arXiv:2611.32930v1 [math.ST] 24 Nov 2026

高效推断模型及其枢轴推断联系

Max Raner

乌普萨拉大学数学系，瑞典 max.raner@math.uu.se

2026年11月25日

摘要

有效的推断模型（IM）提供频率学派校准保证，但仅凭有效性无法确定哪种构造最具信息量。本文通过集中风险研究有限样本效率，即相对于指定参数体积测度，在可能性轮廓下的期望体积。对于光滑且完全可识别的关联，加权 Neyman–Pearson 论证表明，广义信托密度是这样一种最优评分：在满足固定数据辅助相容性的条件下，最小化参数空间截切体积。由此得到的等高线是枢轴分布的基于密度的最大特异性变换，从而对枢轴效率上限给出了明确的体积解释。然而，其辅助排序可能取决于观测值，因此这一固定数据最优方案不一定具有抽样有效性。

我们以这一效率准则为指导，提出两种构造有效 IM 的方法。第一种方法在单一、与数据无关且辅助相容的轮廓中，最小化设计平均集中风险。设计测度指定优先考虑效率的区域，无需先验解释，也不限制有效性保证。第二种方法将参数体积评分局部化到候选特定辅助轮廓上，从而得到一个归一化的有效 IM，它等价于对相对枢轴似然进行抽样有效化。与之并行的样本空间构造可恢复普通似然比 IM，并阐明二者在几何上的区别。对上限等高线进行直接有效化，则提供了另一种修正方法。

枢轴联系并不局限于最优构造：精确、与数据无关的预测轮廓与饱和内概率具有相同的枢轴分布，却会产生几何形态不同的校准置信区域。因此，设计平均可从这一族中选出一个高效成员，同时不改变其底层枢轴分布。双分量测量模型和指数尺度模型中的示例展示了轮廓选择对效率的影响。尤其是，抽样有效的构造可以优于原始上界，因为它不受固定数据下辅助相容类的限制，而原始上界正是在该类中最优的。

关键词： 推断模型、广义信任推断、可能性理论、有限样本效率、置信集。

1 引言

有效的推断模型（IM）以先验无关的方式，通过下概率和上概率的形式，提供关于未知参数的类似后验的不确定性概括。有效性使这些赋值具备逐断言的频率学派校准保证 [Martin and Liu，2013a]，，控制真实断言获得较小上概率的频率，或等价地，控制错误断言获得较大下支持的频率。因此，同一概括既能产生具有受控第一类错误的检验，也能产生覆盖率至少达到名义水平的置信区域。然而，仅凭有效性并不能确定应选择哪一个 IM。正如针对同一问题可能存在多种置信集构造方法，不同的 IM 也可能满足相同的校准要求，却在信息性方面存在显著差异。因此，针对具体问题构造统计效率高的 IM 至关重要。

在原始的IM表述中，数据生成关联通过一个具有已知分布的辅助变量，将观测值与未知参数联系起来。对未观测的辅助值的不确定性，由辅助空间中的相容预测随机集表示，并通过该关联传递，从而得到对参数的不确定性 [Martin and Liu，2015b]。可容许性论证促使人们将注意力限制在嵌套预测随机集上，其

诱导上概率是可能性测度 [Liu 和 Martin，2024，Martinand Liu，2015b]。这使得可以用可能性轮廓（类似于概率密度）进行等价表述，但关联的选择以及给定关联下预测轮廓的选择仍未确定。较新的推断模型构造直接从抽样模型中获得经过校准的可能性轮廓，特别是通过相对似然来实现，而无需明确选择预测随机集 [Martin，2026]。

效率可以从若干互补的视角进行考察。 Martin 和 Williams [2025]在其可能性伯恩斯坦–冯·米塞斯定理的正则性条件下，证明了相对似然 IM 的渐近效率。本文关注的是，在指定的有限样本效率测度下如何选择 IM。我们考察集中风险，这是Raner [2026]提出的乔凯风险的一个特例。对于可能性轮廓 π_x 和参数体积测度ν，相应的集中损失是轮廓下的体积， $L(\pi_x) = \int_\Theta \pi_x(\vartheta)\,\nu(d\vartheta)$。集中风险是其重复抽样期望。由于有效轮廓的截集 $C_\alpha(x) = \{\vartheta : \pi_x(\vartheta) \geq \alpha\}$ 是置信区域 [Martin， 2021], 因此该风险具有经典解释：对所有水平上的置信域体积进行积分后所得的期望。

本文回到原始IM构造，并采用这一集中准则，为给定的关联选择预测轮廓。当辅助密度可用时，Liu 和 Martin [2024]建议采用基于密度的最大特异性原则[Dubois 等人， 2004]。这一构造具有奈曼–皮尔逊解释：在保留指定辅助概率的前提下，使辅助体积最小。然而，较小的辅助集合在参数空间中的像可能很大。集中准则提示我们直接最小化该像的体积。

近期 IM 的发展重新引发了人们对贝叶斯、枢轴和频率学派推断之间联系的兴趣 [Martin，即将发表，Cui 和 Hannig， 2025]。在此，IM 与枢轴推断之间的联系源于效率问题本身。对于经过任何相关降维后光滑且完全可识别的关联，我们首先在满足固定数据辅助相容性的条件下，最小化参数空间的轮廓截集体积。这便得到一个加权的 Neyman–Pearson 集合选择问题 [Lehmann and Romano，2005]。我们证明，其最优评分恰好是相对于 ν由逆关联诱导的广义信任分布的密度 [Hannig， 2009]。由此得到的等高线是该分布基于密度的最大特异性变换。其截集是具有规定概率含量且体积最小的枢轴最高密度区域。Liu 和 Martin [2024] 和Cui 和 Hannig [2025]将枢轴概率与 IM 信念的界联系起来。在这里，在固定数据辅助相容轮廓这一类中，上界具有明确的体积解释。

然而，固定数据辅助相容性并不一定意味着抽样有效性。当最优排序取决于观测值时，生成该观测值的辅助抽取也决定了对其进行排序的方式。因此，枢轴上限是固定数据辅助相容等高线类中的效率基准，但其本身未必定义一个有效推断模型。这一区别引出了本文的核心构造性问题：如何使上限等高线和枢轴排序恢复有效性，从而获得有效且高效的推断模型?

我们采用两种方法。第一种使用一个与辅助相容的等高线，该等高线的选取独立于实际观测数据。对参数空间上的设计测度 w 求集中风险的平均值，可得到这一类中的最优等高线。由辅助相容性可知，抽样有效性随之成立。设计测度指定了效率应优先考虑的区域，并不一定代表关于真实参数的先验信念。特别是，可以将效率目标设定为科学上相关的区域，同时在整个参数空间内保持有效性。

第二种方法通过我们称为局部化的过程，将单一的通用预测轮廓替换为一族按候选参数值索引的等高线。对于每个候选参数值，我们追踪其可能生成的观测值，并在这些假设数据集上评估上界的参数体积评分。对局部评分进行归一化和校准后，可得到候选特定预测轮廓；再通过观测关联将这些轮廓合并，形成归一化的有效推断模型。等价地说，这种随机集构造使相对枢轴似然有效化，即将枢轴密度除以其在给定观测值处的最大值。基于样本空间体积的平行局部化则可恢复通常的有效化似然比推断模型。我们还考虑了对上限等高线进行直接有效化，作为一种互补的修正方法。

这些构造为 Martin [2023b，即将出版] 所述饱和内概率解释，以及 Cui 和

Hannig [2025]提供了一种以效率为导向的视角。对于固定的完全可识别关联，精确且与数据无关的辅助轮廓可生成抽样校准的 IM，并且这些 IM 与饱和内概率具有相同的枢轴分布。它们的嵌套置信区域形状可能不同，但每个区域的枢轴内容都等于其名义覆盖率。设计平均优化可从这一类中选出一个高效成员，同时不改变其底层枢轴分布。

我们在一个具有加性和乘性误差的双分量测量模型 [Rocke 和 Lorenzato中， 1995] 以及一个指数尺度模型中说明这些构造。测量示例表明，抽样有效修正可以改善原始上限的集中度，因为抽样有效性允许等高线位于固定数据下辅助相容类之外，而上界在该类上是最优的。在尺度示例中，最优辅助排序与数据无关，因此上界已经实现精确校准，并且与所提出的修正一致。辅助最大特异性和有效化相对似然在每个水平上也都能实现精确覆盖率。对于 $n = 5$ 和普通参数长度而言，它们的集中风险分别比上界高约 60% 和 8.7%，这表明，等高线的选择——即使是在合理的替代方案之中——也可能对效率产生重大影响。

本文其余部分的组织如下。第2 节回顾预测轮廓构造、辅助相容性和有效性的理论。第3 节推导固定数据效率上限和最优设计平均构造。第 4 节介绍有效性修正及其与有效化似然比推断模型的关系。第5 节阐述信任域表示以及与更多文献的联系。第6 节介绍示例，相关计算汇集于附录中。第 7 节讨论最优性、归一化和加权似然包络的若干进一步方向，以及与非精确先验的联系，这些联系可能带来效率提升。

2 背景

我们简要回顾 Martin 和 Liu [2015b] 在可能性—等高线表述中构建 Liu 和 Martin [2024]推断模型（IM）的方法。设 $X \sim \mathrm{P}_\theta$，其中 $\theta \in \Theta$，并假设抽样模型通过以下关联表示

$$X = a(\theta, U), \qquad U \sim \mathrm{P}_U,$$

其中 $u \in \mathcal{U}$ 是辅助变量 U的一个实现，且辅助分布 P_U 已知。我们假设任何相关的降维都已完成，例如使用充分统计量，或按照 Martin 和 Liu [2015a第 3 节中的条件化方法。2]在后一种情况下，数据确定了原始辅助变量的一个特征。以其观测值为条件后，只需预测剩余的辅助分量。随后，我们对约化后的变量使用 X 和 U，并对条件辅助律使用 P_U；抽样概率和期望均在相应的条件实验中计算。以下的光滑性、可逆性和相容性条件适用于约化后的关联。 Liu 和 Martin [2024] 在其曲线正态示例中说明了辅助变量的降维。

对于固定的 (x, ϑ)，记作

$$\mathbb{U}_x(\vartheta) = \{u \in \mathbb{U} : x = a(\vartheta, u)\}.$$

在下文讨论的完全识别情形中，该集合是一个单元素集合，记为$u_{x,\vartheta}$，且还可以求解出关联中的 $\vartheta = \theta_x(u)$。在这一光滑的完全识别情形中，完成任何必要的降维后，假设 $\mathcal{U}$ 和 Θ 是 d维欧几里得空间（或适当的子空间），并且逆映射在相关内部区域上连续可微且具有非奇异雅可比矩阵。我们还假设，所有辅助值都与每个观测相容， $\{u_{x,\vartheta} : \vartheta \in \Theta\} = \mathcal{U}$，因此观测到 x不会排除辅助空间中的任何部分。

2.1 预测轮廓

在原始的 IM表述 [Martin andLiu， 2013a], 对未观测的辅助值的不确定性由一个 预测随机集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{U}$表示，其分布为 $\mathrm{P}_{\mathcal{S}}$。将 $\mathcal{S}$ 与观测值 x 结合可得参数空间随机集

$$\Theta_x(\mathcal{S}) = \bigcup_{u \in \mathcal{S}} \{\vartheta : x = a(\vartheta, u)\}.$$

假设该集合几乎必然非空，相应的下概率和上概率为

$$_x(A) = \mathrm{P}_{\mathcal{S}}\{\Theta_x(\mathcal{S}) \subseteq A\}, \qquad \mathbb{I}_x(A) = \mathrm{P}_{\mathcal{S}}\{\Theta_x(\mathcal{S}) \cap A \neq \varnothing\},$$

对于断言 $A \subseteq \Theta$。它们是对偶的，$_x(A) = 1 - \mathbb{I}_x(A^c)$。

预测随机集的选择决定了所得推断的效率。对于固定断言，可容许性论证促使人们使用嵌套预测随机集，其实现按照包含关系排序 [Martin andLiu，2013b，2015b]。对于这样的随机集，定义其命中函数

$$\gamma(u) = \mathrm{P}_{\mathcal{S}}\{u \in \mathcal{S}\}, \qquad u \in \mathbb{U}.$$

嵌套性意味着，辅助上概率完全由 γ [Liu 和 Martin，2024]决定：

$$\mathbb{I}^U(B) = \mathrm{P}_{\mathcal{S}}\{\mathcal{S} \cap B \neq \varnothing\} = \sup_{u \in B} \gamma(u).$$

如果 $\sup_u \gamma(u) = 1$，这是一个可能性测度，而 γ 是其可能性轮廓 [Dubois and Prade， 1988]。其对偶 ^{U} 是必然性测度，或等价地说，是相容信念函数。

通过关联传播得到参数空间轮廓

$$\pi_x(\vartheta) = \sup_{u \in \mathbb{U}_x(\vartheta)} \gamma(u),$$

在完全识别情形下，它简化为 $\pi_x(\vartheta) = \gamma(u_{x,\ \vartheta})$。完整的推断输出随后由以下内容获得

$$\mathbb{I}_x(A) = \sup_{\vartheta \in A} \pi_x(\vartheta), \qquad _x(A) = 1 - \mathbb{I}_x(A^c).$$

因此，一旦施加嵌套性，便可用普通函数 γ替代预测随机集，而不改变由此得到的 IM。事实上，记为

$$S_\alpha = \{u : \gamma(u) \geq \alpha\}, \qquad \alpha \in [0, 1],$$

这些集合 S_α 是嵌套的；若 $V \sim \mathrm{Unif}(0,1)$，则 $\mathcal{S} = S_V$ 的命中函数为 γ。因此，以下我们直接使用预测轮廓。

相应的参数空间截集为 $C_\alpha(x) = \{\vartheta\colon\ \pi_x(\vartheta) \geq \alpha\}$。在完全识别下，$C_\alpha(x) = \theta_x(S_\alpha)$，这一关系将在后续的效率论证中发挥核心作用。

2.2 辅助相容性与抽样有效性

预测轮廓必须根据已知的辅助分布进行校准。由此得到以下基本要求。

定义 2.1（辅助相容性）。 轮廓 $\gamma : \mathrm{U} \to [0, 1]$ 与 P_U 相容，当且仅当

$$\mathrm{P}_U\{\gamma(U) < \alpha\} \leq \alpha, \qquad \alpha \in [0, 1].$$

更一般地，一个以 x 为指标的族 $\{\gamma_x : x \in \mathrm{X}\}$ 是辅助相容的，当且仅当

$$\mathrm{P}_U\{\gamma_x(U) < \alpha\} \leq \alpha$$

对每个固定的 x 和每个 $\alpha \in [0, 1]$,

用轮廓截集表示，相容性等价于

$$\mathrm{P}_U(S_\alpha) \geq 1 - \alpha, \qquad \alpha \in [0, 1].$$

当 $\gamma(U) \sim \mathrm{Unif}(0,\ 1)$ 时，我们称该轮廓精确相容，此时 $\mathrm{P}_U(S_\alpha) = 1 - \alpha$ 在每个层级上都成立。

辅助相容性应与诱导的参数空间轮廓所需的重复抽样校准区分开来。

定义 2.2（抽样有效性）。一族参数空间轮廓 $\pi = \{\pi_x : x \in \mathrm{X}\}$ 若抽样有效，则

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathrm{P}_\theta\{\pi_X(\theta) < \alpha\} \leq \alpha, \qquad \forall \alpha \in [0,1].$$

在空先验信息下，这是强有效性 [Martin、2022、2023a]的等高线形式。对于单一预测轮廓，下一个命题给出了Martin 和 Liu [2013a]的完全识别情形下预测随机集有效性结果。

命题 2.1。设 $\pi_x(\vartheta) = \gamma(u_{x,\,\vartheta})$，其中 γ 是与P_U兼容的单一辅助轮廓。若在P_θ下，$u_{X,\,\theta} = U^\star$对于 $U^\star \sim \mathrm{P}_U$，则 π是抽样有效的。

证明。在真实参数处，

$$\pi_X(\theta) = \gamma(u_{X,\theta}) = \gamma(U^\star).$$

因此

$$\mathrm{P}_\theta\{\pi_X(\theta) < \alpha\} = \mathrm{P}_U\{\gamma(U) < \alpha\} \leq \alpha,$$

并且该结论对 θ一致成立。 □

抽样有效性 v 有效性可直接推广到断言层面的推断。若 $\theta \in A$，则 $\mathbb{I}_X(A) \geq \pi_X(\theta)$，因此

$$\sup_{\theta \in A} \mathrm{P}_\theta\{\mathbb{I}_X(A) < \alpha\} \leq \alpha.$$

根据对偶性，赋予错误断言的较大下概率也会以相应方式受到控制。特别地，轮廓截集满足

$$\mathrm{P}_\theta\{\theta \in C_\alpha(X)\} \geq 1 - \alpha.$$

对于数据依赖族 γ_x，仅有逐点辅助相容性本身并不能保证抽样有效性，因为

$$\pi_X(\theta) = \gamma_X(U^\star) = \gamma_{a(\theta,U^\star)}(U^\star),$$

同一个辅助实现既可用于选择等高线，也可由该等高线进行评估。抽样有效性要求更强的必要对角条件：对所有 θ 和所有 α，$P_U\{\gamma_{a(\theta,U)}(U) < \alpha\} \leq \alpha$。

2.3 预测轮廓的选择

辅助相容性并不能唯一确定预测轮廓。一种简便的通用构造从可测评分 $h : \mathrm{U} \to \mathrm{R}$ 开始，将较大的值解释为更可信的辅助值，并定义

$$\gamma_h(u) = \mathrm{P}_U\{h(U) \leq h(u)\}.$$

如果 $h(U)$ 具有连续分布，则概率积分变换给出

$$\gamma_h(U) \sim \mathrm{Unif}(0,1),$$

因此 γ_h 是精确的，尤其是辅助相容的。因此，评分 h 决定了预测集的排序和几何结构，而概率变换则提供了其校准。

一种具有代表性的选择由最大特异性可能性理论中的原则[Dubois 等人， 2004], 将其应用于辅助分布的是Liu 和 Martin [2024]。在遵循密度排序的兼容轮廓中，该原则选择逐点最小的轮廓。假设 P_U具有密度 f_U且 $f_U(U)$ 具有连续分布。基于密度的最大特异性等高线为

$$\gamma^{\mathrm{ms}}(u) = \mathrm{P}_U\{f_U(U) \leq f_U(u)\}. \tag{1}$$

因此，辅助值根据其在 P 下的密度进行排序$_U$，密度较高的值具有更大的可能性。命题 2.1 意味着由此得到的参数空间轮廓具有抽样有效性。

例。设 $Y_1, \ldots, Y_n$ 为均值为 $\theta > 0$ 的独立指数观测。充分统计量 $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ 具有如下关联：

$$X = \theta U, \qquad U \sim \text{Gamma}(n, 1),$$

其中伽马分布的形状参数为 n，率为单位率。与 (x, ϑ) 相容的辅助值为 $u_{x,\vartheta} = x/\vartheta$。由于 $f_U(u) \propto u^{n-1}e^{-u}$，辅助最大特异性按照在 $u = x/\vartheta$ 处评估的 $u^{n-1}e^{-u}$ 对候选项进行排序。

3 最优辅助相容轮廓

Martin and Liu [2015b，第 4 节。5] 研究了预测随机集的理论最优性，Martin 和 Williams [2025] 研究了渐近效率。Raner [2026] 基于 Choquet 损失（即在 IM 的可能性测度下对惩罚函数取上期望），建立了一个针对有限样本效率的决策理论框架。轮廓集中度对应于一种特定的泛函选择，该泛函会惩罚轮廓的 α截集大小。这可化为截集的积分大小，或等价地，轮廓曲面下的体积，并且与置信集期望大小等经典效率概念密切相关。

对于给定的概率含量，最大特异性等值线的密度水平集可使辅助体积最小化 [Nu˜nez Garcia 等人， 2003]。轮廓集中度衡量它们传播至参数空间后的体积。因此，理想情况下，应选择预测集，使其在关联作用下于参数空间中的像体积较小，而不仅仅是使其在辅助空间中的体积较小。

在此，我们将施加轮廓集中度风险泛函，以指导高效预测辅助轮廓的选择。

3.1 特定于关联的效率上界

对于固定的 x，令 γ_x 为满足约束条件的辅助相容轮廓

$$P_U\{\gamma_x(U) < \alpha\} \leq \alpha, \tag{2}$$

并令 $S_\alpha(x) = \{u : \gamma_x(u) \geq \alpha\}$ 为其辅助预测 α-截集。对于完全可识别情形，在参数空间中诱导的后验 α-截集为

$$C_\alpha(x) = \{\vartheta : u_{x,\vartheta} \in S_\alpha(x)\} = \theta_x(S_\alpha(x)).$$

令 ν 为参数体积测度。在默认的欧氏情形下，$\nu(d\vartheta) = d\vartheta$，像体积恒等式为

$$\nu\{\theta_x(S_\alpha)\} = \int_{S_\alpha(x)} K_x(u)du, \qquad K_x(u) = |\det D_u\theta_x(u)|.$$

更一般地，如果 $\nu(d\vartheta) = v(\vartheta)d\vartheta$，则将 $K_x(u)$ 替换为 $K_x^\nu(u) = v(\theta_x(u))|\det D_u\theta_x(u)|$。为简化记号，记 $K_x(u)$ 为相应的 ν-体积畸变。定义集中损失

$$L(\gamma_x) = \int_0^1 \nu\{C_\alpha(x)\}d\alpha. \tag{3}$$

根据 Fubini/Tonelli定理,

$$\begin{aligned} L_x(\gamma_x) &= \int_0^1 \int_{\{\gamma_x(u)\geq\alpha\}} K_x(u)du d\alpha = \int_0^1 \int_{\mathbb{U}} 1\{\gamma_x(u) \geq \alpha\}K_x(u)du d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{U}} K_x(u)\left[\int_0^1 1\{\gamma_x(u) \geq \alpha\}d\alpha\right]du = \int_{\mathbb{U}} K_x(u)\gamma_x(u)du. \end{aligned} \tag{4}$$

因此，对于每个固定的 x，集中度最小化是一个辅助空间中的加权体积问题。此外，由于嵌套性，损失（3）和相容性约束（2）（等价地 $P_U\{S_\alpha(x)\} \geq 1-\alpha$）都可逐层分解。在层级 α，我们必须求解

$$\min_{S_\alpha \subseteq \mathbb{U}} \int_{S_\alpha(x)} K_x(u)du \qquad \text{subject to} \qquad \int_{S_\alpha(x)} f_U(u)du \geq 1-\alpha. \tag{5}$$

这是一个 Neyman–Pearson 集合选择问题，其中辅助密度 f_U 起到待保留概率的作用，而 K_x 则是体积成本。具体而言，定义参数体积测度$\mu_x(du) = K_x(u)du$，则该问题为

$$\min_S \mu_x(S) \qquad \text{subject to} \qquad P_U(S) \geq 1-\alpha.$$

该阈值形式由 Neyman–Pearson 引理推出 [LehmannandRomano，2005，定理 3.2。1]。 Scott andNowak [2006]给出了针对一般参考测度的相应最小体积表述。因此，最优集合是相对于 P_U 而言的μ_x密度的上水平集：

$$\frac{dP_U}{d\mu_x}(u) = \frac{f_U(u)}{K_x(u)} =: \rho_x(u).$$

定理 3.1（固定数据效率上限）。 假设关联是光滑的且完全可识别。对于固定的 x，令 $\rho_x(u) = f_U(u)/K_x(u)$，并假设 $\rho_x(U)$， $U \sim P_U$ 的分布是连续的。定义 $\gamma_x^{\text{ceil}}(u) = P_U\{\rho_x(U) \leq \rho_x(u)\}$，其诱导的参数空间轮廓为

$$\pi_x^{\text{ceil}}(\vartheta) = \gamma_x^{\text{ceil}}(u_{x,\vartheta}) = P_U\{\rho_x(U) \leq \rho_x(u_{x,\vartheta})\}. \tag{6}$$

随后， γ_x^{ceil}是辅助相容的，并且对于每个 $\alpha \in [0,1]$，其预测截点

$$S_\alpha^{\text{ceil}}(x) = \{u : \gamma_x^{\text{ceil}}(u) \geq \alpha\}$$

解决了上述逐层加权体积问题。因此， γ_x^{ceil}使集中损失 $L_x(\gamma_x)$ 在（3）中，在所有针对固定数据值 x 的辅助相容轮廓中达到最小。

证明。由4 和辅助相容性2可知，集中问题逐层分解为定理正上方所示的 Neyman–Pearson 集合选择问题。因此，对每个 α，使其最小化的集合都是密度比 $\rho_x = dP_U/d\mu_x = f_U/K_x$的上水平集：

$$S_{\alpha,x}^\star = \{u : \rho_x(u) \geq c_{\alpha,x}\}, \qquad P_U(S_{\alpha,x}^\star) = 1-\alpha.$$

由于 $\rho_x(U)$的分布连续，概率积分变换给出 $\gamma_x^{\text{ceil}}(U) \sim \text{Unif}(0,1)$，因此 γ_x^{ceil}是辅助相容的。它的 α-截集恰好是集合$S_{\alpha,\,x}^\star$ 除去零测边界集。因此，它在每个层级 α都使加权体积最小；对4中的这些逐层不等式积分，即可证明 $L_x(\gamma_x)$的最小性。 □

注意，式（6）中的等高线虽然辅助相容，但通常并非抽样有效。效率上限等高线采用一个依赖于 x的辅助排序。在真实值处， $X = a(\theta, U^\star)$，但用于给 $U^\star$排序的评分是 $\rho_X(\cdot)$，它依赖于同一个随机 X。因此，命题2.1不适用，通常无法保证有效性。该等高线为任何有效的辅助相容等高线提供效率上限和基准。

3.2 平均集中风险

辅助相容等高线的效率上限由固定的x 雅可比 $K_x(u)$ 决定。但通常也正是这种数据依赖性，破坏了式（6）中所得可能性测度的抽样有效性。为找到最优的有效程序，我们需要放宽优化准则。我们最终关注的是集中风险。然而，针对指定的真实参数分别使风险最小化，通常会得到一个依赖于 θ的结果，因此，要在每个参数值处都达到逐点最优，就需要预言式地选择辅助等高线。为了得到单一且可实施的等高线，我们转而提议通过参数空间上的某个设计测度 w来对风险进行平均，该测度定义在 Θ 上。测度 w 并非贝叶斯先验，而是一种风险加权工具，用于规定如何对真实参数值上的期望集中损失进行平均，从而形成一个设计型效率问题。选择 w即指定了应优先提高精确度的范围。例如，点质量针对预先指定参考值处的风险，而均匀设计则针对科学相关范围内的平均风险。无论哪种情况，在整个 Θ上都保持有效性。

令 γ 表示一条单独的 P_U 辅助相容等高线。相应的 w平均浓度风险为

$$R_w(\gamma) = \int_\Theta E_\eta[L_X(\gamma)]w(d\eta). \tag{7}$$

利用（4）和托内利，

$$\begin{aligned} R_w(\gamma) &= \int_\Theta E_\eta[L_X(\gamma)]w(d\eta) \\ &= \int_\Theta E_\eta\left[\int_{\mathbb{U}} K_X(u)\gamma(u)du\right] w(d\eta) \\ &= \int_{\mathbb{U}} \bar{K}_w(u)\gamma(u)du, \end{aligned}$$

其中

$$\bar{K}_w(u) = \int_\Theta E_\eta\left[K_X(u)\right] w(d\eta). \tag{8}$$

因此，我们只是将依赖数据的雅可比行列式替换为其期望的 w平均对应项；这是长期体积价格，而不是观测体积价格。主要问题在于，式（7）中的积分是否存在。

对于本小节中的推导，假设上述量对于比较中的轮廓均定义良好。特别地，可以先在紧致-Θ情形下理解这些论证，或者¯更一般地，取一个固定的有限设计测度 w，使得 K_w（u） $< \infty$ 几乎处处成立，且风险有限。附录 B讨论了在非紧致参数空间上采用紧致限制的两种用途。可以用递增区域序列逼近无限设计测度，或者选择一个固定的、具有科学相关性的区域 C，在该区域上优化平均集中风险。后一种选择明确了应优先保证精度的范围，而无需假设 $\theta \in C$，并且有效性在整个范围内仍然成立 Θ。

像之前一样，通过层蛋糕表示改写式（7）中的风险准则后，优化问题现在为

$$\min_\gamma \int_0^1 \int_{S_\alpha^\gamma} \bar{K}_w(u)\, du\, d\alpha \quad \text{subject to} \quad P_U(S_\alpha^\gamma) \geq 1-\alpha, \qquad \alpha \in [0,1]. \tag{9}$$

目标函数和约束仍按层分解，逐层问题为

$$\min_{S_\alpha \subseteq \mathbb{U}} \int_{S_\alpha} \bar{K}_w(u)\, du \quad \text{subject to} \quad \int_{S_\alpha} f_U(u)\, du \geq 1-\alpha. \tag{10}$$

因此，根据相同的 Neyman–Pearson 论证，最优截集由对 o 进行阈值化给出 f

$$\rho_w(u) = \frac{f_U(u)}{\bar{K}_w(u)}.$$

定理 3.2（最优 w-平均单一 PRS）。 设关联是光滑且完全可识别的，并设 w 为一个设计测度，使得 w- 平均风险在 7 中，对于所考虑的轮廓是有限的。定义

$$\bar{K}_w(u) = \int_\Theta E_\eta\{K_X(u)\}\, w(d\eta), \qquad \rho_w(u) = \frac{f_U(u)}{\bar{K}_w(u)},$$

¯并假设 $0 < K_w$（u） $< \infty$ 对 P_U-几乎处处的 u成立，且 ρ_w（U） 的分布 $U \sim P_U$ 是连续的。则单一辅助轮廓

$$\gamma_w^\star(u) = P_U\{\rho_w(U) \leq \rho_w(u)\} \tag{11}$$

使 w-平均集中风险 R_w 在 7 中，在所有与 P_U兼容的单一辅助轮廓中达到最小值。

等价地，对于每个 $\alpha \in [0,1]$，其预测截点为 $S^\star_{\alpha,\ w} = \{u :\ \rho_w(u) \geq c_{\alpha,\ w}\}$，其中选择 $c_{\alpha,\ w}$ 使得 $P_U(S^\star_{\alpha,\ w}) = 1-\alpha$。由此诱导出的参数空间轮廓

$$\pi^\star_{x,w}(\vartheta) = \gamma_w^\star(u_{x,\vartheta})$$

是抽样有效的。此外，若对每个 x 都有 $\{u_{x,\vartheta} :\ \vartheta \in \Theta\} = \mathbb{U}$，则它是归一化的：

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} \pi^\star_{x,w}(\vartheta) = 1.$$

证明。 根据 9中的风险表示，目标函数和相容性约束按层分解，每一层都由 10支配。这恰好是定理 3.1中的固定数据问题，其中 K_x 替换为 K_w。因此，同样的奈曼–皮尔逊论证给出使目标函数最小的截集

$$S^\star_{\alpha,w} = \{u : \rho_w(u) \geq c_{\alpha,w}\}, \qquad \rho_w(u) = \frac{f_U(u)}{\bar{K}_w(u)},$$

其中 $c_{\alpha,\ w}$ 的选取满足 $P_U\ (S^\star_{\alpha,\ w})\ = 1 - \alpha$。由于这些是共同评分函数$\rho_w$的上水平集，它们彼此嵌套，并生成11中的等高线。因此，逐层最优性意味着积分 w平均风险的最优性。

由 $\rho_w(U)$ 的分布连续性，根据概率积分变换可得 s

$$\gamma^\star_w(U) \sim \mathrm{Unif}(0,1),$$

因此 $\gamma^\star_w$与 P_U兼容 $\pi^{PRS,\ w}$。由此导出的等高线 π^{PRS}的抽样有效性^w，可直接由命题 2.1 得出。

最后，在规则的完全可识别情形下，对于每个固定的 x，逆关联遍历 U。因此

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} \pi_x^{PRS,w}(\vartheta) = \sup_{u\in\mathbb{U}} \gamma^\star_w(u) = 1,$$

这证明了归一化。 □

3.3 观测到的和设计平均的体积成本

定理 3.1 中的固定数据上限等高线与定理 3.2 中的设计平均最优等高线，源自同一个逐层集合选择问题，但采用了不同的体积成本概念。对于固定的x，在预测集中纳入 u 的相关成本是观测逆像体积 $K_x(u)$，由此得到排序 $\rho_x(u) = f_U(u)/K_x(u)$。相比之下，要求选择单一辅助轮廓，且不依赖于实际观测到的数据，会将这一观测成本替换为其设计平均对应量 $K_w(u)$（见式 (8)），从而得到排序 $\rho_w(u) = f_U(u)/K_w(u)$。

因此，$K_x(u)$ 和 $K_w(u)$ 可以视为两种不同的体积价格。前者衡量辅助点 u对于实际观测到的 x所诱导的参数空间体积，后者则衡量其在重复抽样和设计测度 w下的预期体积成本。我们有：

$$\rho_w(u) = \rho_x(u)\frac{K_x(u)}{\bar{K}_w(u)}. \tag{12}$$

因此，因子 $K_x(u)/K_w(u)$ 衡量的是分配给 u 的观测体积成本与长期体积成本之间的差异。在固定数据层面，根据实际实现的逆像几何调整辅助排序不会带来惩罚；而单一辅助轮廓必须对所有可能的样本使用同一种排序。从 K_x 到 K_w，恰恰就是施加这种数据无关的辅助几何所付出的代价。

不过，在一些重要情形下，这种区别会消失。例如，假设逆像体积因子可以分解为 $K_x(u) = c(x)K_0(u)$，其中 c 和 K_0 是正函数。那么

$$\rho_x(u) = \frac{1}{c(x)}\frac{f_U(u)}{K_0(u)},$$

因此，由 ρ_x 所诱导的辅助空间排序独立于 x。此外

$$\bar{K}_w(u) = K_0(u)\int_\Theta E_\eta[c(X)]w(d\eta),$$

只要最后的积分有限，就有；因此

$$\rho_w(u) \propto \frac{f_U(u)}{K_0(u)}.$$

因此，固定数据构造与设计平均构造诱导出相同的预测集嵌套族。

推论 3.3。 假设定理*3.1*和定理*3.2* 的假设成立，并且观测参数体积畸变因子分解为

$$K_x(u) = c(x)K_0(u),$$

对于正函数 c 和 K_0，固定数据上限辅助等高线独立于 x ，并且与设计平均最优等高线重合: $\gamma_x^{\text{ceil}} = \gamma_w^\star$。对于每个满足定理 w 假设的设计测度*3.2*，这一共同等高线都相同。因此，所诱导的上限等高线具有抽样有效性。

证明。根据因子分解以及关于 w的假设,

$$\bar{K}_w(u) = A_w K_0(u), \qquad A_w := \int_\Theta E_\eta[c(X)]w(d\eta) \in (0,\infty).$$

因此,

$$\rho_x(u) = \frac{1}{c(x)}\frac{f_u(u)}{K_0(u)}, \qquad \rho_w(u) = \frac{1}{A_w}\frac{f_U(u)}{K_0(u)}.$$

Pos正比例缩放不会改变辅助排序及其概率变换，因而 o

$$\gamma_x^{\text{ceil}}(u) = P_U\left\{\frac{f_U(U)}{K_0(U)} \le \frac{f_U(u)}{K_0(u)}\right\} = \gamma_w^\star(u).$$

抽样有效性现在可由定理3.2推出。 □

特别地，在这种因子分解下，固定数据上限不再仅仅是一个预言机基准。其辅助排序本身可以用单一辅助等高线表示，因此也具有相应的抽样有效性。

示例（续）。在指数分布示例中， $\theta_x(u) = x/u$ 和 $E_\eta(X) = n\eta$，因此，普通参数长度对应的观测成本和设计平均成本为

$$K_x(u) = \frac{x}{u^2}, \qquad \bar{K}_w(u) = \frac{n}{u^2}\int_0^\infty \eta\, w(d\eta).$$

对于任意可接受的 w，两种成本的差别仅在于一个与 u无关的因子。因此，推论3.3 给出了共同排序 $u^2 f_U(u) \propto u^{n+1}e^{-u}$。额外因子 u^2 偏好较大的辅助值，因为给定的辅助长度所对应的参数区间更短。由于该排序与 x无关，上界本身具有抽样有效性。

这种因子分解是这一现象的一个方便的充分条件，而非必要条件。关键在于，固定-x 评分的数据依赖性不会改变辅助空间的排序。更一般地，只要族 $\{\rho_x : x \in \mathrm{X}\}$ 具有共同的辅助排序，固定数据优化表面上的数据依赖性对于辅助排序而言就是无关的。对于普通参数长度，加性位置 $x = \theta + u$ 给出 $K_x(u) = 1$，而正尺度 $x = \theta u$给出 $K_x(u) = x/u^2$。因此，两者都满足该因子分解。

4 有效上限等高线的抽样有效修正

定理 3.1中的有效上限等高线使用观测数据最优排序

$$\rho_x(u) = \frac{f_U(u)}{K_x(u)},$$

并使观测到的 x体积最小。由于这一排序具有数据依赖性，所得 x索引的辅助等高线通常不具备抽样有效性。定理3.2 中设计平均等高线的构造，主要是为了通过一个兼容的预测辅助等高线来挽救这一构造，并由此保证有效性。具体做法是将体积成本K_x 替换为设计平均体积成本 K_w，从而有效消除

评分中的数据依赖性，但这也使效率问题转变为长期积分体积最小化问题。

命题 2.1 不过只是建立有效性的一种策略。我们并不要求有效轮廓必须对某个共同的 γ具有 $\pi_x(\vartheta) = \gamma(u_{x,\vartheta})$ 的形式。其目标不是相容性，而是参数空间中的有效性：

$$\sup_{\theta} P_\theta\{\pi_X(\theta) \le \alpha\} \le \alpha, \qquad \alpha \in [0,1].$$

允许进行候选特定校准： $\pi_x(\vartheta) = \gamma_\vartheta(u_{x,\vartheta})$——可能为有效性修复提供更加灵活的方式。

本节现在关注的目标是：尽可能保留固定数据上限的局部几何；在不强制要求所有数据集采用单一相容辅助排序的情况下，修复抽样有效性的失效。有两种直接的修复策略：修复作为上限基础的评分 $\rho_x(u)$，或在上限等高线 π_x 构造完成后再对其进行修复。实现这一目标的关键，是一种允许逐候选有效化的变换。 Martin [2015, 第 2 节1] 为此使用候选特定评分的抽样分布。

4.1 逐候选有效化

对于任意依赖候选值的评分 $T_x(\vartheta)$，其抽样分布为 $F_\vartheta^T(t) = P_\vartheta\{T_X(\vartheta) \le t\}$。我们将评分 $T_x(\vartheta)$ 的逐候选值有效化定义为

$$\mathcal{V}[T]_x(\vartheta) := F_\vartheta^T\{T_x(\vartheta)\} = P_\vartheta\{T_X(\vartheta) \le T_x(\vartheta)\}. \tag{13}$$

接着，根据概率积分变换（PIT）的性质，我们有

$$P_\theta\{\mathcal{V}[T]_X(\theta) \le \alpha\} \le \alpha,$$

在连续性条件下， $\mathcal{V}[T]_X(\theta) \sim$服从 Unif(0，1)。

此外，这种 PIT 有效化是所选标量评分的逐点最小、抽样有效的非递减变换。也就是说，对于任意有效的 $\pi_x(\vartheta) = g_\vartheta\{T_x(\vartheta)\}$，若 g_ϑ 非递减，则有效性要求 $g_\vartheta(t) \ge F_\vartheta^T(t)$。事实上，由 $T = T_X(\vartheta)$，单调性和抽样有效性可得

$$F_\vartheta^T(t) \le P_\vartheta\{g_\vartheta(T) \le g_\vartheta(t)\} \le g_\vartheta(t).$$

4.2 局部化辅助量修复

对于每个候选值 ϑ，考虑改变辅助值 u。这描绘了若 ϑ 为真时可能观测到的数据： $x_\vartheta(u) = a(\vartheta, u)$。由于假定关联完全可识别，这一过程定义明确。随后，可以在这些假设数据集中的每一个上计算定理 3.1 中的固定数据效率评分。对于每个 $x_\vartheta(u)$，我们考察该假设观测会如何扭曲体积：定义局部像体积雅可比 $K_\vartheta^{\mathrm{loc}}(u) := K_{x_\vartheta(u)}(u)$，以及相应的局部评分

$$\rho_\vartheta^{\mathrm{loc}}(u) = \frac{f_U(u)}{K_\vartheta^{\mathrm{loc}}(u)}. \tag{14}$$

与其固定 x 并针对该单一数据值使用体积最优排序，不如通过局部化，让几何结构沿着 ϑ 可能生成的数据集演变。

将评分变换为 $\gamma_\vartheta(u) = P_U\{\rho_\vartheta^{\mathrm{loc}}(U) \le \rho_\vartheta^{\mathrm{loc}}(u)\}$ 可得到一个有效的 p 值函数，但未必能得到归一化可能性轮廓，尽管对于固定的 ϑ，这个局部辅助等高线在 U 上是归一化的。由于等高线的最大值点本身会随 ϑ移动，因此无法保证该最大值点与观测到的 x 所对应的一对 (x, ϑ) 相容。

一旦实际观测到 x ，这对 (x, ϑ) 就确定了唯一相容的辅助值 $u_{x,\vartheta}$。关键在于，

$$x_\vartheta(u_{x,\vartheta}) = a(\vartheta, u_{x,\vartheta}) = x.$$

因此，在与观测值相容的特定辅助点处，局部化得分会还原为观测到的-x 效率评分：

$$\rho_\vartheta^{\mathrm{loc}}(u_{x,\vartheta}) = \rho_{a(\vartheta,u_{x,\vartheta})}(u_{x,\vartheta}) = \rho_x(u_{x,\vartheta}).$$

对于每个 $x \in \mathcal{X}$，假设

$$0 < M(x) := \sup_{v \in \mathcal{U}} \rho_x(v) < \infty$$

并且上确界在某个 $\hat{v}_x \in \mathcal{U}$ 处取得。定义归一化得分

$$\tilde{\rho}_\vartheta(u) = \frac{\rho_{a(\vartheta,u)}(u)}{M(a(\vartheta,u))}. \tag{15}$$

现在，每个假设观测 $x_\vartheta(u)$ 都相对于其自身的固定数据效率上限进行评估。在实际观测对 (x, ϑ) 处，我们有 $\tilde{\rho}_\vartheta(u_{x,\vartheta}) = \rho_x(u_{x,\vartheta})/M(x)$。由该归一化得分给出的辅助轮廓随后为 $\tilde{\gamma}_\vartheta(u) = P_U\{\tilde{\rho}_\vartheta(U) \le \tilde{\rho}_\vartheta(u)\}$，因此最终的局部化轮廓为

$$\pi_x^{\mathrm{loc}}(\vartheta) = \tilde{\gamma}_\vartheta(u_{x,\vartheta}). \tag{16}$$

令 $\tau_x(\vartheta) = \rho_x(u_{x,\vartheta})/M(x)$。式（16）中的局部化轮廓因此等价地表示为 a s

$$P_U\left\{\frac{\rho_{a(\vartheta,U)}(U)}{M(a(\vartheta,U))} \le \frac{\rho_x(u_{x,\vartheta})}{M(x)}\right\} = P_\vartheta\{\tau_X(\vartheta) \le \tau_x(\vartheta)\},$$

^ ^ ^ 并且由式（13）可知这是有效的。特别地，令 $\vartheta_x = \theta_x(\hat{v}_x)$。于是 $\tau_x(\vartheta_x) = 1$。由于 $\tau_X(\vartheta_x) \le 1$,

$$\pi_x^{\mathrm{loc}}(\hat{\vartheta}_x) = P_{\hat{\vartheta}_x}\{\tau_X(\hat{\vartheta}_x) \le 1\} = 1.$$

因此，有效化的局部化轮廓是归一化的。

候选参数索引的辅助轮廓 $\tilde{\gamma}_\vartheta$ 通过对角线求值进行组合。在 ϑ 处，我们使用$\tilde{\gamma}_\vartheta(u_{x,\vartheta})$，然后对该断言取上确界。这是 Martin [2021, 第 4 节2]中融合构造的嵌套情形。上面取得的最大值验证了其归一化条件。

4.2.1 样本空间局部化与似然比置信机器

还有一种密切相关的局部化方法，可以导出熟悉的似然比推断模型。回顾一下，辅助空间上的最大特异性构造依据 $f_U(u)$ 对辅助值排序，这对应于在给定 P_U-概率的情况下，使轮廓截集的辅助空间体积最小。和之前一样，我们不再保留辅助体积本身，而是固定一个候选 ϑ，但现在考虑预测集在样本空间中的像，其映射为 $x_\vartheta(u) = a(\vartheta, u)$。令

$$A_\vartheta(u) = |\det D_u a(\vartheta, u)| \tag{17}$$

表示相应的样本空间像体积因子。那么，对于 $S \subseteq$ U，最大特异性问题的候选参数局部类比为

$$\min_{S \subseteq \mathrm{U}} \int_S A_\vartheta(u)du \qquad \text{subject to} \qquad P_U(S) \ge 1 - \alpha.$$

按照同样的 Neyman–Pearson 论证，最优集是 $\rho_\vartheta^X(u)$ 的上水平集 $= f_U(u)/A_\vartheta(u)$。B 不过，通过关联进行变量变换可得

$$\frac{f_U(u)}{A_\vartheta(u)} = p_\vartheta\{a(\vartheta,u)\}. \tag{18}$$

因此，似然可视为沿 $U \to \mathcal{X}$ 方向对辅助最大特异性构造进行局部化后得到的评分。具体而言，在与观测对（x, ϑ）相容的辅助值 $u_{x,\vartheta}$ 处，我们有 $\rho_\vartheta^X(u_{x,\vartheta}) = p_\vartheta(x)$。

与第 4.2 节相同，直接对这一局部评分进行逐候选有效化，未必会在 ϑ 上产生归一化的等高线。因此，我们将每个假设观测按其最大评分进行归一化。同样假设，对于每个 x，似然上确界 $\sup_\eta p_\eta(x)$ 有限、严格为正且可达到。定义

$$\tilde{\rho}_\vartheta^X(u) = \frac{p_\vartheta\{a(\vartheta,u)\}}{\sup_{\eta \in \Theta} p_\eta\{a(\vartheta,u)\}}.$$

在观测到的相容点处，这便化为熟知的相对似然

$$R_x(\vartheta) = \tilde{\rho}^X_\vartheta(u_{x,\vartheta}) = \frac{p_\vartheta(x)}{\sup_{\eta\in\Theta} p_\eta\{x\}}.$$

逐候选有效化现在得到

$$\pi^{\mathrm{LR}}_x(\vartheta) = P_U\{\tilde{\rho}^X_\vartheta(U) \le \tilde{\rho}^X_\vartheta(u_{x,\vartheta})\}, \tag{19}$$

这就是通常的似然比置信机器 [Martin, 2015]。归一化改变了原先最小化勒贝格体积的问题；相对似然则诱导出一种加权的样本空间排序，但保留了候选点局部解释。

这一构造与第4.2节中的局部化形成了有益的对照。两者都从辅助奈曼–皮尔逊排序出发，随后进行局部化、归一化和逐候选有效化。区别在于辅助体积传递的方向。似然比构造通过 $u \mapsto x_\vartheta(u)$进行局部化，因此自然以样本空间中的特异性为目标。相比之下，第4.2 节从 $u \mapsto \theta_x(u)$诱导的固定数据排序入手，其局部代价是参数空间体积。由于（3）中的集中损失本身就是以参数空间体积定义的，因此后一种局部化与效率准则更加直接契合。这并不意味着归一化和有效化之后它必然普遍占优，但从结构上看，局部化的参数体积构造有望比普通似然比 IM 带来更小的集中损失。

4.3 效率上限的直接修复

这里我们提出一种更直接的修复方法。回顾定理 3.1 中的固定数据最优轮廓：$\pi^{\mathrm{ceil}}_x(\vartheta) = P_U\{\rho_x(U) \le \rho_x(u_{x,\ \vartheta})\}$。我们不必修复评分 ρ_x，而可以直接将轮廓π^{ceil}_x本身作为应尽可能保序的对象，并在抽样空间中直接校准该轮廓。也就是说，我们将上限等高线转化为有效构造：

$$\pi^{Vc}_x(\vartheta) = \mathcal{V}[\pi^{\mathrm{ceil}}]_x(\vartheta) = P_\vartheta\{\pi^{\mathrm{ceil}}_X(\vartheta) \le \pi^{\mathrm{ceil}}_x(\vartheta)\}. \tag{20}$$

由于 $\pi^{\mathrm{ceil}}_x(\vartheta)$ 在转化为有效构造之前已经归一化，$\pi^{\mathrm{Vc}}_x(\vartheta)$ 的归一化可用与第 4.2 节相同的论证得到。有效性由（13）推出。

5 枢轴推断联系

第 3 节和4 节中的构造也具有共同的枢轴推断解释。在光滑且完全识别的情形下，逆关联确定一个广义信任分布，其密度生成效率上限。抽样有效构造对应于对这种密度排序及其校准的不同处理方式。

5.1 广义信任分布与有效上限

假设逆映射在其支撑集上是一一映射且连续可微，并且所有辅助值均相容。固定 x，将通过逆关联传播P_U 所得到的分布记为 R_x ：

$$\Theta_x = \theta_x(U'), \qquad U' \sim P_U, \qquad \mathrm{R}_x(B) = P_U\{u : \theta_x(u) \in B\}.$$

在此情形下，R_x 是广义信任分布 [例如，Hannig 等人， 2016]。

保留参数体积测度 $\nu(d\vartheta) = v(\vartheta)d\vartheta$ 以及第3.1 节中的约定，即 K_x包含其密度 v。（21）中的似然乘雅可比表达式是Hannig 等人 [2016, 定理 1] 针对可逆情形的广义枢轴密度公式特例，并且是相对于 ν而言的。

命题 5.1。 设关联的参数和辅助导数均为非奇异。令 $J(x,\vartheta) = |\det D_\vartheta a(\vartheta, u_{x,\ \vartheta})|$。则

$$r^\nu_x(\vartheta) := \frac{d\mathrm{R}_x}{d\nu}(\vartheta) = \rho_x(u_{x,\vartheta}) = \frac{p_\vartheta(x)J(x,\vartheta)}{v(\vartheta)}. \tag{21}$$

因此，有效上限是基于密度的最大特异性概率到可能性变换

$$\pi_x^{\mathrm{ceil}}(\vartheta) = \mathrm{R}_x\{r_x^{\nu}(\Theta) \le r_x^{\nu}(\vartheta)\}. \tag{22}$$

证明。由于 θ_x 和 u_x：$\vartheta \mapsto u_{x,\vartheta}$ 互为反函数，变量替换得到

$$r_x^{\nu}(\vartheta) = \frac{f_U(u_{x,\vartheta})}{v(\vartheta)\,|\det D_u\theta_x(u_{x,\vartheta})|} = \frac{f_U(u_{x,\vartheta})}{K_x(u_{x,\vartheta})}.$$

对 $a(\theta_x(u),\,u) = x$ 关于 u 进行隐式微分，得到

$$D_u\theta_x(u) = -\big[D_\vartheta a(\theta_x(u),u)\big]^{-1} D_u a(\theta_x(u),u).$$

因此，$K_x(u_x,\vartheta) = v(\vartheta)A_\vartheta(u_x,\vartheta)/J(x,\vartheta)$，其中 $A_\vartheta(u)$如（17）所示。此外，变量变换得到（18），从而建立了密度恒等式。最后，由于 u_x 和 θ_x 互为逆映射，我们有 u_x、$_{\Theta_x} = U'$以及 $r_x^{\nu}(\Theta_x) = \rho_x(U')$。因此，代入（6）可得（22）中的表示式。 □

对于勒贝格参数体积和连续密度秩，Liu 和 Martin [2024]通过将概率到可能性变换应用于枢轴密度，给出（22）。关于该变换的一般形式，参见Martin [即将出版]。定理3.1 确定了其最小体积性质，并将该构造扩展到指定测度 ν。

记作 $s_x(\vartheta) = r_x^{\nu}(\vartheta)$，并称其为相对于 ν 的关联诱导的枢轴似然。命题 5.1 将枢轴密度与集中问题所选出的参数侧评分对应起来。在定理 3.1 的连续性假设下，上界截集因此是 R_x 的最高密度区域，且在其规定的枢轴内容下具有最小的 ν-体积。此外，R_x 是可能性测度 $\Pi_x^{\mathrm{ceil}}(B) = \sup_{\vartheta\in B}\pi_x^{\mathrm{ceil}}(\vartheta)$ 的饱和内概率：对于每个断言 B，它都不大于 $\Pi_x^{\mathrm{ceil}}(B)$，且满足 $\mathrm{R}_x\{C_\alpha^{\mathrm{ceil}}(x)\} = 1-\alpha$.

这种校准针对固定数据，而非重复抽样（有关有效IM的饱和内测度，详见 Martin [即将出版]）。固定 x 后，枢轴反演继续使用 P_U，并通过 θ_x 传播一个新的 U'，得到 $\pi_x^{\mathrm{ceil}}(\Theta_x)$ ∼服从 Unif(0, 1)。这种固定数据校准阐明了枢轴持续看待论证的抽样局限 [Dempster，1963年，第 109] 页。由此得到的均匀性涉及 $\pi_x^{\mathrm{ceil}}\{\theta_x(U')\} = \gamma_x^{\mathrm{ceil}}(U')$。然而，在真实参数下进行重复抽样时，我们有

$$X = a(\theta,U^\star), \qquad \pi_X^{\mathrm{ceil}}(\theta) = \gamma^{\mathrm{ceil}}_{a(\theta,U^\star)}(U^\star).$$

此处，被排序的辅助变量实现值也决定了排序。固定 P_U 后继续使用 x 可以定义枢轴分布，但并不能确立第 2.2 节的对角抽样校准条件。

5.2 对抽样有效构造的枢轴解释

设计平均构造使用不同的评分来变换同一枢轴分布。根据（12），定义

$$s_{w,x}(\vartheta) = s_x(\vartheta)\frac{K_x(u_{x,\vartheta})}{\bar{K}_w(u_{x,\vartheta})} = \rho_w(u_{x,\vartheta}).$$

由于在 $\Theta \sim \mathrm{R}_x$，$s_{w,\,x}(\Theta)$ 与 $\rho_w(U)$ 具有相同的分布，因此得到

$$\pi^\star_{x,w}(\vartheta) = \mathrm{R}_x\{s_{w,x}(\Theta) \le s_{w,x}(\vartheta)\}.$$

因此，R_x 也达到了 w-最优等高线。设计测度通过观测到设计平均的体积校正改变排序，而不是改变底层概率律。

第4.2 节的局部化构造具有直接的信任域表示。假设下文使用的上确界有限且可取到。定义相对枢轴似然

$$RF_x(\vartheta) = \frac{s_x(\vartheta)}{\sup_{\eta\in\Theta} s_x(\eta)}. \tag{23}$$

由于 $\sup_\eta {}^{s_x(\eta)} = M(x)$，这恰好是第 4.2 节中的归一化评分 $\tau_x(\vartheta)$。因此，

$$\pi_x^{\mathrm{loc}}(\vartheta) = P_\vartheta\{RF_X(\vartheta) \le RF_x(\vartheta)\}. \tag{24}$$

因此，局部化相当于对相对枢轴似然进行逐候选的抽样有效化。根据（21），

$$RF_x(\vartheta) = \frac{p_\vartheta(x) J(x,\vartheta)/v(\vartheta)}{\sup_{\eta\in\Theta} p_\eta(x) J(x,\eta)/v(\eta)}.$$

与第 $R_x(\vartheta)$ 节中的相对似然4.2.1 的差异，因此就是关联诱导的校正 $J(x,\vartheta)/v(\vartheta)$。特别地，如果对每个 ϑ 而言，该校正均与 x无关，那么 $RF_x = R_x$，且 $\pi_x^{\mathrm{loc}} = \pi_x^{\mathrm{LR}}$。

例（续）。对于采用普通参数长度的指数关联，该校正为 $J(x,\vartheta) = x/\vartheta$。因此， $r_x(\vartheta) = p_\vartheta(x)\ x/\vartheta$。记 $u = x/\vartheta$，该校正便将普通似然排序 $u^n e^{-u}$ 转换为依据参数体积准则得到的枢轴排序 $u^{n+1}e^{-u}$ 。

为区分枢轴校准与抽样校准，定义

$$H_x(t) = \mathrm{R}_x\{RF_x(\Theta) \le t\}, \qquad F_\vartheta(t) = P_\vartheta\{RF_X(\vartheta) \le t\}.$$

Then

$$\pi_x^{\mathrm{ceil}}(\vartheta) = H_x\{RF_x(\vartheta)\}, \qquad \pi_x^{\mathrm{loc}}(\vartheta) = F_\vartheta\{RF_x(\vartheta)\}.$$

第 4.3 节中的直接修正则变为

$$\pi_x^{\mathrm{Vc}}(\vartheta) = P_\vartheta[H_X\{RF_X(\vartheta)\} \le H_x\{RF_x(\vartheta)\}].$$

因此，这两种修正是在不同阶段实施抽样校准。局部化使相对枢轴似然有效；直接修正则先将该评分转换为其固定数据枢轴秩，再使该秩有效。

5.3 进一步的文献联系

R_x 具有饱和性并非优化评分所特有。 u_x 与 θ_x 的逆一致性给出

$$\mathrm{R}_x = (\theta_x)_{\#} P_U, \qquad (u_x)_{\#}\mathrm{R}_x = P_U.$$

将 $\Gamma_U = \{\gamma\colon \mathrm{U} \to [0,1]\colon\ \gamma(U) \sim \mathrm{Unif}(0,\ 1)\}$ 记为精确辅助轮廓类。令$\mathcal{R} = \{R_x : x \in \mathrm{X}\}$ 表示由逆关联诱导的枢轴族。其关联生成的轨道为

$$\mathcal{O}_a(\mathcal{R}) = \{\pi^\gamma : \pi_x^\gamma(\vartheta) = \gamma(u_{x,\vartheta}), \quad \gamma \in \Gamma_U\}.$$

每个成员都经过精确的抽样校准，并由同一个枢轴分布饱和。也就是说，每个切分 $C_\alpha^\gamma(x) = \{\vartheta\colon\ \pi_x^\gamma(\vartheta) \ge \alpha\}$ 都满足

$$\mathrm{R}_x\{C_\alpha^\gamma(x)\} = P_\theta\{\theta \in C_\alpha^\gamma(X)\} = 1-\alpha.$$

因此，不同的辅助排序会产生不同的经校准置信集几何形状，但具有相同的枢轴概率含量。定理3.2 选出了特定的有效成员 $\gamma_w^\star$。有效上限同样由 R_x饱和，但通常位于该轨道之外，因为其辅助排序取决于观测值。

该轨道提供了许多置信域族，对于这些族，枢轴概率与抽样概率完全一致。这表明，对轨道置信域进行足够稳定的扰动，可能仍能近似保留这两种校准。只要两个区域的对称差在观测到的 x 处具有较小的枢轴概率，并且在重复抽样下很少包含真实的 θ 即可。这或许能部分从结构上解释枢轴导出的置信域通常具有良好的近似准确性。有关示例和渐近覆盖率结果，请参见Hannig 等人 [2016]。

枢轴推断与 IM 之间的联系已从多个方向得到确立。Liu 和 Martin [2024] 将原始枢轴分布解释为预测随机集 IM 的效率上限，这一解释建立在 Martin and Liu [2013所提出的关于信念上界的 1]命题之上。我们的集中论证通过表明固定数据上限

在每个层级上使参数体积最小。由于这一上界不一定具有抽样有效性，Liu 和 Martin 建议将为确保有效性而进行的调整保持在较小范围内，这促成了我们所提出的构造。

在 Martin [2023b 的不变模型假设下，定理 4]，枢轴分布与右 Haar 后验分布一致，并且是 IM 信念集的一个极大成员，即饱和内概率。Martin [即将出版，定理 2 和 3] 进一步将饱和性与共单调排序的概率匹配联系起来，并在 22 中以密度排序形式表示条件不变模型轮廓，其中 ν 为右 Haar 测度。在我们的设定中，同一个枢轴分布使固定关联所生成的轨道中的每个成员都达到饱和。

Cui 和 Hannig [2025] 将 IM 解读为由枢轴分布导出的置信曲线。的确，在我们所研究的完全识别情形下，本文中的许多识别结果都可以被视为从 GFD 的可能性 IM 视角对其关联的重新表述，而不是从 IM 视角对 GFD 的表述。他们的定理 3.3 确定了嵌套原则性断言$A_{\beta,\ x}$ 这些断言决定了 IM 的信念函数。当枢轴反演无需条件化且辅助校准是精确的时，他们证明存在一个满足以下条件的 GFD 版本

$$_x(A_{\beta,x}) = \mathrm{R}_x(A_{\beta,x}) = \beta$$

在每一个可达到的信念水平上。他们的定理 4.2 给出了至少达到名义覆盖率的保证；在完全相容性条件下，还将实际覆盖率确定为相应的枢轴内容。在当前设定中，这些断言与截集 $C^{\gamma}_{1-\beta}(x)$ 相符，只有在水平边界处可能不同，而这些边界在两种校准下均为零测集。相应的置信曲线为 $cc^{\gamma}_x = 1 - \pi^{\gamma}_x$。因此，他们对枢轴置信曲线的解释，恰好指出了此处由饱和性所表达的嵌套断言之间的一致性。

效率上界的解释还与他们的讨论有另一项直接联系。他们的定理 3.1 指出，当辅助抽取几乎必然相容且预测随机集经过校准时，枢轴概率介于 IM 信念与似然度之间。对于无原子辅助分布，他们的定理 3.2 构造了一个嵌套预测随机集及其枢轴版本，使其针对一个固定观测和断言达到与信念相等。因此，他们将枢轴概率视为 IM 支持的一种自然上界；IM 中额外的不精确性则使其能够保持频率学派有效性，并防范虚假置信 [Martin, 2019]。在我们的设定中，固定数据下辅助相容等高线的每个 α-截集，其信念均至少为 $1-\alpha$，因此相应的枢轴概率也至少达到该水平。命题5.1通过确定一种密度排序，将这一界限与效率联系起来；在定理 3.1的假设下，该排序的截集以最小的 ν-体积达到此界。

置信曲线解释强调哪些枢轴可信区域同时也是置信区域。枢轴轨道视角对这些可信区域看似丰富的现象给出了部分解释。然而，可能性解释则强调将经校准的推断模型作为不确定性模型，并以 GFD 作为饱和内近似。Cui 与 Hannig 本人指出了与可能性理论的联系；在此，这一联系的核心在于推断输出如何被使用。对一条等高线作出承诺，便固定了评估证据的规则，同时仍开放在观测数据之后考虑哪些断言 [Cella 与 Martin, 2023，推论 2]。它通过其相关演算为一般断言提供经校准的下概率和上概率，并实现保持有效性的不确定性传播 [Martin, 2023a]。饱和性解释了枢轴概率在何处与这一推理相一致；它并不把推断模型的一般校准保证转移到对枢轴概率演算的不受限制的使用上。因此，枢轴轨道支持对特定枢轴评估进行精确或近似的校准，而对其中一个成员作出承诺，则为经校准的不确定性推理提供了更为丰富的框架。

6 示例

6.1 二分量测量方程

Hannig [2009, 备注 2]强调，当数据生成机制由科学模型本身给出时，广义信任推断尤其自然。具体而言，计量学提供了一个典型情境：未知的真实量通过物理测量方程与观测测量值相关联，而该方程可直接用作枢轴反演的结构方程。受这一联系启发，我们考虑一种经典的双成分测量误差模型，它结合了绝对误差下限与乘性测量变异。

一个典型例子是 Rocke 和 Lorenzato [1995, 方程（1.4）], 中的分析化学模型，该模型通过加性高斯误差和对数正态乘性误差来描述测量浓度。我们采用相同的抽样模型，并在此将其写成均值校准的参数化形式：

$$X = \theta G + \sigma_0 Z, \qquad G = \exp\left\{\tau V - \frac{\tau^2}{2}\right\}, \qquad Z, V \overset{\text{ind}}{\sim} N(0,1). \tag{25}$$

事实上，Rocke–Lorenzato 方程 $X = \mu\exp(\tau V) + \sigma_0 Z$可通过令 $\mu = \theta\exp(-\tau^2/2)$ 得到。因此，式（25）中的中心化只是重新参数化，其选择是为了使 θ 成为均值信号。原先分析化学中的解释采用非负浓度参数，而我们允许$\theta \in \mathbb{R}$，因此 θ 可以更一般地表示有符号信号或相对于目标值的偏差。

加性分量 $\sigma_0 Z$ 表示绝对测量误差下限，而正的随机增益 G 表示测量灵敏度的乘性变化。由于 $E(G) = 1$,

$$E_\theta(X) = \theta, \qquad \mathrm{Var}_\theta(X) = \sigma_0^2 + \lambda^2\theta^2, \qquad \lambda := \sqrt{e^{\tau^2} - 1}.$$

因此， λ 是随机增益的变异系数。当 $\lambda|\theta| = \sigma_0$ 时，加性贡献与乘性贡献对方差的影响相等；低于这一尺度时，加性误差占主导，而信号较大时，相对误差占主导。

物理方程（25）包含两个辅助变量，而我们的理论假设存在一个与参数维度相同的完全识别关联。根据抽样分布函数 $F_\vartheta(x) = E_G\left[\Phi\left(\frac{x-\vartheta G}{\sigma_0}\right)\right]$ 可得到等价的标量关联，如下：

$$X = F_\theta^{-1}\{\Phi(U)\}, \qquad U \sim N(0,1), \tag{26}$$

其中，反函数是针对数据自变量而言的。由于当 ϑ 从 $-\infty$ 变化到 ∞时， $F_\vartheta(x)$从 1 严格递减至 0，因此相容辅助值唯一确定为

$$u_{x,\vartheta} = \Phi^{-1}\{F_\vartheta(x)\}. \tag{27}$$

因此，(26)满足前文所用的完全识别假设和相容性假设。此外，由这一标量关联生成的枢轴分布，与使用一对新的测量误差直接求解物理测量方程 θ 所得的分布一致；参见附录A。

抽样密度为 $p_\vartheta(x) = E_G\left[\frac{1}{\sigma_0}\phi\left(\frac{x-\vartheta G}{\sigma_0}\right)\right]$。取欧几里得参数体积 $\nu(d\vartheta) = d\vartheta$。若 R_x 表示由(26)诱导的广义信任分布，则其密度具有特别简洁的形式

$$r_x(\vartheta) = p_{\kappa\vartheta}(x), \qquad \kappa := e^{\tau^2} = 1 + \lambda^2. \tag{28}$$

因此，命题5.1 中的关联诱导的校正为

$$J(x,\vartheta) = \frac{p_{\kappa\vartheta}(x)}{p_\vartheta(x)} = E_\vartheta(G \mid X = x). \tag{29}$$

因此，信念调整具有直接的测量解释：似然根据候选值下的条件测量灵敏度进行校正。(28)–(29)中的恒等式推导见附录A。

比较中的轮廓。 我们比较上述构造在当前关联下的特化形式。对于标准正态辅助变量，最大特异性给出

$$\pi_x^{\mathrm{ms}}(\vartheta) = 2\min\{F_\vartheta(x), 1 - F_\vartheta(x)\}. \tag{30}$$

其截集是通过对抽样分布求逆得到的等尾置信集；经过上述重新参数化后，它们的端点满足与 Rocke 和 Lorenzato [1995, 方程（3.1）–（3.2）] 在两个误差尺度已知时的精确单次测量区间相同的尾部方程。

根据命题 5.1 和（28），固定数据上限为

$$\pi_x^{\mathrm{ceil}}(\vartheta) = \mathrm{R}_x\{p_{\kappa\Theta}(x) \le p_{\kappa\vartheta}(x)\}. \tag{31}$$

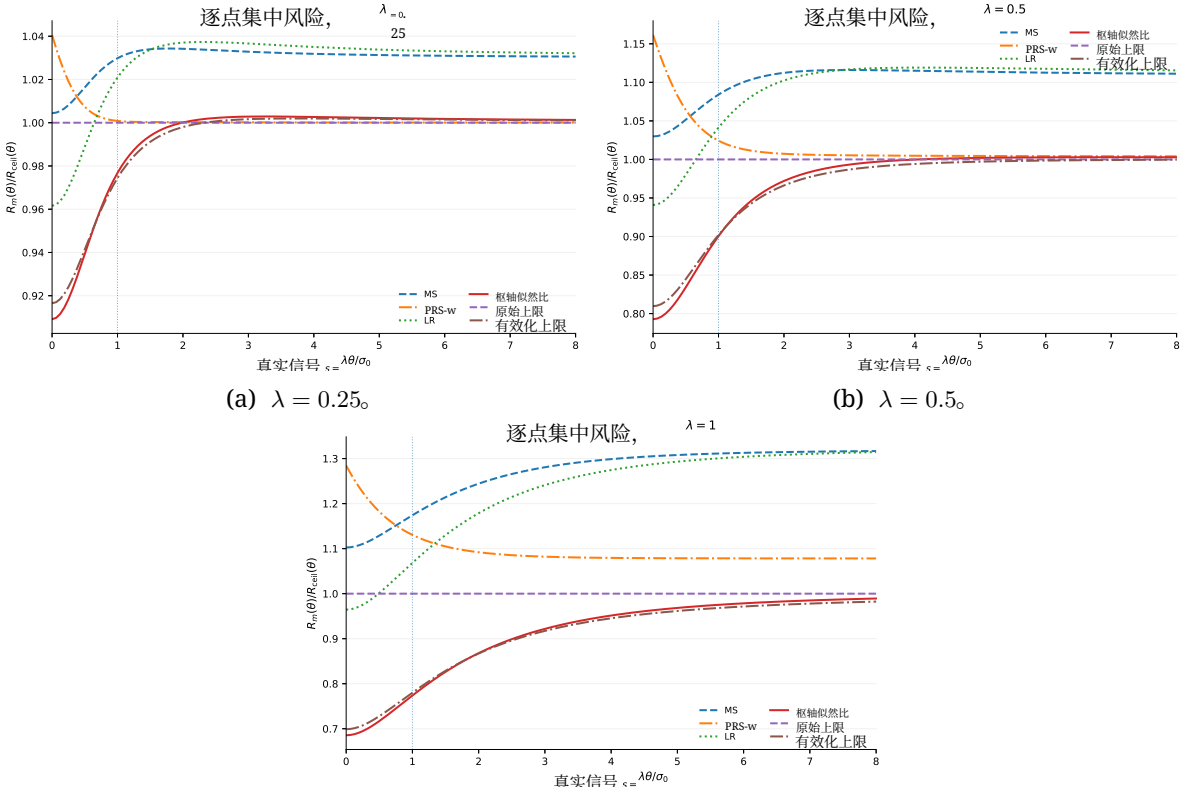
令 $M(x) = \text{上界}_{\eta\in\mathbb{R}}\, p_\eta(x)$。由于上界$_\eta\, p_{\kappa\eta}(x) = M(x)$，归一化似然和枢轴似然得分变为

$$R_x^{\mathrm{LR}}(\vartheta) = \frac{p_\vartheta(x)}{M(x)}, \qquad RF_x(\vartheta) = \frac{p_{\kappa\vartheta}(x)}{M(x)}. \tag{32}$$

它们的逐候选有效化分别给出第 π_x^{LR}节4.2.1 中的似然比轮廓 π_x^{loc}和第4.2节中的枢轴似然比／局部化轮廓。我们还纳入了第 π_x^{Vc}节4.3中的直接有效化上限 w-平均最优等高线$\pi_{x,\ w}^{\star}$ 见定理3.2，其中使用 $w = \mathrm{Unif}\left[0, \frac{4\sigma_0}{\lambda}\right]$。这一系列 w 展示了从加性误差主导到乘性误差主导的过渡。

集中度比较。对于每种方法 m，我们评估相同的积分轮廓损失$L_m(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_x^m(\vartheta)\, d\vartheta$ 及其逐点抽样风险 $R_m(\theta) = E_\theta\{L_m(X)\}$。我们报告 $RR_m(\theta) = R_m(\theta)/R_{\mathrm{ceil}}(\theta)$。

我们设定 $\sigma_0 = 1$，考虑 $\lambda \in \{0.25, 0.5, 1\}$，并用 $s = \frac{\lambda\theta}{\sigma_0}$ 标记真实参数。因此$|s| = 1$标示加性和乘性方差分量相等的位置。图1 中的风险是在模型（25）下通过蒙特卡洛评估的；轮廓积分和逐候选校准分布则通过数值方法计算。各竞争程序使用共同随机数。更多数值细节见附录A。



(a) $\lambda = 0.25$。

(b) $\lambda = 0.5$。

(c) $\lambda = 1$。

图 1：双分量测量模型中的逐点集中风险相对于原始固定数据上界的情况，适用于 $\sigma_0 = 1$ 且增益变异不断增加。数值越低，表示轮廓集中度越高。

图1 展示了三个增益变化水平下的共同模式。在较大信号下，MS 和 LR 达到相近的相对风险，但 LR 在零点附近更为集中，并低于原始上限。对于 w而言，在较大信号下，-最优等高线的相对风险接近上界；而对于 $\lambda = 0.25$ 和 0。5，在较大信号下，其相对风险的最优等高线接近上界；但对于 $\lambda = 1$，在所展示的高信号范围内仍存在明显差距。这一高信号差距反映了所选设计所编码的不同效率优先级，而这些优先级似乎取决于 λ。枢轴似然比和直接有效化上限的风险曲线走势 closely tracking，其中枢轴似然比在零点附近略有效率，而直接有效化上限此后通常更有效率。两者

在加性误差下限附近均较上界有显著改善，并且随着信号增强始终低于或接近上界，说明抽样有效修正未必会带来集中惩罚。然而，对于 $\lambda = 0.25$， w-最优等高线在较大信号下略优于这两种修正，因此在这些比较中，没有任何一种修正始终更优。总体而言，增大 λ 会同时放大 MS 和普通似然比相对于基于参数体积的构造在大信号下的差距，以及枢轴修正在零点附近带来的收益。

图2 展示了相应的等高线： $x = 4$、 $\sigma_0 = 1$和 $\lambda = 0.5$。该观测值远超加性误差下限，并使似然与枢轴-^ ^体积排序之间的差异清晰可见。由（32）可得， $\theta_{\mathrm{F}}(x) = \theta_{\mathrm{L}}(x)/\kappa$，因此，当 $\lambda > 0$时，枢轴得分在比普通似然更小的参数值处达到最大值。数值上，在 $x = 4$ 处，这两个最大值分别约为 3.30 和 4.13。枢轴似然比与直接有效化上限仍然十分接近，这一点也反映在二者相似的风险上。

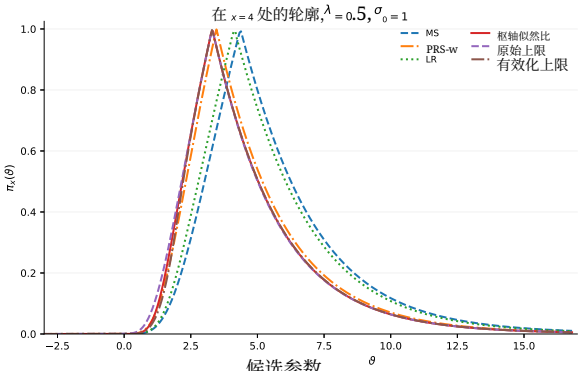


图 2： $x = 4$ 处 $\sigma_0 = 1$ 和 $\lambda = 0.5$的等高线。 w-最优 PRS 使用 $w = \mathrm{Unif}[0, 8]$。

6.2 指数尺度模型

我们回到第2.3 节的指数尺度模型，在普通参数长度下比较所得的等高线。取 $n \geq 3$ ，使得下面比较的集中风险均为有限值。

比较中的轮廓。对于 $k \in \{n-1, n, n+1\}$，写作

$$h_k(u) = u^k e^{-u}, \qquad \gamma_{n,k}(u) = \mathrm{P}_U\{h_k(U) \leq h_k(u)\}, \qquad U \sim \mathrm{Gamma}(n, 1).$$

辅助最大特异性使用 h_{n-1}，而上界和设计平均构造均使用 h_{n+1} ，根据推论 3.3。为了识别基于似然的轮廓，注意到相对似然和相对枢轴似然为

$$R_x^{\mathrm{LR}}(\vartheta) = \frac{h_n(x/\vartheta)}{h_n(n)}, \qquad RF_x(\vartheta) = \frac{h_{n+1}(x/\vartheta)}{h_{n+1}(n+1)}.$$

在 P_ϑ 下，枢轴量 X/ϑ服从与定义 $\gamma_{n,\,k}$时所用的相同伽马分布。由于上面的分母为常数，逐候选有效化相当于根据该伽马分布校准每个分子。特别地，局部枢轴似然比轮廓与上界重合。汇总这六种构造，得到

$$\begin{aligned} \pi_x^{\mathrm{ms}}(\vartheta) &= \gamma_{n,n-1}(x/\vartheta), \\ \pi_x^{\mathrm{LR}}(\vartheta) &= \gamma_{n,n}(x/\vartheta), \\ \pi_x^{\mathrm{ceil}}(\vartheta) = \pi_{x,w}^{\star}(\vartheta) = \pi_x^{\mathrm{loc}}(\vartheta) &= \pi_x^{\mathrm{Vc}}(\vartheta) = \gamma_{n,n+1}(x/\vartheta). \end{aligned} \tag{33}$$

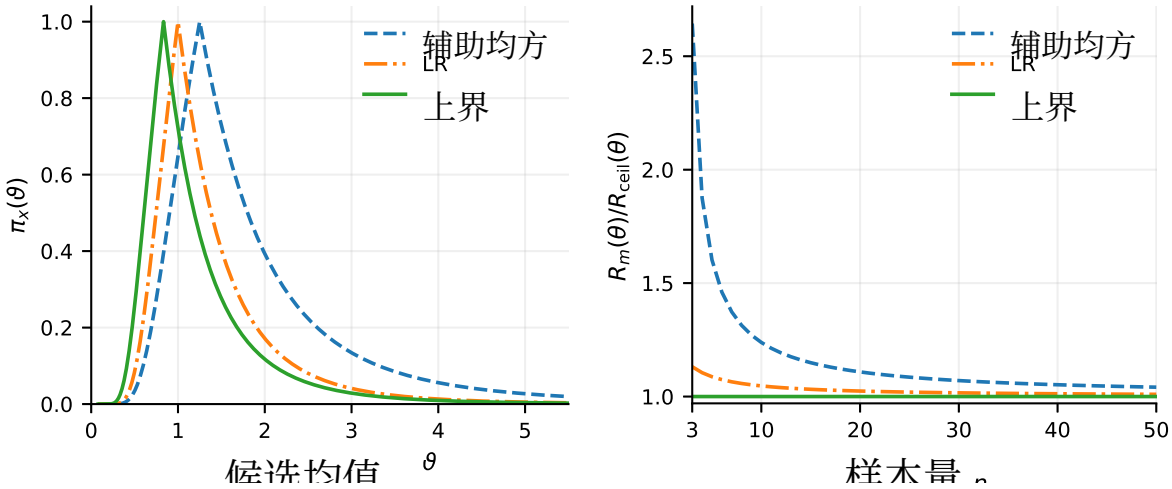
事实上，每个 $h_k(U)$ 都具有连续分布，因此 $\gamma_{n,\,k}(U) \sim$服从 Unif(0，1)。这三个轮廓都经过归一化，并且完全是抽样校准的；特别是，直接有效化不会改变上界。

集中度比较。 对于由 $\gamma_{n,\ k}$ 生成的轮廓，将变量从 ϑ 变换为 $u = x/\vartheta$ 后得到

$$L_{n,k}(x) = \int_0^\infty \gamma_{n,k}(x/\vartheta)\, d\vartheta = x\, c_{n,k},$$
$$R_{n,k}(\theta) = n\theta\, c_{n,k}, \qquad c_{n,k} := \int_0^\infty \frac{\gamma_{n,k}(u)}{u^2}\, du. \tag{34}$$

不同于测量示例，这里的所有竞争性轮廓都属于单一 PRS 类。定理3.1因此意味着，上界在每个水平和观测值下都能使切割长度最小，从而在该类中的每个 $\theta > 0$ 处使集中风险最小。在基于 X的精确尺度等变置信集中，上界具有最短的欧几里得参数长度。枢轴量 $2X/\theta \sim \chi^2_{2n}$ 给出了 Lehmann andRomano [2005, 例 6.121] 中所研究的正态方差比较。对双侧一致最强无偏（UMPU）检验求逆可得到似然比排序 $u^n e^{-u}$ [Lehmannand Romano, 2005, 第 4 节。2]对于 $[a, b]$ 尺度上的枢轴量接受区间 U，无偏性给出 $a^n e^{-a} = b^n e^{-b}$，而最小欧几里得参数长度给出的排序为 $u^{n+1}e^{-u}$。

相对于上界的相对风险与 θ无关，并且仅取决于样本量 n。对于$n = 5$，相对风险为 $RR_{\text{ms}} \approx 1.6023$ 和 $RR_{\text{LR}} \approx 1.0873$。图 3a 显示了三条等高线，其极大值点分别为 $x/(n-1)$、x/n 和 $x/(n+1)$。图 3b 显示了所示样本量范围内逐渐减小的风险差。



（a） $n = 5$ 和 $x = 5$的轮廓。　　（b）相对集中风险。

图3：采用欧几里得参数体积的指数尺度模型。上界、 w-最优正类-未标记（PU）集合、枢轴似然比以及直接有效化上限彼此重合。

这种比较取决于所选的体积测度。采用对数／Haar 体积时， $\nu(d\vartheta) = d\vartheta/\vartheta$，因此拉回代价变为 $K^{\nu}_{x}(u) = 1/u$，于是 $f_U(u)/K^{\nu}_{x}(u) \propto h_n(u)$，普通似然比与相应的上界重合。因此，欧几里得改进反映的是其与所指定集中损失的协调，而不是一种与参数化无关的偏好。

7 进一步讨论

前述构造引出了关于效率准则以及如何在不同轮廓之间进行选择的更广泛问题。我们已经看到，跳出单一预测轮廓范式可能带来效率增益；那么，当设计平均风险本身就是实际关注对象，而不仅仅是构造工具时，这种增益是否也能实现？也就是说，我们能否保留设计平均风险准则，同时允许候选的局部轮廓构造？

7.1 无限制平均风险基准与重整化

定理 3.2在单一预测轮廓类中优化（平均）集中度。通过移除这一限制，并在所有

可测抽样有效曲面上最小化相同的平均风险，可以得到一个更广泛的基准。保留设计测度 w 和参数体积测度ν，记作

$$m_w(x) = \int_\Theta p_\eta(x) w(d\eta), \qquad R_w(\pi) = \int_{\mathcal{X}} m_w(x) \int_\Theta \pi_x(\vartheta)\nu(d\vartheta)dx.$$

在本讨论中，假设 w 是有限的，混合分布为正且有限，并且比较中的风险均为有限。在每个固定置信水平下，对于普通参数长度而言，这就是由Pratt [1961]研究的设计平均期望长度问题。该优化问题再次归结为 Neyman–Pearson：对于每个候选和置信水平，抽样有效性要求接受域具有规定的 P_ϑ-概率，而其对目标函数的贡献则是其 m_w-加权样本空间体积。因此，奈曼–皮尔逊排序为 p_ϑ/m_w，从而得到

$$\pi_x^{m_w}(\vartheta) = P_\vartheta\left\{\frac{p_\vartheta(X)}{m_w(X)} \le \frac{p_\vartheta(x)}{m_w(x)}\right\}.$$

当逐候选评分分布连续时，该曲面在所有抽样有效曲面中使设计风险 R_w达到最小。其截集在每个水平上分别使平均期望 ν-体积达到最小，并且由于它们对每个候选都以共同评分函数为阈值，因而彼此嵌套。

集中准则将这些固定水平下的目标函数，按照指定的体积测度 ν在各个置信水平上进行积分。因此，混合分母源于效率准则，而不要求作出从先验到后验的解释。与之前一样，该测度 w 规定了效率优先考虑的区域，而有效性则在整个参数空间内保持成立。

无约束最优曲面虽然有效（即为一个 p 值曲面），但不一定经过归一化，因此也不一定是可能性轮廓。它的较高截集可能为空，此时积分体积泛函便失去了其作为归一化可能性测度的上期望的解释。这促使我们考虑一种可能性投影：将相同的风险最小化，但限制在有效且经过归一化的轮廓类上。这里称其为“投影”，是因为无约束最优解为可能性类启发出了其泛函形式。

如果不加进一步限制，该问题会产生退化解。若 ν 是无原子的，固定任意 ϑ_0，并将无约束最优解替换为

$$\tilde{\pi}_x(\vartheta) = \max\{\pi_x^{m_w}(\vartheta), 1_{\{\vartheta_0\}}(\vartheta)\}$$

则可在不改变 R_w 的情况下保持有效性并实现归一化。体积准则无法检测出这个人为尖峰。因此，仅靠归一化无法确定一种有用的修正方案：还必须指定可容许构造的类。

一种自然的限制是保留无约束最优解的比值评分形式。固定一个正的评分族 $g_x(\vartheta)$，并考虑 $\pi^q = \mathcal{V}[g/q]$，其中分母 $q(x) > 0$ 由所有候选项共享，而有效化仍在 P_ϑ 下保持。取 $g_x(\vartheta) = p_\vartheta(x)$ 可恢复基于似然的类以及无约束基准的泛函形式；其他固定评分则允许关联诱导几何进入构造，例如枢轴似然。

现在的问题是，哪些分母能产生归一化轮廓。为探究这一点，考虑每个候选下评分分布的上端点：

$$M_q(\vartheta) = \operatorname*{ess\,sup}_{X\sim P_\vartheta} \frac{g_X(\vartheta)}{q(X)}, \qquad b_q(\vartheta) = M_q(\vartheta)^{-1}.$$

假设这些端点有限且非零，抽样分布具有共同全支撑，并且 $g_\cdot(\vartheta)$ 和 q 在此处为正且连续。于是，本质上界对每个观测值均成立：$b_q(\vartheta)g_x(\vartheta) \le q(x)$。乘以依赖于候选的正数常量 $b_q(\vartheta)$ 不会改变定义 π^q 的概率比较。此外，当观测到的评分达到其上端点时，校准值恰好达到 1。因此

$$\pi_x^q(\vartheta) = 1 \iff b_q(\vartheta)g_x(\vartheta) = q(x).$$

因此，要求每个观测值下都存在一个完全可信的候选，就必然要求

$$q(x) = \max_{\vartheta\in\Theta} b_q(\vartheta)g_x(\vartheta).$$

因此 q 是一个加权得分包络。

反过来，对于正权重 b，定义

$$T_x^b = \frac{b(\vartheta) g_x(\vartheta)}{\sup_{\eta \in \Theta} b(\eta) g_x(\eta)}, \qquad \pi^b = \mathcal{V}[T^b].$$

有限且可达到的包络使评分被一个所界定，并在最大化点处等于一，因此其有效化既有效又经过归一化。由于 $B(\vartheta)$ 在候选概率比较中相互抵消，加权包络刻画了规定的正规共同分母类中的可达到归一化。对于 $b \equiv 1$，选择 $g_x(\vartheta) = p_\vartheta(x)$ 可得到普通似然比轮廓，而选择枢轴得分 $g_x(\vartheta) = s_x(\vartheta)$ 则得到局部化的枢轴似然比轮廓。

对于指定的可容许正权重族 $\mathcal{B}_g$，可能性投影问题因而变为

$$\inf_{b \in \mathcal{B}_g} R_w(\pi^b),$$

同时满足所要求的正规性、有限性和可达到性条件。

7.2 部分先验与效率

对于似然得分族，有界的正权重 b 可以重新缩放，以满足上确界 $\sup_\vartheta b(\vartheta) = 1$，从而具有先验可能性轮廓的数学形式。所得的归一化得分是 Martin [2023a] 所使用的似然乘先验得分。他的注释4以其能够保持所需可能性结构的能力为依据，说明了采用上确界归一化的动机；上述论证则在指定的共同分母类中提供了互补的必要性结果。更具体地说，我们逐候选进行的有效化与他的第6.4节构造相一致，而不是与在包含部分先验的上联合分布下进行校准的一般构造相一致。

在这里，权重 b 也可以纯粹作为构造参数。其分子因子在逐候选有效化过程中会抵消，因此它只通过共同包络及由此产生的抽样排序影响最终轮廓。因而，采用类似先验的加权方式，无须依赖先验信念，也能为潜在的效率提升提供一种机制。任何收益都应通过集中风险函数，或通过明确设定的平均准则来评估。

最优权重是否存在及其特征仍有待进一步研究。与不受限制的奈曼–皮尔逊问题不同，改变包络也会改变抽样分布，进而使各候选的排序相互耦合，因此该问题不再能分解为彼此独立的奈曼–皮尔逊优化。不过，这里的表述仍将似然比构造和枢轴似然比构造纳入同一个效率优化方案，并指出了如何改进它们的加权方式。

8 总结

本文提出的构造将参数空间集中、枢轴推断与有效IM的选择联系起来。枢轴密度是求解固定数据体积问题的评分。此外，精确的单个预测轮廓共享同一个枢轴分布作为饱和内概率，同时生成几何形态各异的校准置信区域。对于指定的平均集中准则，设计平均会从这一类中选出最优成员。局部化则通过候选特定辅助轮廓，运用相同的参数体积几何来获得更多有效构造。这些联系从效率角度诠释了熟悉的枢轴推断要素，并阐明了它们如何指导IM的构造。

这里给出的显式最优性结果依赖于本文所考虑的光滑且完全可识别的关联。超出这一设定后，求逆可能产生多个解组成的集合，观测值也可能限制相容辅助值。随机集表述能够处理非唯一求逆问题，并且在适当的校准和非空性条件下仍可保持有效性 [Martinand Liu，2013a]，但可能会失去精确性。效率分析则更加微妙：参数像之间的重叠可能使其体积无法通过本文所采用的可加雅可比代价来表示。常见的饱和型枢轴分布同样不再自动成立。在某些模型中，适当的降维或条件化处理可能恢复当前结构 [MartinandLiu，2015a]。更一般地识别类似的效率基准，仍是一个有待研究的方向。

我们的效率结论同样涉及特定的损失和参数体积测度。集中度衡量所报告不确定性的范围，而其他 Choquet 损失则可以衡量其接近真实参数的程度 [Raner， 2026]。将上界构造和设计平均构造扩展到此类标准，可以拓宽它们的适用范围，但可能需要采用不同的优化原理。

枢轴推断联系强调了这些推断模型构造与既有推断方法之间的连续性。熟悉的概率分布和置信区域仍然是所得不确定性描述的一部分。额外的不精确性使经适当校准的推断模型能够为一般断言提供下概率和上概率，并通过频率学派控制，避免即使是在看到数据后才选定的断言也获得误导性过强的支持 [Cella 和 Martin， 2023]。其可能性演算还保留了不确定性传播到参数函数时的有效性，包括通过边缘化进行传播的情形 [Martin，2023a]。因此，在具有特殊意义的嵌套区域上与枢轴概率的一致性，可以纳入一个更广泛的不确定性推理框架。代价是放弃为每个断言提供单一的可加概率评估；收益则是获得一种经校准的演算，将熟悉的推断模型构造的使用范围扩展到这些区域之外。

致谢

感谢 Ryan Martin 对早期稿件提出的宝贵意见。

生成式人工智能使用声明

我使用 ChatGPT（OpenAI）协助写作和编辑、查找并审阅相关文献，以及测试想法。我对本文的内容负责。

参考文献

Leonardo Cella 和 Ryan Martin。基于可能性理论的统计推断提供性能与概率性保证。《国际近似推理杂志》，163：109060，2023 年。doi：10.1016/j.ijar.2023.109060。

Yifan Cui 和 Jan Hannig。揭开推断模型与置信曲线的神秘面纱：一种枢轴观点。《统计科学》，40(2)：211–218，2025 年。doi：10.1214/24-STS924。

Arthur P. Dempster。论直接概率。《皇家统计学会杂志：*B*辑（方法论）》，25(1)：100–110，1963年。doi：10.1111/j.2517-6161.1963.tb00487.x。

Didier Dubois 和 Henri Prade。可能性理论：一种不确定性计算机处理方法。Plenum Press，纽约，1988 年。ISBN 0-306-42520-3。

Didier Dubois、Laurent Foulloy、Gilles Mauris 和 Henri Prade。概率-可能性变换、三角模糊集与概率不等式。《可靠计算》，10(4):273–297，2004。doi: 10.1023/B:REOM.0000032115.22510.b5。

Jan Hannig。关于广义信任推断。《中华统计学志》，19(2):491–544，2009。网址：https://www.jstor.org/stable/24308841。

Jan Hannig、Hari Iyer、Randy C. S. Lai 和 Thomas C. M. Lee。广义信任推断：综述与新结果。美国统计学会会刊，111(515):1346–1361，2016。doi: 10.1080/01621459.2016.1165102。

Erich L. Lehmann 和 Joseph P. Romano。统计假设检验。Springer，纽约，第3版，2005。ISBN 978-0-387-98864-1。doi: 10.1007/0-387-27605-X。

Chuanhai Liu 和 Ryan Martin。推断模型与可能性测度。载于 James Berger、Xiao- Li Meng、Nancy Reid 和 Min-ge Xie（编），贝叶斯、信本与频率学派推断手册，第16章，第344–363页。Chapman & Hall/CRC，2024年。doi：10.1201/9780429341731-16。

Ryan Martin。可信性函数与精确频率学派推断。《美国统计学会会刊》，110(512):1552–1561，2015年。doi：10.1080/01621459.2014.983232。Ryan Martin。虚假置信、非加性信念与有效统计推断。《国际近似推理杂志》，113:39–73，2019年。doi：10.1016/j.ijar.2019.06.005。Ryan Martin。频率学派统计推断的非精确概率刻画。arXiv:2112.10904，2021年。URL https://arxiv.org/abs/2112.10904。Ryan Martin。基于部分先验的有效且高效的非精确概率推断，I。初步结果。arXiv:2203.06703v4，2022年。URL https://arxiv.org/abs/2203.06703v4。Ryan Martin。基于部分先验的有效且高效的非精确概率推断，II。一般框架。arXiv:2211.14567v2，2023a。URL https://arxiv.org/abs/2211.14567v2。首次发布于2022年。Ryan Martin。从可能性理论推断模型视角看枢轴推断。载于 Enrique Miranda、Ignacio Montes、Erik Quaeghebeur 和 Barbara Vantaggi（编），第十三届非精确概率理论与应用国际研讨会论文集，《机器学习研究论文集》第215卷，第299–310页。PMLR，2023b。URL https://proceedings.mlr.press/v215/martin23a.html。Ryan Martin。可能性推断模型：综述。《美国统计学会会刊》，121(553):807–826，2026年。doi：10.1080/01621459.2025.2606127。Ryan Martin。无先验贝叶斯重构：可能性推断模型的概率近似。《统计科学》，即将刊出。URL https://arxiv.org/abs/2503.19748v4。定理编号参见 arXiv:2503.19748v4（2026年）。Ryan Martin 和 Chuanhai Liu。推断模型：无先验后验概率推断的框架。《美国统计学会会刊》，108(501):301–313，2013a。doi：10.1080/ 01621459.2012.747960。Ryan Martin 和 Chuanhai Liu。更正。《美国统计学会会刊》，108 (503):1138–1139，2013b。doi：10.1080/01621459.2013.796885。Ryan Martin 和 Chuanhai Liu。条件推断模型：结合信息进行无先验概率推断。《英国皇家统计学会杂志：B辑（统计方法学）》，77(1):195–217，2015a。doi：10.1111/rssb.12070。Ryan Martin 和 Chuanhai Liu。《推断模型：不确定性推理》。Chapman & Hall/CRC，Boca Raton，FL，2015b。doi：10.1201/b19269。Ryan Martin 和 Jonathan P. Williams。推断模型的渐近效率与可能性伯恩斯坦–冯·米塞斯定理。《国际近似推理杂志》，180:109389，2025 年。doi：10.1016/j.ijar.2025.109389。Javier Nu˜nez Garcia、Zoltan Kutalik、Kwang-Hyun Cho 和 Olaf Wolkenhauer。概率密度函数的水平集与最小体积集。《国际近似推理杂志》，34(1):25–47，2003年。doi：10.1016/S0888-613X(03)00052-5。John W. Pratt。置信区间的长度。《美国统计学会会刊》，56 (295):549–567，1961年。doi：10.1080/01621459.1961.10480644。Max Raner。有效推断模型的效率：Choquet风险最优可能性测度与直接比较。arXiv:2606.30229，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2606.30229。David M. Rocke 和 Stefan Lorenzato。分析化学中测量误差的双组分模型。Technometrics，37(2):176–184，1995年。doi：10.1080/00401706.1995.10484302。Clayton D. Scott 和 Robert D. Nowak。学习最小体积集。《机器学习研究期刊》，7(24):665–704，2006年。URL https://www.jmlr.org/papers/v7/scott06a.html。

A：双分量测量示例的详细推导

我们汇总了第6.1节中使用的计算。在给定随机增益 G的条件下，

$$X \mid G \sim N(\theta G, \sigma_0^2),$$

so

$$F_\vartheta(x) = E_G\left[\Phi\left(\frac{x-\vartheta G}{\sigma_0}\right)\right], \qquad p_\vartheta(x) = E_G\left[\frac{1}{\sigma_0}\phi\left(\frac{x-\vartheta G}{\sigma_0}\right)\right].$$

对期望求导可得

$$-\partial_\vartheta F_\vartheta(x) = E_G\left[\frac{G}{\sigma_0}\phi\left(\frac{x-\vartheta G}{\sigma_0}\right)\right] > 0. \tag{35}$$

结合 $F_\vartheta(x) \to 1$ 当 $\vartheta \to -\infty$ 且 $F_\vartheta(x) \to 0$ 当 $\vartheta \to \infty$时，这证明了该标量关联的全局可逆性

标量关联 在（26）中。

若对于 $U \sim N(0,\ 1)$， $\Theta_x = \theta_x(U)$，则由于 $\vartheta \mapsto F_\vartheta(x)$ 是递减的，

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_x((-\infty, \vartheta]) &= P\{\Theta_x \le \vartheta\} \\ &= 1 - F_\vartheta(x). \end{aligned}$$

同一分布可直接由物理测量方程得到。事实上，对于测量误差的独立副本（Z'， G'），

$$\widetilde{\Theta}_x = \frac{x - \sigma_0 Z'}{G'}$$

满足

$$\begin{aligned} P(\widetilde{\Theta}_x \le \vartheta) &= E_G\left[\Phi\left(\frac{\vartheta G - x}{\sigma_0}\right)\right] \\ &= 1 - F_\vartheta(x). \end{aligned}$$

因此，标量化简保留了逆方程枢轴分布。

为求其密度，记

$$g(v) = \exp\left\{\tau v - \frac{\tau^2}{2}\right\}, \qquad \kappa = e^{\tau^2}.$$

由于

$$g(v)\phi(v) = \phi(v - \tau),$$

变量替换可得，对于任意可积的 h,

$$E\{Gh(G)\} = E\{h(\kappa G)\}. \tag{36}$$

将（36）应用于（35）可得

$$\begin{aligned} r_x(\vartheta) &= -\partial_\vartheta F_\vartheta(x) \\ &= E_G\left[\frac{G}{\sigma_0}\phi\left(\frac{x-\vartheta G}{\sigma_0}\right)\right] \\ &= p_{\kappa\vartheta}(x), \end{aligned}$$

这证明了（28）。

同样的计算也给出了基准雅可比的解释。由

$$F_\vartheta\{a(\vartheta, u)\} = \Phi(u),$$

对 ϑ y 进行隐式微分可得

$$\partial_\vartheta a(\vartheta, u) = \frac{r_{a(\vartheta,u)}(\vartheta)}{p_\vartheta\{a(\vartheta, u)\}}.$$

因此，

$$J(x, \vartheta) = \frac{r_x(\vartheta)}{p_\vartheta(x)} = \frac{p_{\kappa\vartheta}(x)}{p_\vartheta(x)}.$$

另一方面，

$$p_\vartheta(x)E_\vartheta(G \mid X = x) = E_G\left[\frac{G}{\sigma_0}\phi\left(\frac{x - \vartheta G}{\sigma_0}\right)\right],$$

so

$$J(x, \vartheta) = E_\vartheta(G \mid X = x).$$

对于 w–最优 PRS，对其求导

$$F_{\theta_x(u)}(x) = \Phi(u)$$

得到

$$K_x(u) = |\theta'_x(u)| = \frac{\phi(u)}{r_x\{\theta_x(u)\}}.$$

因此

$$\bar{K}_w(u) = \phi(u)D_w(u),$$
$$D_w(u) := \int E_\eta\left[\frac{1}{r_X\{\theta_X(u)\}}\right] w(d\eta),$$

从而

$$\rho_w(u) = \frac{1}{D_w(u)}.$$

该形式用于数值计算 w–最优单一 PRS 等高线 .

普通最大特异性等值线可直接由标准正态辅助密度得到：

$$\begin{aligned}\gamma^{\mathrm{ms}}(u) &= P\{\phi(U) \le \phi(u)\} \\ &= P(|U| \ge |u|) \\ &= 2\Phi(-|u|).\end{aligned}$$

代入（27）得到

$$\pi_x^{\mathrm{ms}}(\vartheta) = 2\min\{F_\vartheta(x), 1 - F_\vartheta(x)\}.$$

进行数值比较时，抽样模型标准化为 $\sigma_0 = 1$。集中损失

$$L_m(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_x^m(\vartheta)\, d\vartheta$$

针对每种方法进行数值计算，并作为 x 的函数进行插值。随后，通过对式 $R_m(\theta) = E_\theta\{L_m(X)\}$ 中的外层期望，使用式（25）进行配对蒙特卡洛模拟估计，并在各种方法之间使用共同随机数。每个展示的真实值均使用 2^{20} 次外层蒙特卡洛抽样；由于等值线损失和校准函数已通过数值方法预先计算，这些抽样只需对存储的损失函数进行求值和插值，无需重新构建所有等高线。

作为两项数值检验，当 $\tau = 0$ 时，模型简化为 $X = \theta + \sigma_0 Z$，且所有六种构造均与

$$\pi_x(\vartheta) = 2\Phi\left(-\frac{|x - \vartheta|}{\sigma_0}\right).$$

对于任意 τ，$r_0(\vartheta)$ 关于 $|\vartheta|$ 对称且严格递减，因此固定数据保真上限和辅助最大特异性等高线在 $x = 0$ 处重合：

$$\pi_0^{\mathrm{ceil}} = \pi_0^{\mathrm{ms}}.$$

相比之下，图2 中的等高线比较因此显示于 $x = 4$。

B 非紧参数空间上的设计测度

¯定理3.2 中的设计平均构造假设，平均体积代价 K_w（u）在（8）中除在 P_U-几乎处处为正且有限外，所比较的风险也都是有限的。然而，在非紧参数空间上，自然的设计测度（如勒贝格测度或哈尔测度）可能具有无限质量，相应的积分也可能发散。由于奈曼–皮尔逊排序¯仅取决于 K_w 在 u上的相对形状，因此仍可通过截断获得一种有意义的极限构造。

为使其表述严谨，令 $C_n \uparrow \Theta$ 为由紧集构成的递增穷竭，且 $0 < w(C_n) < \infty$，并定义截断体积代价及相应的评分如下：

$$\bar{K}_{w,n}(u) = \int_{C_n} E_\eta[K_X(u)]\, w(d\eta), \qquad \rho_{w,n}(u) = \frac{f_U(u)}{\bar{K}_{w,n}(u)}.$$

对于每个 n，这是原始优化问题的有限设计版本。当定理 3.2 的假设对受限设计成立时，$\rho_{w,\,n}$ 的排序决定了一个最优辅助轮廓。由于将 $\rho_{w,\,n}$ 乘以正的常数不会改变该排序及由此得到的轮廓，因此相关的极限问题是：当 $C_n \uparrow \Theta$ 时，辅助排序是否会稳定下来。

推论3.3 中的因子分解给出了最简单的例子。如果 $K_x(u) = c(x)K_0(u)$，那么，对于每个可容许截断 C_n，

$$\bar{K}_{w,n}(u) = K_0(u) \int_{C_n} E_\eta[c(X)]\, w(d\eta) = A_n K_0(u),$$

其中 $0 < A_n < \infty$ 不依赖于 u。因此，对于每个 n，$\rho_{w,\,n} \propto f_U/K_0$。由此得到的轮廓与截断无关，即使 $A_n \to \infty$。在这种情况下，设计积分的发散仅通过一个整体尺度因子发生，并不影响最优辅助排序。更一般地，只要截断后的评分沿给定的穷竭最终诱导出共同排序，即使没有精确的因子分解，轮廓也会沿该穷竭稳定下来。

也可以有意选择紧致截断，作为效率准则的一部分。在许多应用中，人们主要关注一个具有科学意义的区域 $C \subseteq \Theta$，尽管统计模型本身是在大得多的参数空间上定义的。将完整的设计积分替换为

$$\bar{K}_{w,C}(u) = \int_{C} E_\eta[K_X(u)]\, w(d\eta)$$

这样一来，便是在设计平均意义下，寻求一个在区域 C 上集中度最高、效率最高的有效辅助轮廓。截断指定了推断效率应优先考虑的范围。

这种解释应与为 θ 指定先验分布区分开来。尽管设计测度在数学上通过对参数值取平均而参与优化，但它并不一定代表人们对真实参数所在位置的信念。将设计限制在 C 并不意味着断言 $\theta \in C$，也不会为该事件指定任何先验概率。有效性要求在整个参数空间内保持不变。只有用于比较有效程序的准则被局限于 C。从这个意义上说，有效性仍是全局的，而效率则是针对局部进行设计的。

因此，可以将设计测度理解为对科学或实验优先事项的编码。例如，可以选择在一系列被认为具有科学意义的效应量范围内优化集中度，同时仍要求所得等高线对所有$\theta \in \Theta$满足其抽样有效性保证。紧致截断因此具有两种互补作用：它可以规范非紧参数空间上的设计问题，也可以有意引入，以将效率局限于参数空间中科学相关性最高的部分。