我们旨在证明，将 Local-Con Switching 限制在 $\{1^\star\}$-有界 H-形状开关的情况下是 NP困难的。一般的困难性结果可立即推出。

我们首先以类似于 [20] 所采用的方法刻画 H 。由于 H 不是完全多部图，它必定包含顶点 u、v、$w\in V(H)$，使得 $uv\in E(H)$，但uw、$vw\notin E(H)$。由于 H 不含孤立顶点， w 必须与某个其他顶点 $x\in V(H)$ 相邻。根据 x 与 $\{u,v\}$ 之间的邻接关系，顶点诱导子图 $H[\{u,v,w,x\}]$ 同构于以下图之一：

- K_2+K_2 如果 x 不与 u 或 v 相邻，
- P_4 如果 x 恰好与 $\{u,v\}$ 中的一个相邻，
- $L_{3,\ 1}$ 如果 x 同时与 u 和 v 相邻。

现在我们分别分析这三种情况。

P_4 或 $L_{3,\ 1}$ 作为 H的顶点诱导子图： 由 [20, 定理 1], 可知，即使每个转移图^都同构于 H，转移兼容路径问题仍然是NP完全的。给定这样一个实例（G， T），我们使用构造1构造一个限制为 $\{1^\star\}$有界切换的开关图 G_T。根据引理1，这是到 Local-Con Switching 的正确归约。所得开关全都呈 $\{H,K_2\}$形，其中呈 K_2形的开关为静态边开关。

> 为消除这些 K_2形开关，我们将每个静态边开关 s_e 替换为一个 $\{1^\star\}$有界开关 s'_e ，其开关诱导图同构于 H，并在其中一个位置包含 e 。除 e的两个端点外，其顶点集由专属于 s'_e 的新顶点组成。由于只有包含 e 的位置能够帮助连接 a 和 b，因此s'_e 的行为与原静态边开关完全相同。由此，现在所有开关都呈H形，并且在这种设定下，Local-Con Switching 是NP困难的。

K_2+K_2 作为.....的顶点诱导子图 H：尽管当所有转移图都同构于 H 时，问题 Transition-Compatible Path 不是NP完全问题，但当转移图被限制为 $\{H,K_3\}$ [20, 定理 1]时，它是NP完全问题。

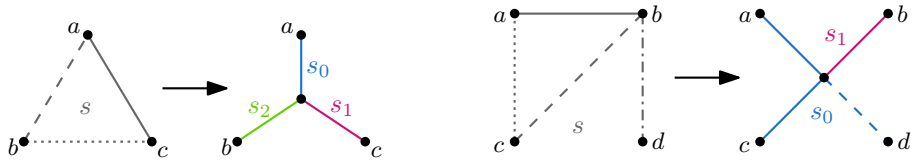


图5：将 $\{1^\star\}$ 有界开关（左： K_3 形，右：$L_{3,\ 1}$ 形）转换为$\mathcal{K}_{1,\ \star}$形开关，从而允许原始顶点之间保持相同的连接，同时防止在实现图的路径中同时出现多个连接。

将此类实例（$G,\ T$）通过构造1（如前一种情况）约化为开关图 G_T，会得到 $\{1^\star\}$有界的 $\{H, K_3, K_2\}$形开关。
对每个 K_3 形开关应用构造 3，可将其转换为三个静态边开关（因为 K_3 是完全三部图；见图 5 左侧），根据引理 3，这是一个正确的归约。然后，我们按照前一种情况替换所有静态边开关，从而得到一个仅限于 H 形开关的开关图。因此，在这种情况下，
Local-Con Switching 同样是 NP困难的。 □

超越 $\{1^\star\}$ 有界开关后，我们很快就会遇到 NP 困难性，即使将开关形状限制为星图也是如此，如下述定理所示：

定理2。 Local-Con Switching 是 *NP*完全的，即使将其限制为 $\{2, 1\}$ 有界$\mathcal{K}_{1,\ \star}$形开关。

证明。 即使每个转移图都同构于棒棒糖图 $L_{3,\ 1}$ [20]，转移兼容路径问题仍然是 NP完全的。对这样的实例应用构造1，得到的开关图仅包含受限于 $\{1^\star\}$ 的有界 $\{L_{3,1}, K_2\}$ 形开关。

图 5（右）展示了将构造 3 应用于一个 $\{1^\star\}$ 有界的 $L_{3,\ 1}$形开关 s 的情况。令 $V(G[s])$ $= \{a, b, c, d\}$ 和 $E(G[s]) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\}$。我们将$V(G[s])$划分为两个集合：$V_0 = \{a, c, d\}$ 和 $V_1 = \{b\}$，使得这两个集合之间的所有边都包含在 $E(G[s])$中。 $G[s][V_0]$ 的边团覆盖由子集 $\{a, c\}$ 和 $\{d\}$组成，而 $G[s][V_1]$ 的边团覆盖由 $\{b\}$组成。由此得到两个星形开关 s_0 和 s_1，其具有 $s_0[0] = \{aw, cw\}$、$s_0[1] = \{dw\}$ 和 $s_1[0] = \{bw\}$；两者都是 $\{2, 1\}$有界的$\mathcal{K}_{1,\ \star}$形开关。

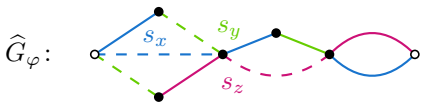
因此，对每个开关应用构造 3 后，我们得到一个开关图，其中每个开关都是一个 $\{2, 1\}$ 有界的 $\mathcal{K}_{1,\ \star}$ 形开关。由于转移兼容路径的原始实例是 NP完全的，并且我们已证明归约到 Local-Con Switching（引理1）以及开关变换（引理 3）的正确性，因此可以得出结论：将开关限制为 $\{2, 1\}$ 有界的 $\mathcal{K}_{1,\ \star}$ 形时，Local-Con Switching 是 NP困难的。 □

3.2 为开关位置赋权

现在我们转而讨论 Local-Con Switching 的加权变体的参数化复杂度，其形式化定义如下：

定义 3。 加权 Local-Con Switching
输入： 一个开关图 G、两个不同的顶点 $a,\ b \in V(G)$、定义在开关位置上的权函数 $w\colon \mathcal{S}(G) \times \mathbb{N}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$，以及一个实数 $\lambda \in \mathbb{R}$。
问题： 是否存在配置 $c \in \mathcal{C}(G)$，使得 a 和 b 在 $G \circ c$ 中连通，并且 $w(c) := \sum_{s \in \mathcal{S}(\widehat{G})} w(s, c(s)) \leq \lambda$?

注意，只要允许使用任意权重，在与无权变体相同的结构限制下，对于常数 λ，该问题仍然是 NP困难的。因此，为了更仔细地分析关于 λ 的参数化复杂度，我们考虑一种带有开-关



Fi图6：构造4在 $\varphi:=((x\wedge\neg y)\vee\neg x\vee(\neg y\wedge z))\wedge((x\wedge y)\vee\neg z)\wedge(z\vee x)$。

开关和固定权函数 $w(s,\ i):=i$ 的受限变体，称为开关式局部连通性切换，其中一个配置的总权重等于处于开位置的开关数量。

具体而言，我们证明，即使开关受到非常严格的限制，该问题相对于 λ 也不太可能属于固定参数可处理类。为此，我们给出从加权可满足性问题 （WSAT）出发的参数化归约。该问题给定一个处于否定范式（NNF）下的命题公式 φ 和一个正整数 $k\in\mathbb{N}_{>0}$，并询问是否存在满足真值赋值 $I:\ \mathcal{V}(\varphi)\ \rightarrow\{0,1\}$，使得至多 k 个变量被赋值为真（1）；形式化地说，即 $w(I):=\sum_{x\in\mathcal{V}(\varphi)}I(x)\ \leq k$。

在该归约中，我们根据公式 φ 的句法结构，在多项式时间内归纳地构造一个开关图。所得开关图可以视为一个多重图，它由边通过串联组合 和并联组合 得到，其中每个变量由一个开-关开关表示。这里，我们为图设置两个“端点”顶点；在串联组合中，通过将两个图各自的一个端点合并来连接它们；在并联组合中，则将两对对应的端点分别合并。图6通过一个示例展示了这一构造，其形式化定义如下：

构造4。 </style}给定一个处于否定范式的公式 φ，我们按如下方式构造相应的开关图 G_φ：对于每个变量 $x\in\mathcal{V}(\varphi)$，设置一个开关 s_x。

- 如果对于某个变量 x有 $\varphi:=\neg x$，那么 G_φ 由一条与 s_x的关闭位置相关联的单独边组成。
- 如果对于某个变量 x有 $\varphi:=x$，那么 G_φ 由一条与 s_x的开启位置相关联的单独边组成。
- 如果 $\varphi:=\psi\wedge\omega$，那么 G_φ 通过对 G_ψ 和 G_ω进行串联组合得到。
- 如果 $\varphi:=\psi\vee\omega$，那么 G_φ 通过对 G_ψ 和 G_ω进行并联组合得到。

假设在配置 $c\in\mathcal{C}(G_\varphi)$ 中，当且仅当相应变量 $x\in\mathcal{V}(\varphi)$ 在真值赋值 I中被赋值为真时，每个开关 s_x 都被设置为开启位置，这意味着 $w(c)\ =w(I)$。直观地说，当且仅当与文字相应的开关图的两个端点连通时，该文字才得到满足。当且仅当两个子公式的求值结果都为真时，合取才得到满足——等价地，当且仅当两个子图也分别存在端点之间的路径时，配置后的开关图才存在端点之间的路径。析取同理。因此，当且仅当 φ 在 I下得到满足时，$G_\varphi\circ c$ 的端点之间才存在路径。此外，如果 φ 中的所有变量都是 $(i,\ j)$-有界的——即每个变量在一种极性下出现次数至多为 i，在另一种极性下出现次数至多为 j——那么 G_φ 中的每个开关也都是 $\{i,j\}$-有界的。这就得到以下引理：

引理4。 存在一种参数化归约，将参数为 k 且限制为(i,j)-有界变量的WSAT 归约到参数为 λ 且限制为 $\{i,j\}$-有界开-关开关的开关式局部连通性切换。

证明。设 $(\varphi,\ k)$ 为WSAT的一个实例，并设 G_φ 为按构造4所述由 φ构造的开关图。我们证明存在真值赋值 I，使得 $I(\varphi)\ =1$

[1]如果一个布尔公式仅包含合取、析取以及直接作用于变量的否定运算符，则该公式属于否定范式。

且 $w(I) \leq k$ 当且仅当存在配置 $c \in \mathcal{C}(G_\varphi)$，使得两个端点在 $G_\varphi \circ c$ 中连通，且 $w(c) \leq \lambda = k$，通过对 φ的结构进行归纳。

假设对于所有 $x \in \mathcal{V}(\varphi)$，$c(s_x) = I(x)$。那么，$w(c) = w(I) \leq k = \lambda$。如果 $\varphi := \neg x$ 或 $\varphi := x$，那么 $I(\varphi) = 1$ 当且仅当两个端点在 $G_\varphi \circ c$ 中连通，这是由构造得到的。如果$\varphi := \psi \wedge \omega$，那么 $I(\varphi) = 1$ 当且仅当 $I(\psi) = 1$ 和 $I(\omega) = 1$均成立。由归纳法可知，当且仅当在 $G_\psi \circ c$ 和 $G_\omega \circ c$ 中，端点之间都存在路径时，成立；由于串联组合，这等价于在 $G_\varphi \circ c$ 中存在一条路径。如果 $\varphi := \psi \vee \omega$，那么 $I(\varphi) = 1$ 当且仅当 $I(\psi) = 1$ 或 $I(\omega) = 1$至少有一个成立。由归纳法可知，当且仅当在 $G_\psi \circ c$ 或 $G_\omega \circ c$ 中至少一个结构内，端点之间存在路径时，该结论成立；由于并联组合，这等价于在 $G_\varphi \circ c$ 中存在一条路径。

□

对于无界变量，引理4直接推出以下定理：

定理3。 开关式局部连通性切换是*W[SAT]*-难的，参数为 λ。

注意，对于所有 $t \geq 1$，W[t] ⊆ W[SAT] 。因此，定理3意味着，对于不受限制的开关，关于 λ 的开关式局部连通性切换不太可能属于固定参数可处理问题。

为了研究具有有界开关的参数化复杂度，我们首先需要研究具有有界变量的 WSAT 的参数化复杂度。为此，我们从以下众所周知的问题进行归约：

定义4。 分区子图同构

输入： 两个简单图 G 和 H，一个划分 $\mathcal{P} := \{P_x \mid x \in V(H)\}$ of $V(G)$，其中对于所有 $x \in V(H)$ 都有 $P_x \neq \emptyset$。

问题： 是否存在一个映射 $\phi\colon V(H) \to V(G)$，使得对于所有 $x \in V(H)$ 和$\phi(x)\phi(y) \in E(G)$，都有 $\phi(x) \in P_x$，以及对于所有 $xy \in E(H)$，都有?

换句话说，该问题询问 H 是否同构于 G 的一个子图，使得每个顶点 $x \in V(H)$ 都映射到划分 $\mathcal{P}$的对应部分 P_x 中的一个顶点。已知该问题参数化于 $|E(H)|$时是 W[1]-困难的，并且除非 ETH 不成立，否则无法在$f(|E(H)|) \cdot |V(G)|^{o\left(\frac{|E|}{(H)\mid \text{对数}\ |E(H)|}\right)}$时间内求解，其中 f是任意可计算函数 [16, 推论 6.3]。

我们通过构造一个公式，将 G 中的顶点选择和边选择编码为从 H 到 G的有效子图同构，从而将该问题归约到 WSAT。为简化记号，我们定义 $A(G) := \{\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vu} \mid uv \in E(G)\}$ 为图 G 的弧，从而能够处理每条边的两个方向。于是，该问题可以归约如下：

构造 5. 固定一个分区子图同构实例 $(G, H, \mathcal{P})$。我们按如下方式构造公式 φ，其中 $\mathcal{V}(\varphi) := V(G) \cup E(G)$：

$$\varphi := \bigwedge_{x \in V(H)} \left(\bigvee_{v \in P_x} v \right) \quad \wedge \quad \bigwedge_{\overrightarrow{xy} \in A(H),\, v \in P_x} \left(v \Rightarrow \bigvee_{u \in N_G(v) \cap P_y} uv \right).$$

直观地说，将 $\mathcal{V}(\varphi)$ 中的一个变量设为真，表示选择相应的顶点或边作为子图同构的一部分。合取的第一部分确保对于每个顶点 $x \in V(H)$，至少从集合 P_x 中选出一个顶点 v。合取的第二部分保证对于每条弧 $\overrightarrow{xy} \in A(H)$，该子图都包含一条相应的边，这条边从 P_x 中一个已选顶点连至 P_y 中的某个顶点。通过将 $k := |V(H)| + |E(H)|$ 设为适当值，以容纳满足该公式所需的额外变量，我们确保选出的恰好是与有效子图同构相对应的顶点和边，从而实现从分区子图同构到 WSAT 的正确归约。

然而，在该构造中，变量出现次数仍然没有上界。为了解决这一问题，我们修改构造 5 中的公式，通过拆分各个变量来确保每个变量都是 (1,1)-有界的：

构造 6。 固定一个分区子图同构实例 $(G, H, \mathcal{P})$。我们构造一个公式 φ，其中 $\mathcal{V}(\varphi)$:
$= \{v_y \mid \overrightarrow{xy} \in A(H)\ \ v \in P_x\} \cup E(G) \cup A(G)$，具体如下:

$$\varphi \coloneqq \bigwedge_{x \in V(H)} \left(\bigvee_{v \in P_x} \left(\bigwedge_{y \in N_H(x)} v_y \right) \right) \wedge \bigwedge_{\overrightarrow{xy} \in A(H),\, v \in P_x} \left(v_y \Rightarrow \bigvee_{u \in N_G(v) \cap P_y} \overrightarrow{vu} \right)$$
$$\wedge \bigwedge_{uv \in E(G)} \left((\overrightarrow{vu} \vee \overrightarrow{uv}) \Rightarrow uv \right)$$

对于每个 $x \in V(H)$，选择一个顶点 $v \in P_x$ 相当于将每个邻居 $y \in N_H(x)$对应的所有变量 v_y 设为真。如果至少一个弧变量$\overrightarrow{uv}$ 或 $\overrightarrow{vu}$ 被设为真，则选中边 $uv \in E(G)$，这又会强制将边变量 uv 设为真。直观而言，通过设置$k \coloneqq 5|E(H)|$，我们确保选中的恰好是与有效子图同构相对应的顶点和边。将 φ 转换为否定范式后，我们得到一个 3-规范化公式，即由文字的合取项析取而成的合取。在否定范式中，变量变为 (1,1)-有界[2]——每个变量 v_y 在合取的第一部分中正向出现一次，在第二部分中负向出现一次；每个弧变量 $\overrightarrow{vu}$ 在第二部分中正向出现一次，在第三部分中负向出现一次；每个边变量 uv 则恰好出现一次，且在第三部分中正向出现。这就得到了以下定理，解决了 Kanj 和 Szeider [13]提出的一个开放问题：当 WSAT 限制为每个变量最多出现两次的 3-规范化公式时，其参数化复杂度如何:

定理 4. 限制在3规范化公式上的WSAT 问题，以及$(1,\ 1)$有界变量参数化于 k 的 *W[1]*-难问题，并且假设 *ETH*，无法在时间 $f(k)\cdot|\mathcal{V}(\varphi)|^{o\left(\frac{k}{\log k}\right)}$ 内求解，*is* 其中 f 是任意可计算函数。

证明。 我们首先要证明：当且仅当存在一个真值赋值 I，使得 $I(\varphi) = 1$ 且 $w(I) \leq k = 5|E(H)|$ 时，存在一个与 H 同构的 G 的子图，并且该子图遵循划分 $\mathcal{P}$。我们将分别证明两个方向。

($\Rightarrow$) 假设存在一个单射 $\phi\colon V(H) \to V(G)$，使得对于每条边$xy \in E(H)$，$\phi(x)\phi(y) \in E(G)$，并且对于每个顶点 $x \in V(H)$，都有 $\phi(x)$。我们构造一个真值赋值 I，其中对于每个顶点 $x \in V(H)$ 及其邻居 $y \in N_H(x)$，都有 $I(\phi(x)y) = 1$；对于每条边 $xy \in E(H)$，其中 $u \coloneqq \phi(x)$ 且 $v \coloneqq \phi(y)$，我们设 $I(uv) = I(\overrightarrow{uv}) = I(\overrightarrow{vu}) = 1$。所有其他变量均设为假。根据这一构造，我们有 $w(I) = \sum_{x \in V(H)} \deg_H(x) + 3|E(H)| = 5|E(H)| \leq k$。剩下需要证明的是 $I(\varphi) = 1$。

对于合取的第一部分，考虑任意顶点 $x \in V(H)$。那么，对于顶点 $v = \phi(x) \in P_x$ 以及所有 $y \in N_H(x)$，我们有 $I(v_y) = 1$。因此，第一部分中的每个合取项都成立。

对于合取的第二部分，考虑任意顶点 $x \in V(H)$、它在 H 中的一个邻点 y 以及任意顶点 $v \in P_x$。如果 $v \neq \phi(x)$，那么 $I(v_y) = 0$，蕴含式便显然成立。如果 $v = \phi(x)$，注意到对于边 $xy \in E(H)$，必有 $\phi(x)\phi(y) \in E(G)$。因此，对于 $u = \phi(y) \in N_G(v) \cap P_y$，根据构造必有 $I(\overrightarrow{vu}) = 1$，这满足蕴含式右侧的析取。因此，第二部分中的所有蕴含式都成立。

由于第三部分中的蕴含式根据构造都能平凡地得到满足，因此 φ 的所有合取项都必须得到满足，我们由此得出 $I(\varphi) = 1$。

[2]回想一下，每个蕴含式 $A \Rightarrow B$ 在否定范式中都被替换为 $\neg A \vee B$，这会对左侧取反 e.

(⇐) 假设存在一个真值赋值 I 使得 $I(\varphi) = 1$ 并且 $w(I) \leq k$。我们首先分析 I的结构。

> 为了使第一部分的所有合取项均得到满足，对于每个 $x \in V(H)$，至少有一个顶点 $v \in P_x$ 的所有对应顶点变量 v_y 均被设为 true，即至少有 $\sum_{x \in V(H)} \deg_H(x) = 2|E(H)|$ 个变量被设为 true。因此，在合取的第二部分中，至少有 $2|E(H)|$ 个蕴含式的左侧为 true，这要求右侧也得到满足。这至少需要将 $2|E(H)|$ 个弧变量设为 true。在最佳情况下，对于每条边 $uv \in E(G)$，两个对应的弧变量 $\overrightarrow{uv}$ 和 $\overrightarrow{vu}$ 均被设为 true；因此，为满足合取第三部分中的蕴含式，至少需要将 $|E(H)|$ 个边变量设为 true。
>
> 这意味着在 I 中，至少有 $5|E(H)|$ 个变量被设为 true。然而，我们知道$w(I) \leq k = 5|E(H)|$。因此，该下界是紧的。 consequently，对于每个 $x \in V(H)$，恰好有一个顶点 $v \in P_x$ 可以使其所有对应的顶点变量 v_y 均被设为 true。现在，我们定义一个映射 $\phi\colon V(H) \to V(G)$，使得对于每个 $x \in V(H)$，将 $\phi(x)$映射到该顶点 v。
>
> 显然，根据构造，对于每个顶点 $x \in V(H)$，都有 $\phi(x) \in P_x$ 。还需证明，对于每条边 $xy \in E(H)$，边 $\phi(x)\phi(y)$ 都存在于 $E(G)$ 中。为此，考虑任意一条边 $xy \in E(H)$。我们知道，对于 $v = \phi(x)$ 和 $u = \phi(y)$，变量 v_y 和 u_x 均被设为真。对于 u 和 v，要满足合取项第二部分中的蕴含式，就必须将相应的弧变量设为真。由于界限是紧的，我们知道，当且仅当对应的两个弧变量都被设为真时，每个边变量才被设为真。只有将 $\overrightarrow{vu}$ 和 $\overrightarrow{uv}$ 都设为真才能满足这一条件，这意味着 $uv \in E(G)$。因此， $\phi(x)\phi(y) \in E(G)$，由此完成了 ϕ 构成子图同构的证明。

为分析该归约的运行时间，我们首先分析 φ 中变量的数量：对于此证明，令 $n = |V(G)|$ 和 $m = |E(H)|$。注意到，我们恰好有 $\sum_{x \in V(H)} \sum_{v \in P_x} \deg_H(x)$ 个顶点变量、 $2|E(G)|$ 个弧变量，以及 $|E(G)|$ 个边变量。因此，可以将 $|\mathcal{V}(\varphi)|$ 上界估计如下：

$$\begin{aligned}
|\mathcal{V}(\varphi)| &= 3|E(G)| + \sum_{x \in V(H)} \sum_{v \in P_x} \deg_H(x) \\
&\leq 3n^2 + \sum_{x \in V(H)} \sum_{v \in P_x} m \\
&= 3n^2 + mn \\
&\leq 4mn^2
\end{aligned}$$

容易看出， φ 的构造可以在时间 $\mathcal{O}(|\mathcal{V}(\varphi)|)$ 内完成。因此，对于某个可计算函数 f， φ 可以在时间 $f(m) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 内计算出来。于是，参数化归约的所有条件均得到满足。根据 [16, 推论 6.3], ，由于分区子图同构关于参数 m 是 W[1]-困难的，我们得出结论：限制在具有（1，1）-有界变量的 3-规范化公式上的 WSAT 关于参数 k 是 W[1]-困难的。

为了证明该问题无法在 $f(k) \cdot |\mathcal{V}(\varphi)|^{o\left(\frac{k}{\log k}\right)}$ 时间内求解，我们将反设其可以在该时间内求解，并推导出矛盾。假设存在一种算法，能够在 $f(k) \cdot |\mathcal{V}(\varphi)|^{o\left(\frac{k}{\log k}\right)}$ 时间内求解这一受限的 WSAT 变体，其中 f是某个可计算函数。因此，我们可以先将一个分区子图同构实例归约为该 WSAT 变体的一个实例，再使用该算法求解后者，从而求解分区子图同构实例。根据前面的分析，我们可以得出，该归约能够在 $f'(m) \cdot n^2$ 时间内完成，其中 f' 是某个可计算函数。因此，该过程的总体运行时间为：

$$f'(m) \cdot n^2 + f(k) \cdot |\mathcal{V}(\varphi)|^{o\left(\frac{k}{\log k}\right)}.$$

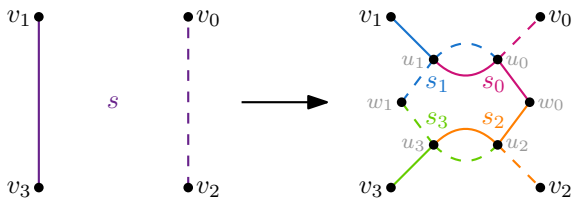


图 7：将一个 $\{1,1\}$-有界开关转换为四个 $\{2,1\}$-有界的 $\mathcal{K}_{1,\star}$-形开关，同时保留原始顶点之间相同的连接关系。

我们可以用 n、m 以及一个新的可计算函数 f'' 对运行时间作如下上界估计：

$$\begin{aligned} f'(m)\cdot n^2 + f(k)\cdot|\mathcal{V}(\varphi)|^{o\left(\frac{k}{\log k}\right)} &\leq f'(m)\cdot n^2 + f(5m)\cdot(4mn^2)^{o\left(\frac{5m}{\log 5m}\right)} \\ &\leq \left(f'(m) + f(5m)\cdot(4m)^{o\left(\frac{5m}{\log 5m}\right)}\right)\cdot n^{2\cdot o\left(\frac{5m}{\log 5m}\right)} \\ &\leq f''(m)\cdot n^{o\left(\frac{m}{\log m}\right)} \end{aligned}$$

这意味着，分区子图同构可以在时间 $f''(m)\cdot|\mathcal{V}(\varphi)|^{o\left(\frac{m}{\log m}\right)}$ 内判定，其中 f'' 是某个可计算函数。然而，假设 ETH 成立，这与 [16, 推论 6.3]，矛盾；该推论指出，除非 ETH 不成立，否则分区子图同构无法在此时间内求解。因此，对于具有 (1，1)-有界变量的 3-规范化公式，WSAT 无法在时间 $f(k)\cdot|\mathcal{V}(\varphi)|^{o\left(\frac{k}{\log k}\right)}$ 内判定。

□

利用引理4从这一 WSAT 变体进行归约，我们得到关于开关式局部连通性切换参数化复杂性的如下结论：

定理 5。 问题 开关式局部连通性切换 在限制为 $\{1,1\}$-有界切换时，关于 λ 是 *W[1]*-困难的；并且假设 *ETH* 成立，该问题无法在 $f(\lambda)\sigma^{o\left(\frac{\lambda}{\log\lambda}\right)}$ 时间内求解，其中 f 是任意可计算函数。

通过将每个 $\{1,1\}$-有界切换替换为四个此类切换（如图 7 所示），并将参数 λ 扩大四倍，该结果可推广到 $\{2,1\}$-有界的 $\mathcal{K}_{1,\star}$-形状切换：

定理 6。 问题 开关式局部连通性切换 在限制为 $\{2,1\}$-有界的 $\mathcal{K}_{1,\star}$-形状切换时，关于 λ 是 *W[1]*-困难的；并且假设 *ETH* 成立，该问题无法在时间 $f(\lambda)\sigma^{o\left(\frac{\lambda}{\log\lambda}\right)}$ 内求解，其中 f 是任意可计算函数。

证明。 设 G 是一个由 $\{1,1\}$有界切换构成的开关图，λ 是最大解的权重。不失一般性，我们可以假设 G 不包含静态边开关，因为我们总可以为这些开关添加第二个空位置。此外，我们可以假设每个开关位置至少包含一条边。否则，我们引入两个新顶点 u 和 v，并将边 uv 插入所有空位置。由于 u 和 v 与图的其余部分隔离，这一修改不会影响原始顶点之间的连通性。

为了从开关式局部连通性切换得到一个有效的参数化归约，该问题以 λ 为参数且限制为 $\{1,1\}$有界切换，并将其归约到同一参数化问题的一个受限版本：限制为 $\{2,1\}$有界的 $\mathcal{K}_{1,\star}$形开关。我们对 G中的每个开关应用以下构造：

构造 7。 设 G 为一个开关图，$s\in\mathcal{S}(G)$ 为一个 $\{1,1\}$ $s[0]=$-有界开关，且有 $\{v_0v_2\}$ 和 $s[1]=\{v_1v_3\}$。我们通过引入六个新顶点，从 G 构造一个新的开关图 G'

顶点 $\{u_0, u_1, u_2, u_3, w_0, w_1\}$，并将 s 替换为四个新的 $\{2,1\}$-有界 $\mathcal{K}_{1,\star}$-形开关$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$，使得对于每个 i、$j \in [2]$，我们有：

$$s_{i+2j}[i] := \{v_{i+2j}u_{i+2j}\} \quad \text{and} \quad s_{i+2j}[1-i] := \{u_{2j}u_{1+2j}, u_{i+2j}w_i\}.$$

构造如图 7 所示。对 $\prec$ $\prec G$ 中的所有开关应用此变换后，我们得到新的开关图 G'。此外，我们将新的最大权重设为 $\lambda' := 4\lambda$。显然，该归约可在多项式时间内完成，并且 λ' 由 λ 的一个可计算函数所界定。

为证明该归约的正确性，我们在证明存在一个配置 $c \in \mathcal{C}(G)$，使得 $w(c) \leq \lambda$，当且仅当存在一个配置 $\widehat{\prec}$ $\widehat{\prec} c' \in \mathcal{C}(G')$，使得 $G' \circ c'$ 存在一条从 a 到 b 的路径，且 $w(c') \leq \lambda'$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$(⇒) 设 c 是 G 的一个配置，使得 $G \circ c$ 存在一条从 a 到 b 的路径，且 $w(c) \leq \lambda$。现在我们构造一个配置 $c' \in \mathcal{C}(G')$，使得对于每个开关 $s \in \mathcal{S}(G)$ 和 $i \in [4]$，都有 $c'(s_i) := c(s)$。显然，$w(c') = 4w(c) \leq 4\lambda = \lambda'$。尚待证明的是，$\prec G' \circ c'$ 存在一条从 a 到 b 的路径。

$\widehat{}$ $\widehat{}$令 e 为 $G \circ c$中的任意一条边，并令 $s \in \mathcal{S}(G)$为满足以下条件的开关：对于 i，有 $e \in s[i] := c(s)$。将 e 的端点记为 v_i 和 v_{i+2}。对于每个 $j \in [2]$，我们有 $v_{i+2j}u_{i+2j} \in s_{i+2j}[i]$ 和$u_{2j}u_{1+2j}$，$u_{(1-i)+2j}w_{1-i} \in s_{(1-i)+2j}[i]$，从而得到一条从$\prec v_{i+2j}$ 到 w_{1-i} 的路径，该路径位于 $G' \circ c'$中，其中 w_{1-i} 以及路径的所有其他内部顶点，都是通过开关 s的变换引入的辅助顶点。将 $j = 0$ 和$j = 1$ 对应的这些路径组合起来，即可得到一条从 v_i 到 v_{i+2}的路径。

$\widehat{}$因此，从 a 到 b 的路径中位于 $G \circ c$ 内的每条边 uv，都可以用 $G' \circ c'$中 u 与 v 之间对应的 $\widehat{}$ $\widehat{}$路径替代，从而得到一条从 a 到 b 的路径，该路径位于 $G' \circ c'$中。

$\widehat{}$ $\widehat{}$(⇐) 令 c' 为 G' 的一个配置，使得 $G' \circ c'$ 包含一条从 a 到 b 的路径 P'，且 $w(c') \leq \lambda'$。$\widehat{}$ $\widehat{}$我们构造一个配置 $c \in \mathcal{C}(G)$，使得对于每个开关 $s \in \mathcal{S}(G)$，都有 $c(s) := \min_{i\in[4]}\{c'(s_i)\}$。因此，$c(s) \leq \frac{1}{4}\sum_{i\in[4]} c'(s_i)$，进而 $w(c) \leq \frac{1}{4}w(c') \leq \frac{1}{4}\lambda' = \lambda$。$\widehat{}$剩下要证明的是，$G \circ c$ 包含一条从 a 到 b的路径。

为此，我们依次处理 P' 中的顶点，并同时在 $\prec G \circ c$ 中构造一条从 a 到 b 的路径 P。路径 P' 以 G 的原始顶点为起点和终点（具体而言，是 a和 b），因此，变换引入的任何辅助顶点都必须位于路径内部，且其后还要有其他顶点。

最初，令 v 为 P' 中的第一个顶点，并初始化 $P := \langle v \rangle$。

假设 v 不是 P' 中的最后一个顶点。那么，根据构造，它后面必定跟着一个由某个 $\{1,1\}$-有界开关 $\prec$ s 在 G 中经过变换引入的辅助顶点。特别地，存在一个开关 s_{i+2j}，满足 $i = c'(s_{i+2j})$ 和 $j \in [2]$，使得 $s_{i+2j}[i] = \{v_{i+2j}u_{i+2j}\}$，其中 $v = v_{i+2j}$，且 u_{i+2j} 是 P' 中紧跟在 v 后面的顶点。

与 u_{i+2j} 相 incident 的唯一另一个开关是 $s_{(1-i)+2j}$，它通过一条边 $u_{2j}u_{1+2j}$ 与之相连，而该边包含在位置 i 中。因此，我们有 $c'(s_{(1-i)+2j}) = i$，并且 u_{i+2j} 后面跟着 P' 中的辅助顶点 $u_{(1-i)+2j}$。

接下来，由于$u_{(1-i)+2j}$ 不与除$s_{(1-i)+2j}$之外的任何开关关联，且 $s_{(1-i)+2j}[i]$恰好包含另一条边$u_{(1-i)+2j}w_{1-i}$，因此可知，在 P'中，$u_{(1-i)+2j}$ 之后紧接着是辅助顶点 w_{1-i}。

顶点 w_{1-i} 只有一个额外的关联开关：$s_{(1-i)+2(1-j)}$，它通过包含于位置 i中的边 $w_{1-i}u_{(1-i)+2(1-j)}$ 连接。因此，$c'(s_{(1-i)+2(1-j)}) = i$，而 w_{1-i} 之后紧接着是 P'中的辅助顶点$u_{(1-i)+2(1-j)}$。

尽管 $u_{(1-i)+2(1-j)}$ 与开关 $s_{i+2(1-j)}$关联，但它是通过已包含在 $s_{(1-i)+2(1-j)}[i]$中的同一条边 $u_{2(1-j)}u_{1+2(1-j)}$实现的。由于 $s_{(1-i)+2(1-j)}[i]$中没有其他开关或边

与 $u_{(1-i)+2(1-j)}$关联，因此该顶点后面必须跟随P'中的辅助顶点 $u_{i+2(1-j)}$ 。

此时，与$u_{i+2(1-j)}$ 相接的唯一另一个开关是$s_{i+2(1-j)}$。假设该开关配置在位置 $1-i$，其中包含边$u_{2(1-j)}u_{1+2(1-j)}$和$u_{i+2(1-j)}w_i$。由于 P'是一条路径，我们不能返回到先前访问过的顶点$u_{(1-i)+2(1-j)}$，因此$u_{i+2(1-j)}$ 唯一可能的后继顶点是辅助顶点 w_i。然而， w_i 仅通过位置 $1-i$中的一条边与开关s_{i+2j} 相接，而s_{i+2j} 已经配置在位置 i。这就产生了矛盾，因为路径无法经过 w_i继续延伸。因此，开关$s_{i+2(1-j)}$ 必须配置在位置 i，其中仅包含一条边 $u_{i+2(1-j)}v_{i+2(1-j)}$。由此，在 P'中，$u_{i+2(1-j)}$ 之后是原始顶点$v_{i+2(1-j)}$ 。

总之，对于所有 $\ell \in [4]$，我们有 $c'(s_\ell) = i$，从而得到 $c(s) = i$。根据构造，边 $\frown$ $v_{i+2j}v_{i+2(1-j)}$ 位于开关 s 的位置 i，因此属于 $G \circ c$。由于添加到 P 中的最后一个顶点是 v_{i+2j}，我们通过追加 $v_{i+2(1-j)}$来扩展 P。
我们对 $v = v_{i+2(1-j)}$ 重复这一过程。最终，这构造出一条完整路径 P，从 $a\widehat{}$ 通往 b，位于 $G \circ c$ 中。

在定理 5 中，我们证明了，即使所有开关都是 $\{1,1\}$-有界开关，开关式局部连通性切换在以最大权重 λ 为参数时仍然是 W[1]-困难。因此，上述参数化归约表明，当问题限制为 $\{2,1\}$-有界的 $\mathcal{K}_{1,\ \star}$-形开关时，该问题仍然是 W[1]-困难。

此外，定理 5 表明，除非 ETH 不成立，否则无法在时间 $f(\lambda)\sigma^{o\left(\frac{\lambda}{\log \lambda}\right)}$ 内判定具有 $\{1,1\}$ 有界开关的开关式局部连通性切换问题，其中 f 是可计算函数。在归约后的实例中，开关的数量 σ' 和最大权重 λ' 都是原始实例的四倍，即 $\sigma' = 4\sigma$ 和 $\lambda' = 4\lambda$。

为导出矛盾，假设将开关式局部连通性切换限制为具有 $\{2,1\}$ 有界 $\mathcal{K}_{1,\ \star}$ 形状开关的问题，存在一个运行时间为 $g(\lambda') \cdot (\sigma')^{o\left(\frac{\lambda'}{\log \lambda'}\right)}$ 的算法，其中 g 是某个可计算函数。于是，我们可以在时间 $\mathcal{O}(\sigma)$ 内，将一个限制为具有 $\{1,1\}$ 有界开关的实例转换为一个限制为具有 $\{2,1\}$ 有界 $\mathcal{K}_{1,\ \star}$ 形状开关的实例，并在时间 $g(4\lambda)(4\sigma)^{o\left(\frac{4\lambda}{4\lambda\log()}\right)}$ 内使用所提出的算法求解该实例；这等价于对某个可计算函数 f，在时间 $f(\lambda)n^{o\left(\frac{\lambda}{\log \lambda}\right)}$ 内求解，从而与ETH 矛盾。

—— □

4 全局连通性

现在我们研究这样的配置：它们不仅连接一对顶点，还能确保整个图连通。该问题形式化定义如下：

定义 5. Global-Con Switching
$\widehat{}$**输入：** 一个开关图 G。
$\widehat{}$ $\widehat{}$**问题：** 是否存在配置 $c \in \mathcal{C}(G)$，使得 $G \circ c$ 连通?

加权全局约束切换和开关式全局连通切换的加权变体，其定义与第 3 节中局部连通性对应的变体类似。

4.1 拟阵形式化

Katz等人证明，将 Global-Con Switching 限制为由 $\{1^\star\}$ 限界的 $\mathcal{K}_{1,\ \star}$ 形开关时，可通过归约到拟阵交在多项式时间内求解。拟阵交要求在相同底集 [14] 上的两个拟阵中，求出最大的公共独立集。给定满足这些限制的 $\widehat{}$ $\widehat{}$开关图 G，他们在 $E(G)$ 上定义了两个拟阵：一个是图拟阵

$\hat{}$ $\hat{}(E(G)\ \mathcal{I}_1)$, 其中，若一个边集无环，则称其为独立集；另一个是分割拟阵 $(E(G)\ \mathcal{I}_2)$，其中，若一个边集至多包含来自每个开关的一条边，则称其为独立集。当且仅当存在一个可由某个配置实现的生成树时，才存在连接配置；这等价于存在一个大小为 $n-1$ 的独立集 $A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$。由此，该问题可归约为拟阵交问题，即求出两个拟阵中的最大公共独立集；此问题可在多项式时间内求解 [3]。

重要的是，该论证并不依赖于开关是 $\mathcal{K}_{1\text{形状}\star}$，因此可以推广到所有 $\{1^\star\}$-有界开关。我们还可以进一步将注意力限制在$\hat{}$那些具有拟阵结构的开关上，也就是说，限制在满足以下条件的开关 $s \in \mathcal{S}(G)$：对于这些开关，$(E(G[s])\ \mathcal{I}_s)$ 与 $\mathcal{I}_s := \{A \subseteq E(G[s]) \mid \exists i \in [|s|]\colon A \subseteq s[i]\}$ 构成一个拟阵。我们将与 s相关联的 $(E(G[s])\ \mathcal{I}_s)$ 称为切换拟阵，并将此类开关称为拟阵切换。随后，我们将这些切换拟阵作直和，构造出拟阵 $(E(G)\ \mathcal{I}_3)$，使得 $\mathcal{I}_3$ 包含所有这样的边$\hat{}$集：每个开关至多从一个位置选取边。与之前一样，当且仅当存在一个大小为 $n-1$ 的独立集 $A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3$ 时，G 才具有连接配置。由此得到以下定理：

定理 7。 Global-Con Switching 限制在拟阵切换的情形下，可在 $\mathcal{O}(n^2 m \log n \cdot T)$ 时间内判定，其中 T 是切换拟阵的独立性测试运行时间。

$\hat{}$ $\hat{}$证明。给定一个 Global-Con Switching 实例 G，我们按照前文所述定义拟阵 $(E(G)\ \mathcal{I}_1)$ 和 $\hat{}$ $\hat{}(E(G)\ \mathcal{I}_3)$。我们已经证明，$G$ 存在全局连通的$\hat{}$配置，当且仅当存在一个独立集 $A \subseteq E(G)$，满足 $|A| = n-1$ 和$A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3$。

拟阵交问题可在 $\mathcal{O}(m' r \log r T_{\text{ind}})$ 时间内求解，其中 m' 是底集的大小，r 是可能的最大基数，T_{ind} 是任一拟阵独立性测试的最大运行时间。在我们的情形中，有 $r = n-1$ 和 $m = m'$。

由于独立集中至多有 r 条边，因此可以使用深度优先搜索，在 $\mathcal{O}(r)$ 时间内测试其是否包含环。为了测试所有边是否在每个开关中至多来自一个位置，我们将独立集划分为其开关分量，并测试每个分量在其相应的切换拟阵中是否独立。划分边需要 $\frown\mathcal{O}(r)$ 时间；由于至多有 r 个开关，因而对 $(E(G)\ \mathcal{I}_3)$ 进行完整的独立性测试需要 $\mathcal{O}(r + rT)$ 时间。因此，我们得到 $T_{\text{ind}} = \mathcal{O}(r \cdot T)$。

由于拟阵是隐式定义的，归约不会产生额外开销。求解该拟阵交实例的总体复杂度为：

$$\mathcal{O}(m' r \log r \cdot T_{\text{ind}}) = \mathcal{O}(m' r^2 \log r \cdot T) = \mathcal{O}(n^2 m \log n \cdot T). \qquad \square$$

注意，$\{1^\star\}$有界切换是拟阵切换的特例，其中每个切换拟阵都是秩为一的均匀拟阵，因此可以在常数时间内检查独立性。这立即得到以下推论：

推论1。 将问题 Global-Con Switching 限制为 $\{1^\star\}$有界切换时，可在 $\mathcal{O}(n^2 m$对数 $n)$ 时间内判定。

最后，为了处理加权情形，我们采用加权拟阵交的一个变体，定义如下：

定义6。 加权精确拟阵交

输入： 同一底集 E 上的两个拟阵 $(E, \mathcal{I}_1)$ 和 $(E, \mathcal{I}_2)$，一个权函数 $w\colon\ E \to \mathbb{R}$，以及一个正整数 $k \in \mathbb{N}_{>0}$。

任务： 寻找一个大小恰好为 k 的独立集 $A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$，使 $w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$ 最小；如果不存在，则正确报告不存在。

给定一个受限于 $\{1^\star\}$-有界切换的加权全局约束切换实例 $(G,\ w,\ \lambda)$，我们首先为每个开关 $s \in \mathcal{S}(G)$ 的每条边 $e \in E(G[s])$ 赋予包含 e 的所有开关位置中的最小权重，即 $w(e) := \min_{i \in [|s|]} \{w(s,\ i) \mid e \in s[i]\}$。寻找一个可由某个配置实现的最小生成树，随后便对应于寻找一个大小为 $n-1$ 的最小权独立集 $A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$。

然而，生成树的权重不一定等于相应配置的权重，因为不向生成树贡献任何边的开关仍可能使配置产生额外权重。为此，我们按如下方式调整边权重：对于每个开关 $s \in \mathcal{S}(G)$ 和每条边 $e \in E(G[s])$，定义 $w'(e) := w(e) - \min^{i \in [|s|]} w(s, i)$。于是，对于任意配置 $c \in \mathcal{C}(G)$，相对于 w'，$G \circ c$ 中的生成树权重至多为 $w(c) - \sum_{s \in \mathcal{S}(\widehat{G})} \left(\min^{i \in [|s|]} w(s, i) \right)$。因此，当且仅当存在一个相对于 w'、权重至多为 $\lambda - \sum_{s \in \mathcal{S}(\widehat{G})} \left(\min^{i \in [|s|]} w(s, i) \right)$且可由某个配置实现的生成树时，才存在权重至多为$\lambda$ 的连接配置；等价地，存在一个大小为 $n-1$、权重 $w'(A)$ 至多为 $\lambda - \sum_{s \in \mathcal{S}(\widehat{G})} \left(\min^{i \in [|s|]} w(s, i) \right)$ 的独立集$A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$。这可以通过加权精确拟阵交来判定，而该问题可在多项式时间内求解 [2]。由此，我们得到以下定理：

定理 8。 加权全局约束切换 限制为 $\{1^\star\}$有界切换时，可在 $\mathcal{O}(nm \cdot (n + \text{对数}\, m))$ 时间内判定。

证明。 给定一个加权全局约束切换实例（$G,\ w,\ \lambda$），我们按照之前的描述定义拟阵 $(E(G)\ \mathcal{I}_1)$ 和 $(E(G)\ \mathcal{I}_2)$。我们已经证明，G 存在一个权重至多为 λ 的连通配置，当且仅当存在一个独立集 $A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$，满足 $|A| = n-1$ 以及 $w'(A) \leq \lambda - \sum_{s \in \mathcal{S}(\widehat{G})} \left(\text{最小}^{i \in [|s|]} w(s,\ i) \right)$。

权函数 w' 的构造可在 $\mathcal{O}(m)$ 时间内完成，因为我们可以将开关位置的数量界定为 m。

加权精确拟阵交可以在 $\mathcal{O}(m'k(k + T_{\text{circuit}} + \log m'))$ 时间内求解，其中 m' 是底集的大小，T_{circuit} 是两个拟阵的回路查找预言机的最大运行时间。在我们的情况下，有 $k = n-1$ 和 $m = m'$。

回路查找预言机给定一个独立集 $A \subseteq E(G)$ 和一条额外的边 $e \in E(G) \setminus A$，必须确定 $A \cup \{e\}$ 是否仍然独立，否则返回包含于 $A \cup \{e\}$ 中的一个回路。对于图拟阵，这需要查找一个环，使用深度优先搜索可以在 $\mathcal{O}(k)$ 时间内完成。对于分割拟阵，我们只需确定 A 中的一条边是否属于与 e 相同的开关，这同样可以在 $\mathcal{O}(k)$ 时间内完成。

因此，总运行时间为：

$$\mathcal{O}(m) + \mathcal{O}(m'k(k + k + \log m')) = \mathcal{O}(nm \cdot (n + \log m)). \qquad \square$$

4.2 可满足性归约

到目前为止，我们已经看到，对于某些受限的开关类别，Global-Con Switching 和加权全局约束切换可以在多项式时间内求解。为了补充这些结果，我们现在通过给出一种将合取范式公式 φ 编码为开关图的构造来证明其困难性。为便于记号表示，我们将 φ 视为子句的集合，其中每个子句 $C \in \varphi$ 都是关于 $\mathcal{V}(\varphi)$ 的文字集合。构造 G_φ如图 8 中的示例所示，定义如下：

构造 8。 给定一个合取范式公式 φ，我们构造一个开关图 G_φ，其中包含 $V(G_\varphi) := \{u\} \cup \{v_C \mid C \in \varphi\}$，并且对于每个变量 $x \in \mathcal{V}(\varphi)$ 都有一个开-关开关 s_x，其中 $s_x[0] := \{uv_C \mid \neg x \in C\}$，以及 $s_x[1] := \{uv_C \mid x \in C\}$。

假设在配置 $c \in \mathcal{C}(G_\varphi)$ 中，当且仅当相应变量 $x \in \mathcal{V}(\varphi)$ 在真值赋值 I 中被赋为真时，每个开关 s_x 都设置为开启位置。从直观上看，对于任意

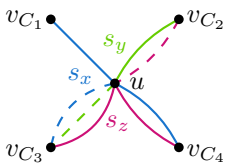


图 8：在 $\varphi := \underbrace{(x)}_{C_1} \wedge \underbrace{(y \vee \neg z)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\neg x \vee \neg y \vee z)}_{C_3} \wedge \underbrace{(x \vee z)}_{C_4}$。

子句 $C \in \varphi$ 和文字 $\ell \in C$，当且仅当相应开关在 u 和 v_C 之间贡献一条边时，该文字才满足。因此，当且仅当 φ 满足 $G_\varphi \circ c$ 时，$G_\varphi \circ c$ 是连通的。此外，每个开关都是 $\mathcal{K}_1$, $\star$-形的；如果 φ 中的所有变量都是 (i, j)-有界的，那么 G_φ 中的每个开关也都是 $\{i, j\}$-有界的。由此得到以下引理：

引理 5。存在一个多项式时间多对一归约，将限制为含有布尔可满足性问题合取范式，且变量为(i, j)有界的实例，归约到限制为 $\{i, j\}$-有界 $\mathcal{K}_1$, $\star$-形开-关开关的 GLOBAL-CON SWITCHING。此外，在相同限制下，还存在一个关于解权重的参数化归约，将WSAT 归约到 加权全局约束切换。

证明。设 φ 是一个合取范式公式，其变量为 (i, j)-有界，并设 G_φ 是由构造 8 得到的相应开关图。为证明存在一个满足 φ 的真值赋值 I 当且仅当存在一个配置 $c \in \mathcal{C}(G_\varphi)$ 使得 $G_\varphi \circ c$ 连通，假设$c(s_x) = I(x)$ 对所有 $x \in \mathcal{V}(\varphi)$ 均成立。

根据定义，$I(\varphi) = 1$ 当且仅当对于每个子句 $C \in \varphi$，$I(C) = 1$。对于每个子句 $C \in \varphi$，当且仅当存在一个变量 $x \in \mathcal{V}(\varphi)$，使得 $x \in C$ 且 $I(x) = 1$ 或 $\neg x \in C$，或者存在一个变量使得 $I(x) = 0$，上述条件才成立。这等价于存在一个开关 $s_x \in \mathcal{S}(G_\varphi)$，使得 $c(s_x) = 0$且 $uv_C \in s_x[0]$，或者 $c(s_x) = 1$ 且 $uv_C \in s_x[1]$。因此，对于所有 $C \in \varphi$，$I(C) = 1$ 当且仅当 $uv_C \in E(G_\varphi \circ c)$ 对所有 $C \in \varphi$ 都成立，或者等价地，当 $G_\varphi \circ c$ 连通时。因此，φ 可满足当且仅当存在 G_φ 的一个连接配置。

这证明了从 SAT 到 Global-Con Switching 的归约的正确性。此外，由于根据构造有 $w(I) = w(c)$，设置 $\lambda := k$ 可得到一个从WSAT到加权全局约束切换的参数化归约。□

由于即使将 SAT 限制为具有 (2，1)-有界变量的合取范式公式时，它仍然是 NP完全的，因此以下结论直接由引理 5 得出：

定理 9。GLOBAL-CON SWITCHING 是 *NP*完全的，即使将其限制为 $\{2, 1\}$-有界$\mathcal{K}_1$、$\star$-形状的开关。

注意，$\{2, 1\}$-有界开关是并不一定属于拟阵切换的最简单开关，而问题在这一阶段就已经变得不可处理。因此，我们猜想 Global-Con Switching 存在类似于定理1的二分性：对于某个开关族 Π，当 Π 中的所有开关都是拟阵切换时，限制为来自 Π 的开关的问题属于 P类；否则为 NP完全。

转向加权变体，我们首先通过类似于定理 4 的分区子图同构归约，证明将 WSAT 限制在具有 (2，1)-有界变量的合取范式公式上的不可处理性。具体而言，我们通过拆分顶点变量来修改构造 5：

构造9。固定一个分区子图同构实例 $(G, H, \mathcal{P})$。对于每个 $x \in V(H)$，令 $\pi[x]: N_H(x) \to \{1, 2, \ldots, \deg_H(x)\}$为一个双射，为每个邻居 $y \in N_H(x)$ 分配一个唯一索引。我们构造一个公式 φ，其中 $\mathcal{V}(\varphi) := \{v_i \mid x \in V(H)\ v \in P_x, i \in$

$[\deg_H(x)+1]\} \cup E(G)$ 定义如下：

$$\varphi := \bigwedge_{x\in V(H)} \left(\bigvee_{v\in P_x} v_0 \right) \wedge \bigwedge_{\overrightarrow{xy}\in A(H),\, v\in P_x} \left(v_{\pi[x](y)} \Rightarrow \bigvee_{u\in N_G(v)\cap P_y} uv \right)$$
$$\wedge \bigwedge_{x\in V(H),\, v\in P_x,\, i\in[\deg_H(x)]} (v_i \Rightarrow v_{i+1})$$

对于每个 $x \in V(H)$，如果选择顶点 $v \in P_x$ 作为子图同构的一部分，那么由于蕴含链，所有变量 v_i for $i \in [\deg_H(x)+1]$ 都会被设为真。通过设置$k := |V(H)| + 3\cdot|E(H)|$ 以适应满足公式所需的额外变量，我们再次确保恰好选择与有效子图同构相对应的顶点和边。注意，转换为否定范式后得到一个具有 (2,1)-有界变量的合取范式公式——变量 v_0 在合取的第一部分中以正极性出现一次，在第三部分中以负极性出现一次；每个变量 v_i for $i > 0$ 在第二部分中以负极性出现一次，并且在第三部分的每种极性下最多出现一次；每个边变量 uv 在第二部分中以正极性出现两次。由此得到以下定理：

定理 10。 限制于合取范式公式的 WSAT 和$(2,1)$-有界变量是参数化于 k 的 *W[1]*-困难问题，并且假设 *ETH*，无法在时间 $f(k)\cdot|\mathcal{V}(\varphi)|^{o\left(\frac{k}{\log k}\right)}$ 内求解，其中f 是任意可计算函数。

证明。 我们首先要证明，当且仅当存在真值赋值 I，使得 $I(\varphi) = 1$ 且 $w(I) \leq k = |V(H)| + 3\cdot|E(H)|$时，存在 G 的一个子图与 H 同构，并且遵循划分 $\mathcal{P}$。我们将分别证明两个方向。

(⇒) 假设存在一个单射 $\phi: V(H) \to V(G)$，使得对于每条边$xy \in E(H)$，$\phi(x)\phi(y) \in E(G)$；并且对于每个顶点 $x \in V(H)$，都有 $\phi(x) \in P_x$。我们构造一个真值赋值 I，对于每个顶点 $x \in V(H)$ 且 $i \in [\deg_H(x)+1]$，令 $I(\phi(x)_i) = 1$；对于每条边 $xy \in E(H)$，令 $I(\phi(x)\phi(y)) = 1$。所有其他变量均设为假。根据这一构造，我们有 $w(I) = \sum_{x\in V(H)} \deg_H(x)+1 + |E(H)| = (|V(H)|+3|E(H)|) \leq k$ 且 $I(\varphi) = 1$。接下来只需证明 。

对于合取的第一部分，任取一个顶点 $x \in V(H)$。那么对于顶点 $v = \phi(x) \in P_x$，有 $I(v_0) = 1$。因此，第一部分中的每个合取项都得到满足。

对于合取的第二部分，任取一个顶点 $x \in V(H)$、它的一个邻点 y（位于 H 中），以及一个任意顶点 $v \in P_x$。如果 $v \neq \phi(x)$，那么 $I(v_{\pi[x](y)}) = 0$，该蕴含式显然成立。如果 $v = \phi(x)$，注意对于边 $xy \in E(H)$，必有 $\phi(x)\phi(y) \in E(G)$。因此，对于 $u = \phi(y) \in N_G(v) \cap P_y$，根据构造，必有 $I(uv) = 1$，这满足蕴含式右侧的析取。因此，第二部分中的所有蕴含式都得到满足。

由于第三部分中的蕴含式根据构造都显然得到满足，因此 φ 的所有合取项都必须得到满足，由此我们得出 $I(\varphi) = 1$。

(⇐) 假设存在一个真值赋值 I 使得 $I(\varphi) = 1$ 并且 $w(I) \leq k$。我们首先分析 I的结构。

要使第一部分的所有合取项都得到满足，对于每个 $x \in V(H)$，必须使至少一个顶点 $v \in P_x$ 的顶点变量 v_0 设为真，即至少有 $|V(H)|$个变量设为真。对于每个这样的变量，第三部分中的蕴含链要求所有变量 $v_1, \ldots, v_{\deg_H(x)}$ 也设为真，从而额外有 $\sum_{x\in V(H)} \deg_H(x) = 2|E(H)|$ 个变量设为真。因此，在合取第二部分的至少 $2|E(H)|$个蕴含式中，左侧为真，这就要求右侧

也必须得到满足。在最佳情况下，每个边变量都满足两个蕴含式的右侧，因此至少需要 $|E(H)|$ 个边变量设为真。

这意味着在 I 中至少有 $|V(H)|+3|E(H)|$ 个变量被设为真。然而，我们知道 $w(I) \leq k = |V(H)|+3|E(H)|$。因此，这个下界是紧的。 consequently，对于每个 $x \in V(H)$，恰好有一个顶点 $v \in P_x$ 可以使其对应的所有顶点变量都被设为真。现在我们定义一个映射 $\phi: V(H) \to V(G)$，使得对于每个 $x \in V(H)$，都有 $\phi(x)$被映射到该顶点 v。

显然，对于每个顶点 $x \in V(H)$，根据构造，我们有 $\phi(x) \in P_x$。接下来需要证明，对于每条边 $xy \in E(H)$，边 $\phi(x)\phi(y)$存在于 $E(G)$ 中。为此，考虑任意一条边 $xy \in E(H)$。我们知道，对于 $v = \phi(x)$ 和 $u = \phi(y)$，变量 $v_{\pi[x](y)}$ 和 $u_{\pi[y](x)}$ 都被设为真。由于界是紧的，我们知道，当且仅当某个边变量满足其所在的两个蕴含式的右侧时，该边变量才被设为真。这意味着 uv 被设为真，因为选择与 u 或 v 相 incident 的任何其他边都会违反权重约束。因此， $uv = \phi(x)\phi(y) \in E(G)$，从而完成了 ϕ 构成子图同构的证明。

为了得到一个参数化归约，我们必须有 k 是 $|E(H)|$的函数。然而，由于我们可以安全地从 H 中移除孤立顶点，而不影响子图同构的存在性，因此可以假设 $|V(H)| \leq 2|E(H)|$。因此，我们有 $k = |V(H)|+3|E(H)| \leq 5|E(H)|$，从而建立了参数化归约。

通过观察 φ 中的变量数量关于 G 和 H 的大小是线性的，可以类似于定理 4 证明运行时间下界。 □

利用引理 5 从这一变体的 WSAT 进行归约，我们得到关于开关式全局连通切换的参数化复杂度的以下定理:

定理 11。 开关式全局连通切换 限制为 $\{2,1\}$-有界 $\mathcal{K}_{1,\star}$-形开关时，关于 λ 是 *W[1]*-困难的；并且在假设 *ETH* 的情况下，无法在时间 $f(\lambda)\sigma^{o\left(\frac{\lambda}{\log \lambda}\right)}$ 内求解，其中 f 是任意可计算函数。

5 结论

我们研究了在各种结构限制下，通过配置切换图来实现连通性（包括局部连通性和全局连通性）的复杂性，涵盖加权和无权设置。尽管我们证明了对于许多受限的开关类别，该问题是不可处理的，但我们也确定了一些允许高效算法的结构条件。许多开放问题仍有待解决，例如，限制为 $\{1,1\}$-有界连通开关的开关式局部连通性切换是否能在多项式时间内求解，或者是否能在关于解权重的固定参数可处理时间内求解；更一般地，对于 $\{1^\star\}$-有界完全多部开关，加权 Local-Con Switching 是否能在多项式时间内求解（Local-Con Switching 的情形正是如此）。除此之外，系统研究其他性质也很有意义，例如断开两个给定终端的连通性，以及通过取所有开关位置的并集所得到的图的结构限制，例如树状性；关于这一方向已有初步结果 [15]。在这里，研究平面性对连通性切换问题复杂性的影响也很有趣：我们的归约表明（经过细微修改后），在平面开关图中，即使开关大小和最大顶点度均为常数，开关式全局连通性和 Local-Con Switching 关于 k 开关数量仍然是 W[1]-困难的。然而，我们为获得连通开关所作的修改破坏了平面性。对于连通开关，在开关大小和最大顶点度均为常数的情况下，以 k 为参数的平面问题是否是固定参数可处理的?

参考文献

[1] Sebastian Böcker 和 Jan Baumbach。簇编辑。载于 Paola Bonizzoni、Vasco Brattka 和 Benedikt Löwe（编），《欧洲可计算性第九届会议论文集（*CiE，2013*）》，《计算机科学讲义》第 7921 卷，第 33–44 页。Springer，2013 年。doi:10.1007/978-3-642-39053-1_5。[2] Carl Brezovec、Gérard Cornuéjols 和 Fred W. Glover。加权拟阵交的两种算法。《数学规划》，36(1)：39–53，1986 年。doi:10.1007/BF02591988。[3] Deeparnab Chakrabarty、Yin Tat Lee、Aaron Sidford、Sahil Singla 和 Sam Chiu-wai Wong。更快的拟阵交。载于 David Zuckerman（编），《*IEEE* 第 *60* 届计算机科学基础年会论文集（*FOCS 2019*）》，第 1146–1168 页。IEEE Computer Society，2019 年。doi:10.1109/FOCS.2019.00072。[4] Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。Springer，2015 年。doi:10.1007/978-3-319-21275-3。[5] Reinhard Diestel。《图论》，《数学研究生教材》第 173 卷。Springer，2012 年。[6] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。《参数化复杂性的基础》。《计算机科学教材》。Springer，2013 年。doi:10.1007/978-1-4471-5559-1。[7] Jörg Flum 和 Martin Grohe。《参数化复杂性理论》。《理论计算机科学教材》。Springer，2006 年。doi:10.1007/3-540-29953-X。[8] Jan Friso Groote 和 Bas Ploeger。切换图。《国际计算机科学基础期刊》，20(5)：869–886，2009 年。doi:10.1142/S0129054109006930。[9] Ulrich Huckenbeck。带阀门网络中的路径。载于 Patrice Enjalbert、Alain Finkel 和 Klaus W. Wagner（编），《理论计算机科学第十届年度专题研讨会论文集（*STACS，1993*）》，第 665 卷，《计算机科学讲义》，第 90–99 页。Springer，1993 年。doi:10.1007/3-540-56503-5_12。[10] Ulrich Huckenbeck。在有向图中通过阀门调整中断所有 s-t 路径。《自动机、语言与组合学期刊》，2(1)：19–45，1997 年。doi:10.25596/JALC-1997-019。[11] Russell Impagliazzo 和 Ramamohan Paturi。关于 k-SAT 的复杂性。《计算机与系统科学期刊》，62(2)：367–375，2001 年。doi:10.1006/jcss.2000.1727。[12] Russell Impagliazzo、Ramamohan Paturi 和 Francis Zane。哪些问题具有强指数复杂性？《计算机与系统科学期刊》，63(4)：512–530，2001 年。doi:10.1006/jcss.2001.1774。[13] Iyad A. Kanj 和 Stefan Szeider。可满足性问题的参数化复杂性与亚指数时间复杂性及其应用。《理论计算机科学》，607：282–295，2015 年。doi:10.1016/J.TCS.2015.08.029。[14] Bastian Katz、Ignaz Rutter 和 Gerhard J. Woeginger。切换图的算法研究。《信息学学报》，49(5)：295–312，2012 年。doi:10.1007/S00236-012-0160-4。[15] Christoph Kern。图上的边集切换算法与复杂性。硕士论文，维也纳工业大学，2025 年。doi:10.34726/hss.2025.129320。[16] Dániel Marx。能否击败树宽？《计算理论》，6(1)：85–112，2010 年。doi: 10.4086/TOC.2010.V006A005。

[17] Christoph Meinel。切换图及其复杂性。载于 Antoni Kreczmar 和 Grazyna Mirkowska 编，《第14届计算机科学数学基础研讨会论文集（MFCS，1989年）》，《计算机科学讲义》第379卷，第350–359页。Springer，1989年。doi:10.1007/3-540-51486-4_82。

[18] James G. Oxley。《拟阵理论》。牛津大学出版社，1992年。

[19] Klaus Reinhardt。开关图中的简单可达性问题。载于 Mogens Nielsen、Antonín Kucera、Peter Bro Miltersen、Catuscia Palamidessi、Petr Tuma 和 Frank D. Valencia 编，《第35届计算机科学理论与实践最新趋势会议论文集（SOFSEM，2009年）》，《计算机科学讲义》第5404卷，第461–472页。Springer，2009年。doi:10.1007/978-3-540-95891-8_42。

[20] Stefan Szeider. 寻找避开禁用转移的图中的路径。《离散应用数学》，126(2-3):261–273，2003年。doi:10.1016/S0166-218X(02)00251-2。[21] Craig A. Tovey. 一个简化的NP完全可满足性问题。《离散应用数- 学》，8(1):85–89，1984年。doi:10.1016/0166-218X(84)90081-7。