C-代数的普适框架刻画

MOHAMMAD B. ASADI 和 ZAHRA HASSANPOUR-YAKHDANI

摘要。我们证明，一个 C^*-代数 A 具有如下性质：每个希尔伯特 A-模都存在框架，当且仅当 A 是紧算子代数的 c_0直和。这解决了 Amini、Asadi、Elliott 和 Khosravi（2017）提出的刻画问题；该问题源于 Frank 和 Larson（2002）的框架存在性问题。

arXiv:2611.32953v1 [math.OA] 24 Nov 2026

1. 引言

关于可数生成的希尔伯特 C^*-模，其框架理论已经十分完善：每个这样的模都存在一个标准帕塞瓦尔框架 [2, 命题 2.3 和定理 2.5]。对于任意模，相应的存在性问题取决于系数代数。Frank 和 Larson[6, 问题 8.1] 于 2002 年提出：每个含幺 C^*-代数上的希尔伯特模是否都具有归一化紧框架？Li [11, 定理 1.1]给出了否定答案，并刻画了具有普适框架存在性的交换含幺代数，证明它们恰好是有限维代数。Amini、Asadi、Elliott 和 Khosravi 得到了非含幺交换对应情形，并提出了一般刻画问题 [1, 定理 1.4 及问题 1.2、1.5]。

正向结论已为人所知：根据 Bakić 和 Guljaš [5, 定理 1 和 4],的结果，每个紧算子 C^*-代数上的希尔伯特模都存在标准 Parseval 框架。我们证明其逆向结论，且不要求可分性或 σ幺性假设。更确切地说，对于每个 C^*-代数 A，我们得到

$$\text{every Hilbert } A\text{-module admits a frame} \quad \Longleftrightarrow \quad A \cong \bigoplus_{j\in J}^{c_0} \mathcal{K}(H_j).$$

这里的框架允许具有任意指标集，且框架和超弱收敛。将全称量词限制在满模，或限制在至多有$\aleph_1$ 个生成元的模时，该刻画仍然成立。对于非紧算子型代数，我们构造一个满的无框架模，以及一个最小生成基数为$\aleph_1$的无框架子模。该构造还确定了这个满模的生成基数和稠密特征。

这一障碍直接在 Hilbert 模范畴中构造。正元素的谱中一个非零聚点，通过连续函数演算，给出一个以$\aleph_1$ 二进制序列为指标的正定核。适当的态揭示了由此得到的模的两个方面：其特定元素在每个逼近态下仅由有限多个等价类表示，但构成一个不可数的正交规范族，且位于一个
弱* 聚态。上贝塞尔界与模元素的可数支撑相结合，因而与下框架界不相容。其基本的分离思想与 Li 的构造 [11]有关； [1, 对定理 2.8]的证明中也出现了基于态的可数性论证。

早期关于无框架模的例子见于 [3, 4]；关于局部有单位代数，另见 [7] 。关于希尔伯特模中紧性与框架的相关研究见 [8, 9]。本文论证既不采用关于 A 的表示论假设，也不采用额外的集合论假设。作为分类和 [1, 定理 1.6], 的结果，本文还讨论了 [1,问题 1.7] 中提出的关于极大交换子代数的问题。

2020 数学主题分类。主要 46L08；次要 46L05、42C15。关键词和短语。Hilbert C^*-模、框架、紧算子、正定核。通讯作者：Mohammad B. Asadi。

2. 预备知识与谱判据

全文中， A 表示一个 C^*-代数。所有希尔伯特 A-模都是右模，且内积对第二个变量线性。若 $\operatorname{span}\langle E, E\rangle = A$，则称模 E 是满的。若某个子集的 $\overline{\ \ }$-线性张成在范数下稠密，则称该子集生成 E。我们用 $\operatorname{gen}(E)$ 表示一个 $\tilde{}$生成集的最小基数，用 $\operatorname{dens}(E)$ 表示 E 的稠密特征。当 A 是有单位的时，单位化 A 取为 $\sim A$ 本身。除非另有说明，谱和函数演算均在 A 中计算。关于希尔伯特模的标准事实，参见 [10]。

定义 2.1。 若存在常数 $0 < C \le D < \infty$，使得对于每个 $x \in E$，网 $u_{ii\in I}$ 在希尔伯特 A-模 E 中是一个框架（具有超弱求和），则

$$S_F(x) = \sum_{i\in F} \langle x, u_i\rangle\langle u_i, x\rangle, \qquad F \subset I \text{ finite},$$

在 A^{**} 中超弱收敛，且其极限满足

$$C\langle x, x\rangle \ \le\ \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle\langle u_i, x\rangle \ \le\ D\langle x, x\rangle \tag{2.1}$$

在 A^{**} 中。若各和在 A 中按范数收敛，则该框架称为标准框架；若两个界均可取为 1，则称为 Parseval 框架。若存在 $D > 0$，使得对于每个有限的 $F \subseteq I$ 和每个 $x \in E$， $S_F(x) \le D\langle x, x\rangle$，则称一个族为 Bessel 族（具有超弱求和）。该界意味着 A^{**} 中递增的部分和网超弱收敛。

对任意指标集的求和均理解为有限部分和网络的极限。这是 [1, 第 2]节的约定；其中包括标准框。因此，以此意义排除框也就排除了标准框。空族是零模的标准 Parseval 框架。

对于 ω 的一个态，也将其在 A^{**}上的正规延拓记为 ω，并考虑半范数

$$\|a\|_\omega = \omega(a^*a)^{1/2}, \qquad p_\omega(x) = \omega(\langle x, x\rangle)^{1/2}.$$

二者都源自正半定标量内积；特别地，它们满足三角不等式，并且分别受相应范数的上界约束。

下面的初等不等式将被反复使用。

引理 2.2。 若$(u_i)_{i\in I}$ 是一个上界为 D的 *Bessel* 族，则对于任意态 ω 和$x \in E$,

$$\sum_{i\in I} \|\langle u_i, x\rangle\|_\omega^2 \le D p_\omega(x)^2. \tag{2.2}$$

对于固定的 ω 和 x，至多有可数多个被加项非零。若 x、 $y \in E$ 满足$p_\omega(x - y) = 0$，则对每个 i都有 $\|\langle u_i, x - y\rangle\|_\omega = 0$。如果该族是下界为$C$的框，那么

$$C p_\omega(x)^2 \le \sum_{i\in I} \|\langle u_i, x\rangle\|_\omega^2. \tag{2.3}$$

证明。 将 ω 的正规延拓应用于有界递增的部分贝塞尔和网；在含单位情形下，比较 [11, 命题 3。1] 。非负数的可求和族具有可数支撑。应用上界不等式于 $x - y$即可证明消失断言。框架的下界估计则通过将 ω 应用于框架下界不等式得到。□

如果一个 C^*-代数 A 满足命题 2.3(a)–(b) 中的任一等价条件，我们就称其为紧算子型代数。我们采用 C^*-紧算子代数的标准结构描述 [5, p。 251] ，以及此类代数的谱判据 [13, 定理 5。3], ，将其应用于 A 在其单位化中的理想情形。自伴表述与正元素表述在绝对值函数下通过谱映射彼此等价。

命题 2.3. 下列条件等价：

(a) A 同构于希尔伯特空间上紧算子构成的一个 C^*-子代数。(b) $A \cong \bigoplus_{j\in J}^{c_0} K(H_j)$ 是一个希尔伯特空间族 $(H_j)_{j\in J}$。(c) 对于每个 $a \in A_+$， $\sigma(a)$ 都没有非零聚点。

下一个引理给出了所需的谱态。

引理 2.4。 如果 A 不是紧算子型，则存在正收缩元 b、 $e \in A$，趋于零的数 $r_n \in (0,1]$，φ_n 的态（属于 A），以及 φ 的弱* 聚点态（属于 (φ_n)），使得

$$\varphi_n(eg(b)e) = g(r_n), \qquad \varphi(eg(b)e) = g(0) \tag{2.4}$$

对于每个 $g \in C([0,1])$均成立。特别地， $\varphi_n(e^2) = \varphi(e^2) = 1$。

证明。 根据命题 2.3，取 $a \in A_+$ 以及互异的 $\lambda_n \in \sigma(a)$，使其趋于 $\lambda > 0$，且$\lambda_n \neq \lambda$ 和 $\lambda_n > \lambda/2$。令 $f(t) = t(t-\lambda)^2$ 在 $\sigma(a) \cup \{0\}$ 上，并且

$$b = f(a)/\|f(a)\|, \qquad r_n = f(\lambda_n)/\|f(a)\|.$$

由于 $f(a) \neq 0$，分母非零。此外， $r_n > 0$和 $r_n \to 0$。由于 $f(0) = 0$，我们还得到 $b \in A$。令 $e = h(a)$，其中 $0 \le h \le 1$ 连续， $h(0) = 0$，且对$\sim$ $\sim$ $t \ge \lambda/2$有 $h(t) = 1$。将 λ_n 处在 $C^*(1, a)$ 上的求值延拓为 $\widetilde{\varphi}_n$ 的一个态。由 A的态空间的弱* 紧性$\widetilde{}$，某个子网收敛到一个态 $\widetilde{\varphi}$。这些态中的每一个以及它们的极限在 e^2上都取值 1。因此， $\varphi_n = \widetilde{\varphi}_n|_A$ 和 $\varphi = \widetilde{\varphi}|_A$ 是态，并且相应的子网在 A^*中弱* 收敛到 φ。由于 $\widetilde{\varphi}_n$ 在 $C^*(1, a)$ 上与 λ_n 处的求值一致，连续函数演算给出

$$\begin{aligned}\varphi_n(eg(b)e) &= h(\lambda_n)^2 g\Big(\frac{f(\lambda_n)}{\|f(a)\|}\Big)\\ &= g(r_n)\end{aligned}$$

对每个 $g \in C([0,1])$。等式 (2.4) 中的第二个等号由沿所选子网的弱* 收敛以及 g 在零点处的连续性得出。元素 $eg(b)e$ 属于 A，即使 $g(b)$ 是在单位化中计算的也是如此。□

3. 通用框架刻画

固定一个子集 $S \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，其基数为 $\aleph_1$，并包含由所有最终为零序列组成的可数集合 S_0。这样的集合在 ZFC 中存在。对于不同的 $s, t \in S$，令 $m(s,t)$ 表示它们的公共初始段长度，该长度可以为零。令

$$q_n(r) = \min\{1, nr\} \quad (n \ge 0,\ 0 \le r \le 1), \qquad g_{st}(r) = \begin{cases} 1, & s = t,\\ q_{m(s,t)}(r), & s \neq t.\end{cases}$$

特别地， $g_{st}(0) = \delta_{st}$。

引理 3.1。 矩阵 $(g_{st})_{s,t\in F}$属于 $M_{|F|}(C([0,1]))_+$，其中每个 F 都是 S的非空有限子集。

证明。 对于 $n \ge 1$，令 P_n 为以 F 为指标集的矩阵，其 (s,t) 项在 s 与 t的前 n 个坐标相同时为 1，否则为 0。每个 P_n 都是正的，因为对指标作置换后，它是由全一块构成的分块对角矩阵。取一个 $N \ge 1$，使其大于任意不同的 $s, t \in F$对应的$m(s,t)$。逐项计算可得

$$(g_{st}(r))_{s,t\in F} = (1 - q_N(r))I + \sum_{n=1}^{N} (q_n(r) - q_{n-1}(r))P_n.$$

事实上，右侧的对角元素等于 $1 - q_N(r) + \sum_{n=1}^{N}(q_n(r) - q_{n-1}(r)) = 1$。对于不同的 s， $t \in F$，$(s,\ t)$-元素为 $\sum^{m}{}_{(s,\ t)\,n=1}(q_n(r) - q_{n-1}(r)) = q_{m(s,t)}(r) = g_{st}(r)$，其中空和约定为零。所有系数均为非负数。该连续矩阵值函数的逐点正性证明了该结论。□

引理 3.1 中的核确定了一个具有所需生成性质的希尔伯特模。

命题 3.2。 对于任意正压缩算子 $b \in A$，存在一个满的 *Hilbert* A-模E_b 以及可伴随等距映射 $v_s : A_A \to E_b\ (s \in S)$，满足

$$v_s(a)c = v_s(ac), \qquad \langle v_s(a), v_t(c)\rangle = a^* g_{st}(b)c. \tag{3.1}$$

$\bigcup_{s\in S} v_s$（A） 的线性张成在 E_b 中稠密。 E_b 中的每个元素都属于 v_s（A） 的闭线性张成，其中 s 取自 S的某个可数子集。此外，

$$\operatorname{gen}(E_b) \le \max\{\aleph_1, \operatorname{gen}(A_A)\}, \qquad \operatorname{dens}(E_b) \le \max\{\aleph_1, \operatorname{dens}(A)\}.$$

证明。由引理 3.1 和连续函数演算， $k(s,t) = L_{g_{st}(b)}$ 定义了一个取值于 $\mathrm{L}(A_A)$ 的正定核，其中 $L_{g_{st}(b)}$ 表示A_A上的可伴随左乘法。Murphy 的最小 Kolmogorov 分解定理 [12, 定理 2.3] 给出了一个 Hilbert A-模 E_b 以及可伴随映射 $V(s) : A_A \to E_b$，使得 $V(s)^*V(t) = k(s,t)$，并且 $V(s)A$ 关于 $s \in S$ 的线性张成是稠密的。取 $v_s(a) = V(s)a$ 即可得到（3.1）；对角恒等式意味着每个 v_s 都是等距的。此外，对于每个 $d \in A_+$ 以及任意固定的$s \in S$，我们有

$$d = \langle v_s(d^{1/2}), v_s(d^{1/2})\rangle.$$

由于 $A = \operatorname{span}(A_+)$，因此 $\operatorname{span}\langle E_b, E_b\rangle = A$。特别地， E_b 是满的。

给定 $u \in E_b$，由 $v_s(A)$ 的线性张成稠密可知，对每个 $n \ge 1$，都存在一个有限子集 $F_n \subseteq S$ 和元素 $a_{n,s} \in A$，使得

$$\left\| u - \sum_{s\in F_n} v_s(a_{n,s}) \right\| < \frac{1}{n}.$$

集合 $R = \bigcup_{n\ge1} F_n$ 至多可数，因此

$$u \in \overline{\operatorname{span}}\{v_s(a) : s \in R,\ a \in A\}.$$

对于稠密性界，取一个范数稠密子集 $D \subseteq A$，满足 $|D| = \operatorname{dens}(A)$。由$\{v_s(d) : s \in S,\ d \in D\}$ 的有限（$\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$）线性组合构成的集合在 E_b 中稠密，其基数至多为 $\max\{\aleph_1, \operatorname{dens}(A)\}$。对于生成界，设 $T \subseteq A$ 生成A_A。那么$\{v_s(t) : s \in S,\ t \in T\}$ 生成 E_b，因为每个 v_s 都是右 A-线性的。取$|T| = \operatorname{gen}(A_A)$即可得到所述界。□

对于 $R \subseteq S$，记 $E_b(R) = $张成$\{v_t(a) : t \in R,\ \ a \in A\}$，这是一个闭子模。我们称$R$ 支撑 u，如果 $u \in E_b(R)$。

现在我们构造阻碍普适框架存在性的模。

定理 3.3。 设 A 是一个非紧算子型的 C^*-代数。存在一个满的 *Hilbert*A-模 E_b 以及一个闭子模 $E_0 \subseteq E_b$，满足以下性质：

(1) E_b 和 E_0 均不具有框架，即使采用超弱求和也不例外。(2) E_0 的最小生成基数为 $\aleph_1$。(3)最小生成基数与稠密特征满足

$$\operatorname{gen}(E_b) = \max\{\aleph_1, \operatorname{gen}(A_A)\}, \qquad \operatorname{dens}(E_b) = \max\{\aleph_1, \operatorname{dens}(A)\}.$$

证明。 取引理 2.4 中的 b， e， r_n， φ_n， φ，并根据命题 3.2 构造 E_b。对于 $s \in S$，令

$$x_s = v_s(e), \qquad E_0 = \overline{\operatorname{span}}\{x_s a : s \in S,\ a \in A\}.$$

对于 A的任意近似单位 (e_λ)， $x_s e_\lambda \to x_s$；因此 $x_s \in E_0$，并且

$$\langle x_s, x_t\rangle = e g_{st}(b) e. \tag{3.2}$$

因此 $p_{\varphi_n}(x_s) = p_\varphi(x_s) = 1$ 和 $\varphi(\langle x_s,\ x_t\rangle) = \delta_{st}$。

为证明 (1)，令 $(u_i)_{i\in I}$ 为任一模中的任意 Bessel 族，其上界为D。令

$$I_0 = \bigcup_{n\geq 1,\ t\in S_0} \{i \in I : \|\langle u_i, x_t\rangle\|_{\varphi_n} > 0\}.$$

引理 2.2 表明 I_0 是可数的。对于每个 n，选取满足 $N_n r_n \geq 1$ 的 N_n。给定 $s \in S$，选取具有相同前 N_n 个坐标的 $t \in S_0$。于是 $g_{st}(r_n) = 1$（当 $s = t$ 时也成立），因此

$$p_{\varphi_n}(x_s - x_t)^2 = 2 - 2g_{st}(r_n) = 0.$$

对于 $i \notin I_0$，将贝塞尔上界应用于 $x_s - x_t$，并结合 I_0 的定义可得

$$\|\langle u_i, x_s\rangle\|_{\varphi_n} \leq \|\langle u_i, x_s - x_t\rangle\|_{\varphi_n} + \|\langle u_i, x_t\rangle\|_{\varphi_n} = 0.$$

Thus

$$\|\langle u_i, x_s\rangle\|_{\varphi_n} = 0 \quad (n \geq 1,\ s \in S,\ i \notin I_0).$$

对于每个固定的 s，i，正元素 $\langle x_s,\ u_i\rangle\langle u_i,\ x_s\rangle$ 属于 A。沿着 (φ_n) 的弱* 收敛子网对这个固定元素求值，得到

$$\|\langle u_i, x_s\rangle\|_{\varphi} = 0 \quad (s \in S,\ i \notin I_0). \tag{3.3}$$

只有固定系数参与取极限；这里不涉及与无穷和的交换。

对于每个 $i \in I_0$，为 E_b 中的 u_i 选取一个可数支撑 $R_i \subseteq S$。令 $R = \bigcup_{i\in I_0} R_i$，这是一个可数集。若 $s \in S \setminus R$，$t \in R$ 且 $a \in A$，记作 $q = q_{m(t,s)}$。由 (3.1) 以及 aa^* 的正性，

$$\begin{aligned}\|\langle v_t(a), x_s\rangle\|_\varphi^2 &= \varphi(eq(b)aa^*q(b)e)\\ &\leq \|a\|^2\varphi(eq(b)^2e) = \|a\|^2q(0)^2 = 0.\end{aligned}$$

估计式 $\|\langle u, x_s\rangle\|_\varphi \leq \|u\|\,\|x_s\|$ 将这种消失推广到有限和及其范数闭包，因此对每个 $u \in E_b(R)$ 都成立，尤其对 $i \in I_0$ 的 u_i 也成立。结合 (3.3)，可知对每个 $s \notin R$ 和每个 $i \in I$，

$$\varphi(\langle x_s, u_i\rangle\langle u_i, x_s\rangle) = 0.$$

若该 Bessel 族是下界为 $C > 0$ 的框架，任取 $s \in S \setminus R$。引理 2.2 中的下界不等式将给出

$$0 < C = Cp_\varphi(x_s)^2 \leq \sum_{i\in I} \|\langle u_i, x_s\rangle\|_\varphi^2 = 0,$$

这就产生了矛盾。由此证明了 (1)。E_b 的满性是命题 3.2 的一部分。

族 $(x_s)_{s\in S}$ 生成 E_0，因此 $\mathrm{gen}(E_0) \leq \aleph_1$。两个模都不是可数生成的，因为它们都不具有框架；每个可数生成的希尔伯特模都有标准帕塞瓦尔框架 [2,（见命题 2.3 和定理 2.5]）。因此 $\mathrm{gen}(E_0) = \aleph_1$，且 $\mathrm{gen}(E_b) \geq \aleph_1$。

命题 3.2 给出 $\mathrm{gen}(E_b) \leq \max\{\aleph_1, \mathrm{gen}(A_A)\}$。对任意固定的 s，可伴随映射 $v_s^* : E_b \to A_A$ 是满射，因为 $v_s^* v_s = 1_{A_A}$。因此，E_b 的任意生成集在 v_s^* 下的像都生成 A_A，从而得到 $\mathrm{gen}(E_b) \geq \mathrm{gen}(A_A)$。结合 $\mathrm{gen}(E_b) \geq \aleph_1$，，即可证明 (3) 中的生成基数等式。

最后，x_s 彼此之间的距离至少为 $\sqrt{2}$，这由p_φ见证，并且映射 v_s 将 A 等距地嵌入。因此 $\mathrm{dens}(E_b) \geq \max\{\aleph_1, \mathrm{dens}(A)\}$。逆向不等式由命题 3.2 得出。□

我们回顾 Bakić 和 Guljaš 的正交归一基定理与 Parseval 恒等式的以下推论 [5, 定理 1 和 4]。

命题 3.4。如果 A 属于紧算子型，则每个希尔伯特 A-模都有一个标准帕塞瓦尔框架。

将这一障碍与紧算子情形结合起来，即可得到该刻画。

定理 3.5。 对于任意 C^*-代数 A，以下条件等价：(i) A 同构于紧算子的一个 C^*-子代数；等价地，

$$A \cong \bigoplus_{j\in J}^{c_0} \mathcal{K}(H_j).$$

(ii) 每个希尔伯特 A-模都存在标准 *Parseval* 框架。(iii) 每个希尔伯特 A-模都存在标准框架。(iv) 每个希尔伯特 A-模都存在具有超弱求和的框架。(v) 每个由至多 $\aleph_1$ 个元素生成的希尔伯特 A-模都存在具有超弱求和的框架。(vi) 每个满的希尔伯特 A-模都存在具有超弱求和的框架。

如果 A 是含幺的，这些条件还等价于 A 是有限维的。如果 A 至少存在一个至多由 $\aleph_1$ 个生成元生成的满希尔伯特 A-模，那么这些条件还等价于要求每个至多由 $\aleph_1$ 个生成元生成的满希尔伯特 A-模都存在框架。尤其是，当 A 为 σ-含幺时，上述存在性假设成立。

证明。 命题 3.4 给出 (i)⇒(ii)，而 (ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v) 以及 (iv)⇒(vi) 是显然的。若 (i) 不成立，则定理 3.3 给出一个无框架模 E_0，其 gen(E_0) $= \aleph_1$,，这与 (v) 矛盾；同时还给出一个满的无框架模 E_b，这与 (vi) 矛盾。因此，(v) 和 (vi) 都蕴含 (i)。(i) 中的结构等价性就是命题 2.3。含单位紧算子代数是有限维的 [1, p。 2]。

对于附加的等价性，设 F 是一个满的希尔伯特 A-模，且由至多 $\aleph_1$ 个元素生成。若 (i) 不成立，则 $E_0 \oplus F$ 是满的，并且至多有 $\aleph_1$ 个生成元。在其上的一个框架 $((u_i, w_i))_{i\in I}$ 将在 E_0 上给出一个框架 $(u_i)_{i\in I}$：对于 $x \in E_0$，有 $\langle (u_i, w_i),(x, 0)\rangle = \langle u_i, x\rangle$，因此，只需在 $(x,0)$ 上进行检验，即可得到框架不等式和收敛性。这与定理 3.3 矛盾。反之，(ii) 为每个这样的模提供一个框架。若 A 是 σ-含单位的，则 A_A 是一个满的可数生成希尔伯特模。零代数由空和式与空框架涵盖。□

例 3.6. 每个无限维 von Neumann 代数（视为 a C^*-代数），包括无限维 H 对应的 $B(H)$ 以及无限 J 对应的 $\ell^\infty(J)$，都不具有通用框性质。无限维 UHF 代数、无理旋转代数、Jiang–Su 代数、Toeplitz 代数和 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_n$ $(2 \le n \le \infty)$ 也同样如此。另一方面，$\mathcal{K}(H)$ 和 $c_0(J)$ 对任意基数都具有该性质。无限维紧算子代数的单位化也不具有该性质；参见 [3, 4]。对于局部紧 Hausdorff 空间 X，该定理表明，当且仅当 X 是离散空间时，每个 Hilbert $C_0(X)$-模都存在框架。

数据可用性

本理论研究未生成或分析任何数据集。

资金支持

本研究未获得来自公共部门、商业部门或非营利部门资助机构的任何特定资助金。

在稿件准备过程中使用生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在准备本工作期间，作者使用 ChatGPT（OpenAI）进行语言编辑、文献检索、数学讨论以及证明的完善。数学思想和论证通过作者自身的贡献以及与该人工智能工具的批判性讨论而形成。在使用该工具后，作者根据需要对内容进行了审阅和编辑，独立检查并验证了所有证明和数学论证，并对已发表文章的内容承担全部责任。

参考文献

[1] M. Amini、M. B. Asadi、G. A. Elliott 和 F. Khosravi，Hilbert C^*-模中的框架与 Morita 等价的 C^*-代数，Glasgow Math. J. 59（2017），1–10。DOI：10.1017/S0017089516000355。[2] L. Arambašić 和 D. Bakić，Hilbert C^*-模的框架与外框架，Linear Multilinear Algebra 65（2017），381–431。DOI：10.1080/03081087.2016.1186588。[3] M. B. Asadi、M. Frank 和 Z. Hassanpour-Yakhdani，无框 Hilbert C^*-模，Glasgow Math. J. 61（2019），25–31。DOI：10.1017/S0017089518000010。[4] M. B. Asadi、M. Frank 和 Z. Hassanpour-Yakhdani，无框 Hilbert C^*-模 II，Complex Anal. Oper. Theory 14（2020），文章 32。DOI：10.1007/s11785-020-00990-8。[5] D. Bakić 和 B. Guljaš，紧算子 C^*-代数上的 Hilbert C^*-模，Acta Sci. Math. (Szeged) 68（2002），249–269。[6] M. Frank 和 D. R. Larson，Hilbert C^*-模和 C^*-代数中的框架，J. Operator Theory 48（2002），273–314。[7] D. Fufaev，局部含单位元的 C^*-代数不具有框架，Ann. Funct. Anal. 16（2025），文章 67。DOI：10.1007/s43034-025-00459-9。[8] D. Fufaev，局部含单位元的 C^*-代数与紧算子半范数判据的局限性，预印本（2026），arXiv:2610.39164。[9] D. Fufaev 和 E. Troitsky，Banach紧算子、A-预紧性与 Hilbert C^*-模中的框架，arXiv:2604.23782（2026）。[10] E. C. Lance，Hilbert C^*-模：算子代数学家的工具集，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 210，Cambridge Univ. Press，1995。DOI：10.1017/CBO9780511526206。[11] H. Li，一个不具有框架的 Hilbert C^*-模，Bull. Lond. Math. Soc. 42（2010），388–394。DOI：10.1112/blms/bdp109。[12] G. J. Murphy，正定核与 Hilbert C^*-模，Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 40（1997），367–374。DOI：10.1017/S0013091500023804。[13] S. Roch，离散化序列的分形代数，讲义，应用分析暑期学校，Chemnitz，2011，arXiv:1110.1298。

数学、统计学与计算机科学学院，理学院，德黑兰大学，德黑兰，14155-6455，伊朗电子邮箱地址：mb.asadi@ut.ac.ir

数学、统计学与计算机科学学院，理学院，德黑兰大学，德黑兰，14155-6455，伊朗电子邮箱地址：z.hasanpour@ut.ac.ir