一种稳健的拉格朗日–欧拉有限体积格式：适用于局部不连续床面上具有干湿交替的内禀浅水方程

EDUARDO ABREU[1],ELENA BACHINI[2], JOHN P ´EREZ[3], 和 MARIO PUTTI[2]

arXiv:2611.32949v1 [math.NA] 24 Nov 2026

Abstract. 本文将内禀拉格朗日–欧拉有限体积方法扩展至内禀浅水方程（ISWE），以考虑影响流动模式的局部地形不连续性。我们对 ISWE 公式进行了修改，将这些底部扰动纳入其中，同时不改变系统的整体结构。数值离散化采用内禀几何框架下的拉格朗日–欧拉有限体积格式，包括先进行拉格朗日演化步骤，再将结果欧拉重映射至固定参考网格。ISWE 公式的内禀特性与所提离散化的拉格朗日–欧拉双重结构相结合，形成了一种数值方法，能够自然满足稳定性、精度和稳健性所必需的三项关键性质：在不规则水下地形上保持“静水湖”平衡的良平衡性；能够稳健追踪流体运动边界的干湿交替；以及确保与系统波传播相一致并满足稳定性约束的双曲性。在具有局部底部不连续性的曲面二维曲面上进行的数值实验表明，该方法精度高且稳健，包括在近干燥条件下精确计算长时间速度，以及模拟湿润和干燥状态之间的转变。

1. Introduction

浅水方程（SWE）是纳维–斯托克斯方程的一种降维模型，其推导基于如下假设：自由表面流体运动基本发生在拓扑二维域上。当流体深度的扰动相对于主要流动的波长较小时，通常会出现这种情况。对于河床坡度较小的情形，通常使用 SWE，此时可将重力方向视为底部表面的法向量 [44, 46]。当流体流动发生在一般的三维曲面上时，这种近似不再成立，必须使用底部法向量来测量流体深度。在这种情况下，采用更具几何性的视角，便可自动考虑坡度和曲率等曲面特征，并克服常见方法在坡度方面的局限性。这种几何方法由 [41]，在 SWE 领域率先提出，随后 [23, 22] 从外蕴视角将其形式化，近期 [20]（另见 [9]）则采用完全内禀表述，将其形式化为 ISWE（内禀浅水方程）。ISWE 是我们工作的出发点。

从数值角度来看，ISWE 方法面临的主要问题之一是，由此产生的双曲型通量具有非自治性，因而导致相关黎曼问题的适定性困难，其特征在于不连续通量 [19, 15, 16, 14]。为了解决这一障碍，我们最近提出采用拉格朗日–欧拉方法对 ISWE 进行有限体积离散 [9]。本质上，拉格朗日–欧拉框架包括首先进行拉格朗日步骤，在此步骤中，解沿着拉格朗日路径演化；随后进行第二个欧拉步骤，利用局部守恒单元平均，将守恒量重新映射回原始的有限体积网格 [2, 3, 1, 4, 6, 12]。这两个构件均不需要构造任何（局部或全局）黎曼问题，因此不会受到上述非自治通量情形下所产生的困难的影响。

流体重力驱动运动建模面临的主要挑战之一，是准确近似局部障碍物和地形不连续性存在时产生的复杂流动模式。一般而言，更复杂且非局部的不连续性要么不符合浅水假设，要么可以通过对底部几何形状进行正则化而得到足够精确的近似。因此，我们将重点放在局部情形上。在存在局部不连续底部时，会出现理论和数值方面的困难：静水稳态的保持、熵不等式和解的唯一性、水深非负性的保持，以及双曲性丧失（参见 [39, 47, 27, 35, 13, 42, 11] 及其中引用的文献）。事实上，浅水方程的源项包含两个可能不连续函数的非守恒乘积，使得该问题成为非严格双曲且非守恒的问题。典型的解决方法是通过施加底部时间导数为零这一人工条件来扩充系统，从而使完整的波结构得以出现，其中包括线性退化特征

这些特征源于非守恒乘积 [21, 32, 36, 38, 13, 45]。此外，这些不连续强迫项会导致格式中的 C性质（即良平衡）失效，使得适当黎曼求解器的定义变得困难，因而需要采用特定的良平衡技术和路径守恒格式 [21, 28]。

在这项工作中，我们通过谨慎调整连续的 ISWE公式和数值拉格朗日–欧拉方法，克服了这些困难。这些调整构成了我们在文献 [9] 中提出的基于 ISWE 的拉格朗日–欧拉方法的主要进展。具体而言，首先，我们通过允许局部的、可能不连续的扰动（即定义在（全局）底部地形之上的障碍物），放宽了几何公式的限制。我们通过对底部表面进行局部数值平滑来纳入地形不连续，从而为非守恒乘积赋予严谨的数学含义。这使得这些局部扰动能够直接纳入拉格朗日–欧拉框架，并作为源项直接处理，而无需改变系统的全局（双曲）结构。其次，通过利用 ISWE 的性质，并谨慎分解拉格朗日步骤与欧拉步骤之间的通量函数，我们确保解满足良平衡和 C性质。事实上，拉格朗日演化仅由平流项决定，而其余通量项则通过欧拉投影保持守恒，因此能够自动实现良平衡和干湿交替。最后，我们从“双曲性控制”的角度，对文献 [9] 中呈现的先前结果作出了新颖且更为深入的阐释，并在无雅可比矩阵、无黎曼求解器框架中，通过谨慎的几何识别确定熵解。需要指出的是，这些内容并非简单的重新描述，而是我们内禀拉格朗日–欧拉方法的重要关键特征。现将这些重要创新总结如下：

J无雅可比矩阵且无黎曼求解器的框架： 该格式采用一种非传统范式，以无流曲线作为经典特征线的几何替代。演化步骤无需使用通量函数雅可比矩阵中的谱信息（特征对）即可完成。因此，该方法无需代价高昂的黎曼求解器，对于 ISWE 非自治通量而言具有很高的效率和精度。稳定性（CFL）条件及系统的正性性质也易于证明。

熵解的几何识别： 我们的框架基于无流曲线，不依赖逐场特征分解，而是通过沿时空轨迹追踪局部波速来识别熵解。这通过通量函数与守恒变量之间的直接相互作用确保了物理一致性，从而形成一种具有紧凑空间占用的自包含求解器。

内禀平衡保持与“静水湖”稳定性： 该格式专门用于处理不规则底面，并通过自然维持“静水湖”平衡来实现这一目标。这是通过在两步基本过程中对通量函数进行精确分解实现的，即拉格朗日演化和欧拉重映射；ISWE 的内禀方法使这一过程成为可能。

稳健处理局部不连续性和移动前沿： 该 formulation 通过局部数值平滑，能够妥善处理局部障碍物和地形跃变。此外，ISWE 可在流体界面自然捕捉“润湿-干涸”移动边界，从而无需采用临时的界面追踪或薄层算法。这一关键要素使得模型能够纳入局部底面扰动，而无需对全局系统进行重大修改。

本文最后给出深入的数值结果，以支持我们策略的准确性和稳健性；而对理论收敛性质进行更严格、深入的数学分析，则留待未来研究。最后，我们想指出，该方法可推广至一般多边形，尤其是四叉树网格；这类网格通常因其高效性和并行化特性而得到应用 [31, 30]。

本文结构安排如下。第2节和第3节介绍存在局部间断地形时的扩展ISWE模型，并概述拉格朗日–欧拉有限体积格式。第4节报告了考虑局部不连续性的各种地形上的数值结果。附录部分提供了更多细节：附录 A给出求积规则的计算，附录B则进行网格加密的实验收敛性评估。

2. Extended model: ISWE in the presence of localized discontinuities

考虑一个正则曲面 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$，其配备了一组局部坐标 $\mathbf{s} = (s^1, s^2)$ 及相应的度量张量 $\mathcal{G}$。我们假设每个点 $\mathbf{P} \in \Gamma$ 处的局部参考系 $\{\mathbf{t}_1(\mathbf{P}), \mathbf{t}_2(\mathbf{P})\}$ 是正交的，

因此度量张量是对角的，可定义为：

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{t}_1(\mathbf{P})\|^2 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{t}_2(\mathbf{P})\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{(1)}^2 & 0 \\ 0 & h_{(2)}^2 \end{pmatrix}.$$

请注意，经过局部参考系变换后，这些假设均可满足，并不会对问题构成限制。局部参考系的定义还依赖于一个进一步的假设：该表面具有“足够好”的正则性，且存在一个局部参数化图册（该表面需具有 $C^{1,\,1}$ 正则性）。

在此设定下，内禀浅水方程（ISWE）[20] 写作：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) + \mathbf{S}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) = 0 \qquad \text{in } [0, t_f] \times \Gamma\,, \tag{1}$$

初始条件为 $\mathbf{U}(\mathbf{0},\ \mathbf{s}) = \mathbf{U}_0$，其中 $\mathbf{U} = \left[\eta,\, q^1,\, q^2\right]^{\mathrm{T}}$ 为守恒变量，η 表示沿底部表面法向的流体深度，q^i、$i = 1,\ 2$ 表示两个切向方向上的平均流量。符号 $\nabla_{\mathcal{G}} \cdot$ 表示内禀散度算子，其定义基于度量张量$\mathcal{G}$。双曲通量张量 $\mathbf{F}$ 和源项 $\mathbf{S}$ 定义如下：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} q^1 & q^2 \\ \dfrac{\partial (q^1)^2}{\partial \eta} + \dfrac{g\eta^2}{2h_{(1)}^2}\dfrac{\partial z}{\partial s^3} & \dfrac{q^1 q^2}{\eta} \\ \dfrac{q^1 q^2}{\eta} & \dfrac{(q^2)^2}{\eta} + \dfrac{g\eta^2}{2h_{(2)}^2}\dfrac{\partial z}{\partial s^3} \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{S}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{g\eta^2}{2h_{(1)}^2}\dfrac{\partial}{\partial s^1}\left(\dfrac{\partial z}{\partial s^3}\right) + \dfrac{g\eta}{h_{(1)}^2}\dfrac{\partial z}{\partial s^1} - \dfrac{1}{\rho}[\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{T}_{sw}]^{(1,\cdot)} - \dfrac{\tau_b^1}{\rho} \\ \dfrac{g\eta^2}{2h_{(2)}^2}\dfrac{\partial}{\partial s^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial s^3}\right) + \dfrac{g\eta}{h_{(2)}^2}\dfrac{\partial z}{\partial s^2} - \dfrac{1}{\rho}[\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{T}_{sw}]^{(2,\cdot)} - \dfrac{\tau_b^2}{\rho} \end{bmatrix},$$

如上所述，局部参考系的定义依赖于这样一个假设：曲面足够规则。因此，原则上，不能将不连续曲面 Γ 直接作为 ISWE模型的区域。我们的策略是将局部不连续性视为底部地形的局部扰动，并在不改变下方曲面几何规则性假设的情况下，利用拉格朗日演化不涉及黎曼问题这一事实，将其纳入考虑。换言之，ISWE框架建立在全局规则的底部表面之上，局部不连续性的影响仅通过修改源项来体现。这种方法不会引入额外方程，也不会改变系统的双曲性，这与此类情况下通常采用的方法相反（例如，[26, 37]）。具体而言，从系统（1）出发，我们添加一个新项 $\mathbf{Z}$，其中包含底部局部延拓的梯度 $\mathcal{Z}$，即规则底面之上的障碍物 Γ：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) + \mathbf{S}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) + \mathbf{Z} = 0\,.$$

因此，可以很容易地定义一个“新的”源项 $\mathbf{S}$，将$\mathbf{S}$和$\mathbf{Z}$的贡献结合起来：

$$\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) + \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{g\eta^2}{2h_{(1)}^2}\dfrac{\partial}{\partial s^1}\left(\dfrac{\partial z}{\partial s^3}\right) + \dfrac{g\eta}{h_{(1)}^2}\dfrac{\partial z}{\partial s^1} - \dfrac{1}{\rho}[\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{T}_{sw}]^{(1,\cdot)} - \dfrac{\tau_b^1}{\rho} \\ \dfrac{g\eta^2}{2h_{(2)}^2}\dfrac{\partial}{\partial s^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial s^3}\right) + \dfrac{g\eta}{h_{(2)}^2}\dfrac{\partial z}{\partial s^2} - \dfrac{1}{\rho}[\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{T}_{sw}]^{(2,\cdot)} - \dfrac{\tau_b^2}{\rho} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{g\eta}{h_{(1)}^2}\dfrac{\partial \mathcal{Z}}{\partial s^1} \\ \dfrac{g\eta}{h_{(2)}^2}\dfrac{\partial \mathcal{Z}}{\partial s^2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

并通过以下方式重新定义“扩展的”ISWE模型：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) + \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) = 0\,. \tag{3}$$

我们从这一系统出发，介绍已在 [9]中提出的拉格朗日–欧拉有限体积格式。

3. Lagrangian-Eulerian Finite Volume scheme with flux decomposition

本节概述我们在 [9], 中提出并应用于扩展ISWE模型（3）的内禀拉格朗日–欧拉方法。我们将看到，为处理局部不连续性而引入的附加项**Z** 在我们的拉格朗日–欧拉框架下不会带来任何额外困难。我们还加入了一种通量分解策略，以确保离散层面的良平衡性质。我们设计了具体的数值算例来支持这一过程。

我们的出发点是为平衡律 (3) 定义一种广义时空散度形式。为此，我们在时空坐标中定义度量张量的扩展，即:

$$\mathbb{G} := \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \mathcal{G} \end{array}\right),$$

相应的参考系为 $\langle \mathbf{N},\ \mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\rangle$，其中 $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2$ 张成切平面，并用于表示空间局部坐标 $\mathbf{s}$；而 $\mathbf{N}$ 是曲面的局部法向量，用于将切向参考系扩展为 $\mathbb{R}^3$ 的基，并表示时间坐标。我们将这些扩展坐标，即 $(t,\ \mathbf{s})$，称为拉格朗日–欧拉局部坐标。

在这一时空框架下，系统 (3) 可以改写为散度形式:

$$\nabla_{\mathbb{G}}\cdot\mathcal{F} = -\overline{\mathbf{S}}, \tag{4}$$

其中，$\nabla_{\mathbb{G}}\cdot$ 是相对于扩展度量 $\mathbb{G}$的内禀散度，$\mathcal{F}$ 是定义如下的扩展（对称）通量函数:

$$\mathcal{F}(\mathbf{s},\mathbf{U}) = \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \eta & q^1 & q^2 \\ q^1 & \dfrac{(q^1)^2}{\eta} & \dfrac{q^1q^2}{\eta} \\ q^2 & \dfrac{q^1q^2}{\eta} & \dfrac{(q^2)^2}{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{g\eta^2}{2h_{(1)}^2}\dfrac{\partial z}{\partial s^3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{g\eta^2}{2h_{(2)}^2}\dfrac{\partial z}{\partial s^3} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

注意，我们将扩展通量函数 $\mathcal{F}$ 拆分为“拉格朗日通量” F 与“欧拉通量” G之和。这种基于物理的拉格朗日–欧拉分解是本文的第二项主要创新，有助于在离散层面保持良平衡。

针对 ISWE 调整后的拉格朗日–欧拉数值求解器 [9], 可概括如下。首先，将底部表面 Γ 划分为互不重叠的区域或单元 R，使其并集恰好为 Γ。随后，通过使用所谓时空离散控制体（DCV）的示性函数对方程 4 进行测试来完成离散化。离散控制体定义为 R 沿无流曲面的时间演化，其表示为区域 $D^n \subset [0,t_f]\times\Gamma$，边界为 $\partial D = R^n \cup \mathcal{LS}^n \cup R^{n+1}$ —

由 R^n 与 R^{n+1}的并集给出，它们分别构成拉格朗日通量 F 在时刻 t^n 和 t^{n+1}的离散入口与离散出口曲面，以及侧向表面 $\mathcal{LS}^n$，即所谓的离散无流面。后者由法向拉格朗日通量为零这一条件定义，即: $\langle F,\ \vec{n}\rangle_{\mathbb{G}} = F\mathbb{G}\vec{n} = 0$，其中 $\vec{n}$ 表示边界 $\partial\mathcal{LS}^n$的外法向量。然后，对方程 4 应用散度定理，对于每个 DCV R^n，可得到:

$$\int_{\partial D^n}\langle\mathcal{F},\vec{n}\rangle_{\mathbb{G}} = -\int_{D^n}\mathbf{S} - \int_{D^n}\mathbf{Z} =: I(\overline{\mathbf{S}})\,. \tag{6}$$

注意，$\vec{n} = -\mathbf{N}$ 在入口区域 R^n中，而 $\vec{n} = \mathbf{N}$ 在出口区域 R^{n+1}中。此外，将其写入时空局部坐标系后，$\mathbf{N} = [1,0,0]^{\mathrm{T}}$。因此，方程（6）的左侧可写为:

$$-\int_{R^n}\mathbf{U}(t^n,s^1,s^2) + \int_{\mathcal{LS}^n}\left\langle\underline{\underline{F}}+\underline{\underline{G}},\nu\right\rangle_{\mathbb{G}} + \int_{\overline{R}^{n+1}}\mathbf{U}(t^{n+1},s^1,s^2) = I(\overline{\mathbf{S}})\,,$$

其中，ν 是在每个时刻 t，用局部坐标 $\mathbf{s} = (s^1,\ s^2)$表示的 $\mathcal{LS}^n$ 的法向量。包含F的项将定义我们的拉格朗日无流条件（见方程 7），而包含 G 的项将与 I（$\mathbf{S}$）一起在欧拉步骤中计算。这种分解保证了离散良平衡性质，并抑制了干湿区域中由于水深较小或为零而可能出现的数值爆破和振荡。

通过侧向表面 $\mathcal{LS}^n$ 的拉格朗日通量无流条件可以通过施加以下条件来实现:

$$\int_{\mathcal{LS}^n}\left\langle\underline{\underline{F}},\nu\right\rangle_{\mathbb{G}} = 0\,. \tag{7}$$

因此，状态变量的演化关系为:

$$\int_{\overline{R}^{n+1}} \mathbf{U}(t^{n+1}, s^1, s^2) = \int_{R^n} \mathbf{U}(t^n, s^1, s^2) + I(\overline{\mathbf{S}}) - \int_{\mathcal{LS}^n} \left\langle \underline{\underline{G}}, \nu \right\rangle_{\mathbb{G}} . \tag{8}$$

将这两个条件结合起来，我们便得到初始系统 **(1)** 的一个等价表述。总之，在 $[t^n, t^{n+1}]$ 中，以下两个问题在弱（分布）意义下等价:

$$(\mathbf{I}) \quad \mathbf{U}(t^{n+1}, \mathbf{s}) = \mathbf{U}(t^n, \mathbf{s}) - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) + \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{s}, \mathbf{U}) \right] \mathrm{d}t$$

and

$$(\mathbf{II}) \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{LS}^n} \left\langle \underline{\underline{F}}, \nu \right\rangle_{\mathbb{G}} = 0 \\ \displaystyle\frac{1}{A\left(\overline{R}^{n+1}\right)} \int_{\overline{R}^{n+1}} \mathbf{U}(t^{n+1}, s^1, s^2) = \frac{1}{A\left(\overline{R}^{n+1}\right)} \int_{R^n} \mathbf{U}(t^n, s^1, s^2) \\ \qquad\qquad - \displaystyle\frac{1}{A\left(\overline{R}^{n+1}\right)} \left[\int_{D^n} (\mathbf{S} + \mathbf{Z}) + \int_{\mathcal{LS}^n} \left\langle \underline{\underline{G}}, \nu \right\rangle_{\mathbb{G}} \right] \end{cases}$$

其中， $A\left(\underline{R}^{n+1}\right)$ 表示演化区域 R^{n+1} 的面积。问题 **(II)** 代表几何内禀拉格朗日–欧拉构件，它将构成我们数值格式的基础。回想一下，区域 R^n, R^{n+1}、 D^n 和 $\mathcal{LS}^n$ 是在时空参考系中定义的，我们可以将柯西问题 **(II)** 理解为先进行拉格朗日演化步骤，然后将解重映射到原始区域 R^n；这一过程通过在欧拉意义下施加局部质量守恒来实现（欧拉重映射步骤）。

离散拉格朗日–欧拉格式。 我们考虑底部表面 Γ 上一个固定（不随时间变化）的曲面三角剖分 $\mathcal{T}(\Gamma)$，它由互不相交的测地单元 K_ℓ 组成，这些单元的顶点位于 Γ 上，并满足 $\mathcal{T}(\Gamma) = \cup_{\ell=1}^{N_K} K_\ell = \Gamma$，且 $e_{\ell m} = K_\ell \cap K_m$ 是一条测地边。该三角剖分由网格参数 $h = \max_\ell\{\mathrm{diam}(K_\ell)\}$ 刻画。我们假设，单元 K_ℓ 与将其顶点投影到以单元中点 $T_{\mathbf{m}_\ell}\Gamma$ 为锚点的切平面上所定义的平面单元之间存在一一对应关系。请注意，通过对单元 K_ℓ进行适当缩放，这一点总是可以实现的。这种对曲面的分片线性近似使我们能够在（局部）平面单元上进行计算，几何误差与 h^2 成正比。结合空间离散化，我们还考虑时间区间 $[0, t_f]$ 的时间离散化 $\{t^n\}$，并定义非均匀时间步长$\Delta t = t^{n+1} - t^n$。在每个时刻 t^n，单元 K_ℓ 与流入区域 R_ℓ^n 重合，也就是说，三角剖分$\mathcal{T}(\Gamma)$ 就是我们的工作网格。

在每个单元 R_ℓ^n 上，我们通过对区域 R_ℓ^n 取平均值来定义时间 t^n 的近似解 $\mathbf{U}_\ell^n$，即:

$$\mathbf{U}_\ell^n := \frac{1}{A\left(R_\ell^n\right)} \int_{R_\ell^n} \mathbf{U}(t^n, \mathbf{s}) .$$

然后，通过在相应控制体积内的原始网格 $K_\ell = R_\ell^n$ 上执行重映射过程（欧拉重映射步骤），得到区域 R_ℓ^{n+1} 上的 $\mathbf{U}_\ell^{n+1}$。若将通过拉格朗日步骤（ 8 ）得到的时间 t^{n+1} 的近似值（中间结果）记为 $\mathbf{U}_\ell^{n+1}$，则可写为:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}}_\ell^{n+1} &= \frac{1}{A\left(\overline{R}_\ell^{n+1}\right)} \int_{\overline{R}_\ell^{n+1}} \mathbf{U}(t^{n+1}, \mathbf{s}) \\ &= \frac{A\left(R_\ell^n\right)}{A\left(\overline{R}_\ell^{n+1}\right)} \left[\mathbf{U}_\ell^n + \frac{1}{A\left(R_\ell^n\right)} I(\overline{\mathbf{S}}) - \int_{\mathcal{LS}^n} \left\langle \underline{\underline{G}}, \nu \right\rangle_{\mathbb{G}} \right] , \end{aligned}$$

最终更新后的变量$\mathbf{U}_\ell^{n+1}$ 通过将 $\mathbf{U}_\ell^{n+1}$ 几何投影到曲面单元 R_ℓ^n 上即可得到（更多信息请参见 [9]）。

为了完成我们的格式，需要对问题 **(II)** 的第一个方程进行离散化，即需要对无流条件（7）进行近似。对于任意时间 $\tau \in [t^n, t^{n+1}]$，可将该方程重新改写为空间和时间分离的形式，并在 R_ℓ^n 的每条边上使用中点法则对积分进行数值计算，然后对所有边求和。注意， $\mathcal{LS}^n$ 的一个一般面可视为单元边 $e_{\ell m}$ 随时间的演化。我们的中点求积法则通过沿边中点 $\mathbf{m}_e$ 在时间方向上的线积分，对该面上的积分进行近似。由此得到:

$$0 \quad = \quad \int_{t^n}^{\tau} \int_{e_{\ell m}(t)} \left\langle \underline{\underline{F}}(\mathbf{s}, \mathbf{U}(t,\mathbf{s})), \nu(t,\mathbf{s}) \right\rangle_{\mathbb{G}} \mathrm{d}\mathbf{s} \qquad \mathrm{d}t \quad \approx \quad \int_{t^n}^{\tau} |e_{\ell m}|\,(t) \left\langle \underline{\underline{F}}(\mathbf{m}_e, \mathbf{U}(t,\mathbf{m}_e)), \nu(t,\mathbf{m}_e) \right\rangle_{\mathbb{G}} \mathrm{d}t\,,$$

其中， $|e_{\ell m}|$ 和 $\mathbf{m}_e$ 分别是 $e_{\ell m}$（t）的长度和中点。时间积分采用显式欧拉法进行近似，即使用时间 t^n 的已知量。这使得我们能够显式刻画从每条边上的 $\mathbf{m}_e$ 出发的近似无流曲线 $\sigma_{\ell m} \subset \mathcal{LS}^n_{\ell m}$。我们需要施加的附加条件是， $\sigma_{\ell m}$ 必须与单元边 $\nu_{\ell m}$（t）$= \nu$（t,$\mathbf{m}_e$）的局部法向量正交。该过程得到一个非线性常微分方程组，用于描述 $\sigma'_{\ell m}$ 作为 ISWE 通量的函数，其初始条件由 $\sigma_{\ell m}$（t^n）$= [t^n, \mathbf{m}^1_e$（t^n）$, \mathbf{m}^2_e$（t^n）$]^{\mathrm{T}}$ 给出，并且流动在时间 t^n 处由 $\langle \nu_{\ell m}$（t^n）$\ \sigma'_{\ell m}$（t^n）$\rangle_{\mathbb{G}} = 0$ 隐式定义。按照这一方法，在 $t \in [t^n, t^{n+1}]$ 处演化后的边中点位置可计算为：

$$\sigma_{\ell m}(t) = \sigma_{\ell m}(t^n) + (t - t^n)\sigma'_{\ell m}(t^n)\,,$$

其中 $\sigma'_{\ell m} = [1, (\sigma^1_{\ell m})', (\sigma^2_{\ell m})']^{\mathrm{T}}$ 通过求解以下线性系统得到：

$$\begin{cases} \langle \nu_{\ell m}(t^n), \sigma'_{\ell m}(t^n) \rangle_{\mathbb{G}} = 0 \\ \left\langle \underline{\underline{F}}(\mathbf{m}_e, \mathbf{U}^n_{\mathbf{m}_e}), \nu(t^n, \mathbf{m}_e) \right\rangle_{\mathbb{G}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

有关更多详细信息，请再次参阅 [9] 。

注 1（笛卡尔网格情况下的无流曲线示例）。 在特殊情况下，某条边的单位切向量为$\mathbf{m}_e(t^n)$，与$\mathbf{t}_2$ 对齐，且法向量为 $\nu = \begin{bmatrix} -1, & \mathbf{1} & (\sigma^1)'(t^n) & 0 \end{bmatrix}$ ，我们通过求解以下线性系统可以显式得到$\sigma' = [1, (\sigma^1)', \ 0]^{\mathrm{T}}$：

$$0 = \left\langle \underline{\underline{F}}(\mathbf{m}_e), \nu(t^n, \mathbf{m}_e) \right\rangle_{\mathbb{G}} \Big|^{\beta} = \underline{\underline{F}}^{\beta}(\mathbf{m}_e)\, \mathbb{G}(\mathbf{m}_e) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ (\sigma^{1\beta})'(t^n) \\ 0 \end{bmatrix},$$

对于每个分量 $\beta = 1$，2、3。因此：

$$(\sigma^{1\beta})'(t^n) = \underline{\underline{F}}^{(\beta,2)} h^2_{(1)} / \mathbf{U}^{\beta,n}\,, \qquad \beta = 1,2,3\,.$$

总而言之，拉格朗日演化步骤包括求得无流曲线，并利用这些方向来演化状态：

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \sigma_{\ell m}(t^{n+1}) = \sigma_{\ell m}(t^n) + \Delta t\ \sigma'_{\ell m}(t^n) \quad \text{s.t.} \ \begin{cases} \langle \nu_{\ell m}(t^n), \sigma'_{\ell m}(t^n) \rangle_{\mathbb{G}} = 0 \\ \left\langle \underline{\underline{F}}(\mathbf{m}_e, \mathbf{U}^n_{\mathbf{m}_e}), \nu(t^n, \mathbf{m}_e) \right\rangle_{\mathbb{G}} = \mathbf{0} \\ \sigma_{e_{\ell m}}(t^n) = [t^n, \mathbf{m}^1_e, \mathbf{m}^2_e]^{\mathrm{T}} \end{cases} \\ \overline{\mathbf{U}}^{n+1}_{\ell} = \dfrac{A\,(R^n_{\ell})}{A\left(\overline{R}^{n+1}_{\ell}\right)} \left[\mathbf{U}^n_{\ell} + \dfrac{\Delta t}{A\,(R^n_{\ell})} I(\overline{\mathbf{S}}) - \Delta t \int_{\mathcal{LS}^n} \left\langle \underline{\underline{G}}, \nu \right\rangle_{\mathbb{G}} \right] \\ \mathbf{U}_{\ell}(0, \mathbf{m}_{\ell}) = \mathbf{U}_0 \end{cases}$$

数值公式通过欧拉重映射步骤得以完成，在该步骤中，沿着无流曲线反向追踪，以便在计算网格上对解进行重映射。源项 $\mathbf{S}$可以使用任何一致的求积公式进行积分。此处我们使用中点法则或梯形法则，其推导见附录 A。需要注意的是，可以将离散化扩展至其他求积规则 [1, 2, 5, 7] ，从而实现空间高阶精度。

3.1. **稳定性与良平衡**。

*CFL*条件。 根据 [9, 8, 10]，该格式在以下 CFL条件下是稳定的：

$$\text{(10)} \qquad \max_{\ell, m} \left\{ \left| \frac{\underline{\underline{F}}^{\eta,\nu}_{e_{\ell m}}}{\eta} \right|, \left| \frac{\underline{\underline{F}}^{q^1,\nu}_{e_{\ell m}}}{q^1} \right|, \left| \frac{\underline{\underline{F}}^{q^2,\nu}_{e_{\ell m}}}{q^2} \right| \right\} \frac{\Delta t}{h} < C\,,$$

其中， $\underline{\underline{F}}^{\nu}$是沿边 $e_{\ell m}$的法向方向进行的通量投影， ℓ， m是相邻单元的（全局）单元索引， $C < 1/2$ 是 CFL常数。这里需要强调的是，由于采用拉格朗日–欧拉 formulation，无需计算通量雅可比矩阵，这是该方法的主要优势之一。此外，在我们的情形下，只有通量函数的“平流”部分 F 参与CFL

$=$

条件。此外，由于额外局部不连续性的影响已包含在源项中，CFL条件不受这些额外项的影响。

局部良平衡与干湿交替。当水深趋于较小时，干湿转换可能导致较大的数值误差，因此需要采用特定技术来确保稳定性和守恒性，尤其是在非平面地形情况下。标准的干湿处理算法要么通过网格自适应对干湿界面进行界面追踪，要么在每个单元中设置薄水层，例如规定当水深低于指定阈值时水体质量不发生移动。后一种方法在非平坦地形情况下可能产生振荡，这是由于地形梯度被错误地传播到解中 [24], ，并可能导致负水深。上述问题会影响纯欧拉格式中黎曼问题的求解，但不会损害我们的拉格朗日–欧拉方法的精度。事实上，在我们的方法中，两个重要特征共同作用，彻底消除了这些问题。一方面，所提出公式的几何内禀性质自动避免了产生负水深的可能性。此外，该性质与拉格朗日–欧拉步骤相结合，消除了水深趋于零时可能出现的振荡；水深位于通量函数的分母中。实际上，比值$\mathbf{q}/\eta$有助于定义无流曲面，而这些曲面的拉格朗日时间积分从本质上保持了水深的非负性 [9, 8, 10]。需要注意的是，该比值表示水流速度，并参与局部特征曲线的定义。基于同样的原因，所提出的公式自动满足局部良平衡。

通过考察$\mathbf{q}/\eta$随时间的演化，可以数值验证这些性质；该比值不应无限增大，这与 η 和$\mathbf{q}$以相同速率趋于零相对应。通过考察解的长时间行为，尤其是检验 $I(\mathbf{S})$的值是否趋于零，来测试局部良平衡。

–

3.2. 笛卡尔网格上源项的数值积分。 考虑到高性能计算效率以及在四叉树数据结构上实现我们的拉格朗日–欧拉内禀表述的简便性 [31,30, 40, 43], ，我们决定在四边形网格上进行测试。因此，本节最后将求积规则专门用于在笛卡尔网格上计算 $I(\mathbf{S})$。如上所述，可以采用任意求积规则和非线性重构技术（例如，参见 [25, 29, 18, 17, 34]）来数值计算式（9）中的值 $I(\mathbf{S})$。下文中，我们采用标准的一阶求积规则来计入拉格朗日–欧拉过程的贡献。该过程确保了数值通量与源项的计算适当平衡，这正是这种天然的无黎曼求解器上风格式的特点。

考虑区域 D^n ，从时间层 t^n 到 t^{n+1} ，使得 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$，并被以下无流曲面包围（此处 β 标识系统中的第 β个方程）：

$$\sigma^{\beta}_{i-\frac{1}{2},j}(t) \approx x_{i-\frac{1}{2}} + (t-t^n)\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,2)}_{W} h^2_{(1)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}}, \quad \sigma^{\beta}_{i+\frac{1}{2},j}(t) \approx x_{i+\frac{1}{2}} + (t-t^n)\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,2)}_{E} h^2_{(1)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}},$$
$$\sigma^{\beta}_{i,j-\frac{1}{2}}(t) \approx y_{j-\frac{1}{2}} + (t-t^n)\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,3)}_{S} h^2_{(2)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}}, \quad \sigma^{\beta}_{i,j+\frac{1}{2}}(t) \approx y_{j+\frac{1}{2}} + (t-t^n)\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,3)}_{N} h^2_{(2)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}}.$$

经中点法求积后， $I(\mathbf{S})$的最终表达式为:

$$I(\overline{\mathbf{S}}) \approx \left\{ \Delta t\, h^2\, \overline{\mathbf{S}}\left(x^n_j + \left[\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,2)}_{W} h^2_{(1)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}} - \frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,2)}_{E} h^2_{(1)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}} \right] \frac{\Delta t}{2} + \frac{h}{2}, \right. \right.$$
$$\left. \left. y^n_j + \left[\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,3)}_{N} h^2_{(2)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}} - \frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,3)}_{S} h^2_{(2)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}} \right] \frac{\Delta t}{2} + \frac{h}{2}, t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right\}_{\beta=1,2,3}. \tag{11}$$

详细计算及向梯形法则的推广见附录 A。

4. Numerical simulations

本节给出的模拟旨在验证所提方案的主要性质。我们特别关注该方法规避以下相关数值困难的能力：i）离散良平衡；ii）干湿转换与移动前沿；iii）在长时间模拟中保持双曲性与稳定性限制；以及iv）处理局部地形不连续。我们强调使本框架有别于标准方法的四个关键特征:

非平凡平衡态的捕捉:: 该格式能够自然地恢复非平凡平衡解，这对于双曲平衡律至关重要，因为其中源项与通量梯度必须恰好相互抵消。

通量-源项相互作用:: 该格式能够准确捕捉对流通量与源项之间的相互作用，在二者相互抵消时避免伪振荡。

长期渐近稳定性:: 该方法在时间趋于无穷时保持平衡态，避免累积漂移。

隐式守恒平衡:: 该方法无需外部求根过程即可实现良平衡。这一性质自然地出现在拉格朗日演化和几何重映射中，并无缝扩展到内禀几何框架。

这些性质对于现实世界的应用至关重要，尤其是在流速趋零的“静止湖泊”场景中。我们的数值实验表明，该格式对于未受扰动和平衡态的轻微扰动都能实现出色的分辨率，同时自然地保持静止状态下的稳态以及复杂的干湿过渡。

所有测试案例均考虑重力驱动流，并假设为无黏流，即不存在能量损失，$\mathbf{T}_{sw} = 0$，以及$\tau_b = 0$。在每次模拟中，时间步长均由方程10中的CFL稳定性条件确定。显然，由于缺乏具有精确解的重要测试，只能进行定性验证，或与高度精细的解进行比较。下面的不同模拟均通过三维（轴测）渲染表示，展示不同时间点的正常水深 η 。所有模拟均使用单一视口，以便更好地观察解中重要特征的动态，从而评估其性质。具体时间和视口的选择旨在突出所得解中对称性的定性行为。需要强调的是，在某些测试案例中，单一视口的选择可能会掩盖解在特定时刻的某些特征，此时可能无法充分观察到对称性。此外，我们还绘制了正常水深的等值线，相邻等值线之间的间隔恒定为 $\Delta\eta$ 。 $\Delta\eta$ 的数值在每个时间点都会变化，以便更清晰地呈现正常水深分布的对称性，并识别数值解中出现的最微小波动。此外，对于特定的纯重力驱动测试案例，我们展示强迫项 I（$\mathbf{S}$）的 L^1-范数（见方程（6））以及流体深度和速度分量的 L^1-范数与 L^∞-范数随时间的演化。这些图用于表明稳态条件的实现及其随时间的持续性。

—

4.1. 平衡保持与文献基准算例。 对于平衡保持格式而言，一项关键验证是在较长时间尺度上保持平衡。我们考虑了三个文献基准算例，以展示该格式从稳态和轻微扰动的初始条件出发，达到并维持平衡的能力，如 $t \to \infty$所示。在这些测试案例中，不考虑表面地形的影响（即， Γ 是一个平坦区域）。

测试案例*1.1*：长时间平衡测试。 模拟在一个封闭的（无流边界条件）区域 $U = [-3, 3] \times [-3, 3] \subset \mathbb{R}^2$ 上进行，该区域具有处于静态平衡的恒定初始水深，此时压力梯度与重力源项必须恰好抵消。网格由 256×256 个单元组成，模拟采用 CFL=0.1。我们的方法在长时间模拟中成功保持了这一平衡状态；由于截断误差的累积，这项任务通常颇具挑战性。这主要得益于我们拉格朗日-欧拉格式中的无流曲线。事实上，无流曲线确保局部区域的并集 $\bigcup_{\ell=1}^{n} R_\ell$构成一条守恒流线，从而使离散演化与物理稳定态相一致。在数学上，该平衡

$$\nabla_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U})$$

得到满足 在每个局部区域 R_ℓ 内的离散层面上得到满足，从而防止产生伪波 s.

图1展示了数值结果：在整个模拟过程中，稳态平衡得以保持，并达到长时间状态（$T = 10$ s），且未出现伪振荡或数值不稳定性。

测试案例*1.2*：“静止湖泊”的小扰动。该基准测试在 [33], 中进行了讨论，考察了静止背景上小振幅波的传播，并要求格式在不破坏底层静水平衡的情况下解析细微的波动。初始状态由区域 $U = [-4, 4] \times [-10, 10]$内的 $\eta = 1.0$ m构成，并在子集$[-4, 4] \times [-0.4, 0.4]$内对该稳态施加局部小扰动，其中 $\eta = 1.5$ m。在左右边界施加出流边界条件。在此案例中，网格由 256×640 个单元组成，模拟采用 CFL=0.15。

如图2所示，扰动分裂为两个反向传播波，并横越整个区域。该序列表明，此框架能够维持良平衡稳态，而不会引发伪数值振荡。

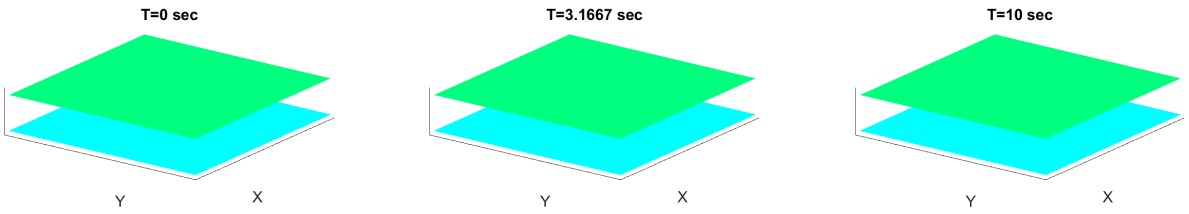

FIGURE 1. 测试案例1.1——长期保持静止稳态。三个面板展示了不同时刻的演变： $T = 0$ 秒（左）、 $T = 3.1667$ 秒（中）和$T = 10$ 秒（右）。静态平衡得以维持，未出现伪振荡或数值不稳定性。

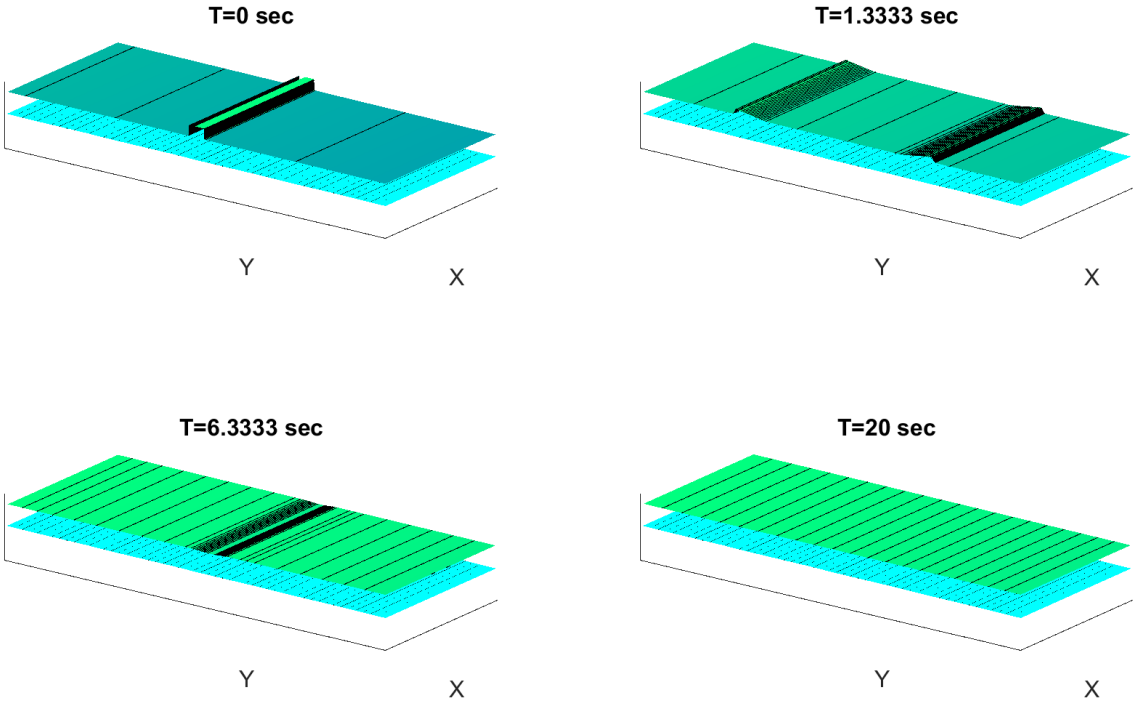

FIGURE 2. 测试案例1.2——初始扰动向静止稳态的演变。初始的小振幅扰动叠加在处于平衡状态的流体上（左上面板，$T = 0$ 秒）。该波分裂为两个方向相反的重力波，穿过整个区域（右上面板），随后重新汇合（左下面板），最终完全离开区域（右下面板）。

备注 2。 从中心出发的初始波到达流出边界后，会形成小幅反射波，并向区域中心移动。这些波会迅速耗散，且不会继续在区域内传播。事实上，只有等值线密集处才能看出这些波的出现，其水深始终可以忽略不计。我们在此指出，ISWE模型和拉格朗日–欧拉数值方法的耗散特性仍属尚待解决的问题，目前正在研究中。因此，我们在此只能对所得数值结果进行观察。

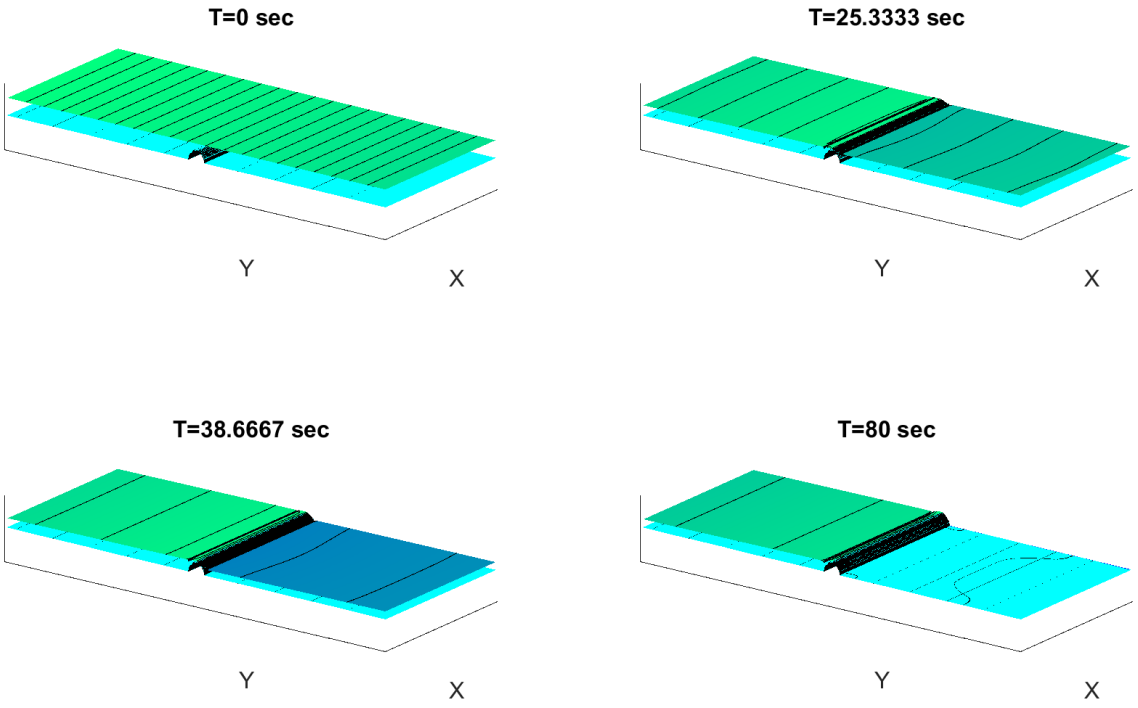

FIGURE 3. 测试案例1.3——水库排水。左上面板：初始数据（$T = 0$ s）。右上面板（$T = 25.3333$ s）和左下面板（$T = 38.6667$ s）：水开始从出流边界流出区域，并在两个不同区域中趋于湿/干混合稳态。右下面板（$T = 80$ s）：最终平衡构型。

经过 $T = 20$ s（右下面板）后，瞬态波已离开区域，系统成功恢复静止稳态，证实了内禀拉格朗日-欧拉框架的长期稳定性和几何一致性。

测试案例*1.3*：向湿/干稳态的演化。该基准测试改编自 [33]，提出的一维测试，用于评估从动态流动到涉及干区的非平凡平衡态的转变。该测试特别考验格式在存在地形障碍物时处理干湿交替界面和良平衡的能力。

渠道区域定义为 $U = [-4, 4] \times [-10, 10]$，其中地形障碍物被建模为局部扰动，即在子集 $[-4, 4] \times [-0.4, 0.4]$ 内，$\mathcal{Z}(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi x)$。初始时，流体处于静止状态（$u = 0$），总水深保持为 $H = 0.8$ m 的水平面。水流可通过右侧边界（流出）排出，其余边界采用固壁条件。网格由 256×640 个单元组成，且 CFL=0.15。

图3展示了模拟过程：流体向右排出，障碍物将水困在区域的左侧部分。最终达到混合稳态：左侧部分为湿平衡状态，出口所在的区域右侧部分为干平衡状态。图3右下图显示，在 $T = 80$ s 时，蓄水区右侧部分基本已完全排空。当水深趋于零时，拉格朗日–欧拉方法仍能保持双曲性，从而避免数值不稳定性或非物理速度的出现；这些问题在存在移动前沿时往往容易发生。

4.2. **一般底部地形上的局部障碍物**。在此，我们考虑四种几何特征复杂程度逐渐增加的不同底部曲面（见 [9]）：i) 简单的倾斜平面（即常度量）；ii) 抛物线（即一维曲率效应）；iii) 带有中央凸起的双曲面（即几何形状具有二维依赖性且中心呈径向对称）；以及 iv) 完全三维曲面。在所有情况下，均添加一个局部不连续障碍物。所有曲面均通过一个（单一的）全局参数化 $\Gamma = \{x, y, z = \mathcal{B}(x, y)\}$ 定义，其中 $\mathcal{B}(x, y)$ 是高度函数。该局部

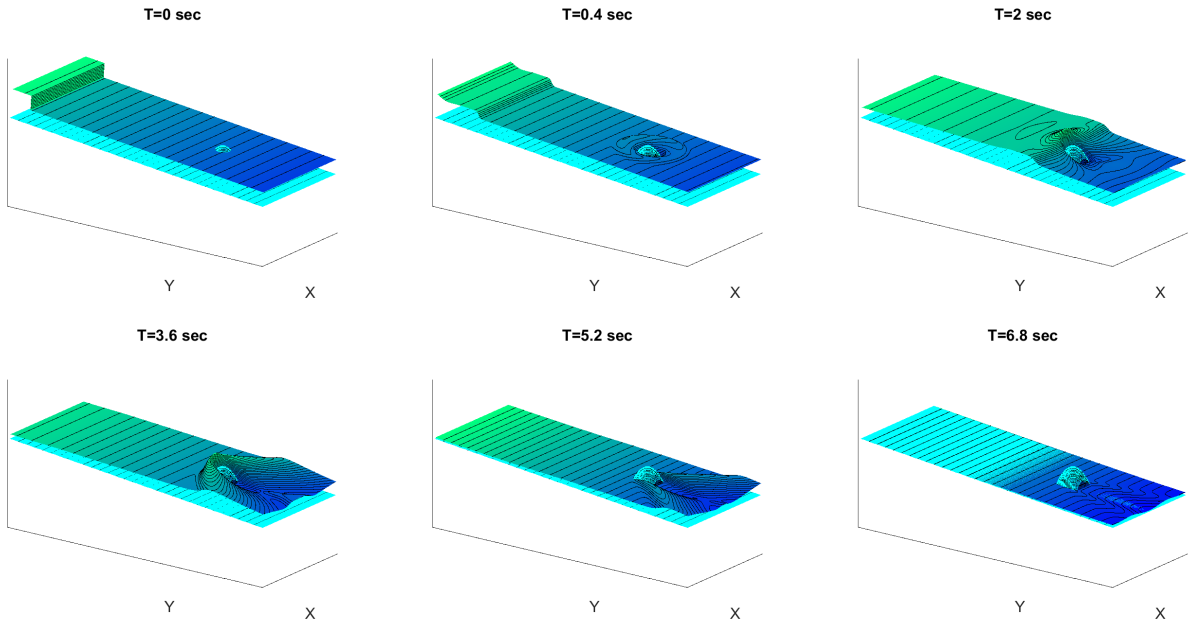

FIGURE 4. 测试案例2.1——带障碍物的倾斜平面：不同时刻的法向水深（绘制于底部表面上方）。波与障碍物的相互作用清晰可见。结果展示了该数值格式在长时间模拟中的稳健性，即使水深趋近于零时亦如此。

不连续障碍物由以下方程定义

$$\mathcal{Z}(x,y) = \bar{z} - (x-a)^2 - (y-b)^2\,, \tag{12}$$

其中，$\bar{z}$ 是障碍物在点（a，b）处达到的最大高度。在所有测试案例中，障碍物的支集为正方形 $|x-a|<0.8$，且 $|y-b|<0.8$。这种凸起代表了规则底面上的局部障碍物。障碍物只有一个并不构成所提方法的限制；下一小节将介绍一个包含多个凸起的测试案例。用于离散底部表面的工作网格由子集 $U \subset \mathbb{R}^2$上的规则笛卡尔网格（即坐标域）生成，并通过高度函数将网格顶点沿竖直方向投影到底面上。初始条件描述了溃坝问题，其中给定法向水深，且速度为零。

所有测试旨在突出显示，即使存在非平凡的床面地形和局部不连续性，离散层面上的良平衡性质仍得以保持。在这些情况下，通过观察I的 L^∞范数和 L^1范数的长时间行为，来验证是否不存在伪振荡（S）。

–

测试案例*2.1*：带障碍物的倾斜平面。坐标域为矩形 $U=[-4,4]\times[-10,10]\subset\mathbb{R}^2$，高度函数定义为 $\mathcal{B}(x,y) = 0.1y + 1.0$。不连续障碍物由方程12中的 $\mathcal{Z}$ 定义，其中 $\bar{z}=1.2$、$a=0$和 $b=4$。坝址上游单元的水深初始值设为2 m，坝址位于 $y=2.0$ m；下游水深设为1 m。模拟采用的CFL值为0。20。

图4展示了在时间区间 $T\in[0,8]$ s 内、不同时刻的正常水深演变；网格分别沿 s^1 和 s^2 方向由 256×640 个单元构成。可以观察到，随着时间演进，数值解捕捉到了波前。该方法很好地描述了障碍物在两个方向上对流体的影响。如底排图所示，该离散化在干湿区域的过渡处也具有稳健性，此时整个区域几乎达到干态。在 $T=0.4$ s 时，解呈现出一定的耗散，表现为向下游移动的激波剖面略显模糊。同样，如第2节所述，该格式所引入的数值耗散量尚未经过全面测试，目前仍在研究中。

图5展示了强迫项 I（S）的范数以及在 $T=0.5$，1。0 s 和 $T=6$ s 时的水深分布。特别地，给出此图是为了强调该系统的良平衡性质得到了数值格式的保持，同时解在.....周围具有良好的对称行为

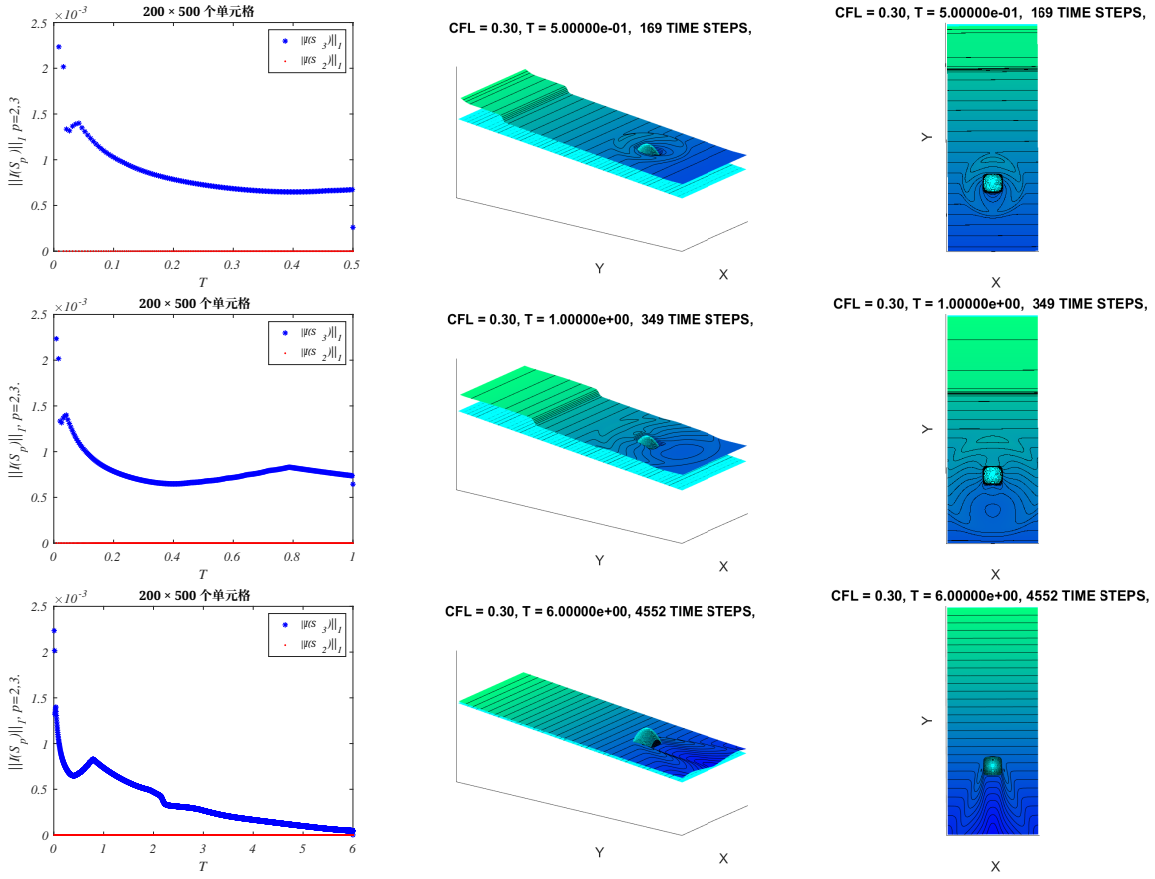

FIGURE 5. 测试案例2.1——带障碍物的倾斜平面：良平衡模拟。左列显示了在时间区间 $[0,T]$ for $T = 0.5, 1.0, 6.0$ 秒内， $I(S)$ 的 L_1 范数随时间的变化。中列和右列显示了相同时间区间内的水深解。右列中的等值线突出了数值解相对于流动方向的对称性。

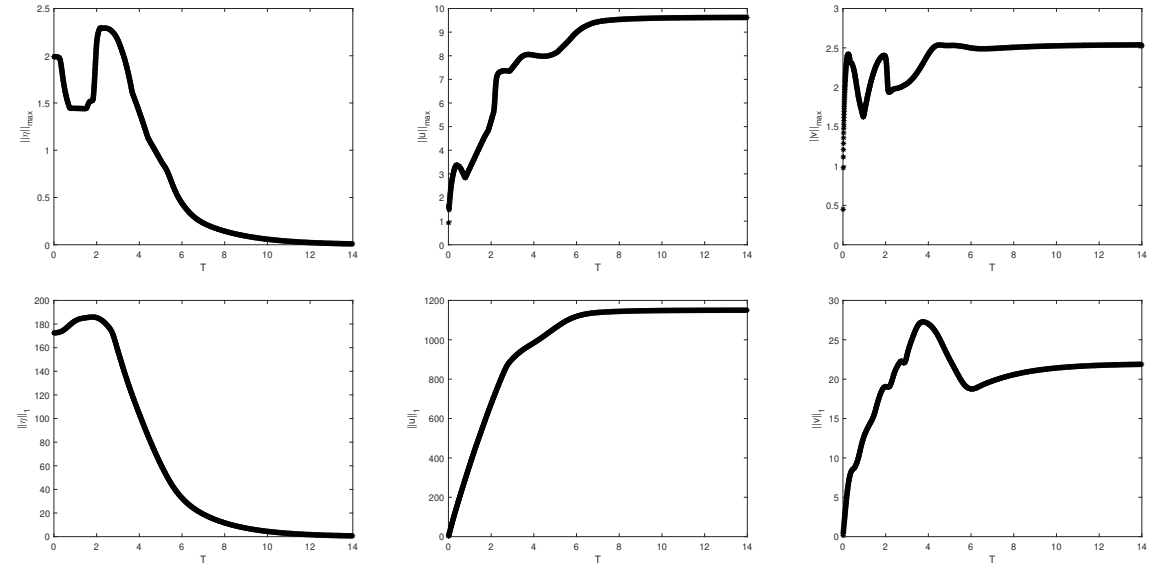

FIGURE 6. 测试案例2.1 - 带障碍物的倾斜平面：干湿界面模拟。 L^∞-范数和 L^1-范数的值分别显示在上排和下排；左列为法向水深 η ，中列和右列分别为切向速度的 x 和 y 分量 u 和 v 。

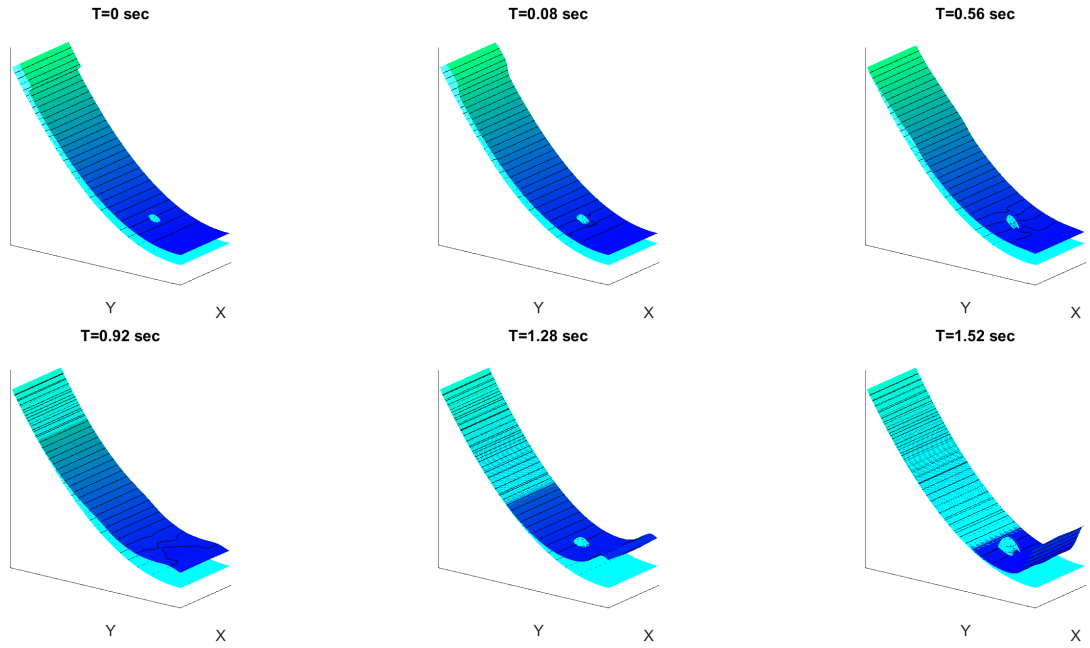

FIGURE 7. 测试案例2.2——带障碍物的抛物线：不同时间的水深演化。网格由 256×640 个单元组成。

障碍物。图6展示了长时间模拟 $T = 14$ s的 L^∞ （上排）和 L^1 （下排）范数，其中 η （左侧面板）以及$\mathbf{q}/\eta = [u, v]$（中间和右侧面板）均被展示；在本案例中，这代表稳态解。我们注意到，当水深值趋近于零时，速度立即达到其极限值，这表明，正如上一节末尾所述，我们的公式在离散情形下同样具有平衡保持性。

测试案例*2.2*：带障碍物的抛物线。这是一个简单的一维底部表面，其中存在曲率效应。该抛物线由高度函数 $\mathcal{B}(x,\ y) = \frac{1}{25}(y-10)^2$ 定义于矩形区域 $U = [-4, 4] \times [-10, 10] \subset \mathbb{R}^2$上；在此，障碍物由方程12中的 $\mathcal{Z}$ 定义，其中 $\bar{z} = 1.2$、 $a = 0$和 $b = 4$。该区域通过由 256×640 个单元组成的网格进行离散。位于 $y = 2.0$ 米处的坝上游初始水深为2米，下游为1米，并采用CFL值0.30。

图7展示了时间区间 $T \in [0, 1.76]$ s内的水深分布。与前一个案例类似，沿底部表面的流体流动得到了很好的捕捉。由于抛物线的几何特征，随着时间推移，干涸区域在0.6 s后便开始出现，模拟结束时区域实际上已被排空。同样，与障碍物的相互作用十分明显。观察图8右侧各图（其中报告了与图5相同的测量结果），可以看到水流绕过障碍物时呈现出对称行为。图9展示了长时间尺度下的行为，其中给出了时间区间 $[0, 3]$ s内 η、 u 和 v 的空间范数， L^∞ 位于上排， L^1 位于下排。如测试案例1所示，一旦水深趋近于零（左侧各图），速度便达到其极限值（中间和右侧各图），表明区域正在排空。

测试案例*2.3*：带障碍物的双曲面中心凸起。 第三个示例考虑了由高度函数定义的表面： $\mathcal{B}(x,\ y) = -4\sqrt{x^2 + y^2 + 1/5}$，该表面位于一个二维正方形区域 $U = [-3, 3] \times [-3, 3] \subset \mathbb{R}^2$中，并使用 256×256 个单元进行离散；其中，不连续障碍物由方程12中的 $\mathcal{Z}$给出，且 $\bar{z} = 1.2$、 $a = 0$和 $b = 0$。在此案例中，底部表面在两个方向上均呈现曲率，该测试旨在突出该方法完全捕捉解中对称性的能力。我们测试了两种不同类型的均匀边界条件：无流（第一次模拟）和流出（第二次模拟）。两次运行的初始条件相同，其设置旨在捕捉解在长时间行为中底部表面的径向对称特征：区域中央部分（即半径为0.5 m的圆形区域内部）的（法向）水深设为2 m，中心半径之外设为1 m。采用的最大CFL数为0.30。

图10展示了时间区间 $T \in [0, 10]$ s内不同时刻的法向水深分布，图11展示了时刻 $T = 0.1$，0。5 s和 $T = 10$ s时的状态。这是无流边界的情况

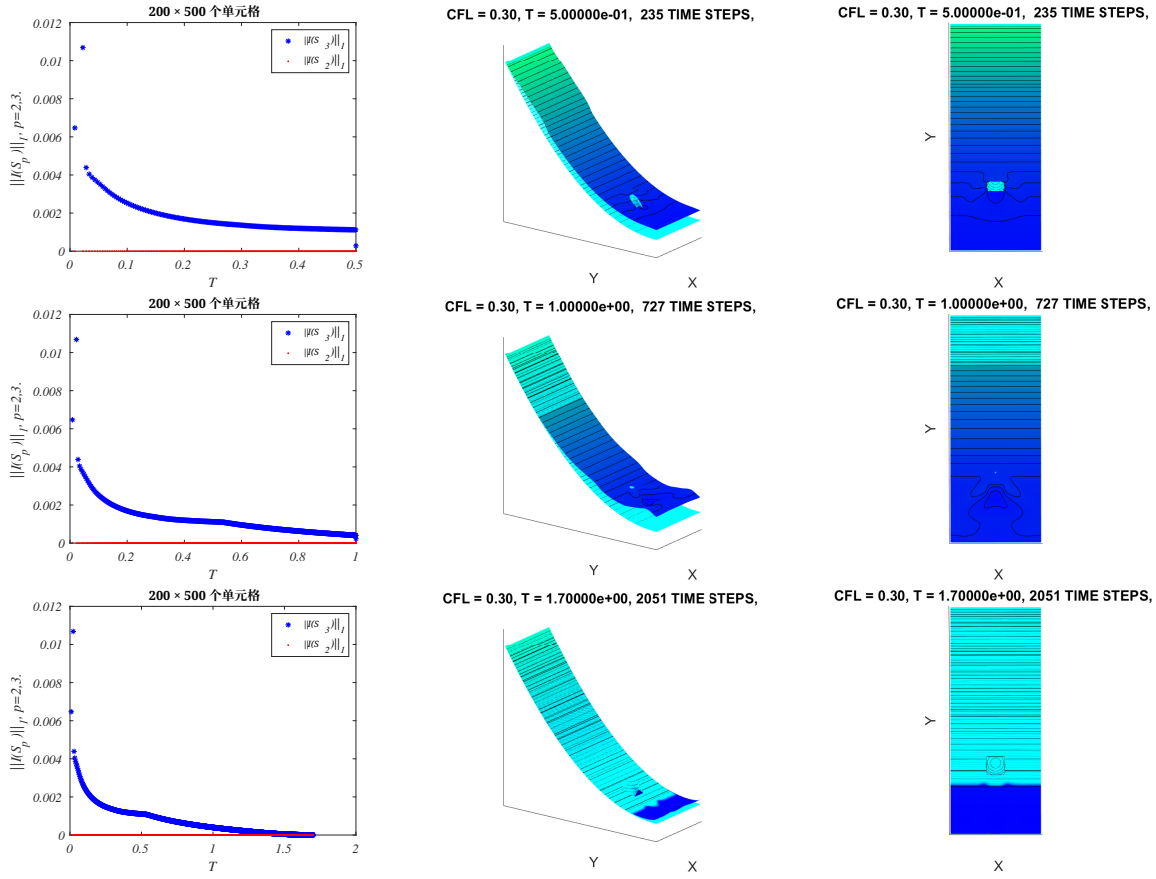

FIGURE 8. 测试案例2.2 - 带障碍物的抛物线：良平衡模拟。左列显示了 $I(\mathbf{S})$ 范数在 $[0,T]$ 时间区间内的变化情况，时间点为 $T=0.5$，1。0，1。7 秒。中列和右列显示了相同时间区间内以水深表示的解。右列的等值线凸显了数值解相对于流动方向的对称性。

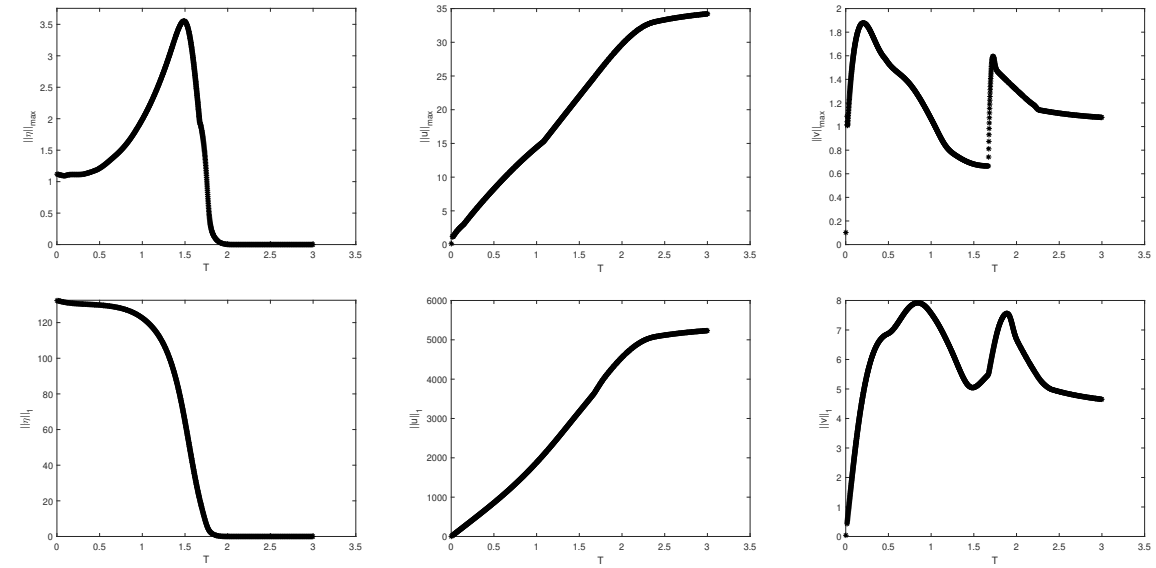

FIGURE 9. 测试案例2.2 - 带局部障碍物的抛物线：干湿交替模拟。守恒变量 $L^{\infty}-$ 和 $L^{1}-$ 范数随时间的变化。

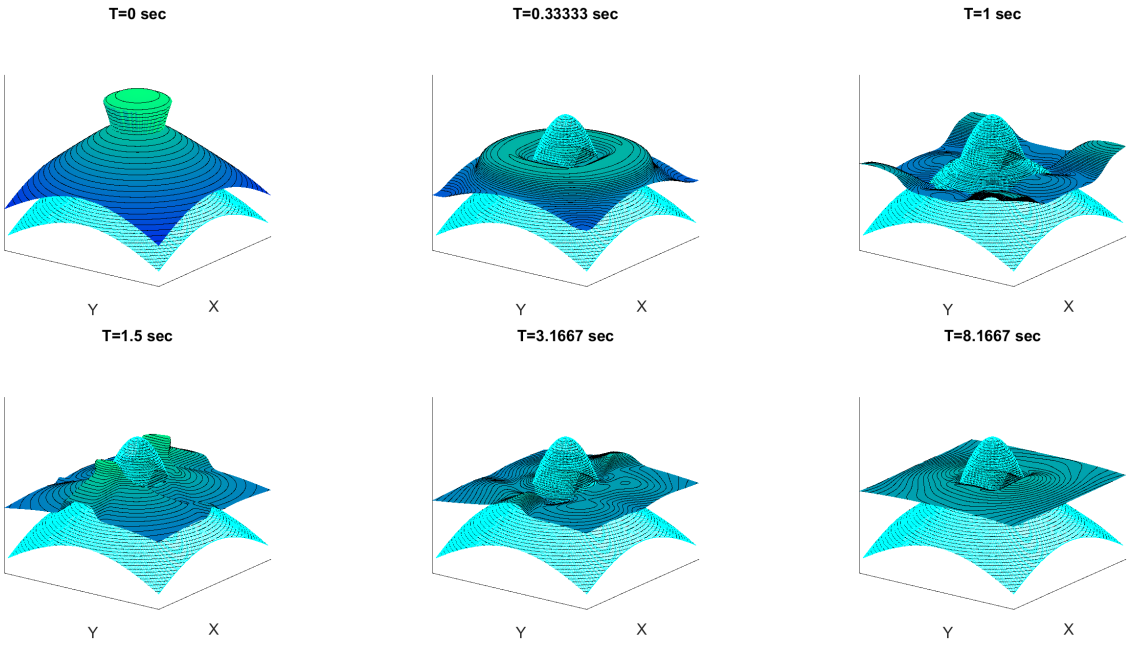

FIGURE 10. 测试案例 2.3a——带障碍物的双曲面中心凸起：不同时刻的法向水深演化。所有边界均施加无流条件。计算网格由 256×256个单元组成。

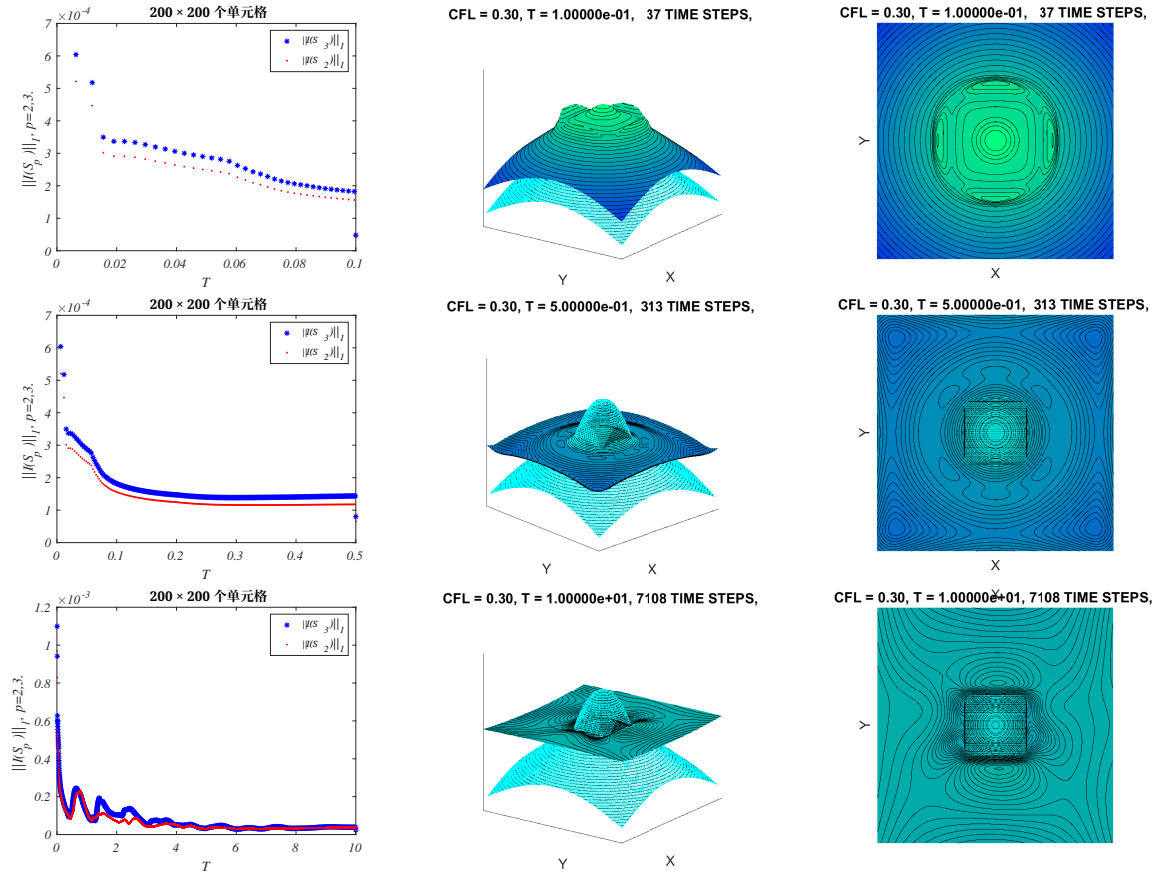

FIGURE 11. 测试案例 2.3a——带障碍物的双曲面中心凸起：良平衡模拟。左列显示区间 $[0, T]$ for$T = 0.1$、0。5、10。0 s 内 $I(\mathbf{S})$ 的 L_1 范数随时间的变化。中列和右列显示相同时刻的水深解。右列的等值线突出显示数值解相对于流动方向的对称性。

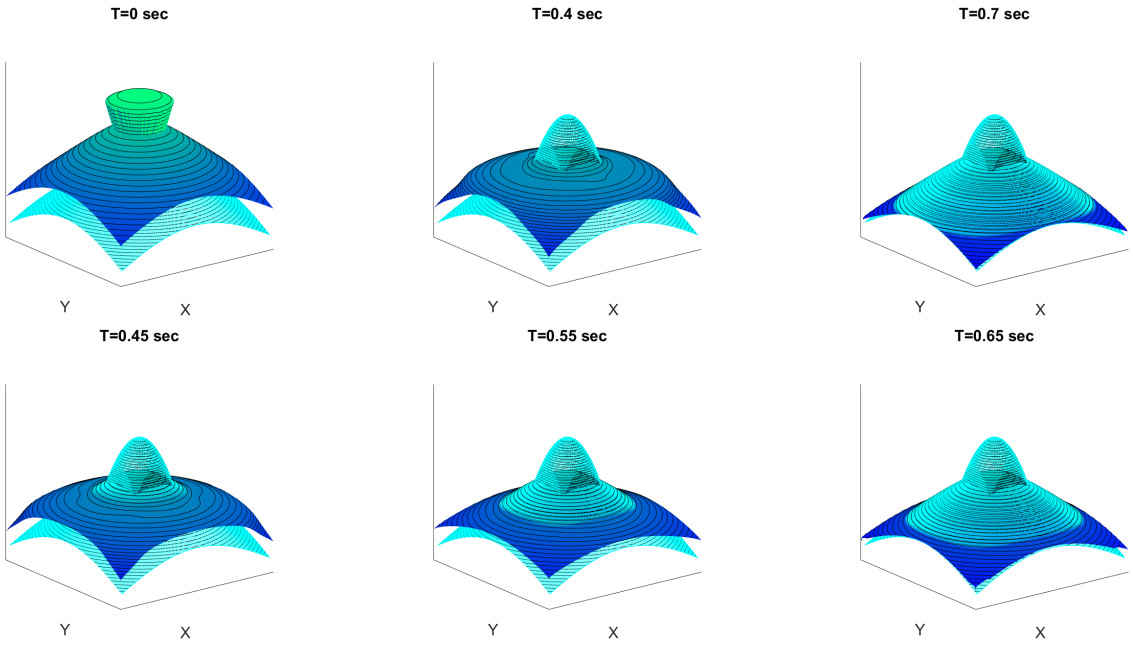

FIGURE 12. 测试案例2.3b - 带障碍物的双曲面中心凸起：不同时刻的水深演变。所有边界均采用出流边界条件。网格由 256×256 个单元组成。

所有边界均施加了相应条件。结果表明，系统达到了长时间稳态条件，并且在此过程中未形成伪波。由于底部表面的几何特征，可以观察到波的中心径向对称性；这些波随时间逐渐消散，这可能是由于 ISWE 的耗散特性、数值黏性，或二者共同作用所致（另见第 2 节的讨论）。

出流算例的结果见图12、图13和图14。在此情况下，流体很快流出区域，到 $T = 2$ 秒时，区域已经空置了一段时间。结果表明，由带障碍物的区域所决定的预期对称性得到了保持，并且即使在流体完全流出区域之后很久，该格式仍能正常运行而不产生伪振荡。最后，图14展示了长时间行为直至 $T = 2$ 秒的 η、 u 和 v 的 L^∞ （上方各图）及范数（下方各图），证明了所提出格式的稳健性。

测试案例 *2.4*：带有凸起的完全三维表面。本节的最后一个测试旨在突出所提出格式在存在正曲率和负曲率时的表现，并检验其处理复杂干湿模式的有效性。第四个底部表面的高度函数为：$\mathcal{B}(x,\ y) = -\frac{1}{500}(y)^3 - \frac{1}{100}y(x)^2$，其所在区域为 $U = [-4, 4] \times [-10, 10] \subset \mathbb{R}^2$，在 256×640 网格上离散化，并带有由 $\mathcal{Z}$ 给出的障碍物，见方程 12，其中 $\bar{z} = 1.2$、 $a = 0$ 和 $b = 4$。这是一个溃坝问题，坝位于 $y = -8.5$ 米处，初始正常水深设定为上游 2。0 米、下游 1。0 米。

图15展示了在 $T \in [0, 5]$ 秒时间区间内不同时间的流体深度演化。图16与图5类似，报告了 $T = 0.5$、2 秒和 $T = 8$ 秒时的结果。与前面的测试案例一样，该图表明，即使存在非平凡的区域曲率，数值格式仍保持系统的良平衡性质，并且流体流动绕障碍物的预期对称性也得到了遵守。图17展示了长达 $T = 8$ 秒的时间内，η、 u和 v 的 L^∞ （上排图）及 L^1 （下排图）范数的变化。

4.3. 测试案例 3：多个障碍物。这个最终测试案例评估了求解器在复杂环境中的定性性能，该环境具有多个局部不连续性。地形由一个倾斜平面构成，其中 $\mathcal{B}(x, y) = -0.1y + 1$ 位于区域 $U = [-4, 4] \times [-10, 10]$ 内，该区域由包含 256×640 个单元的网格离散化；其上叠加了四个抛物型局部障碍物，定义为 $\mathcal{Z}_i(x, y) = 1.2 - ((x - a_i)^2 - (y - b_i)^2,)$，中心分别为 $\mathrm{c}_i = (a_i, b_i)$、$\mathrm{c}_1 = (-2, 4)$、$\mathrm{c}_2 = (2, -4)$、$\mathrm{c}_3 = (2, 2)$ 和 $\mathrm{c}_4 = (-2, -2)$。初始条件定义了一个溃坝问题，其中 $\eta = 2$ m 适用于 $y \leq 9$，其他位置则为 $\eta = 1$ m。采用 CFL $= 0.2$，以确保在多个障碍物造成的尖锐梯度下保持稳定性。

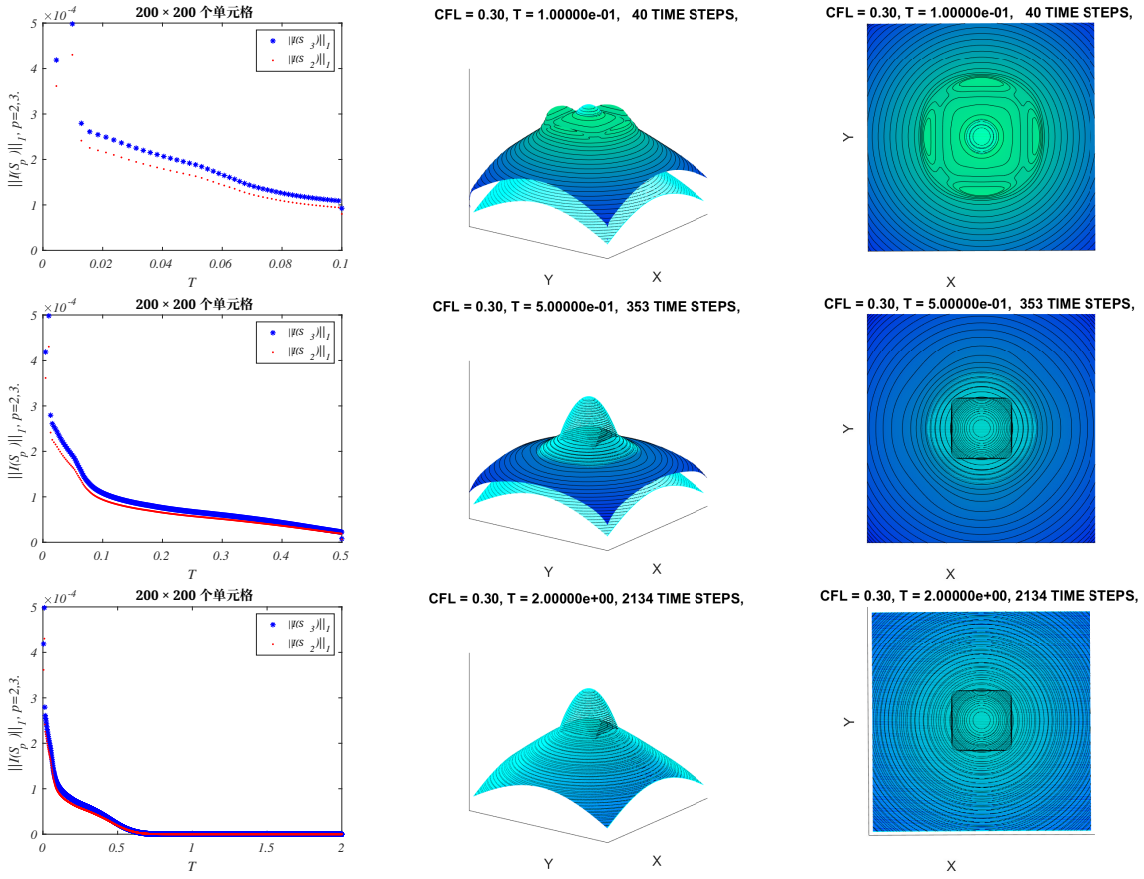

FIGURE 13. 测试案例2.3b——带障碍物的双曲面中心凸起：良平衡模拟。左列显示了 $I(\mathbf{S})$范数在 $[0,T]$ for$T = 0.1$，0。5， 2。0 s 时间区间内的行为。中列和右列以水深表示相同时间区间内的解。右侧面板中的等值线强调了解相对于流动方向的对称性。

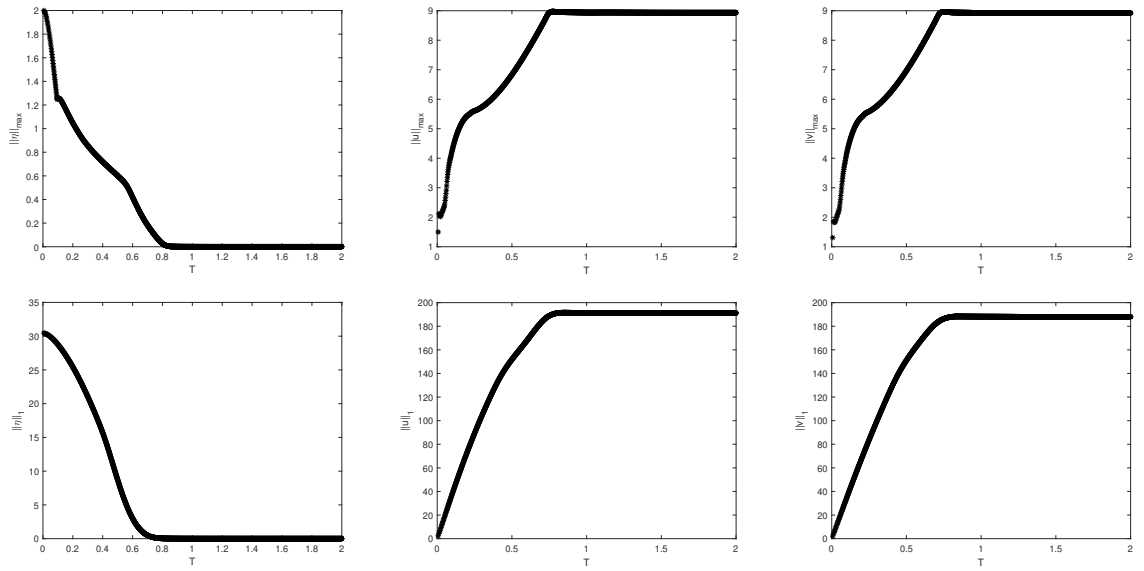

FIGURE 14. 测试案例2.3b——带障碍物的双曲面中心凸起：干湿交替模拟。守恒变量的 $L^{\infty}-$ 和 $L^{1}-$范数随时间的变化。我们注意到，一旦水深趋于零（见左侧面板），速度便达到其消失极限（见中间和右侧面板）。此外，在 $s^{1}-$ 和 $s^{2}-$方向上的速度极限值也呈现出对称行为。

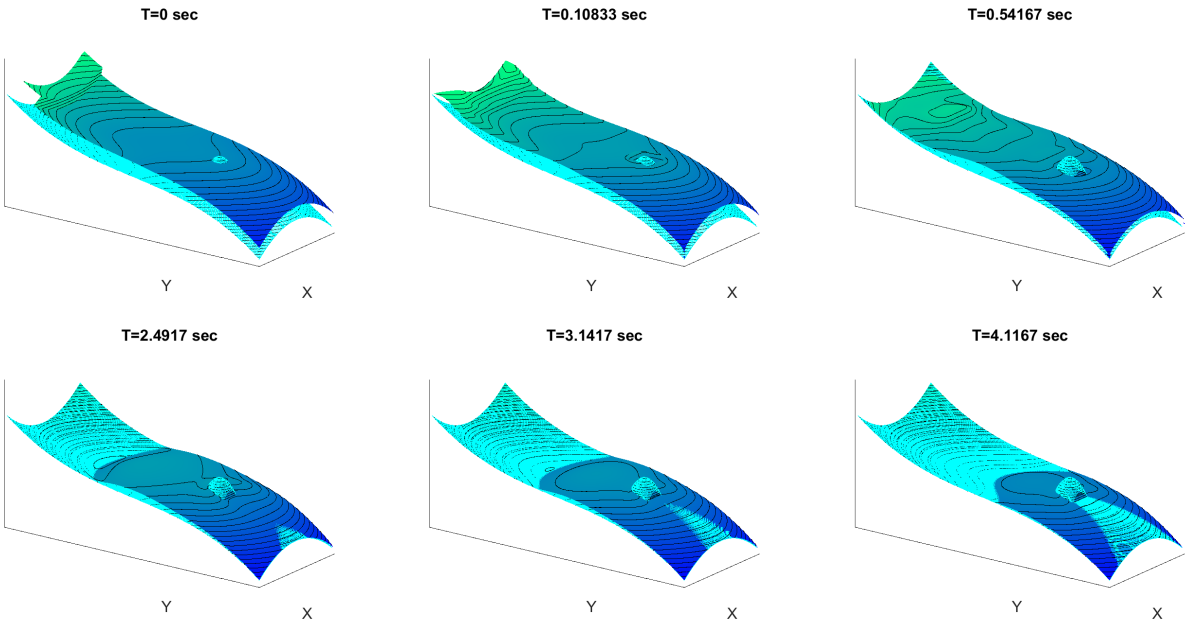

FIGURE 15. 测试案例 2.4——带障碍物的完全三维表面：不同时刻的水深演化。网格由 256×640 个单元组成。

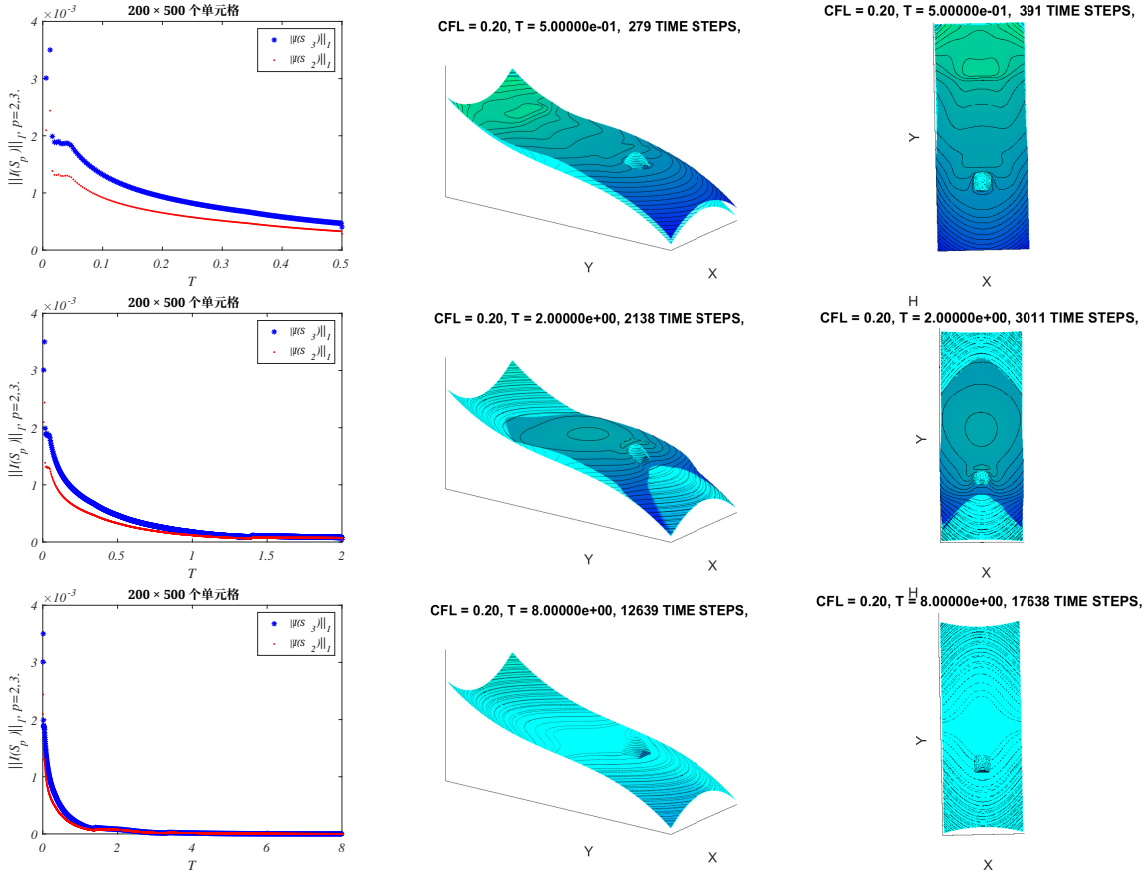

FIGURE 16. 测试案例 2.4——带障碍物的完全三维表面：良平衡模拟。左列显示了 $I(\mathbf{S})$ 的范数在区间 $[0,T]$ 内、 $T=0.5$，2。0，8。0 秒时的变化。中列和右列显示了相同时刻以水深表示的解。右列中的等值线强调了数值解相对于流动方向的对称性。

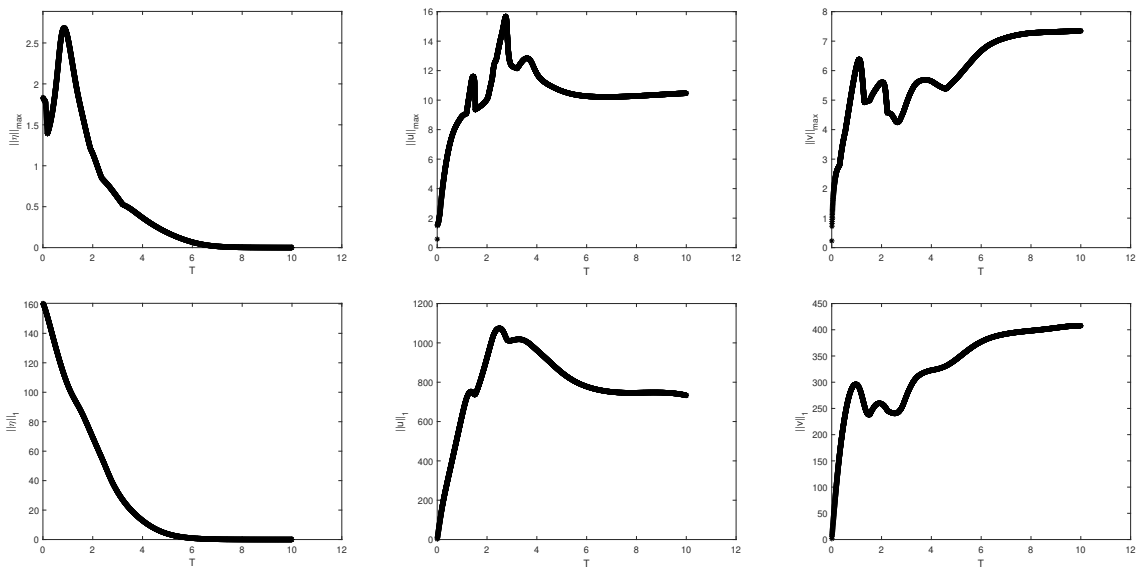

FIGURE 17. 测试案例 2.4——带障碍物的完全三维表面：干湿交替模拟。守恒变量的 L^∞–范数和 L^1–范数随时间的变化。

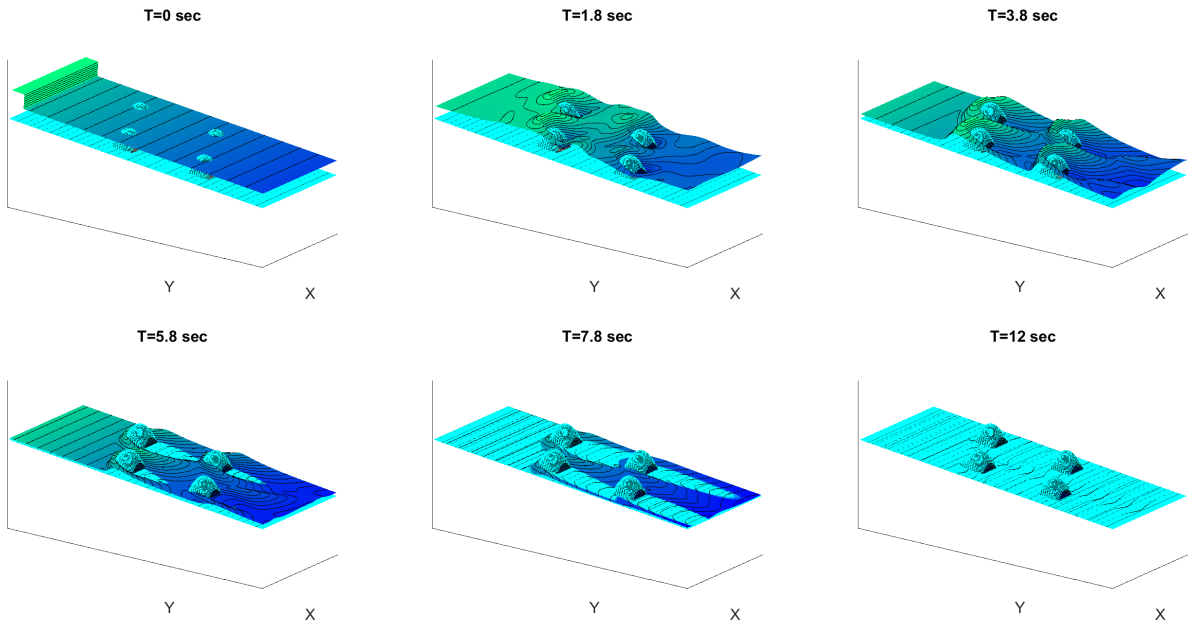

FIGURE 18. 测试案例 3——多个障碍物上排水过程的演化。左上图： $T = 0$ s 时的初始构型。在 $T = 1.8$ s（上中图）至 $T = 7.8$ s（下中图）期间，模拟捕捉到了不同湿润区域的形成，这些区域具有非零速度；同时也形成了速度消失的干涸区域。显然，排水模式受到地形凸起存在的显著影响。右下图： $T = 12$ s 时的最终排水稳态。

图18展示了流体演化过程，以及其收敛至非平凡的完全排水稳态的过程。可以观察到动态湿润区域与完全干燥的稳态区域同时存在：前者是水深为零、速度非零，并对应双曲系统中非零特征值的区域；后者则是障碍物下游水深消失或保持静止，且速度为零、特征值消失的区域。我们想强调的是，我们的内禀拉格朗日–欧拉格式能够处理这些复杂情况，无需附加条件或人工阈值处理。

5. Concluding remarks and future directions

在本研究中，我们扩展了用于曲面底部内禀浅水方程的内禀拉格朗日–欧拉有限体积方法，使其能够考虑局部地形不连续性。通过在内禀几何框架中将这些不连续性重新表述为局部扰动，我们成功整合了复杂的表面特征，而无需对系统结构进行全局修改。

我们公式的核心优势在于避免使用传统的基于黎曼求解器的技术。该格式无需局部黎曼问题，即可克服处理非严格双曲系统时的局限，并放宽一些数学假设，例如对雅可比矩阵可对角化性的要求。为实现这一目标，我们的方法采用无流曲线的概念，并通过一种新颖的“弱”CFL条件确保稳定性。该框架允许将不连续强迫函数直接纳入欧拉步骤，而无需借助辅助方程来处理通常由地形跃变触发的双曲性丧失。

数值结果证实，内禀拉格朗日-欧拉框架有效地规避了与重力驱动流相关的历史难题：

- 良平衡：“静止湖泊”基准测试展示了通量梯度与几何源项之间自然且精确的离散平衡，从而无需外部求根算法或复杂的静水重构。
- 干湿交替：长时间模拟中的速度稳定性证明了该格式对于 $\eta \to 0$的稳健性。通过确保弱正性 [12, 6]（依据 Lax 和 Liu 的定义），我们的方法能够保持物理一致的移动前沿，同时避免非物理振荡。
- 双曲性与曲率：通过遵守无流曲线的稳定性限制，该表述确保系统保持适定性，即使存在表面曲率也是如此。无论底层度量或地形障碍物的复杂程度如何，都能高保真地捕捉波传播速度。

总之，所提出的内禀表述为模拟现实中的地球物理和工程流动提供了一种灵活且稳健的工具，例如泥石流、河流洪水和沿海淹没，这些流动所处地形通常具有较大的曲率或陡峭的坡度。我们无需黎曼求解器的方法为具有复杂地形和摩擦项的浅水方程提供了更高的简洁性和数学灵活性。

本文的主要目标是证明，无流曲线在时空中界定了一个良平衡区域。尽管采用了带线性空间重构的显式前向欧拉时间步进格式，所提出的方法仍能准确捕捉流动的基本特征。需要注意的是，关于 ISWE模型和我们的拉格朗日–欧拉数值方法的详细性质，仍有许多问题尚未解决。这些问题包括研究非线性波相互作用的结构、ISWE方法的耗散特性、能量和熵守恒性质，以及格式中引入的人工耗散量。此外，未来的研究将把该框架扩展到高分辨率时空离散化，并对存在由曼宁公式引起的摩擦效应时的物理耗散进行严格分析。

除了上述未来目标外，我们还计划将这一内禀框架扩展到具有全局不连续性的地形，并研究多层系统。在这类情形下，处理层间不可对角化相互作用的能力至关重要。我们的内禀几何方法仍将是准确考虑分层界面演变的基础，同时进一步拓展拉格朗日–欧拉求解器的稳定性限制。

Statements and declarations

致谢与经费支持。 E. Abreu 感谢巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）和圣保罗研究基金会（FAPESP）提供的经费支持，两项资助编号分别为 307641/2023-6 和 2025/07662-6。E. Bachini 和 M. Putti 获得欧盟“下一代欧盟”国家复苏与韧性计划 [NRRP], 任务4、组成部分2、投资1.3——D.D. 1243 2/082022 项目资助，该项目属于扩展伙伴关系“RETURN：面向气候变化的韧性社区多风险科学”；他们还获得任务4、组成部分2、投资1.5 项目资助——2021年12月30日第3277号招标公告，ECS00000043，2023年6月23日第1058号，CUP C43C22000340006，“iNEST：互联东北创新生态系统”。E. Bachini 和 M. Putti 是国家科学计算组—国家高等数学研究所（GNCS-INdAM）的成员。

作者贡献。 E. Abreu：概念构思、方法设计、正式分析、撰写——审阅与编辑、实施、软件、验证、数据整理。E. Bachini：概念构思、方法设计、正式分析、撰写——审阅与编辑。J. Perez：概念构思、方法设计、正式分析、撰写——审阅与编辑、实施、软件、验证、数据整理。M. Putti：概念构思、方法设计、正式分析、撰写——审阅与编辑。

利益冲突。 作者声明不存在需要披露的经济利益。

代码可用性。 如有需要，请向作者索取。

Appendix A. Calculation details: numerical integration of the source term

本节报告在笛卡尔网格上对项 $I(\mathbf{S})$ 的求积近似进行显式计算。

中点法。 考虑区域 D^n，并回顾 $D^n := [t^n, t^{n+1}] \times R \subset \mathbb{R} \times \Gamma$，其边界为 $\partial D = R^n \cup \mathcal{LS}^n \cup R^{n+1}$ 其中，R^n 是在时刻 t^n 底部表面上的区域（单元），而 R^{n+1} 是在时刻 t^{n+1}演化得到的同一区域，$\mathcal{LS}^n$ 则是时空中的侧向无流面。随后，将后者离散为与四条单元边相关的四条局部无流曲线；对于笛卡尔网格这一特殊情形，它们表示为：

$$\sigma^{\beta}_{i-\frac{1}{2},j}(t) \approx x_{i-\frac{1}{2}} + (t-t^n)\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,2)}_{W} h^2_{(1)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}}, \quad \sigma^{\beta}_{i+\frac{1}{2},j}(t) \approx x_{i+\frac{1}{2}} + (t-t^n)\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,2)}_{E} h^2_{(1)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}},$$
$$\sigma^{\beta}_{i,j-\frac{1}{2}}(t) \approx y_{j-\frac{1}{2}} + (t-t^n)\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,3)}_{S} h^2_{(2)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}}, \quad \sigma^{\beta}_{i,j+\frac{1}{2}}(t) \approx y_{j+\frac{1}{2}} + (t-t^n)\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,3)}_{N} h^2_{(2)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}}.$$

其中，i，j 为单元顶点，$i \pm 1/2$，$j \pm 1/2$ 为边中点，且 $\beta = 1$，2、3。在此设定下，$I(\mathbf{S})$的求积近似可通过以下方式计算：

$$\begin{aligned}
I(\overline{\mathbf{S}}) &= \int_{D^n} \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{s},\mathbf{U}) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma^{\beta}_{i,j-\frac{1}{2}}(t)}^{\sigma^{\beta}_{i,j+\frac{1}{2}}(t)} \int_{\sigma^{\beta}_{i-\frac{1}{2},j}(t)}^{\sigma^{\beta}_{i+\frac{1}{2},j}(t)} \overline{\mathbf{S}}(s^1, s^2, \mathbf{U}(t))\, \mathrm{d}s^1\, \mathrm{d}s^2\, \mathrm{d}t \\
&\approx \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\sigma^{\beta}_{i+\frac{1}{2},j}(t) - \sigma^{\beta}_{i-\frac{1}{2},j}(t)\right]\left[\sigma^{\beta}_{i,j+\frac{1}{2}}(t) - \sigma^{\beta}_{i,j-\frac{1}{2}}(t)\right] \\
&\qquad \overline{\mathbf{S}}\left(\frac{\sigma^{\beta}_{i+\frac{1}{2},j}(t) + \sigma^{\beta}_{i-\frac{1}{2},j}(t)}{2}, \frac{\sigma^{\beta}_{i,j+\frac{1}{2}}(t) + \sigma^{\beta}_{i,j-\frac{1}{2}}(t)}{2}, \mathbf{U}(t)\right) \mathrm{d}t \\
&\approx \int_{t^n}^{t^{n+1}} hh\, \overline{\mathbf{S}}\left(\frac{\sigma^{\beta}_{i+\frac{1}{2},j}(t) + \sigma^{\beta}_{i-\frac{1}{2},j}(t)}{2}, \frac{\sigma^{\beta}_{i,j+\frac{1}{2}}(t) + \sigma^{\beta}_{i,j-\frac{1}{2}}(t)}{2}, \mathbf{U}(t)\right) \mathrm{d}t \\
&\approx h^2 \Delta t\, \overline{\mathbf{S}}\left(\frac{\sigma^{\beta}_{i+\frac{1}{2},j}\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) + \sigma^{\beta}_{i-\frac{1}{2},j}\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)}{2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{\sigma^{\beta}_{i,j+\frac{1}{2}}\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) + \sigma^{\beta}_{i,j-\frac{1}{2}}\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)}{2}, \mathbf{U}(t^n + \Delta t/2)\right) \\
&\approx h^2\, \Delta t\, \overline{\mathbf{S}}\left(A, B, \mathbf{U}(t^n + \Delta t/2)\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

其中，我们通过以下方式定义了 A 和 B：

$$A = \frac{\Delta t}{2}\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,2)}_{W} h^2_{(1)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}} + x^n_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,2)}_{E} h^2_{(1)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}} + x^n_{i-\frac{1}{2},j}$$
$$B = \frac{\Delta t}{2}\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,3)}_{N} h^2_{(2)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}} + x^n_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\underline{\underline{F}}^{(\beta,3)}_{S} h^2_{(2)}}{\mathbf{U}^{\beta,n}} + x^2_{i,j-\frac{1}{2}}$$

最后，方程 13 可重写如下：

$h_x = h_y$	平面	抛物线	HCB	三维曲面
0.06250	2.65144e-02	3.85305e-02	1.94010e-01	4.71504e-02
0.01563	2.12006e-02	2.59658e-02	1.52012e-01	3.92747e-02
0.00391	1.93598e-02	1.29988e-02	1.05041e-01	2.51919e-02
0.00098	1.86435e-02	8.34601e-03	6.98280e-02	1.78970e-02
0.00024	1.46213e-02	5.16089e-03	4.70245e-02	1.12399e-02
0.00006	7.21056e-03	3.28825e-03	3.01720e-02	6.42648e-03

TABLE 1. L^1两个连续加密层级上解（水深值）之间相对差异的范数。

$$I(\overline{\mathbf{S}}) \approx \Delta t\, h^2\, \overline{\mathbf{S}}\left(x_j^n + \left[\frac{\underline{\underline{F}}_W^{(\beta,2)} h_{(1)}^2}{\mathbf{U}^{\beta,n}} - \frac{\underline{\underline{F}}_E^{(\beta,2)} h_{(1)}^2}{\mathbf{U}^{\beta,n}}\right]\frac{\Delta t}{2} + \frac{h}{2},\right.$$
$$\left. y_j^n + \left[\frac{\underline{\underline{F}}_N^{(\beta,2)} h_{(1)}^2}{\mathbf{U}^{\beta,n}} - \frac{\underline{\underline{F}}_S^{(\beta,2)} h_{(1)}^2}{\mathbf{U}^{\beta,n}}\right]\frac{\Delta t}{2} + \frac{h}{2}, \mathbf{U}(t^n + \Delta t/2)\right).$$

_ 梯形法则。 将之前的计算扩展到梯形法则的情形，积分$I(\mathbf{S})$ over D^n 可近似为:

$$I(\overline{\mathbf{S}}) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma^\beta_{i,j-\frac{1}{2}}(t)}^{\sigma^\beta_{i,j+\frac{1}{2}}(t)} \int_{\sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t)}^{\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t)} \overline{\mathbf{S}}(s^1, s^2, \mathbf{U}(t))\, \mathrm{d}s^1\, \mathrm{d}s^2\, \mathrm{d}t$$

$$\approx \frac{1}{2}\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma^\beta_{i,j-\frac{1}{2}}(t)}^{\sigma^\beta_{i,j+\frac{1}{2}}(t)} \left[\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t) - \sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t)\right]$$
$$\left(\overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t), s^2, \mathbf{U}(t)) + \overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t), s^2, \mathbf{U}(t))\right)\, \mathrm{d}s^2\, \mathrm{d}t$$

$$\approx \frac{1}{4}\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t) - \sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t)\right]\left[\sigma^\beta_{i,j+\frac{1}{2}}(t) - \sigma^\beta_{i,j-\frac{1}{2}}(t)\right]$$
$$\Big[\overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t), \sigma^\beta_{i,j+\frac{1}{2}}(t), \mathbf{U}(t)) + \overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t), \sigma^\beta_{i,j+\frac{1}{2}}(t), \mathbf{U}(t))$$
$$+\overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t), \sigma^\beta_{i,j-\frac{1}{2}}(t), \mathbf{U}(t)) + \overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t), \sigma^\beta_{i,j-\frac{1}{2}}(t), \mathbf{U}(t))\Big]\, \mathrm{d}t$$

$$\approx \frac{\Delta t}{4}\left[\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t^n) - \sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t^n)\right]\left[\sigma^\beta_{i,j+\frac{1}{2}}(t^n) - \sigma^\beta_{i,j-\frac{1}{2}}(t^n)\right]$$
$$\Big[\overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t^n), \sigma^\beta_{i,j+\frac{1}{2}}(t^n), \mathbf{U}^n) + \overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t^n), \sigma^\beta_{i,j+\frac{1}{2}}(t^n), \mathbf{U}^n)$$
$$+\overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i+\frac{1}{2},j}(t^n), \sigma^\beta_{i,j-\frac{1}{2}}(t^n), \mathbf{U}^n) + \overline{\mathbf{S}}(\sigma^\beta_{i-\frac{1}{2},j}(t^n), \sigma^\beta_{i,j-\frac{1}{2}}(t^n), \mathbf{U}^n)\Big]$$

$$= \frac{\Delta t\, h^2}{4}\Big[\overline{\mathbf{S}}(x^\beta_{i+\frac{1}{2}}, y^\beta_{j+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}^n) + \overline{\mathbf{S}}(x^\beta_{i-\frac{1}{2}}, y^\beta_{j+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}^n) +$$
$$\overline{\mathbf{S}}(x^\beta_{i+\frac{1}{2}}, y^\beta_{j-\frac{1}{2}}, \mathbf{U}^n) + \overline{\mathbf{S}}(x^\beta_{i-\frac{1}{2}}, y^\beta_{j-\frac{1}{2}}, \mathbf{U}^n)\Big]$$

APPENDIX B. REFINEMENT STUDY

连续底部地形。表1和表2展示了内禀拉格朗日-欧拉有限体积格式在 [9], 所述测试案例（即规则的连续底部曲面）下对 ISWE模型的数值收敛性。对于网格的每个细化层级，我们计算数值水深的相对 L^1-误差。表1中，我们计算两个连续细化层级之间解之差的误差；表2中，则计算给定细化层级与最细细化层级之间解之差的误差。可以注意到，观测到的收敛阶与 $\mathcal{O}(h^\alpha)$ 的先验误差估计一致，其中$\alpha \in [0.25, 0.5]$。

$h_x = h_y$	平面	抛物线	HCB	三维曲面
0.06250	5.48628e-00	2.22455e-02	1.15492e-01	1.58723e-01
0.01563	9.69722e-01	1.18538e-02	9.70787e-02	1.01976e-01
0.00391	1.52901e-01	7.08104e-03	5.95621e-02	6.14649e-02
0.00098	1.86435e-02	4.17257e-03	3.54222e-02	3.56352e-02
0.00024	1.36435e-02	2.10924e-03	1.89544e-02	1.76679e-02
0.00006	1.01069e-02	8.22064e-04	7.54299e-03	3.35342e-03

TABLE 2. L^1-范数表示给定细化层级下的解（水深值）与最精细细化层级之间相对差异。

$h_x = h_y$	平面	抛物线	HCB	三维曲面
0.06250	1.55728e-02	2.37793e-02	1.34914e-01	5.67494e-02
0.01563	1.00175e-02	2.17714e-02	7.87147e-02	4.27791e-02
0.00391	7.63599e-03	1.29988e-02	4.96589e-02	3.08401e-02
0.00098	4.83082e-02	1.27666e-02	1.86103e-02	2.16371e-02
0.00024	3.04227e-03	1.01799e-02	4.70245e-02	1.41185e-02
0.00006	1.41513e-03	1.14275e-03	1.67135e-02	6.72282e-03

TABLE 3. L^1两个连续加密层级上解（水深值）之间相对差异的范数。

$h_x = h_y$	平面	抛物线	HCB	三维曲面
0.06250	3.81885e-02	7.91877e-02	2.85631e-01	1.87205e-01
0.01563	2.52503e-02	6.14942e-02	1.67627e-01	1.20504e-01
0.00391	1.72809e-02	4.43324e-02	1.00541e-01	7.50085e-02
0.00098	1.06938e-02	2.97128e-02	5.64059e-02	4.37445e-02
0.00024	6.59381e-02	1.76131e-02	2.76677e-02	2.24702e-02
0.00006	4.02438e-02	7.59395e-03	1.01721e-02	8.52291e-03

给定细化层级下的解（水深值）与最细细化之间相对差异的 TABLE 4. L^1 范数。

局部不连续底部地形。表3和表4展示了在第4节定义的局部不连续底部地形情形下，内禀拉格朗日-欧拉有限体积格式对 ISWE模型的数值收敛性。对于网格细化的每个层级，我们计算水深的相对 L^1-误差。与连续情形类似，表3展示了两个连续细化层级之间解之差的误差；表4则计算给定层级与最细细化层级之间解之差的误差。同样可以注意到，观测到的收敛阶与 $\mathcal{O}(h^\alpha)$ 的先验误差估计一致，其中 $\alpha \in [0.25, 0.5]$。

REFERENCES

[1] E. Abreu 和 J. P´erez. 一种用于平衡律及其应用的快速、稳健且简洁的拉格朗日–欧拉求解器. 《计算数学与应用》, 77(9):2310–2336, 2019.[2] E. Abreu、W. Lambert、J. Perez 和 A. Santo. 一种用于输运模型及相关应用的新型有限体积方法，并采用平衡源项. 《数学计算与模拟》, 137:2–28, 2017.[3] E. Abreu、W. Lambert、J. P´erez 和 A. Santo. 用于标量双曲守恒律拉格朗日–欧拉格式的弱渐近解分析. 《双曲问题：理论、数值与应用》, 第 223–230 页, 2018.[4] E. Abreu、C. Diaz、J. Galvis 和 J. P´erez. 复杂流动中 Darcy 流与双曲输运多尺度耦合及模拟的守恒性质. 《多尺度建模与模拟》, 18(4): 1375–1408, 2020.[5] E. Abreu、V. Matos、J. P´erez 和 P. Rodr´ıguez-Berm´udez. 一类用于含强迫项一阶双曲问题的拉格朗日–欧拉激波捕捉格式. 《科学计算杂志》, 86(1):1–47, 2021.[6] E. Abreu、J. Fran¸cois、W. Lambert 和 J. P´erez. 一类用于多维双曲守恒律系统的正性半离散拉格朗日–欧拉格式. 《科学计算杂志》, 90(1):1–79, 2022.

[7]E. Abreu、J. Fran¸cois、W. Lambert 和 J. P´erez. 用于双曲输运模型的半离散拉格朗日–欧拉格式. 《计算与应用数学杂志》, 406:114011, 2022.[8]E. Abreu、J. Fran¸cois、W. Lambert 和 J. P´erez. 用于双曲输运模型的半离散拉格朗日–欧拉格式. 《计算与应用数学杂志》, 第 0377–0427 页, 2022.[9] E. Abreu、E. Bachini、J. P´erez 和 M. Putti. 一种几何内禀格式：用于具有可变地形和不连续数据的二维浅水方程的拉格朗日–欧拉格式. 《应用数学与计算》, 443: 127776, 2023.[10] E. Abreu、J. Agudelo 和 J. P´erez. 一种基于三角形、通过弱渐近方法构造的正性半离散拉格朗日–欧拉格式，用于标量方程和双曲守恒律系统. 《计算与应用数学杂志》, 437(437):1 – 28, 2024.[11] E. Abreu、V. Matos、J. P´erez 和 P. Rodr´ıguez-Berm´udez. 带狄拉克 delta 源和不连续通量的平衡律黎曼问题解 . 《双曲微分方程杂志》 , 21(01):1–32, 2024.[12] E. Abreu 、 J. Agudelo、W. Lambert 和 J. Perez. 规则三角形网格上用于双曲问题的拉格朗日–欧拉方法：标量情形的误差估计及多维系统的正性原理. 《动力系统与微分方程杂志》, 37(1):749–814, 2025. ISSN 1040-7294.[13] A. I. Aleksyuk、M. A. Malakhov 和 V. V. Belikov. 不连续底部浅水方程的精确黎曼求解器. 《计算物理学杂志》, 450:110801, 2022. ISSN 0021-9991.[14] B. Andreianov 和 K. Sbihi. 标量守恒律一般边值问题的适定性. 《美国数学会汇刊》, 367(6):3763–3806, 2015 年 6 月.[15] B. Andreianov、K. H. Karlsen 和 N. H. Risebro. 通量不连续守恒律的消失黏性逼近. NHM, 5(3):617–633, 2010.[16] B. Andreianov、K. H. Karlsen 和 N. H. Risebro. 通量不连续标量守恒律的 l^1-耗散求解器理论. 《有理力学与分析档案》, 201(1):27–86, 2011 年 1 月.[17] T. Arbogast 和 C.-S. Huang. 无散场中对流–扩散问题的全守恒欧拉–拉格朗日方法. 《计算物理学杂志》, 229(9):3415–3427, 2010.[18] T. Arbogast、C.-S. Huang 和 T. F. Russell. 一维多孔介质模型两相流问题的局部守恒欧拉–拉格朗日方法. 《SIAM 科学计算杂志》, 34(4): A1950–A1974, 2012.[19] E. Audusse、F. Bouchut、M. Bristeau、R. Klein 和 B. Perthame. 一种用于浅水流的快速稳定平衡保持格式及静水重构. 《SIAM 科学计算杂志》, 25(6):2050–2065, 2004.[20] E. Bachini 和 M. Putti. 浅水流的几何内禀建模. 《数值分析与数学建模》, 54(6):2125–2157, 2020.[21] F. Bouchut. 《双曲守恒律有限体积方法的非线性稳定性及源项平衡格式》, 数学前沿丛书第 2/2004 卷. Birkh¨auser Basel, 2004 年 1 月. ISBN 3-7643-6665-6.[22] F. Bouchut 和 M. Westdickenberg. 任意地形下重力驱动的浅水模型. 《数学科学通讯》, 2(3):359–389, 2004 年 9 月 .[23] F. Bouchut 、 A. Mangeney-Castelnau 、 B. Perthame 和 J.-P. Vilotte. 一种新型 Saint Venant–Savage–Hutter 型重力驱动浅水流模型. 《巴黎科学院数学报告》, 336:531–536, 2003 年 1 月.[24] S. Bunya、E. J. Kubatko、J. J. Westerink 和 C. Dawson. 浅水方程的 Runge–Kutta 不连续 Galerkin 解中的润湿与干燥处理. 《计算方法与应用力学工程》, 198(17-20):1548–1562, 2009.[25] C. E. Castro 和 E. F. Toro. 双曲平衡律高阶黎曼问题的求解器. 《计算物理学杂志》, 227(4):2481–2513, 2008.[26]L. Cozzolino、R. Della Morte、C. C.、G. Del Giudice 和 D. Pianese. 阶跃处采用静水压力分布的不连续底部浅水方程数值解. 《水资源进展》, 34(11):1413–1426, 2011. ISSN 0309-1708.[27] M. C. D´ıaz 、 E. D. Fern´andez-Nieto 、 J. Garres-D´ıaz 和 T. M. de Luna. 关于两层浅水系统双曲性丧失的不同数值处理方法的讨论. 《水资源进展》, 182: 104587, 2023.[28] M. Dumbser 和 E. F. Toro. Osher 黎曼求解器向非守恒双曲系统的一种简单推广. 《科学计算杂志》, 48:70–88, 2011.[29] M. Dumbser 、 C. Enaux 和 E. F. Toro. 用于刚性双曲平衡律的超高精度有限体积格式 . 《计算物理学杂志》, 227(8):3971–4001, 2008.

[30] H. Gao、M. Liao 和 G. Feng。用于 iNSAR 地震形变反演的改进四叉树采样方法。《Remote Sens.》，13(9):1678，2021。[31] F. Gatti、M. Fois、C. de Falco、S. Perotto 和 L. Formaggia。快速移动滑坡的并行模拟：时空网格自适应与湿润锋的精确追踪。《Int. J. Numer. Methods Fluids》，95 (8):1286–1309，2023。[32] G. Guerra。具有奇异非守恒源项的标量守恒律的适定性。《J. Differ. Equ.》，206(2):438–469，2004。ISSN 0022-0396。[33] G. Hern´andez-Due˜nas 和 S. Karni。渠道中的浅水流。《J. Sci. Comput.》，48(1):190–208，2011。[34] C.-S. Huang、T. Arbogast 和 J. Qiu。用于平流问题的欧拉–拉格朗日WENO有限体积格式。《J. Comp. Phys.》，231(11):4028–4052，2012。[35] N. Krvavica、M. Tuhtan 和 G. Jeleni´c。Roe求解器在双层浅水方程中的解析实现及对双曲性丧失的精确处理。《Adv. Water Resour.》，122:187–205，2018。[36] P. G. LeFloch 和 M. D. Thanh。具有不连续地形的浅水方程的黎曼问题。《Comm. Math. Sci.》，5(4):856–885，2007。[37] C. Par´es。非守恒双曲系统的数值方法：理论框架。《SIAM J. Num. Anal.》，44(1):300–321，2006。[38] C. Par´es 和 E. Pimentel。具有不连续地形的浅水方程的黎曼问题：干湿情形。《J. Comp. Phys.》，378:344–365，2019。ISSN 0021-9991。[39] B. Perthame 和 C. Simeoni。带源项的圣维南系统的动理学格式。《Calcolo》，38(4):201–231，2001。ISSN 0008-0624。[40] A. Pochet、W. Celes、H. Lopes 和 M. Gattass。一种用于自动生成四边形网格的新型基于四叉树的方法。《Eng. Comput.》，33:275–292，2017。[41] S. B. Savage 和 K. Hutter。有限质量颗粒材料沿粗糙斜坡下滑的运动。《J. Fluid Mech.》，199(-1):177–215，1989年2月。[42] X. Sun、G. Wang 和 Y. Ma。一种用于通量不连续标量守恒律的新型改进局部Lax–Friedrichs格式。《Appl. Math. Let.》，105:106328，2020。ISSN 0893-9659。[43] A. Tabarraei 和 N. Sukumar。在协调四叉树网格上的自适应计算。《Finite Elem. Anal. Des.》，41(7-8):686–702，2005。[44] E. Toro。自由表面浅水流的激波捕捉方法。John Wiley，2001。ISBN 9780471987666。[45] A. Valiani 和 V. Caleffi。适用于任意横截面渠道的一维增广浅水方程组。《Adv. Water Resour.》，189:104735，2024。ISSN 0309-1708。[46] C. B. Vreugdenhil。《浅水流数值方法》，第13卷。Springer Science & Business Media，2013。[47] Z. Xu 和 C.-W. Shu。一种基于高斯–洛巴托求积公式的双曲平衡律高阶平衡保持间断伽辽金方法。《J. Sci. Comput.》，101(2):30，2024。ISSN 0885-7474。编号：39。

[1] Department of Applied Mathematics, University of Campinas - IMECC, Brazil, [2] Department of Agronomy, Food, Natural resources, Animals and Environment, University of Padua, Italy, [3] ITM-University Institution, Medellin,Colombia