arXiv:2611.32956v1 [math.AG] 24 Nov 2026

定向拟阵层的正几何

Arne Kuhrs 和 Artyom Lisitsyn

摘要。我们研究边界为 Plücker 除子并集的格拉斯曼流形的正几何。对于完整 Plücker 边界，各区域是一定向拟阵实现空间的闭包。在秩三情形下，我们证明，对于 $n \leq 9$ 个点，数对 $(\mathrm{Gr}_{3,n}, Z_{3,n})$ 按照 Sturmfels 和 Telen 的定义构成一个正配置，并利用有限域上构形空间$_{,n}$ 的点计数计算其组合秩。对于七个点，各区域的典范形式张成所有对数形式。对于八个点则并非如此，因为 Möbius–Kantor 构形无法在实数域上实现。这一结果确定了对于七个点和八个点，Cachazo、Early 和 Zhang 关于 Cachazo、Early、Guevara 和 Mizera 的广义双伴随振幅的被积函数是否张成对数形式空间。从十个点开始，亏格为正，因为边界中出现了一个 K3 曲面。对于规模较小的边界和任意秩，我们给出一种逐次添加一个点并保持亏格和组合秩不变的递归。该递归恢复正格拉斯曼流形，并表明堆叠多胞体的实现空间是组合秩为一的正配置的区域。

1. 引言

正几何研究携带一种特殊微分形式的半代数集，即典范形式；其极点位于边界上，而其留数仍然是典范形式[AHBL17]。Arkani-Hamed、Bai 和 Lam 通过留数递归地定义这些形式。Brown 和 Dupont 则将该理论重新表述为复代数簇与除子 (X, Y) 这一数对的混合霍奇结构 [BD25]：当该数对的一个不变量——亏格——为零时，每个相对循环都有唯一的典范形式；这些形式张成的空间的维数就是组合秩。这使得正性成为复代数簇的一种可系统检验的性质。Sturmfels 和 Telen 引入了正配置及其实组合秩 [ST26]。

格拉斯曼流形是例子的一个重要来源，其中许多例子来自物理学。Postnikov 的全非负 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}_{k,n}^{\geq 0}$， [Pos06] 是一个正几何 [AHBL17]，而其像——Arkani-Hamed 和 Trnka 的振幅子——计算平面$\mathcal{N} = 4$ 超杨–米尔斯理论中的振幅 [AHBC+16, AHT14]。对于 $k = 2$，其区域

由所有 Plücker 除子切出的 $\mathrm{Gr}_{2,n}(\mathbb{R})$，在环面作用下，正是 $M_{0,n}(\mathbb{R})$ 的区域。它们的典范形式是 Parke–Taylor形式 [AHBHY18]，，通过散射方程 [CHY14] 给出双伴随标量振幅。Cachazo、Early、Guevara 和 Mizera（CEGM）将 $M_{0,n}$ 替换为 $\mathcal{X}_{k,n}$ 中 n 个点的构形空间 $\mathbb{P}^{k-1}$，从而定义广义双伴随振幅[CEGM19]。他们的研究揭示了其与热带格拉斯曼流形和簇代数[CR20, DFGK20, HP20] 的联系，以及与 $\mathcal{X}_{k,n}$ [的正部分]AHLS21b, AHLS21a]的联系。在除振幅子之外的所有这些例子中，边界均由 Plücker 除子构成。

对于一个集合 $S \subseteq \binom{[n]}{k}$，我们定义

$$Z_S := \bigcup_{I \in S} \{p_I = 0\} \subset \mathrm{Gr}_{k,n}, \qquad Z_{k,n} := Z_{\binom{[n]}{k}}, \tag{1}$$

日期：2026年11月25日。

并探讨由 $\mathrm{Gr}_{k,\,n}(\mathbb{R})$ 切出的 Z_S 区域何时具有典范形式，以及这些形式张成的空间有多大。有两个极端情形已得到充分理解。第一种是 $k=2$ 的完整 Plücker 边界：数对 $(\mathrm{Gr}_{2,\,n},\ Z_{2,\,n})$ 的开部分除去一个环面因子后，就是模空间 $M_{0,\,n}$ (定理 I)。第二种是正格拉斯曼流形，它对每个 k 和 n 都存在，但其边界上只有 n 个循环 Plücker 除子（定理 II）。本文沿两个方向，探寻介于二者之间的新正配置 $(\mathrm{Gr}_{k,\,n},\ Z_S)$。为陈述这两个指导性定理及我们的结果，我们先回顾相关框架。

正配置与两个组合秩。我们采用 Brown 和 Dupont [BD25] 以及 Sturmfels 和 Telen [ST26] 的框架。设 X 是一个维数为 d 的不可约复射影簇，$Y\subsetneq X$ 是一个除子，且 $U=X\setminus Y$ 光滑。亏格 $g(X,Y)$ 和组合秩 $\mathrm{cr}(X,Y)$ 是相对同调$H_d(X,Y)$的霍奇数，二者都仅取决于 U [BD25, (8), (16)]。若亏格为零，则每个相对循环 σ在对数顶形式空间 $\Omega^d_{\log}(U)$ 中都有一个典范形式 $\omega(\sigma)$；该空间由定义在 U上的对数顶形式构成，其维数为 $\mathrm{cr}(X,Y)$。典范形式 $\omega(\sigma)$由其在正规交叉紧化 [BD25, §2, Cor. 2.18]角点处的迭代留数决定。数对 (X,Y) 是正配置，当且仅当其亏格为零，X 且 Y的每个不可约分支都定义在 $\mathbb{R}$ 上并具有一个光滑实点，且 $\mathrm{Sing}(X)\subseteq Y$ [ST26, Def. 6.2]。其区域是 $X(\mathbb{R})\setminus Y(\mathbb{R})$ 的可定向连通分支的闭包，而实组合秩 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(X,Y)$ 是这些区域的典范形式 [ST26, Def. 6.4, Def. 6.10]所张成空间的维数。总有 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\le\mathrm{cr}$；等号成立意味着每个对数形式都是区域典范形式的线性组合。

用这种语言表述，这两个极端情形如下；这两项已知结果为我们的研究提供了指引。

定理 I（零亏格曲线的模空间；[Koe26，推论 2.2.16、推论 2.3.11], [BD25，命题 6.2]）。对于每个 $n\ge 4$ 数对（$\mathrm{Gr}_{2,\,n},\ Z_{2,\,n}$），都是正配置，并且

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Gr}_{2,n},Z_{2,n}\big)=\mathrm{cr}\big(\mathrm{Gr}_{2,n},Z_{2,n}\big)=\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{2,n})=\dim\widetilde{H}_{n-4}\big(\mathrm{link}\,\mathrm{Trop}\,\mathcal{X}_{2,n}\big)=(n-2)!\,.$$

这里$\mathcal{X}_{2,\,n}=M_{0,\,n}$是一个实超平面配置的补集，在这种情况下两个秩相等。这由 [BD25，命题 6.2，第 6 节8]得出。$\mathrm{Gr}\overset{\circ}{\mathrm{Gr}}_{2,\,n}$ 的环面因子既不改变亏格，也不改变组合秩 [Koe26，命题 2.3.10、命题 2.2。19], 根据与命题 4.2相同的论证，它也不会改变实组合秩。我们用$\mathrm{link}\mathrm{Trop}\,\mathcal{X}$表示热带簇的链接，即它与原点周围球面的交集。它能计算组合秩，这一点见 [Hac08，推论 3。3] 以及 [Koe26，命题 2.2。12]。

定理 II（正格拉斯曼流形；[KPS26，命题 3。2]）。令 $\mathrm{Gr}^{\ge 0}_{k\,n}$，表示非负格拉斯曼流形，即$\mathrm{Gr}_{k\text{的实点集合},\,n}$ 其普吕克坐标均非负。令 $S^+_{k\,n,}$ 表示 $[n]$中的循环区间集合 $\{i,i+1,\dots,i+k-1\}$。则 $Z_{S^+_{k\,,\,n}}$是$\mathrm{Gr}^{\ge 0}_{k\,n}$ 的代数边界，也就是其欧几里得边界的 *Zariski* 闭包。数对 $(\mathrm{Gr}_{k,\,n},Z_{S^+_{k\,n,}})$ 对所有 $k<n$都是正配置，并且

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S^+_{k,n}}\big)=\mathrm{cr}\big(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S^+_{k,n}}\big)=1.$$

零亏格情形见 [KPS26，命题 3。2]。我们通过对 n 进行递归，证明完整结论，包括两个秩；参见 推论 6.22。

本文的两个主要研究方向都始于这两个定理。第一个保留 定理 I的完整 Plücker 边界，并将秩二推广到秩三。第二个保留任意 k 和 n，如定理 II 所述，并扩大边界的类别。

对于 $k=3$ 的完整 Plücker 边界。完整 Plücker 边界的补集 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n}$ 是一个平凡环面丛，其底空间是配置空间 $\mathcal{X}_{k,n}$：其中包含 n 个处于线性一般位置的点，位于 $\mathbb{P}^{k-1}$ 中。一个实构型具有一个拟阵符号，即其极大子式的符号向量；将具有相同拟阵符号的构型按重新定向进行归类，可将 $\mathcal{X}_{k,n}(\mathbb{R})$ 分解为有向拟阵分层，即一致有向拟阵的实现空间。根据 Mnëv 普适性定理，这些分层可能极其复杂 [Mnë88], [BLVS+99，§8.6]。然而，在秩三且对于 $n \le 9$ 的情况下，每个非空分层都是连通的 [Ric88], ，因此这些区域就是各分层的闭包。有向拟阵的典范形式也出现在 Eur 和 Lam 的工作中 [EL26],，但含义不同：在那里，一个有向拟阵是固定的，而其顶元（单个配置的区域）在 Orlik–Solomon 代数中获得典范形式。在这里，每个有向拟阵标记配置空间中的一个区域，即其实现空间，而典范形式定义在配置空间上。对于五个点，不会出现新的现象，因为对偶性 $\mathrm{Gr}_{3,5} \cong \mathrm{Gr}_{2,5}$ 将 $\mathcal{X}_{3,5}$ 识别为 $\mathcal{X}_{2,5} = M_{0,5}$。从 $n=6$ 个点开始，$\mathcal{X}_{3,n}$ 不再是超平面配置的补集，而是超平面与二次曲面配置的补集。

相同的区域也出现在物理学中。对于 $n \le 8$，Cachazo、Early 和 Zhang 将一个有理形式附加到 $\mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{R})$ 中的每个区域上；在 [CEGM19]的表述中，该有理形式就是广义双伴随振幅的被积函数。他们留下了这样一个问题：除正区域以外的其他区域是否为正几何，以及由此应如何定义它们的典范形式 [CEZ24，§5。2]他们还询问了由这些被积函数张成的空间的维数。此外，他们引用 Skorobogatov [Sko96],指出，在 $\mathcal{X}_{3,n}$ 上取值并在有限域上计算 $q=0$所得的点数，对于六个点为 126 ，对于七个点 [CEZ24，§7。2]我们的前三个定理回答了这些问题。

定理 A。对于 $6 \le n \le 9$ 数对 $(\mathrm{Gr}_{3,n}, Z_{3,n})$ 是一个正配置，其组合秩为

$$\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{3,n}, Z_{3,n}) = \mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,n}) = \dim \Omega^{2n-8}_{\log}(\mathcal{X}_{3,n}) = \begin{cases} 126 & for\ n=6, \\ 7470 & for\ n=7, \\ 1\,116\,480 & for\ n=8, \\ 392\,936\,880 & for\ n=9. \end{cases}$$

因此，按照 [ST26，第 6.4], 条定义的意义，这些区域是正几何；对于 $n \le 8$ ，它们的典范形式除差一个符号和一个公共因子外，就是 Cachazo、Early 和 Zhang 的被积函数（注 4.11）。第 3 节中定理 A 的证明使用了有限域上的点计数。对于光滑仿射簇，其亏格和组合秩可以从 E-多项式中读出（命题 3.1）。根据 Katz 的定理 [HRV08，定理 6.1.2(3)], ，如果在 $\mathbb{F}_q$ 上的点数对于所有素数幂 $q \equiv 1$ （模 m）都是 q 中的一个多项式，那么 E-多项式就是将该多项式取值于 xy所得的结果。因此，亏格为零，而组合秩就是在 $q=0$处的计数值。$\mathcal{X}_{3,n}$（$\mathbb{F}_q$）的计数归功于 Glynn [Gly88] 以及 Iampolskaia、Skorobogatov 和 Sorokin [ISS95]。除特征二和三之外，对于六个点和七个点，它们是多项式；对于八个点和九个点，它们是拟多项式，也就是说，是 q的剩余类上的多项式。Lam 将它们取值于 $q=1$ ，从而得到 $\mathcal{X}_{3,n}$[ABF+23的欧拉示性数，定理 A。1]在 $q=0$ 处的取值给出组合秩，这解释了 Cachazo、Early 和 Zhang 的观察。对于八个点，该计数包含一项 $840\,b(q)$ ，其中 $b(q)$ 表示 $\mathbb{F}_q$中的本原三次单位根的数量。它源于 Möbius–Kantor 构形；该构形在定理 C 对 $\mathcal{X}_{3,8}$ 的实组合秩的分析中再次出现。

接下来需要比较各区域的典范形式所张成的空间与所有对数形式组成的空间。对于$\mathcal{X}_{3,6}$ 二者的秩均为 126 [ST26，§12], [HPP26，命题 5。3]对于

七个点时它们也相同，这证实了预期维数7470 （见 [CEZ24，§7。2]以及 [HPP26，§5。2]）。

定理 B。 七个点的实组合秩等于组合秩：

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Gr}_{3,7}, Z_{3,7}\big) = \mathrm{cr}\big(\mathrm{Gr}_{3,7}, Z_{3,7}\big) = \mathrm{cr}\big(\mathcal{X}_{3,7}\big) = \dim \widetilde{H}_5\big(\mathrm{link}\,\mathrm{Trop}\,\mathcal{X}_{3,7}\big) = 7470.$$

结合注 4.11 可知，七个点对应的被积函数张成对数形式的整个空间。我们在第 4.3 节利用实热带数据证明定理 B。从格拉斯曼流形转到构形空间后（命题 4.2），我们使用 $\mathcal{X}_{3,7}$ 的热带紧化。根据 Corey 的一个定理，$\mathcal{X}_{3,7}$ 的每个初始退化都是光滑且不可约的[Cor21，定理 1.2，引理 7。1], 因此，每个极大锥上方都有一个角点，并且每个角点都是实的。在角点附近，边界的补集由 64 个正交象限组成，它们分别位于 64 个不同的分层中。利用 Antolini 和 Early 的定理 $\mathrm{Dr}^{\chi}(3,7) = \mathrm{Trop}^{\chi}\,\mathrm{Gr}(3,7)$ [AE25，定理 1。1], 我们证明，到达某个角点的分层，正是其手征热带德雷斯曼包含该角点对应的锥的分层（命题 4.8）。因此，区域的迭代边界模 2 后构成 27 240 个手征热带德雷斯曼与 211 365 个六维 Plücker 锥的关联矩阵；这些对象由 Antolini 和 Early 的扇构造而成。其在 $\mathbb{F}_2$ 上的秩为 7470。

对于八个点，两个秩并不相同，原因是存在一个在 $\mathbb{C}$ 上存在、但不在 $\mathbb{R}$ 上存在的构型。

定理 C。 八个点的实组合秩小于组合秩：

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Gr}_{3,8}, Z_{3,8}\big) + 840 \;\le\; \mathrm{cr}\big(\mathrm{Gr}_{3,8}, Z_{3,8}\big) = 1\,116\,480.$$

根据 Corey 和 Luber，$\mathcal{X}_{3\text{的}8}$ 个初始退化在 840 个 S_8-轨道的 Möbius–Kantor 锥上分别具有两个分支，对应于 Möbius–Kantor 拟阵 [CL23（定理 1.3、定理 1.4、定理 5.2]）的两个复共轭实现。热带紧化中相应的角点不是实的，因此没有区域能到达这些角点。每个锥上两个角点之差给出一个对数形式，而这些 840 个形式的张成空间与各区域的典范形式的张成空间的交仅为零。因此，对于八个点，被积函数张成 $\Omega^8_{\log}(\mathcal{X}_{3,\,8})$ 中余维至少为 840 的子空间。八个点的实组合秩的确切值仍然是一个开放问题。

从十个点开始，亏格为正。

定理 D。 对于每个 $n \ge 10$，我们有 $g(\mathrm{Gr}_{3,\,n}、Z_{3,\,n}) = g(\mathcal{X}_{3,\,n}) \ge 1$。特别地，$(\mathrm{Gr}_{3,\,n}、Z_{3,\,n})$不是正配置。

原因是十个点情形中边界上的一张 K3 曲面。对于某个由十条直线穿过十个点构成的配置，其实现空间——其中恰好这些三元组共线——是 K3 曲面的一个稠密开子集 [Sin23, Thm. 1.2], ，该结果建立在 [Stu91]之上。在第 5 节中，我们通过一条层的链将 $\mathcal{X}_{3,10}$ 与这个实现空间联系起来，其中每一层都由前一层施加一个共线条件得到。每一层与其下一层合在一起构成一个光滑仿射簇，因此亏格在每一步只能下降 [BD25, Prop. 3.10], ，而 $\mathcal{X}_{3,10}$ 的亏格至少与 K3 曲面的亏格一样，即为一。增加一个点不会降低亏格（命题 5.5），结合格拉斯曼流形的对偶性，我们得到 $g(\mathcal{X}_{k,n}) \ge 1$ 在$3 \le k \le n-7$或 $7 \le k \le n-3$时成立（推论 5.6）。由推论 3.5 可知，对于 $n \ge 10$， $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ 中 n-弧的数量不是 q 上的拟多项式。十个点的情形已在 [Ish22, §1.1]中宣布；对于更多点的情形，则提出了猜想。

更小的边界与多面体实现空间。根据定理 D，完整 Plücker 边界并不总能给出正配置。在第二个方向上，我们让 k 和n 保持任意，并寻找能做到这一点的更小边界 $Z_S \subsetneq Z_{k,\ n}$。我们通过逐次添加一个点来构造它们，为此需要一个组合概念。

在 $[n-1]$ 上的一个 k-嵌套 $\Gamma = (I_1, \ldots, I_k)$ 是满足组合条件（定义 6.1）的 $(k-1)$-子集元组。每个 I_r 张成一个超平面 H_r，该超平面经过前 $n-1$个点中的 $k-1$。集合 $N(\Gamma) \subseteq \binom{[n-1]}{k}$ 列出了其非零性使得 $H_1, \ldots, H_k$线性无关的普吕克坐标。集合 $D(\Gamma) = \{I_r \cup n : r \in [k]\}$ 列出了那些非零性表明新点 n 不在每个 H_r 上的坐标（见图3）。随后，用相对于这些超平面的 k 个非零坐标记录新点，从而得到一个环面因子。

定理 E。令 $2 \le k < n-1$，令 Γ 是 $[n-1]$上的一个 k-嵌套，并令 $S \subseteq \binom{[n-1]}{k}$ 满足$N(\Gamma) \subseteq S$。如果 $(\mathrm{Gr}_{k,\ n-1}, Z_S)$ 是正配置，那么对于每个满足 $(S \setminus N(\Gamma)) \cup D(\Gamma) \subseteq S' \subseteq S \cup D(\Gamma)$ 的 S'，$(\mathrm{Gr}_{k,\ n}, Z_{S'})$ 也同样是正配置，并且

$$\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n}, Z_{S'}) = \mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n-1}, Z_S).$$

第 6 节中的证明分为两步。首先，$\mathrm{Gr}_{k,n-1} \setminus Z_{N(\Gamma)}$ 中的每个点都有唯一的矩阵代表元，其零和一的位置是预先规定的，因此最后一列可以在$(\mathbb{C}^*)^k$中自由选取。这给出了一个同构 $(\mathrm{Gr}_{k,\ n-1} \setminus Z_S) \times (\mathbb{C}^*)^k \cong \mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{S \cup D(\Gamma)}$ (引理 6.12)，而环面因子既不改变亏格，也不改变组合秩 [Koe26，命题 2.3.10，命题 2.2.19]。其次，可以从边界中去掉除子 $Z_{N(\Gamma)}$。缩小边界至多会降低亏格 [BD25，命题 3.10]，，因此亏格仍为零。沿同构推前一个对数形式，会将其乘以 $\prod_{r=1}^{k-1} p_{I_r \cup j_r} / \prod_{I \in D(\Gamma)} p_I$，其中集合 $I_r \cup j_r$ 是 $N(\Gamma)$ 的元素（引理 6.17）。分子会消去沿 $Z_{N(\Gamma)}$的所有极点，因此每个对数形式都能延拓到更大的空间。对于由新点旁的循环区间构成的嵌套，这一递归得出定理 II。

这类进一步的边界源于凸几何。对于一个单纯 $(k-1)$-多面体K，其具有 n 个带标签的顶点，Grassmann 流形模型的实现空间是半代数集 $\mathrm{Gr}_K^{\ge 0} \subset \mathrm{Gr}_{k,\ n}(\mathbb{R})$。其中的点的列被视为齐次化顶点，实现了 K [GMW23]。它由普吕克坐标 $p_{F \cup v}$ 上的符号条件刻画，其中 F 表示一个面，$v \notin F$ 表示一个顶点；这些符号条件记录了顶点 v 位于 F 的哪一侧。对于顶点按循环顺序标记的 n-边形，它就是正格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_3^{\ge 0}{}_{,\ n}$。我们将其闭包记为 $\mathrm{Gr}_K^{\ge 0}$。多面体除子 Z_K是除子 $Z_{\{F \cup F'\}}$ 在相邻面数对 F，F' 上的并集；沿着这些除子，两个面变得共面。如果一个多面体是从单纯形出发，通过反复在某个面之外紧邻处添加一个新顶点得到的，则称其为堆叠的。

定理 F. 设 K 是一个具有 n 个顶点的堆叠$(k-1)$多面体。那么$(\mathrm{Gr}_{k,n}, Z_K)$ 是一个正配置，$\mathrm{Gr}_K^{\ge 0}$ 是其中一个区域，并且

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Gr}_{k,n}, Z_K) \ = \ \mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n}, Z_K) \ = \ 1.$$

该 $(\mathrm{Gr}_{k,n}, Z_K)$ 是一个正配置，且 $\mathrm{cr} = 1$ 可由定理 E 推出：从 $\mathrm{Gr}_{k,k+1} \cong \mathbb{P}^k$ 及其坐标超平面开始，逐次堆叠一个顶点。

结构。 第 2 节回顾相关框架。 第 3 节 证明 定理 A、 第 4 节 证明定理 B 和 C，而 第 5 节 证明 定理D。 第 6 节 介绍嵌套并证明定理 E，而第7节 讨论多胞体并证明 定理 F。

代码和数据。 本文计算所用的代码和数据可从以下地址获取 [KL26]。它们包括矩阵的构造 B 及其秩的计算（见 定理 B的证明），以及对显式12-形式在 $\mathcal{X}_{3}$上的迭代留数的验证，10 见注 5.2。

致谢。 感谢 Bernd Sturmfels 提议开展本项目。我们也感谢 Dario Antolini、Nick Early、Ben Hollering、Joris Koefler、Dante Luber、Melvyn Nabavi、Anaëlle Pfister、Lizzie Pratt、Simon Telen、Martin Winter 和 Claudia Yun，感谢他们进行了非常有益的讨论。

人工智能使用声明。 本文在很大程度上借助大语言模型工具完成，主要使用了 Claude Opus 5.5，并通过 Claude Code 框架运行。该工具用于文献检索，提供数学建议，帮助简化论证、起草论述并制作部分图表，还编写了 [KL26]中的大部分代码。论文中的所有断言均由作者负责。

2. 背景

本节将建立所需的框架。我们的研究对象是由一个格拉斯曼流形和一个 Plücker 除子并组成的数对 $(\mathrm{Gr}_{k,\,n},\ Z_S)$。 $(\mathrm{Gr}_{k,\,n},\ Z_{k,\,n})$ 的开部分是配置空间$\mathcal{X}_{k,\,n}$ 中 n 个点上的一个平凡环面丛，其中点位于 $\mathbb{P}^{k-1}$ 中。我们将在坐标中明确描述这一点。$\mathcal{X}_{k,\,n}$ 的实点由有向拟阵组织。随后，我们回顾 Brown 和 Dupont 的亏格与组合秩，以及 Sturmfels 和 Telen 的正配置。

2.1. 格拉斯曼流形、构形空间与有向拟阵分层。令 $\mathrm{Gr}_{k,\,n}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的 k 维平面构成的格拉斯曼流形，并通过 Plücker 坐标 $(p_I)_{I\in\binom{[n]}{k}}$嵌入到 $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ 中。令 $Z_I=\{p_I=0\}\cap\mathrm{Gr}_{k,\,n}$，对于 $S\subseteq\binom{[n]}{k}$，

$$Z_S:=\bigcup_{I\in S}Z_I,\ Z_{k,n}:=Z_{\binom{[n]}{k}},\ \mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n}\ =\ \mathrm{Gr}_{k,n}\setminus Z_{k,n}.$$

$\mathrm{Gr}_{k,\,n}$ 中的一点可表示为某个秩为 k 的 $k\times n$ 矩阵 A 的行空间，其 Plücker 坐标就是极大子式 $p_I(A)=\det A_I$。两个矩阵具有相同的行空间，当且仅当它们相差一个 GL_k 中元素的左乘。环面 $(\mathbb{G}_m)^n$ 通过缩放列作用于 $\mathrm{Gr}_{k,\,n}$。对于 $\tau\in\mathbb{G}_m^n$，

$$p_I(A\,\mathrm{diag}(\tau))=\Big(\prod_{i\in I}\tau_i\Big)p_I(A),\tag{2}$$

因此， $\mathbb{G}_m^n$ 中的对角环面 $\mathbb{G}_m$ 作用平凡。进一步地，环面 $T=(\mathbb{G}_m)^n/\mathbb{G}_m\cong(\mathbb{G}_m)^{n-1}$ 在 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,\,n}$ 上自由作用。商空间

$$\mathcal{X}_{k,n}\ =\ \mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n}/T$$

这是 $\mathbb{P}^{k-1}$ 中处于线性一般位置的 n 个点的 构形空间，也就是说，其中任意 k 个点都不位于同一个超平面上，再对 PGL_k 取商。这些 n 个点是矩阵 $k\times n$ A 的各列，其行空间是 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,\,n}$ 中的一个点。空间 $\mathcal{X}_{k,\,n}$ 的维数为 $d=(k-1)(n-k-1)$；对于 $k=2$，它是 $M_{0,\,n}$ 上 n 个互异点的模空间。令 $T_P=\mathbb{G}(\binom{n}{k})_m\ /\mathbb{G}_m$ 表示 $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ 内的 Plücker 环面。那么，$\mathcal{X}_{k,\,n}$ 是环面 T_P/T 的一个闭子簇。特别地，它是极仿射的。

本文聚焦于 $k=3$ 的情形，并且仅在此情形下明确给出 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,\,n}$ 与 $\mathcal{X}_{3,\,n}$ 之间的关系；对于每个 $k\geq 2$，同样的构造也成立，其中前 $k+1$ 列

归一化为标准射影标架。$\mathcal{X}_{3,\ n}$ 中的每个点都有唯一一个形如 [CEZ24，公式（2.6）] 的代表元

$$M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & y_{15} & y_{16} & \dots & y_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y_{25} & y_{26} & \dots & y_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

这里，通过射影变换将前四个点移至标准射影标架，并对其余各列进行缩放，使其末项为 1。$d = 2n - 8$ 项是 Plücker 坐标的交比，

$$y_{1a} = \frac{p_{23a}\, p_{124}}{p_{12a}\, p_{234}}, \qquad y_{2a} = \frac{p_{13a}\, p_{124}}{p_{12a}\, p_{134}} \qquad (5 \le a \le n).$$

每个指数在分子和分母中出现的次数相同，因此根据 (2)，它们在 T 下保持不变。它们在 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}$ 上处处正则且不为零，因此可下降到 $\mathcal{X}_{3,n}$。此外，它们将 $\mathcal{X}_{3,n}$ 与 $\mathbb{A}^d$ 的一个开子集等同，该子集上 $M(y)$ 的所有 3×3 子式均非零。在这些坐标下，商映射 $\pi : \mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n} \to \mathcal{X}_{3,n}$ 为 $g \mapsto (y_{1a}(g)\ y_{2a}(g))_{5 \le a \le n}$，且 $y \mapsto M(y)$ 是 π 的一个截面。

对于环面，我们使用 $(n-1)$ Plücker 比值

$$t_1 = \frac{p_{124}}{p_{234}}, \qquad t_2 = -\frac{p_{124}}{p_{134}}, \qquad t_a = \frac{p_{12a}}{p_{123}} \quad (4 \le a \le n).$$

每个都是两个普吕克坐标之比，因此不依赖于矩阵代表元，并且在 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}$. 上处处非零。根据（2），它们记录了缩放因子，

$$t_i(\tau \cdot g) = \frac{\tau_i}{\tau_3}\, t_i(g) \qquad (i \in [n] \setminus \{3\}) \tag{4}$$

其中 $\tau \in \mathbb{G}_m^n, g \in \mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}$。在标准形中，我们有 $p_{123} = p_{124} = p_{234} = p_{12a} = 1$ 和 $p_{134} = -1$，因此对于所有 $i \neq 3$，$t_i(M(y)) = 1$。

这些坐标给出了一个显式的平凡化：态射

$$\Phi := (\pi, \mathbf{t}) \colon \mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n} \longrightarrow \mathcal{X}_{3,n} \times \mathbb{G}_m^{n-1}, \tag{5}$$

其中 $\mathbf{t} = (t_i)_{i \neq 3}$，是一个同构。这里我们通过 $\tau \mapsto \tau_i/\tau_3$ 将 T 与 $\mathbb{G}_m^{n-1}$ 等同。Φ 的逆矩阵将 (y, t) 映射为 $t \cdot M(y)$，即其第 i 列按 t_i 缩放的标准形，其中 $i \neq 3$。在实点层面，同构 Φ 将 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}(\mathbb{R})$ 与 $\mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^{\times})^{n-1}$ 等同。

点 $g \in \mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}(\mathbb{R})$ 的符号向量 $(\mathrm{sign}\ p_I(g))_I$ 在整体符号意义下定义，称为 $[n]$ 上秩 3 的一致手性符号，并且在 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}(\mathbb{R})$ 的每个连通分支上保持不变。环面 $T(\mathbb{R})$ 通过重新定向改变它。对于 $[n]$ 上秩 3 的一致手性符号 χ，令 $S_\chi \subseteq \mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{R})$ 表示其拟阵符号属于 χ 的重定向类的构型集合，即 χ 的有向拟阵分层。$\mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{R})$ 的每个连通分支都包含于单一分层中。这些分层就是一致有向拟阵的实现空间。对于 $k = 3$ 和 $n \le 9$，反之，每个非空分层都是连通的 [Ric88]。这些有向拟阵分层正是我们所研究其正几何的实对象。

2.2. **正配置、亏格与组合秩。** 我们采用 Brown 和 Dupont [BD25] 的混合霍奇理论框架。令 X 为一个维数为 d 的复代数簇，且 $Y \subseteq X$ 为一个闭子簇。带有有理系数的相对同调 $H_d(X, Y)$ 具有混合霍奇结构，其霍奇数决定典范形式。

定义 2.1 ([BD25，定义 2.1，定义 2.2])。 数对的亏格和组合秩分别定义为数对(X,Y) 的

$$g(X,Y)=\sum_{p>0}h^{-p,0}\big(H_d(X,Y)\big),\qquad \mathrm{cr}(X,Y)=h^{0,0}\big(H_d(X,Y)\big).$$

在本小节余下部分中， X 是紧且不可约的， $Y\subsetneq X$ 是一个除子，且 $U:=X\setminus Y$是光滑的。

令 $\Omega^d_{\log}(U)$ 表示以下空间：在 U 的某个具有正规交叉边界的光滑紧化的边界上具有对数极点的全纯 d-形式，且该紧化是 U 的。此空间不依赖于紧化的选取 [BD25，定义 1.7，命题 1。8]。Brown 和 Dupont 构造了一个满射线性映射

$$R:\Omega^d_{\log}(U)\to \mathrm{gr}_0^W H_d(X,Y)_{\mathbb{C}} \tag{6}$$

其核的维数为 $g(X,Y)$，因此

$$\dim\Omega^d_{\log}(U)=\mathrm{cr}(X,Y)+g(X,Y).$$

若 $g(X,Y)=0$，则 R 是一个同构，将其逆矩阵与商映射$H_d(X,Y)\to \mathrm{gr}_0^W H_d(X,Y)$复合，便得到典范形式映射

$$\mathrm{can}:H_d(X,Y)\to\Omega^d_{\log}(U).$$

该数对的相对同调就是 U [BD25 的局部有限同调，等式 (8)]，，而庞加莱对偶给出混合霍奇结构之间的同构 $H_d(X,Y)\cong H^d(U)(d)$。因此，亏格、组合秩和典范形式映射仅取决于 U。我们记作$g(U):=g(X,Y)$，以及 $\mathrm{cr}(U):=\mathrm{cr}(X,Y)$，其中 X是 U和 $Y=X\setminus U$的任意紧化。注意，这与 [BD25]，的记号不同；在那里， $g(U)$表示 $g(U,\varnothing)$。

Real 区域通过 Sturmfels 和 Telen 的正配置进入 [ST26，§6]。

定义 2.2 （[ST26，定义 6。2]）。 设 X 是一个不可约复射影簇，且 Y 是 X上的一个除子。数对 （X， Y）称为正配置，如果

(1) X 定义在 $\mathbb{R}$上且具有一个光滑实点；(2) Y 的每个不可约分支都定义在 $\mathbb{R}$ 上且具有一个光滑实点；(3) $X\setminus Y\subseteq X_{\mathrm{reg}}$，等价地，$\mathrm{Sing}(X)\subseteq Y$；(4) 数对（$X$，$Y$）具有零亏格。

正配置的一个区域是 σ 在 $X(\mathbb{R})$ 中的闭包，其中 σ° 是 $X(\mathbb{R})\setminus Y(\mathbb{R})$ 的一个可定向连通分支。对 σ° 的一个定向定义了一个相对循环，其类为$[\sigma]\in H_d(X,Y)$，其典范形式为 $\omega(\sigma):=\mathrm{can}[\sigma]$。区域$\sigma$ 的代数边界 $\partial_a\sigma$ 是其欧几里得边界在 X 中的 Zariski 闭包。

对于具有完整 Plücker 边界的格拉斯曼流形，这两个不变量都可以在构形空间上计算。

命题 2.3. 对于所有 $2\le k\le n-2$，有 $g(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{k,n})=g(\mathrm{Gr}^\circ_{k,n})=g(\mathcal{X}_{k,n})$ 且$\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{k,n})=\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}^\circ_{k,n})=\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{k,n})$。

证明。 由于 $\mathrm{Gr}_{k,n}$ 是紧的，而 $\mathrm{Gr}_{k,n}\setminus Z_{k,n}=\mathrm{Gr}^\circ_{k,n}$，每组等式中的第一个等号成立，是因为不变量只取决于开部分。我们有一个同构 $\mathrm{Gr}^\circ_{k,n}\cong\mathcal{X}_{k,n}\times\mathbb{G}_m^{n-1}$，因此由 [Koe26，命题 2.2.19，命题 2.3。10] 可知，去掉一个环面因子后，亏格和组合秩保持不变。 □

3. 通过有限域计数研究亏格与组合秩

本节中，我们通过计算 $\mathcal{X}_{3,n}$ 在有限域上的点数来求出亏格和组合秩。我们使用复代数簇的 E-多项式，它是关于两个变量 x, y 的多项式，其系数 $e_{p,q}$ 在 $x^p y^q$ 前记录了霍奇数 $h^{p,q}$ 的带符号和。我们注意到，对于光滑仿射簇，单项式 $x^p y^0$ 的系数 $e_{p,0}$ 就是 $H_d(X,Y)$ 的霍奇数 $h^{-p,0}$。因此，它们定义了组合秩（$p=0$）和亏格（$p>0$）。如果该簇在有限域上具有强多项式计数，Katz定理便将其 E-多项式与在 xy 处取值的计数多项式对应起来。于是亏格为零，而组合秩在符号相差至多一个的意义下等于计数多项式的常数项。已知的 $\mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{F}_q)$ 点数公式满足 Katz定理的假设，因此表明 $(\mathrm{Gr}_{3,n}, Z_{3,n})$ 是 $6 \le n \le 9$ 的一个正配置，并计算出其组合秩。

3.1. The E-多项式。 设 U 是一个复代数簇。其 E 多项式 为

$$E(U;x,y)=\sum_{p,q} e_{p,q}(U)\,x^p y^q, \qquad e_{p,q}(U)=\sum_k (-1)^k\, h^{p,q}\big(\mathrm{gr}^W_{p+q}\, H^k_c(U;\mathbb{C})\big),$$

其中 $h^{p,\,q}$ 是 Deligne的混合霍奇结构在紧支撑上同调上的霍奇数。更多背景可参见 [HRV08, §6]。

T当 U 光滑且为仿射时，he E-多项式可以确定亏格和组合秩 .

命题 3.1。 设 U 是一个维数为 d 的光滑仿射不可约复代数簇，并设$(X,\ Y)$ 是 U 的一个紧化。那么对每个整数 $p \ge 0$

$$e_{p,0}(U)=(-1)^d h^{-p,0}(H_d(X,Y)).$$

特别是，

$$\mathrm{cr}(U)=(-1)^d\,E(U;0,0), \qquad g(U)=(-1)^d\sum_{p\ge 1} e_{p,0}(U).$$

证明。 由于 X 是紧的， $H^k_c(U)$上的混合霍奇结构就是相对上同调$H^k(X,Y)$的混合霍奇结构（参见 [BD25, （8）]）。由于 $H^k(X,Y)$ 作为混合霍奇结构是 $H_k(X,Y)$ 的对偶，我们对所有 p,q都有 $h^{p,\,q}(H^k(X,Y)) = h^{-p,-q}(H_k(X,Y))$。因此

$$e_{p,0}(U)=\sum_k (-1)^k\, h^{-p,0}\big(H_k(X,Y)\big),$$

只需证明对所有 $k \ne d$ 和 $p \ge 0$，都有 $h^{-p,0}(H_k(X,Y)) = 0$。

对于 $k > d$，庞加莱对偶给出 $H^k_c(U) \cong H^{2d-k}(U)^\vee(-d)$。$H^{2d-k}(U)$ 的霍奇类型 (a,b) 满足 $0 \le a,b \le 2d-k$。因此，$H^k_c(U)$ 的霍奇类型 $(p,q) = (d-a, d-b)$ 满足 $p,\ q \ge k-d > 0$。由于 $q > 0$，我们得到 $h^{p,0}(H^k_c(U)) = 0$。对于 $k < d$，我们利用 U 是光滑仿射的这一事实。庞加莱对偶给出混合霍奇结构的同构$H_k(X,Y) \cong H^{2d-k}(U)(d)$。由于 $2d-k > d$ 且 U是维数为 d的光滑仿射簇，Andreotti–Frankel定理 [AF59，第 1] 定理给出 $H^{2d-k}(U) = 0$。因此，对于 $k < d$，有 $H_k(X,Y) = 0$，并且

$$e_{p,0}(U)=(-1)^d\, h^{-p,0}\big(H_d(X,Y)\big).$$

根据定义，$\mathrm{cr}(X,\ Y) = h^{0,\,0}(H_d(X,\ Y))$，以及 $g(X,\ Y) = \sum_{p>0} h^{-p,\,0}(H_d(X,\ Y))$。第一个公式由 $E(U;\,0,\ 0) = e_{0,\,0}(U)$ 得出。□

如果我们有多项式点计数（必要时可将 q 限制在某个剩余类上），就能使其有效。

定义 3.2 ([Ish22, §1.1]). 函数 f 关于素数幂 q 是一个 拟多项式，如果存在一个整数 $N \geq 1$ 和多项式 $g_0, \ldots, g_{N-1} \in \mathbb{Q}[t]$ 使得 $f(q) = g_i(q)$ 当 $q \equiv i$(模 N)时成立。

定理 3.3 （参见 Katz [HRV08，定理 6.1.2(3)]）。设 U 是定义在 $\mathbb{Z}$上的复代数簇。假设存在一个多项式 $P \in \mathbb{Q}[t]$ 和整数 $m, N \geq 1$ 使得

(7) $\#U(\mathbb{F}_q) = P(q)$ 对所有满足 $\gcd(q, N) = 1$ 且 $q \equiv 1$(模 m) 的素数幂 $q = p^r$ 均成立。

那么 $E(U; x, y) = P(xy)$。

注记 3.4。定理 3.3 是对 Katz定理稍作不同表述。Katz 假设 U 具有强多项式计数性质： U 在有限生成子环 $R \subset \mathbb{C}$上有一个模型 U_R，使得对每个环同态 $R \to \mathbb{F}_q$，都有 $\#U_R(\mathbb{F}_q) = P(q)$; 并由此得出$E(U; x, y) = P(xy)$ [HRV08，定理 6.1.2(3)]。要推出定理 3.3，取 $R = \mathbb{Z}[\zeta_m, 1/(mN)]$，并令 U_R 为 U 在 $\mathbb{Z}$上的模型的基变换。环同态 $R \to \mathbb{F}_q$ 存在，当且仅当 $\gcd(q, mN) = 1$ 且 $q \equiv 1$(模 m)，这两个条件从 q传递到它的所有幂。因此，(7)表明 U_R 具有计数多项式为 P的强多项式计数性质。

推论 3.5。设 U 是一个维数为 d、定义在 $\mathbb{Z}$上的光滑不可约仿射复代数簇。设存在一个多项式 P和整数 m、$N \geq 1$ 使得 (7) 成立。

则 $g(U) = 0$且 $\mathrm{cr}(U) = (-1)^d P(0)$。特别地，如果 $\#U(\mathbb{F}_q)$是 q上的拟多项式，则 $g(U) = 0$。

证明。根据定理 3.3， $E(U; x, y) = P(xy)$。 $P(xy)$ 的每个单项式在x和 y中的指数相等，因此 $e_p, 0(U) = 0$对于 $p \geq 1$和 e_0,0$(U) = P(0)$。由命题 3.1可得 $g(U) = 0$以及 cr$(U) = (-1)^d P(0)$。如果 $\#U(\mathbb{F}_q)$ 是模数为 N 的拟多项式，那么 (7) 对$m = N$和 $P = g_1$成立，因为每个 $q \equiv 1$(模 N) 都与 N互素。□

3.2. **点的构形空间**。现在我们将此方法应用于点的构形空间。第一个例子是直线上的点的模空间。

例 3.6。将三个点固定在 ∞，0、1 可将 $M_{0,\,n} = \mathcal{X}_{2,\,n}$ 与 $\mathbb{A}^{n-3}$ 的开子概形对应起来，该开子概形的坐标为 x_4，……，x_n，并且满足 $x_i \notin \{0, 1\}$ 和 $x_i \neq x_j$（其中 $i \neq j$）。它是光滑的仿射概形，维数为 $n-3$，且

$$\#M_{0,n}(\mathbb{F}_q) = (q-2)(q-3)\cdots(q-n+2).$$

推论 3.5 给出 $g(M_{0,\,n}) = 0$ 以及 $\mathrm{cr}(M_{0,\,n}) = (-1)^{n-3}\prod_{j=2}^{n-2}(-j) = (n-2)!$ 这恢复了 定理 I 中关于亏格和组合秩的著名结果。

现在我们转向 $k = 3$。构形空间 $\mathcal{X}_{3,\,n}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$上的光滑非常仿射簇。Glynn 计算了点数 [Gly88]，Iampolskaia、Skorobogatov 和 Sorokin 也计算了点数 [ISS95]。我们采用 Lam 在 [ABF+23]附录中的表述。对于 $q = p^r$，其中 是一个素数 $p > 3$

$$\begin{aligned}
\#\mathcal{X}_{3,6}(\mathbb{F}_q) &= (q-2)(q-3)(q^2-9q+21),\\
\#\mathcal{X}_{3,7}(\mathbb{F}_q) &= (q-3)(q-5)(q^4-20q^3+148q^2-468q+498),\\
\#\mathcal{X}_{3,8}(\mathbb{F}_q) &= Q_8(q) + 840\,b(q),\\
\#\mathcal{X}_{3,9}(\mathbb{F}_q) &= Q_9(q) + 840\,(9q^2-243q+1684)\,b(q) + 30240\,\big(9\,d(q) + 2\,e(q)\big),
\end{aligned}$$

其中

$$Q_8(q) = (q-5)(q^7 - 43q^6 + 788q^5 - 7937q^4 + 47097q^3 - 162834q^2 + 299280q - 222960),$$
$$Q_9(q) = q^{10} - 75q^9 + 2530q^8 - 50466q^7 + 657739q^6 - 5835825q^5 + 35563770q^4$$
$$- 146288034q^3 + 386490120q^2 - 588513120q + 389442480,$$

以及 $b(q)$、$d(q)$、$e(q)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 中 x^2+x+1的根数，x^2+x-1 以及 x^2+1。六个点和七个点的点数是多项式，因此（7）对于 $m=1$ 和 $N=6$成立。于是，在 $q=0$ 处计算点数得到 $\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,6}) = 126$ 以及 $\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,7}) = 7470$。

如果 $q \equiv 1$ (模 3)，那么 $b(q) = 2$，且 $\mathcal{X}_{3,8}$ 满足（7），其中 $m=3$、$N=6$ 和

$$\#\mathcal{X}_{3,8}(\mathbb{F}_q) = P_8(q) := Q_8(q) + 1680 \tag{8}$$

其常数项为 $P_8(0) = 1\,116\,480$。

类似地，对于 $n=9$，如果 $q \equiv 1$ (模 60)，那么 $\mathbb{F}_q^\times$包含三次、四次和五次单位根，因此也包含 $\sqrt{-3}$、$\sqrt{-1}$ 和 $\sqrt{5}$（因为 $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$），所以 $b(q) = d(q) = e(q) = 2$。因此 $\mathcal{X}_{3,9}$ 满足（7），其中 $m=60$、$N=6$和 $P_9(q) := Q_9(q) + 1680\,(9q^2 - 243q + 1684) + 665\,280$，其常数项为 $P_9(0) = 392\,936\,880$。

命题 3.7。对于 $6 \le n \le 9$ 构形空间 $\mathcal{X}_{3,n}$ 其亏格为零，并且

$$\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,n}) = \dim \Omega^{2n-8}_{\log}(\mathcal{X}_{3,n}) = \begin{cases} 126 & for\ n=6, \\ 7470 & for\ n=7, \\ 1\,116\,480 & for\ n=8, \\ 392\,936\,880 & for\ n=9. \end{cases}$$

证明。维数 $d = 2n-8$ 为偶数，因此 推论 3.5 得出其亏格为零，并将这两个数都确定为计数多项式的常数项。□

定理 3.8。对于 $6 \le n \le 9$ 数对 $(\mathrm{Gr}_{3,n}, Z_{3,n})$ 是一个正配置。

证明。我们验证定义 2.2中的四个条件。条件 *1*。格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_{3,n}$ 是光滑的，且定义在 $\mathbb{R}$ 上；任意一组处于线性一般位置的 n 个实点构型，在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 中都给出 $\mathrm{Gr}^\circ_{3,n}$的一个实点。

条件 *2*。$Z_{3,n}$ 的不可约分支是舒伯特除子 $Z_I = \{p_I = 0\} \cap \mathrm{Gr}_{3,n}$, $I \in \binom{[n]}{3}$，每个都定义在 $\mathbb{Q}$ 上且不可约。它们都有一个光滑实点：取一个实构型，其中由 I 标记的三个点互不相同且共线，并且没有其他三个点共线。这样的构型位于 Z_I 的光滑轨迹中，且不属于其他任何分支。

条件 *3*。$\mathrm{Gr}_{3,n}$ 是光滑的，因此 $\mathrm{Sing}(\mathrm{Gr}_{3,n}) = \varnothing \subseteq Z_{3,n}$。

条件 *4*。亏格由 命题 3.7 得到，因为 $g(\mathrm{Gr}_{3,n}, Z_{3,n}) = g(\mathcal{X}_{3,n})$ 根据 命题 2.3。

□

注 3.9. 对于 $n \le 7$，零亏格也可由已知的纯性结果推出。回顾一下，若光滑复簇 U 对每个 k 都满足 $H^k(U)$ 是 Hodge–Tate型（k，k）纯的，则称其为极小纯。Bergvall 证明了 $\mathcal{X}_{3,7}$ 是极小纯的（[Ber20，定理 1.1]）。对于 $n \le 6$，这是 Das 和 O'Connor 的结果（[DO21，定理 1.1],）；对于 $n=5$，则是 Bergvall 和 Gounelas 独立得到的结果（[BG23，定理 1.3]）。极小纯性立即给出零亏格：$H_d(X, Y) \cong H^d(\mathcal{X}_{3,n})(d)$ 因而具有类型（0，0），所以 $h^{-p,0}(H_d(X, Y)) = 0$ 对于 $p > 0$ 成立，而 $\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,n}) = \dim H^d(\mathcal{X}_{3,n})$ 是最高贝蒂数。对于 $n=7$，贝蒂数可以从 Bergvall 的点计数中读出：恒等映射所在的行

在 [Ber20，表 1] 是多项式 $\#\mathcal{X}_{3,\,7}(\mathbb{F}_q)$ 如上所述，我们得到 维数 $H^6(\mathcal{X}_{3,\,7}) = 7470$，即其常数项，这与 命题 3.7一致。

对于处于线性一般位置的八个点，极小纯性尚未知晓。Bergvall 的论证适用于处于一般位置的八个点，其中还要求没有六个点位于同一个圆锥曲线上；他解释了为什么该论证不能推广到 $\mathcal{X}_{3,\,8}$ [Ber20, §4]。

八个点计数中的术语 $840\,b(q)$ 源自 Möbius–Kantor 构形；该构形可在 $\mathbb{C}$ 上实现，但不能在 $\mathbb{R}$上实现，并且在 第 4.4 节 中，它再次出现在 $\mathcal{X}_{3的8}$ 紧化的角点处，而没有任何区域到达那里。

4. 实组合秩

根据定理 3.8，对于 $6 \le n \le 9$，数对 $(\mathrm{Gr}3,_n,Z_{3,n})$ 是一个正配置，因此其区域具有典范形式。本节将比较这些形式的张成空间与所有对数顶形式组成的空间。我们首先将问题归约到构形空间 $\mathcal{X}_{3,n}$，并证明 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Gr}3,_n,Z_{3,n}) = \mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{3,n})$。随后我们考察 $\mathcal{X}_{3,n}$ 的热带紧化，其中典范形式由其在角点处的迭代留数确定，而一个区域只能到达实角点。对于七个点，根据 Corey [Cor21] 的工作，每个角点都是实的。根据 Antolini 和 Early 关于手性热带格拉斯曼流形的工作 [AE25]，各区域的迭代留数是手征热带德雷斯曼与 Dressian 的锥之间的模 2 相交数。随后，利用 Antolini 和 Early 的扇 $\mathbb{F}_2$ AE [，在 $\mathbb{F}_2$ 上进行秩计算，得到 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}} = \mathrm{cr} = 7470$。对于八个点，Corey 和 Luber [CL23] 找到的 840 个具有两个分支的初始退化给出了由共轭复点构成的数对角点，而这些角点迫使 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}} < \mathrm{cr}$。

4.1. 从格拉斯曼流形到构形空间。设 (X,Y) 是一个维数为 d 且具有 $U = X \setminus Y$ 的正构型。实组合秩 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(X,Y)$ 是由区域 σ 的典范形式 $\omega(\sigma)$ 张成的 $\mathbb{Q}$-向量空间的维数，其中这些区域属于 (X,Y)（[ST26，定义 6.10]）。这些形式属于 $\Omega^d_{\log}(U)$，其维数为 $\mathrm{cr}(X,Y)$，因此 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(X,Y) \le \mathrm{cr}(X,Y)$。

区域的类 σ 不依赖于 U 的紧化。这是因为 $H_d(X,Y)$ 与局部有限同调 $H_d^{\mathrm{lf}}(U)$ 同构（参见 [BD25，公式 (8)] 和[ST26，§12]，其中给出了这一论证）。因此，对于 U 亏格为零的光滑实代数簇，我们将$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(U)$ 记作在任意定义于 $\mathbb{R}$ 上的紧化中，可定向连通分支的闭包的典范形式的张成空间的维数。

对于六个点，实组合秩是已知的。 372 个区域$\mathcal{X}_{3,\,6}(\mathbb{R})$ 在 S_6作用下构成四个轨道，每个轨道对应于六个元素上秩为 3 的一致有向拟阵的一个同构类（模去重新标记和重新定向）。它们的典范形式张成一个维数为 126 的空间，因此$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{3,\,6}) = \mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,\,6}) = 126$ （见 [ST26，§12]，[HPP26，命题 5。3]）。

现在，我们在形式和区域的层面上，借助平凡化 $\Phi = (\pi,\ \mathbf{t})\colon \mathrm{Gr}^{\circ}_{3,\,n} \longrightarrow \mathcal{X}_{3,\,n} \times \mathbb{G}_m^{n-1}$的 (5)，从格拉斯曼流形转向构形空间。由于 Φ 是一个同构，$(d+n-1)$ 1-形式

$$dy_{15},\, dy_{25},\, \ldots,\, dy_{1n},\, dy_{2n}, \qquad \operatorname{dlog} t_i \quad (i \in [n] \setminus \{3\}) \tag{9}$$

构成 $\Omega^1_{\mathrm{Gr}^{\circ}_{3\,的n}}$标架，其中 $d = 2n-8$。事实上，dy_{ja} 将 $\Omega^1_{\mathcal{X}_{3\,的n}}$平凡化，而 $\operatorname{dlog} t_i = dt_i/t_i$与 dt_i 相差一个单位。令

$$\theta := \bigwedge_{i \in [n]\setminus\{3\}} \operatorname{dlog} t_i \ \in\ \Omega^{n-1}(\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}).$$

之所以是对数型，是因为 t_i 是在Gr°_{3}上n的可逆正则函数。由（4），T中的元素 τ 拉回为 $(\tau_i/\tau_3)\ t_i$，因此 $\tau^*\mathrm{dlog}\ t_i = \mathrm{dlog}\ t_i$，并且 θ具有 T-不变性。由于 π具有 T-不变性，所以对于 $\mathcal{X}_{3}$上的n任意形式 ω， $\pi^*\omega\wedge\theta$ 也具有 T-不变性。

命题 4.1。设 $6\le n\le 9$。映射

$$\Lambda\colon \Omega^{d}_{\log}\big(\mathcal{X}_{3,n}\big)\longrightarrow \Omega^{d+n-1}_{\log}\big(\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}\big),\qquad \omega\mapsto \pi^*\omega\wedge\theta,$$

是 $\mathbb{C}$-向量空间的同构。特别地，Gr°_{3} 上的每个对数顶形式n 都是T-不变的。

证明。对数形式沿态射 [BD25, §1.5.1] 拉回，并且对楔积封闭，因此 Λ 定义良好。设 $\omega = f\,dy$，其中 dy 是 d 个 1-形式dy_{ja}的楔积。那么 $\Lambda(\omega) = \pi^*f\cdot dy\wedge\theta$，并且由于（9）是一个标架， $dy\wedge\theta$ 处处不为零。因此 $\Lambda(\omega)=0$迫使 $\pi^*f=0$，从而 $f=0$，因为 π 是满射，而 Λ 是单射。两个空间的维数都等于组合秩加上亏格。根据命题 2.3 和 3.7，亏格均为零且组合秩相同，因此 Λ 是同构。最后一个结论成立，因为 Λ 的像中的每个形式都是 T-不变的。□

同样的乘积结构也支配着实点。同构 Φ将 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,n}(\mathbb{R})$ 与 $\mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{R})\times(\mathbb{R}^{\times})^{n-1}$ 对应起来。右侧的连通分支是 $\sigma^\circ\times Q_\varepsilon$ 一个连通分支 σ°（属于 $\mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{R})$ 与一个开正交象限 $Q_\varepsilon=\{\varepsilon_i t_i>0\}$，$\varepsilon\in\{\pm1\}^{n-1}$ 的乘积。因此，$(\mathrm{Gr}_{3,n},Z_{3,n})$ 的区域由数对 (σ,ε) 编号，其中第一项是 $\mathcal{X}_{3,n}$ 的一个区域 σ，第二项是一个符号向量：$\rho_{\sigma,\varepsilon}$ 是 $\Phi^{-1}(\sigma^\circ\times Q_\varepsilon)$ 在 $\mathrm{Gr}_{3,n}(\mathbb{R})$ 中的闭包。特别地，$(\mathrm{Gr}_{3,n},Z_{3,n})$ 的区域数是 $\mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{R})$ 的 2^{n-1} 倍。它们的典范形式通过与 θ 取同一个楔积得到。

P命题 4.2. 设 $6\le n\le 9$。对于 $\mathcal{X}_{3,n}$ 的每个区域 σ 以及每个 $\varepsilon\in\{\pm1\}^{n-1}$，

$$\omega(\rho_{\sigma,\varepsilon}) = \pm\,\Lambda\big(\omega(\sigma)\big).$$

因此， Λ 将 $\mathcal{X}_{3,\ n}$ 各区域的典范形式的张成空间映射到 $(\mathrm{Gr}_{3,\ n},Z_{3,\ n})$各区域的典范形式的张成空间，并且 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Gr}_{3,\ n},Z_{3,\ n}) = \mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{3,\ n})$。

证明。令 $\overline{X}$ 为 $\mathcal{X}_{3,\ n}$ 在 $\mathbb{R}$上定义的一个紧化。我们计算紧化 $X\times(\mathbb{P}^1)^{n-1}$ 中 $\mathcal{X}_{3,\ n}\times\mathbb{G}_m^{n-1}\cong \mathrm{Gr}^{\circ}_{3,\ n}$的 $\rho_{\sigma,\ \varepsilon}$ 的典范形式。$\overline{\text{边界}}$是 $(X\setminus\mathcal{X}_{3,\ n})\times(\mathbb{P}^1)^{n-1}$ 与轨迹 $\{t_i\in\{0,\infty\}\}$的$\overline{\text{并集}}$。$\overline{\sigma^\circ\times Q_\varepsilon}$的闭包为 $\sigma\times Q_\varepsilon$，其中

$$\overline{Q_\varepsilon}=\prod_{i\neq3} I_{\varepsilon_i}\ \subseteq\ (\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})^{n-1},\qquad I_+=[0,\infty],\quad I_-=[-\infty,0].$$

根据命题 3.7，$\overline{\text{数对}}$ $(X,X\setminus\mathcal{X}_{3,n})$ 的亏格为零，而 $(\mathbb{P}^1,\{0,\infty\})$ 的亏格为零 [BD25, §5.2]。每条闭半直线 $I_\pm$ 都是从 0 到 ∞ 的 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$中的一条路径，因此其典范形式为 $\pm\,dt/t$[BD25, §5.2]。乘积公式 [BD25, 命题 2.12] 给出 $\omega(Q_\varepsilon)=\pm\theta$ 在坐标 t_i中的$\overline{\text{表达式}}$，再应用一次，

$$\omega(\rho_{\sigma,\varepsilon}) = \pm\,\mathrm{pr}_1^*\omega(\sigma)\wedge\mathrm{pr}_2^*\omega(\overline{Q_\varepsilon}) = \pm\,\pi^*\omega(\sigma)\wedge\theta = \pm\,\Lambda\big(\omega(\sigma)\big).$$

$(\mathrm{Gr}_{3,\ n},\ Z_{3,\ n})$ 的每个区域都是某个 $\rho_{\sigma,\ \varepsilon}$，且 Λ 是单射，因此 Λ 将 $\omega(\sigma)$ 的张成空间映射到 $\omega(\rho_{\sigma,\ \varepsilon})$ 的张成空间上，并且两者的实组合秩相同。□

4.2. 的热带紧化$\mathcal{X}_{3,\ 7}$和$\mathcal{X}_{3,\ 8}$。 现在我们描述$\mathcal{X}_{3,\ n}$在 $n=7$，8 情形下具有简单正规交边界的热带紧化。Brown 和 Dupont 通过这种紧化的角点处的迭代留数确定典范形式。我们用热带簇的最大锥描述角点，并描述$\mathcal{X}_{3,\ n}(\mathbb{R})$的一个区域如何与角点相交。

令 $N=\mathbb{Z}^{\binom{[n]}{3}}$的基为$(\mathbf{e}_I)_I$以及 $\mathbf{1}=\sum_I \mathbf{e}_I$，使得 $N/\mathbb{Z}\mathbf{1}$成为 Plücker 环面 $T_P=\mathbb{G}_{m}^{\binom{n}{3}-n}/\mathbb{G}_m$的余特征格。令 $\varphi\colon \mathbb{R}^n\to N_{\mathbb{R}}$, $\varphi(a)_I=\sum_{i\in I}a_i$，并令 $L=\varphi(\mathbb{R}^n)$。映射 φ是单射，且 $\mathbf{1}=\varphi(e_{1,2,3},\dots,e_{1,3,4})\in L$。环面 $T=\mathbb{G}_m^n/\mathbb{G}_m$ 在 $\mathrm{Gr}^\circ_{3,n}$ 上自由作用，其余特征格为 $(N\cap L)/\mathbb{Z}\mathbf{1}$。环面 $T_X:=T_P/T$的 $\mathcal{X}_{3,n}$ 的余特征格为$N_X=N/(N\cap L)$，特征格为

$$M_X=(N\cap L)^\perp=\left\{m\in\mathbb{Z}^{\binom{[n]}{3}}:\ \sum_{I\ni i}m_I=0\text{ for }i=1,\dots,n\right\}.$$

特征 $m\in M_X$ 是一个 Laurent 单项式 $p^m=\prod_I p_I^{m_I}$，其中每个指数在分子中出现的次数都与在分母中出现的次数相同，例如交比y_{ja}。构形空间是一个闭子簇 $\mathcal{X}_{3,n}\subseteq T_X$。令 $\pi\colon N_{\mathbb{R}}\to(N_X)_{\mathbb{R}}=N_{\mathbb{R}}/L$为投影。商映射 $\mathrm{Gr}^\circ_{3,n}\to\mathcal{X}_{3,n}$ 是环面商映射的限制，因此 $\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,n}=\pi(\mathrm{Trop}\,\mathrm{Gr}^\circ_{3,n})$ 是一个纯 d 维扇，且不含线性空间。对于初始退化，我们有

$$\mathrm{in}_w\,\mathrm{Gr}^\circ_{3,n}\ \cong\ \mathrm{in}_{\pi(w)}\,\mathcal{X}_{3,n}\times T\qquad(w\in\mathrm{Trop}\,\mathrm{Gr}^\circ_{3,n}) \tag{10}$$

（见 [CL23，§7]）。因此，关于 Gr°_{3}的$_n$ 初始退化的结果，就是关于$\mathcal{X}_{3}$的$_n$结果。

对于 $n=7$ 每个初始退化，在$_w\,\mathcal{X}_{3}$中$_{,\ 7}$都是光滑且不可约的 [Cor21，定理 1。2]对于$n=8$ 每个初始退化，在$_w\,\mathcal{X}_{3}$中$_{,\ 8}$都是光滑的 [CL23，定理 1。1]，并且除在840 个Möbius–Kantor 锥（见第 4.4 节）上方外均不可约。在$\mathcal{X}_{3}$中$_{,\ n}$对 *schön* 而言，尤其是 $n=7$，8。

设 Σ是 $(N_X)_{\mathbb{R}}$ 中的一个单模扇，其支集为 $\mathrm{Trop}\,\mathcal{X}_{3n}$。设 X是 $\mathcal{X}_{3n}$ 在环面簇 X_Σ中的闭包，其中 X_Σ是相对于 Σ的 $\mathcal{X}_{3n}$ 的热带紧化。令 $Y=X\setminus\mathcal{X}_{3n}$表示边界除子。对于一个锥 $\tau\in\Sigma$，令 O_τ 表示其环面轨道，令 $X_\tau=X\cap O_\tau$表示其层。由于 $|\Sigma|=\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3n}$，簇 X 是紧的 [Tev07，命题 2。3]。由于 $\mathcal{X}_{3n}$ 是 schön 的且扇 Σ 是单模的，热带紧化 X 是光滑的，并且 Y 是简单正规交除子 [Tev07，定理 1。4]。此外，每个层 X_τ 都是非空且光滑的，其余维为 $\dim\tau$ [Hac08，定理 2.4，引理 2。7]。对于 $w\in\mathrm{relint}\,\tau$，存在一个同构

$$\mathrm{in}_w\,\mathcal{X}_{3,n}\ \cong\ X_\tau\times\mathbb{G}_m^{\dim\tau} \tag{11}$$

[HK12，引理 3。6]。Brown 和 Dupont [BD25，定义 216]意义下，X 在 d 的局部分支 Y上的角点是X、Y）d 上的点 Y。

引理 4.3。 设 $n=7$、8 且令 （X、Y）为 $\mathcal{X}_{3}$、$_n$关于Σ的热带紧化。

(1) X_τ上的一点恰好位于 Y的维数τ个局部分支上，每个 Y_ρ对应一个分支：$=X\cap\overline{O_\rho}$ τ 的射线 ρ。如果对于位于射线 ρ相对内部的 w，$\mathrm{in}_w\,\mathcal{X}_{3,n}$ 不可约，那么 Y_ρ是 Y的一个不可约分支。*(2)* Y 的角点是零维层 X_C中的点，其中 C 是 Σ的极大锥。对于 $w\in$ 相对内部 C，X_C 中的角点数等于$\mathrm{in}_w\,\mathcal{X}_{3,n}$的不可约分支数。*(3)* 设 $C\in\Sigma$ 为一个极大锥。如果对于 $w\in$ 相对内部C，$\mathrm{in}_w\,\mathcal{X}_{3,n}$ 不可约，那么 X_C 是一个在 $\mathbb{Q}$上定义的单点。特别地，这个角点是实的。

证明。由于 $\tau \in \Sigma$ 是幺模的， τ的仿射图为 $U_\tau \cong \mathbb{A}^k \times \mathbb{G}_m^{r-k}$，其中 $k =$维数为τ，坐标为 z_1，……， z_r。在 $X_\tau = X \cap O_\tau$上一点附近，除子 Y是 $X \cap \{z_1 \cdots z_k = 0\}$。由于$Y$是简单正规交叉， k 个超曲面 $X \cap \{z_j = 0\}$ 就是它的局部分支。根据 (11)，当 $\mathrm{in}_w \mathcal{X}_3$时，除子 Y_ρ 不可约，其中 $_n$ ，这就证明了 (1)。层 X_C 中的一点是角点，当且仅当它位于 Y的C维数个分支上，也就是说，当 C是一个极大锥时。对于这样的锥C ，层 X_C 是维数为零的光滑层；根据 (11)，它的复点对应于 $\mathrm{in}_w \mathcal{X}_{3,n}$的不可约分支。这就证明了 (2)。如果只有一个不可约分支，那么 X_C 是在 $\mathbb{Q}$ 上定义的单点，因此它是实的。□

设 C 是 Σ 的一个极大锥，且 $x \in X_C$ 是一个实角点。在证明中的 $U_C \cong \mathbb{A}^d \times \mathbb{G}_m^{r-d}$ 坐标图里， x 位于 d 个分支 $\{z_j = 0\}$ 上，这些分支对应于简单正规交除子 Y 的 $j \le d$。因此， z_1， …， z_d 是 X 在 x处的局部坐标。于是，对于 x 的充分小开邻域$V \subseteq X(\mathbb{R})$，有 $V \setminus Y(\mathbb{R})$ 是以下 2^d 个开正交象限的不交并

$$V_\varepsilon \;=\; \{\, y \in V :\; \varepsilon_1 z_1(y) > 0,\; \ldots,\; \varepsilon_d z_d(y) > 0 \,\}, \qquad \varepsilon \in \{\pm 1\}^d. \tag{12}$$

对于一个实构型 y，我们用 $\chi(y)$ 表示其拟阵符号，即表示 y 的一个 $3 \times n$ 矩阵的普吕克坐标的符号向量，模去重新定向。因此， $S_\chi = \{y \in \mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{R}) :\; \chi(y) = \chi\}$ 是 χ 的有向拟阵分层。坐标 z_j 是 M_X 中的一个特征，即普吕克坐标中的一个 Laurent 单项式，其中每个指数在分子和分母中出现的次数相同，因此它在 y 处的符号只取决于类 $\chi(y)$。在 V_ε 上，坐标 z_j 对于 $j \le d$ 的符号为 ε_j。因此， x 处的 2^d 个正交象限具有两两不同的拟阵符号，所以它们属于 2^d 个不同的有向拟阵分层。

现在令 $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_N$为不可约分支的分解，并令 $\mathcal{C}$为角点的集合。对于 $J \subseteq [N]$，令 $Y_J = \bigcap_{j \in J} Y_j$；对于 $x \in Y_J$，令 $Y_J(x)$ 为其经过 x的连通分支。角点 c位于 d个分支 Y_{i_1}、……、Y_{i_d}上。Brown 和 Dupont 将其迭代边界 ∂_c定义为： $H_d(X, Y) \to H_0(\{c\}) \cong \mathbb{Q}$，即沿着 Y_{i_d}、 $Y_{i_{d-1}} \cap Y_{i_d}$、……的部分边界映射，以及迭代留数 $\mathrm{Res}_c\colon \Omega^d_{\log}(\mathcal{X}_{3,n}) \to \mathbb{C}$ 以相同方式[BD25, (10), (36), (37)]进行复合。对于 $n = 7$，根据命题 3.7，8 的亏格为零，因此迭代留数给出一个单射

$$\mathrm{Res} = \bigoplus\nolimits_{c \in \mathcal{C}} \mathrm{Res}_c\colon\; \Omega^d_{\log}(\mathcal{X}_{3,n}) \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{C}}.$$

类 $\sigma \in H_d(X, Y)$ 的典范形式 $\omega(\sigma)$ 是唯一满足对所有角点 c [，均有 $\mathrm{Res}_c\, \omega(\sigma) = \partial_c \sigma$ 的对数形式（BD25，命题 2.17，推论 2.18]）。Res 的像由对偶复形 $\Delta(Y)$ 描述；该复形对每个满足 $|J| = k$的 Y_J 的每个连通分支，都有一个 $(k-1)$-单纯形。它没有维数为 d 的单纯形，而其 $(d-1)$-单纯形就是角点。Brown 和 Dupont 将 $\Omega^d_{\log}(\mathcal{X}_{3,n})$ 与 $\Delta(Y)$ 的最高维同调相识别，且与迭代边界 [相容（BD25，命题 2.17，命题 4.4]）。因此，Res 是 $\Omega^d_{\log}(\mathcal{X}_{3,n})$ 到 $W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ 的同构，其中

$$W := \widetilde{H}_{d-1}\big(\Delta(Y); \mathbb{Q}\big) = \ker\Big(\partial\colon \mathbb{Q}^{\mathcal{C}} \to \bigoplus_{|J| = d-1} H_0(Y_J)\Big), \qquad \partial(c) = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{k-1} \big[Y_{I \setminus \{i_k\}}(c)\big], \tag{13}$$

对于由 $I = \{i_1 < \cdots < i_d\}$ 编号的分支上的角点 c。特别地，$\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,\ n}) = \dim_{\mathbb{Q}} W$。

注 4.4。假设 在$_w \mathcal{X}_{3\text{中},\ n}$ 只要 w 位于 Σ 的一个非极大锥的相对内部，就 w 是不可约的。根据（11），每个正维层 X_τ 都是连通的，也就是说，$\mathcal{X}_{3,\ n}$ 在 非常漂亮 的意义下是 [Koe26]。交集 Y_J 是 X_τ 的闭包，如果

由 J 索引的射线张成一个 τ 维数小于 d 的锥，而当它们张成极大锥 C时，它是 X_C。因此 $\Delta(Y)$ 是 Σ 的链接，其中每个极大锥 C 出现的次数等于 X_C所含点的数量。Koefler 的热带公式给出了 [Koe26，命题 2.2。12] 通过该复形的面数表示组合秩 cr。由于 Trop$\mathcal{X}_{3,\,n}$ 没有线性空间，所以它写作

$$\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,n}) \;=\; \sum_{k=0}^{d}(-1)^{d-k} f_k,$$

其中，$f_0 = 1$, f_k 表示 k维锥的数量，而 f_d 则按照角点的数量对极大锥进行计数，即计入其热带重数。对于$n = 7$ 所有初始退化都是光滑且不可约的 [Cor21, Thm. 1.2], 因此每个极大锥只计数一次，其交错和为 $(-1)^{d-1}$ 乘以 Trop $\mathcal{X}_{3,7}$ 的链接的约化欧拉示性数。Trop $\mathcal{X}_{3,7}$ 上的 Gröbner扇结构是单纯的，其 f-向量为 (1, 721, 16800, 124180, 386155, 522585, 252000) [HJJS09, Thm. 2.1], 其交错和为$\widetilde{}$7470。该数也是 dim H_5(link Trop $\mathcal{X}_{3,7}$)。这就是定理 B 中的最后一个等式。

由于 Res 是单射，且迭代边界是有理的，实组合秩是一个整数矩阵的秩：

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{3,n}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{span}\big\{(\partial_c\sigma)_{c\in\mathcal{C}} \;:\; \sigma \text{ a region of } \mathcal{X}_{3,n}\big\}. \tag{14}$$

如果一个角点位于 $X(\mathbb{R})$ 中，我们称其为实 角点。一个区域只涉及实角点，并且在实角点处，它是闭正交象限的并集。

引理 4.5。 设 c 是 Y 的一个角点，并设 σ 是 $\mathcal{X}_{3,\,n}$ 的一个区域。

(1) 如果 $c \notin \sigma$，那么 $\partial_c\sigma = 0$。特别地，对于 $\partial_c\sigma = 0$ 每个 c 非实角点，均有此结论。*(2)* 设 c 为实角点，并设 V和正交象限 V_ε 如(12)中所述。如果 $\sigma \cap V$ 是 V 中单个正交象限 V_ε的闭包，那么 $\partial_c\sigma = \pm 1$。

证明。 设角点 c位于 $Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_d}$上。 ∂_c中的第一个部分边界映射取 σ 的边界，并保留其中位于 Y_{i_d}的部分；下一个映射取该链的边界，并保留其中位于 $Y_{i_{d-1}} \cap Y_{i_d}$的部分，依此类推。因此，所有出现的链都支撑于 σ中，最后一个是在 $\sigma \cap Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_d}$上的 0-链，其在 c处的系数为 $\partial_c\sigma$。当 $c \notin \sigma$时，它为零，而非实角点不位于 $\sigma \subseteq X(\mathbb{R})$中。这证明了(1)。在(2)中，$[\sigma]$ 的像是闭正交象限 $\{\varepsilon_1 z_1 \geq 0, \ldots, \varepsilon_d z_d \geq 0\}$ 在坐标 z_j 中的像，而正交象限的迭代边界是 ± 1 [BD25，命题 6 的证明。10]。

□

4.3. 七个点。在本小节中 $n = 7$，因此 $d =$ 维$\mathcal{X}_{3,\,7} = 6$ 且维数为 $T_X = 28$。令 $\mathcal{K}$为 [7]上秩 3 的一致手性符号的重定向类集合。忽略重新标记后共有 11 个，且 $|\mathcal{K}| = 27\,240$。图 1 列出了代表元，图 2 展示了实现每个代表元的构型。因此， $\mathcal{K}$ 中的每个类都可实现；同样，在至多八个元素上的每个秩 3 有向拟阵 [BLVS$^+$99，第 8], 章，以及每个分层 S_χ， $\chi \in \mathcal{K}$，都非空。根据 $n \leq 9$ [Ric88]， $\mathcal{X}_{3,\,n}$ 的非空有向拟阵分层是连通的。因此，分层 S_χ， $\chi \in \mathcal{K}$恰好是$\mathcal{X}_{3,\,7}$(ℝ)的连通分支，而$\mathcal{X}_{3,\,7}$ 的区域是它们的闭包 $R_\chi = S_\chi$， $\chi \in \mathcal{K}$。

—

定理 4.6。 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Gr}_{3,\,7}, Z_{3,\,7}) = \mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{3,\,7}) = \mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,\,7}) = 7470$。

第一个等式来自命题 4.2，而$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{3,\,7}) \leq \mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,\,7}) = 7470$ 由命题 3.7得出。对于下界，我们找到了7470 个区域和7470 个角点，它们属于一个热带紧化，其

	p_{123}	$\cdots$	p_{567}
χ_1	++++++++++++++++++++++−++++++++−−−−−+−		
χ_2	++++++++++++++++++++−++++++++−−+−−−−		
χ_3	++++++++++++++++++++−+++++++++−+−−−−		
χ_4	++++++++++++++++++++++++++++−−++−−+++		
χ_5	++++++++++++++++++++++++++++−+++−−+++		
χ_6	++++++++++++++++++++++++++++++−+−−−−		
χ_7	++++++++++++++++++++++++++++++−++−−−		
χ_8	++++++++++++++++++++++++++++++−+++−−		
χ_9	++++++++++++++++++++++++++++++++++−−		
χ_{10}	++++++++++++++++++++++++++++++++++++−		
χ_{11}	++++++++++++++++++++++++++++++++++++		

图 1. 基数为 7、秩为 3 的一致有向拟阵等价类的 11 个手征拓扑代表。行和列按照 Finschi 的目录 [Fin,FF02], 排列，其中各列按余字典序排列（$p_{123}, p_{124}, p_{134}, p_{234}, \ldots$）。

迭代边界矩阵模2可逆。我们先概述论证，随后本节将详细展开。在一个角点处，边界的补集由64 个正交象限组成。它们分别位于64 个不同的有向拟阵分层中，因此一个区域至多包含其中一个。哪些分层会出现，可以从该角点处的初始退化中读出：它是一个六维环面的陪集，其实点恰好承载这64 个正交象限的拟阵符号。根据 Antolini 和 Early 的定理 [AE25]，这些正是其手征热带德雷斯曼包含该角点之锥的拟阵符号。因此，模2 时，迭代边界矩阵就是 Antolini 和 Early 计算出的各个扇的关联矩阵，而我们在 $\mathbb{F}_2$上计算其秩。

4.3.1. 手征热带德雷斯曼。我们回顾手征热带对象 [AE25, §2]。设 $\chi \in \{\pm 1\}\binom{[n]}{3}$ 是一个一致手性符号，且 $g \in \mathbb{Q}[p_I]$ 是一个关于普吕克坐标的多项式。记作$p^v = \prod_I p_I^{v_I}$和 $\chi^v = \prod_I \chi_I^{v_I}$。项 cp^v 在 g 中于 χ 处的符号为 sign(c)χ^v，权为$\sum_I v_I w_I$，其中 $w \in \mathbb{R}\binom{[n]}{3}$。初始形式 in$_w$($g$) 是 g 中在w 处权最小的项之和，而 Trop$^\chi V(g)$ 是所有满足以下条件的 w 构成的集合：in$_w$(g) 中各项在 χ处的符号并非全都相同。

手征热带德雷斯曼 Dr$^\chi$(3, n) 是所有三项普吕克关系对应的 Trop$^\chi V(f)$ 的交集

$$p_{lab}\, p_{lce} \;-\; p_{lac}\, p_{lbe} \;+\; p_{lae}\, p_{lbc} \;=\; 0 \qquad (a < b < c < e,\ l \notin \{a, b, c, e\}), \tag{15}$$

其中 p_{xyz} 是按此顺序排列的列 x、y、z 的行列式。手征热带格拉斯曼流形 Trop$^\chi$ Gr(3, n) 是普吕克理想 $I_{3,n} \subseteq \mathbb{Q}[p_I]$中所有多项式 g 对应的集合 Trop$^\chi V(g)$ 的交集。在（15）的三个项中，每个指数出现的次数都相同。因此，Dr$^\chi$(3, n) 只取决于 χ的重定向类，且在沿线性空间 L 平移下保持不变。Antolini 和 Early 证明了

$$\mathrm{Dr}^\chi(3, n) \;=\; \mathrm{Trop}^\chi\, \mathrm{Gr}(3, n) \qquad (n = 6, 7, 8) \tag{16}$$

对于每个一致手性符号 χ [AE25，定理 1。1]。

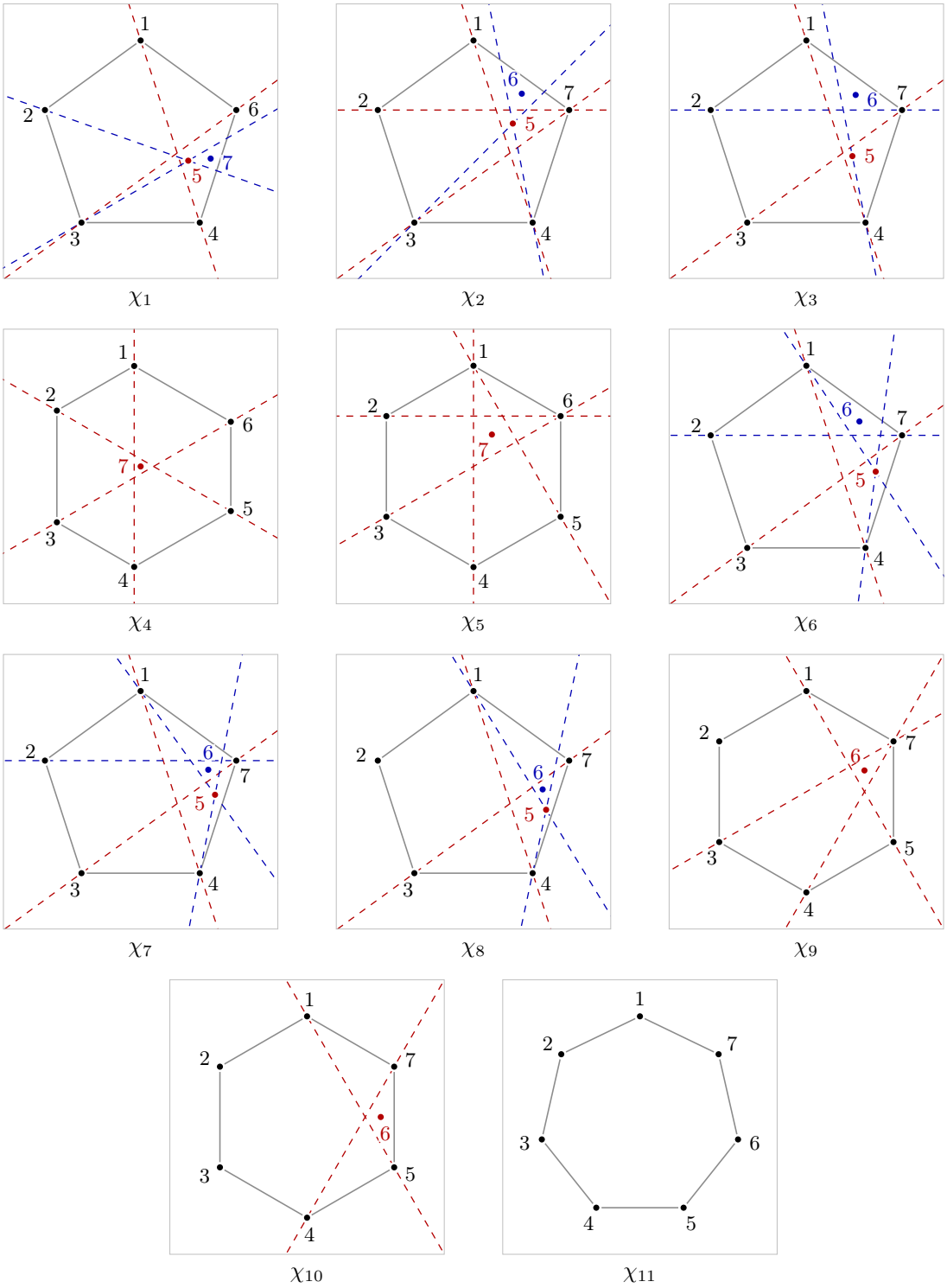

图 2。 中的代表性点配置，7 对应 11 个拟阵符号中的每一个χ_i 来自图 1。在每个标架中，黑点构成一个凸多边形。红点位于由多边形的边和经过顶点数对的红色虚线围成的区域内。蓝点位于由多边形的边以及经过其他点的红色/蓝色虚线围成的区域内。

4.3.2. *Plücker* 锥。 Dressian $\mathrm{Dr}(3,7)$ 中的两个向量普吕克锥 当且仅当它们在每个关系中极小权项相同（15）。这些多面体锥构成了 Dressian $\mathrm{Dr}(3,7)$ [HJJS09，§2]，上的普吕克扇结构，且每个 $\mathrm{Dr}^{\chi}(3,7)$ 都是若干普吕克锥的并。Plücker 锥和集合 $\mathrm{Dr}^{\chi}(3,7)$ 在平移 L 下保持不变，因此从现在起，我们将它们视为 $(N_X)_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}/L$ 的子集。令 $\mathcal{P}$ 为 211 365 个维数为 6 的普吕克锥组成的集合。它们的并为 $\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,7}$ [HJJS09，定理 2.2]。我们注意到，Dressian $\mathrm{Dr}(3,7)$ 模 L 还包含另外 30 个维数为 7 的极大锥，它们来自 Fano拟阵，其相对内部与 $\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,7}$ 不相交。

4.3.3. 紧化及其角点。令 Σ 为 $\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,7}$ 上 Gröbner 扇结构的一个幺模细化。令 (X, Y) 为关于 Σ 的 $\mathcal{X}_{3,7}$ 的热带紧化，如第 4.2 节所述。以下 R_χ 表示 S_χ 在 $X(\mathbb{R})$ 中的闭包。$\mathcal{X}_{3,7}$ 的每个初始退化都是光滑且不可约的 [Cor21，定理 1。2]。因此，根据引理 4.3(3)， Y 的角点是 x_C，每个 Σ 的极大锥 C 上有一个角点，并且它们定义在 $\mathbb{R}$ 上。

$\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,7}$ 上的 Gröbner 扇结构细化了其普吕克扇结构。因此，对于 Σ 的一个极大锥 C，C 的相对内部包含于单个普吕克锥中。该锥的维数至少为 6，并且与 $\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,7}$ 相交，所以它不是 30 个 7 维锥中的任何一个的相对内部。因此，它是某个锥 $P(C) \in \mathcal{P}$ 的相对内部，即 $\operatorname{relint} C \subseteq \operatorname{relint} P(C)$。反过来，每个 $P \in \mathcal{P}$ 的维数都是 6，并且位于 Σ 的支集内。因此，$\operatorname{relint} P$ 与 Σ 的某个极大锥 C 的相对内部相交，于是 $P = P(C)$。

对于 Σ 的极大锥 C，我们使用引理 4.3 证明中的坐标图 $U_C \cong \mathbb{A}^6 \times \mathbb{G}_m^{22}$。由于 C 是幺模的，其本原射线生成元 u_1、…、u_6 可扩展为 N_X 的一个 $\mathbb{Z}$-基 u_1、…、u_{28}。U_C 的坐标 z_1、…、z_{28} 是特征格 M_X 的对偶基。因此，$C = \mathbb{R}^6_{\geq 0} \times \{0\}$ 在 N_X 的基 u_1、…、u_{28} 下为。轨道 O_C 是 $\{z_1 = \cdots = z_6 = 0\}$，且 $x_C = (0, a)$，其中 $a \in (\mathbb{Q}^\times)^{22}$。我们按照（12）选取 $X(\mathbb{R})$ 中 x_C 的邻域 V，使得 $(z_1$、…、$z_6)$ 将其同胚映射到 $\mathbb{R}^6$ 中以 0 为中心的开盒，并且对于 $7 \leq k \leq 28$，在 V 上符号 $z_k = a_k$。于是， x_C 位于 64 个正交象限 V_ε、 $\varepsilon \in \{\pm 1\}^6$ 中每一个的闭包内。

实构型的拟阵符号由环面坐标的符号记录。每个z_k 都是普吕克坐标中的 Laurent 单项式，其中每个指数在分子和分母中出现的次数相同。因此，它在 T_P 的实点处的符号仅取决于该点符号向量的重定向类。特别地，具有给定拟阵符号 χ的所有实点处， z_1、……、z_{28} 的符号都相同。我们用 $\operatorname{sign}_z(\chi) \in \{\pm 1\}^{28}$ 表示这个符号向量，它决定了 χ。我们可以将 S_χ 视为$\mathcal{X}_{3,\ 7}(\mathbb{R})$ 与 $T_X(\mathbb{R})$中符号向量为 $\operatorname{sign}_z(\chi)$的正交象限的交集。

在角点处，初始退化是一个环面陪集，其实点具有与正交象限相同的符号向量。

引理 4.7。 设 C 是 Σ 的一个极大锥，且 $w \in$ 相对内部C。那么

$$\mathrm{in}_w \mathcal{X}_{3,7} \ = \ \{\, z \in T_X : \ z_k = a_k \ \ \textit{for } 7 \leq k \leq 28 \,\}.$$

特别地，实z_j点$j \leq 28$ 的符号向量在$_w\,\mathcal{X}_{3,7}$ 恰好是64 个向量$(\varepsilon$、符号 $a)$、 $\varepsilon \in \{\pm 1\}^6$，它们正是 x_C处64 个正交象限 V_ε 的符号向量。

证明。 第一条陈述由同构 $\mathrm{in}_w \mathcal{X}_{3,7} \cong X_C \times \mathbb{G}_m^6$ 得出，其中我们使用$X_C = \{x_C\}$ 以及 $(z_7, \ldots, z_{28})(x_C) = a$。

其实点是形如（s， a）且满足 $s \in (\mathbb{R}^\times)^6$ 的点；它们的符号向量为（sign s， sign a），并且每个 $\varepsilon \in \{\pm 1\}^6$ 都出现。在 V_ε 上，坐标 z_j 对于 $j \leq 6$ 具有符号 ε_j，而 z_k 对于 $k \geq 7$具有 a_k的符号。□

下一个命题刻画了经过一个角点的区域。

命题 4.8. 设 C 是 Σ的极大锥，设 $w \in$ 相对内部C，且设 $\chi \in \mathcal{K}$。以下条件等价。

(1) 角点 x_C 位于区域 R_χ中。*(2)* 对某个 $\varepsilon \in \{\pm 1\}^6$，有 $S_\chi \cap V = V_\varepsilon$ 。*(3)* 符号$_z(\chi)$ 是in$_w \mathcal{X}_{3,7}$中某个实点的符号向量，即对于某个$\varepsilon \in \{\pm 1\}^6$，有符号$_z(\chi) = (\varepsilon,$ 符号 $a)$ 。*(4)* $P(C) \subseteq \mathrm{Dr}^\chi(3, 7)$。

在此情形下，ε 唯一，且 $R_\chi \cap V$是 V_ε 在 V中的闭包。恰有64 个类别 $\chi \in \mathcal{K}$ 满足这些条件。

证明。 根据 V的选取，坐标 $z_1, \ldots, z_{28}$ 在 V_ε上具有符号 $(\varepsilon,$ 符号 $a)$。这些正交象限是 $\mathcal{X}_{3,7}(\mathbb{R})$ 的非空子集，而符号$_z$ 决定拟阵符号。因此，若符号$_z(\chi) = (\varepsilon,$ 符号 $a)$，则 $V_\varepsilon \subseteq S_\chi$；否则 $V_\varepsilon \cap S_\chi = \emptyset$。由于 $V \setminus Y(\mathbb{R})$ 是这些正交象限的不交并，若 (3) 对 ε成立，则 $S_\chi \cap V$为 V_ε；若 (3) 不成立，则它为空。这就证明了 (2)⇔(3) 以及 ε的唯一性。由于 V是 x_C 在 $X(\mathbb{R})$ 中的开邻域，集合 $R_\chi \cap V$是 $S_\chi \cap V$在 V中的闭包。若 $S_\chi \cap V = V_\varepsilon$，它包含 x_C；否则为空。这就证明了 (1)⇔(2) 以及对 $R_\chi \cap V$的描述。

关于其余两个蕴含关系，回忆10)：在$_w$Gr$^\circ_{3}$中，$_7$ 是$_w \mathcal{X}_{3}$中的$_7$在 Plücker 环面 T_P下的原像。

(3)⇒(4)。设 ε 如 (3) 中所述，并令 $\hat{}y \in T_P(\mathbb{R})$ 为表示 V_ε中一个构型的实矩阵的 Plücker 向量。其符号向量属于 χ，且其在 T_X 中的像属于符号向量为 $(\varepsilon,$ sign $a)$ 的正交象限。用正实数乘以 $\hat{}y$ 的各坐标不会改变这两个事实，并且由于$T_P(\mathbb{R})$ 的正部分映射到 $T_X(\mathbb{R})$ 的正部分上，它可以将该像移动到该正交象限中的任意点。因此，不妨设该像是引理 4.7 中 in$_w \mathcal{X}_3$, 7 的点 (ε, a)。于是 $\hat{}y$ 是 in$_w$ Gr$^\circ_{3}$,7 的一个实点。设 f 是一个三项关系 (15)。其在$_w(f)$中的初始形式属于 in$_w(I_3$,7)，因此在 $\hat{}y$ 处为零；而其每一项在 $\hat{}y$ 处均非零，并且在那里具有 $\hat{}y$ 的符号向量中对应的符号。因此，in$_w(f)$ 的各项在 χ 处并不全具有相同符号，即 $w \in$ Trop$^\chi V(f)$。故 $w \in$ Dr$^\chi$(3, 7)。由于 Dr$^\chi$(3, 7) 是 Plücker 锥的并集，且 $w \in$ relint $P(C)$，我们得到 $P(C) \subseteq$ Dr$^\chi$(3, 7)。

(4)⇒(3)。由 (16)，应用于 χ 的一个代表元，可得 $w \in$ Trop$^\chi$ Gr(3, 7)。假设 (3) 不成立。那么存在 $k \geq 7$，使得 sign$_z(\chi)_k = -$ sign a_k。设 $z_k = p^{m^+}/p^{m^-}$，其中 $m^\pm \geq 0$ 且 $m^+ - m^- \in M_X$。由引理 4.7，函数 $z_k - a_k$ 在 in$_w \mathcal{X}_3$,7 上消失，因此 $p^{m^+} - a_k\, p^{m^-}$ 在 in$_w$Gr$^\circ_{3}$,7 上消失。该概形由 in$_w(I_3$,7) 在 T_P 中定义；它是既约的，因为它是光滑的[Cor21, Thm. 1.2]。因此存在一个单项式 p^u，使得

$$h \;:=\; p^u\big(p^{m^+} - a_k\, p^{m^-}\big) \;\in\; \mathrm{in}_w(I_{3,7}).$$

h 的两项在 w 处权重相同，因为 z_k 在 C 上的权重为零。因此，h 是 $I_{3,\ 7}$ 中某个元素的初始形式：将 $h = \sum_i c_i\, p^{v_i}$ 写成 in$_w(g_i)$，其中 $g_i \in I_{3,\ 7}$，保留与 h 权重相同的项，并令 $g = \sum_i c_i\, p^{v_i} g_i$；于是 in$_w$ $(g) = h$。在 χ 处，h 的两项符号分别为 χ^{u+m^+} 和 $-$ sign$(a_k)\,\chi^{u+m^-}$，其商为 $-$ sign(a_k) sign$_z(\chi)$ $_k = 1$。因此，in$_w(g)$ 的各项在 χ 处符号相同，也就是说，$w \notin$ Trop$^\chi V(g)$，矛盾。

最后，这 64 个正交象限 V_ε 是 $\mathcal{X}_{3,7}(\mathbb{R})$ 的非空子集，且符号向量两两不同，因此它们分别位于 64 个不同的分层 S_{χ_ε} 中，并且 χ_ε 满足此 ε下的 (3)。反过来，满足 (3) 且具有 ε 的一个类等于 χ_ε，因为符号$_z$ 决定了该类。□

令 $B \in \mathbb{F}_2^{\mathcal{K} \times \mathcal{P}}$为关联矩阵，$B_{\chi,\ P} = 1$ 当且仅当 $P \subseteq$ Dr$^\chi$(3，7)。

推论 4.9。 *(1)* B 的每一列恰有64 个非零元。
（2）对于 C 的每个极大锥以及每个 $\chi \in \mathcal{K}$,

$$\partial_{x_C} R_\chi \equiv B_{\chi,P(C)} \pmod 2. \tag{17}$$

证明。 每个 $P \in \mathcal{P}$ 都是 $P(C)$ 对于某个 C 的 Σ, 因此（1）由 命题 4.8得出。对于（2），若 $B_{\chi,\ P(C)} = 1$, 则 $R_\chi \cap V$根据 命题 4.8，它是单个正交象限的闭包，并且$\partial_{x_C} R_\chi = \pm 1$ 由 引理 4.5（2）可得。否则 $x_C \notin R_\chi$，并且 $\partial_{x_C} R_\chi = 0$ 由 引理 4.5（1）可得。 □

我们利用 Antolini 和 Early [AE25] 的数据构造 B。令 ψ_0、……、ψ_{10} 为他们的十一个拟阵符号，每个分别属于一个重定向类（按重新标记视为相同）。对于每个 ψ_j，他们按照射线 [列出了扇 $\mathrm{Dr}^{\psi_j}(3,7)/L$ 的极大锥（见 AE25，定理 5.3，第 §7], 节），而一个重新标记 $g \in S_7$ 将 $\mathrm{Dr}^{\psi_j}(3,7)$ 映射到 $\mathrm{Dr}^{g\cdot\psi_j}(3,7)$。对于扇 ψ_j 的一个极大锥 F，令 w_F 为其射线之和。由于 $\mathrm{Dr}^{g\cdot\psi_j}(3,7)$ 是普吕克锥的并集，它包含 $g\cdot w_F$ 的普吕克锥；我们根据 $g\cdot w_F$ 处关系式（15）中极小权的项读出该普吕克锥。对所有 g、 j 和 F 进行计算机搜索，得到 211 365 个不同的普吕克锥，它们的维数均为 6；并得到一个类 $g\cdot\psi_j$ 与这类锥构成的 $13\,527\,360 = 64\cdot 211\,365$ 个不同数对，每个锥恰有 64 个。每个这样的数对都是 B 的一个非零元。由于 $|\mathcal{P}| = 211\,365$，且 B 的每一列根据推论 4.9 恰有 64 个非零元，因此这些数对正好构成 B 的全部非零元。

矩阵 B 和代码可在 Zenodo 页面 [KL26]上获取。数据包括：

- 矩阵 B，其中每个类由一个符号向量给出，并且作为 $g\cdot\psi_j$；每个锥 $P \in \mathcal{P}$则由其相对内部中的一个整点给出，
- 文件`build_B.sage`，它根据 B 的数据构建 [AE25]，如上所述，
- 文件 rank_B.sage，它计算 B 在 $\mathbb{F}_2$上的秩。

命题 4.10。矩阵 B 的秩$_{\mathbb{F}_2} B = 7470$为。

证明。矩阵 B 是一个 $27\,240 \times 211\,365$ 矩阵，定义在 $\mathbb{F}_2$ 上，含有13527360 个 1。我们使用`rank_B.sage`计算了它的秩，见 [KL26]。 □

定理 4.6 的证明。还需证明 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_3,7) \geq 7470$。对每个 $P \in \mathcal{P}$，选择 C_P Σ的一个极大锥 P, 使得 $C_P(=P)$。根据（17），整数矩阵 $(\partial_{x_{C_P}} R_\chi)_{\chi\in\mathcal{K},\,P\in\mathcal{P}}$与$B$ 模 2 约化同余。整数矩阵在 $\mathbb{Q}$ 上的秩至少等于其模 2 约化在 $\mathbb{F}_2$ 上的秩，因此根据命题 4.10，该矩阵的秩至少为 7470。因此，7470 个区域 $\partial_c R_{\chi c\in\mathcal{C}}$的向量 $(\ R_\chi\ )_{\mathbb{R}}$线性无关，并且根据（14），$\mathrm{cr}_{\mathcal{X}_3}(\geq 7470\ ,7)$□。

注 4.11。 Cachazo、Early 和 Zhang 逐区域构造了 [CEGM19] 在$\mathcal{X}_{3\text{上的}n}$ 被积函数 [CEZ24, §3，算法 I]。一个区域的被积函数沿着界定该区域的 Plücker 除子具有简单极点，[1] 且其分子是一个次数已知的多项式。从分子由环面权重固定的被积函数开始，之后的每个分子都通过要求其沿每一面墙的留数 $Z_{\{I\}}$ 与墙另一侧区域的留数相同（相差一个符号）来确定。对于 $n \leq 8$ 这会将每个被积函数确定到一个符号 [CEZ24，§7]。

对于 $6 \leq n \leq 8$，该构造给出了典范形式。令 $I \in \binom{[n]}{3}$ 以及$Z_{\mathrm{rest}} = Z_{\binom{[n]}{3}\setminus\{I\}}$。由于 $\mathrm{Gr}_{3,\ n} \setminus Z_{\mathrm{rest}}$ 是光滑且仿射的， [BD25，推论 312] 给出

$$0 = g(\mathrm{Gr}_{3,n}, Z_{3,n}) = g(\mathrm{Gr}_{3,n}, Z_{\mathrm{rest}}) + g\big(Z_{\{I\}}, Z_{\{I\}} \cap Z_{\mathrm{rest}}\big),$$

这两项均为非负数，因此都趋于零。所以 [BD25，命题 2。15] 适用：$\mathrm{Res}^{Z_{\{I\}}}\omega(\sigma) = \omega(\partial_{Z_{\{I\}}}\sigma)$ 对每个区域 σ均成立。因此 $\omega(\sigma)$ 的极点仅位于 σ的各个墙上，而共享同一面墙的两个区域，其典范形式在该处的留数除符号外相同。因此，典范

[1]寻找这些边界的一种方法是研究一致有向拟阵的变异 [BLVS+99]。

形式满足构造中的每一项约束；由于这些约束具有唯一解，沿着构造进行归纳可知，每个被积函数都是 $\omega(\sigma)$ 的非零倍数。公共墙上的留数非零，因此相邻区域所对应的被积函数除符号外具有相同的倍数；又由于任意两个区域都可以通过墙彼此连通，被积函数均为单一常数 λ 乘以 $\pm\lambda\omega(\sigma)$，该常数由测度的归一化设定。所以 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{3,\,n})$ 等于被积函数张成空间的维数。对于 $n=6,\ 7$，这也提供了一种计算实组合秩的方法。对于 $n=8$，原则上同样成立，但计算这个张成空间超出了现有能力。

4.4. 八个点。 对于八个点，并非每个角点都是真实的。令 Q_{mk} 为定义在 $[8]$ 上的秩 3 拟阵，其非基为

$$126,\quad 145,\quad 178,\quad 235,\quad 248,\quad 347,\quad 368,\quad 567. \tag{18}$$

它们是 Möbius–Kantor 构形的八条直线。Corey 和 Luber 将 Q_{mk}Möbius–Kantor 拟阵或麦克莱恩拟阵 |称为 CL23，§1|。经过重新标记后，它是 [BBRS24，注 4.5]中的稀疏铺砌拟阵。它在 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$上可实现，但在 $\mathbb{R}$上不可实现，因为其实现来自 a^2-a+1 [CL23，命题 4.2], 所述的两个根，详见下文。令 Σ_8 为 $\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,8}$ 上由超单纯形 $\Delta(3,\,8)$ 的拟阵细分给出的扇结构 [CL23，§2.3]。非基 (18) 的示性向量 $w_{\mathrm{mk}}\in N=\mathbb{Z}^{\binom{8}{3}}$位于锥的相对内部

$$C_{\mathrm{mk}}\ =\ \mathbb{R}_{\geq 0}\big\langle\, \bar{\mathbf{e}}_{126},\ \bar{\mathbf{e}}_{145},\ \bar{\mathbf{e}}_{178},\ \bar{\mathbf{e}}_{235},\ \bar{\mathbf{e}}_{248},\ \bar{\mathbf{e}}_{347},\ \bar{\mathbf{e}}_{368},\ \bar{\mathbf{e}}_{567}\,\big\rangle \tag{19}$$

的 Σ_8（见 [CL23，第 §5] 节）。它是一个单纯最大锥，其轨道 $\mathcal{O}=S_8\cdot C_{\mathrm{mk}}$ 由 840 个最大锥 [BBRS24，注 4.5]组成。因此，C_{mk} 在 S_8中的稳定子，即保持八条直线（18）不变的[8] 置换群，其阶为 $8!/840=48$。Corey 和 Luber 证明了 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{3,8}$，从而根据（10），$\mathcal{X}_{3,8}$ 是 schön 的 [CL23，定理 1.1]。此外，$_w\,\mathcal{X}_{3,8}$ 是不可约的，除非 w 位于 $\mathcal{O}$ [某个锥的相对内部 4], CL23，定理 1. w；当 $\mathcal{O}$ [位于3]某个锥的相对内部时，它有两个连通分支 CL23，定理 1.3]。

定理 4.12。 八个点的实组合秩严格小于组合秩：

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Gr}_{3,8},Z_{3,8}\big)=\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{X}_{3,8}\big)\ \leq\ \mathrm{cr}\big(\mathcal{X}_{3,8}\big)-840\ <\ \mathrm{cr}\big(\mathcal{X}_{3,8}\big)=\mathrm{cr}\big(\mathrm{Gr}_{3,8},Z_{3,8}\big).$$

我们首先证明，$\mathcal{O}$ 的锥是幺模的，因此热带紧化包含它们的分层。每个锥上方都有两个角点，它们互为复共轭，且没有任何区域到达这两个角点；而它们的差是对偶复形的一个循环。

命题 4.13。 每个锥 $C\in\mathcal{O}$ 都是幺模的，即其本原射线生成元构成 N_X的一个基。

证明。 由对称性，只需考虑 C_{mk}。令 I_1，……，I_8 为非基（18），令 $A\in\mathbb{Z}^{16\times 56}$为行向量为

$$\mathbf{e}_{I_1},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{I_8},\ \varphi(\mathbf{e}_1),\ \ldots,\ \varphi(\mathbf{e}_7),\ \mathbf{1},$$

并令 $\Gamma\subseteq N$ 为由其各行张成的格。A 在列I_1、……、I_8 以及 123、124、125、127、128、134、136、234 上的极大子式等于 ±1。因此，A 的秩为 16，且 Γ 在 N中是饱和的，因为满行秩整数矩阵的行格在其饱和化中的指数等于其极大子式的最大公约数。由于 $\varphi(\mathbf{e}_8)=3\cdot\mathbf{1}-\sum_{i\leq 7}\varphi(\mathbf{e}_i)$，最后八行在 $\mathbb{R}$上张成 L，因此 $N\cap L\subseteq(\Gamma\otimes\mathbb{R})\cap N=\Gamma$，且 $\Gamma=\sum_j\mathbb{Z}\mathbf{e}_{I_j}+(N\cap L)$。由于 $N_X/(\Gamma/(N\cap L))\cong N/\Gamma$无挠，格 $\Gamma/(N\cap L)$ 在 N_X中是饱和的。它的秩为 8，且由 $\mathbf{e}_{I_1}$、……、$\mathbf{e}_{I_8}$ 张成，因此这八个向量构成N_X的一个直和项的基。特别地，它们是 C_{mk}的本原射线生成元。□

~由命题 4.13 和 [CLS11, 定理 11.1.9]，存在 Σ_8 的一个幺模细化 Σ，其中包含 $\mathcal{O}$的每个锥。令 (X, Y) 为相对于$\sim\Sigma$的$\mathcal{X}_{3,8}$ 的热带紧化。由引理 4.3 和 [CL23, 定理 1.4]，在$\sim\Sigma$ 的每个不属于 $\mathcal{O}$的极大锥上方恰有一个角点，且它是实的。由 [CL23, 定理 1.3]，在每个锥$C \in \mathcal{O}$上方有两个角点，Corey 和 Luber 在他们的紧化中也指出了这一点 [CL23, 定理 7.2]的证明。

锥 $C \in \mathcal{O}$ 上方的两个角点互为复共轭，且两者都不是实的。由对称性，不妨取 $C = C_{\mathrm{mk}}$ 和 $w = w_{\mathrm{mk}}$。令 $\mathrm{Gr}(Q_{\mathrm{mk}}) \subseteq \mathrm{Gr}_{3,8}$ 表示这样一个薄舒伯特胞腔：其中点的非零普吕克坐标正是 Q_{mk} 的基所对应的坐标。每个表示 Q_{mk} 的 3×8 矩阵，在 GL_3 和环面的作用下，均等价于矩阵 $A'(a)$，该矩阵来自 [CL23, （11）], 其中 a 是 $a^2 - a + 1$的一个根。两个根都不是实根，而 $\mathrm{Gr}(Q_{\mathrm{mk}})$ 有两个连通分支，每个根 [各对应一个分支（CL23，命题 4.2]）。复共轭将 $A'(a)$ 映射到 $A'(\bar{a})$，因此它交换这两个分支。根据 [CL23，命题 5.1、定理 5.2 及其证明]，中w_{mk} Gr°_3的两个连通分支通过定义在 $\mathbb{Q}$上的态射，分别对应于 $\mathrm{Gr}(Q_{\mathrm{mk}})$ 的两个分支，因此复共轭也交换它们。同构（10）和（11）同样定义在 $\mathbb{Q}$上，并将这两个分支分别对应于 X_C的两个点。因此，复共轭交换锥 C上方的两个角点，且两者都不是实的。

引理 4.14。设 $C \in \mathcal{O}$，并设 c，c' 是 X_C中的两个角点。则 $\partial c = \partial c'$ 对于 （13）中的边界映射，有 $z_C := c - c'$ 是 W的非零元素。

证明。设 $\rho_1, \ldots, \rho_8$ 是 C 的射线，使得 c 和 c' 都恰好位于分支 $Y_{\rho_1}, \ldots, Y_{\rho_8}$ 上。对于 $j \in [8]$，设 τ_j 是由除 ρ_j 之外的射线张成的 C 的面，并令 $Y^{(j)} = \bigcap_{i \neq j} Y_{\rho_i}$。这是一个光滑曲线，由层 X_{τ_j} 以及位于包含 τ_j 的极大锥上的有限多个角点组成。$Y^{(j)}$ 的每个连通分支都是一条曲线，因此它与开子集 X_{τ_j} 相交。我们有，在 $_w\mathcal{X}_3$ 中，对于 $w \in \mathrm{relint}\ \tau_j$ [CL23，定理 1.，8 是不可约的，而 X_{τ_j} 根据（11）是不可约的。因此 $Y^{(j)}$ 是连通的，并且对于每个 j，c 和 c' 位于 $Y^{(j)}$ 的同一个连通分支上。两个角点位于同一个分支上，因此（13）中 ∂c 和 $\partial c'$ 的项相同。所以 $z_C \in \ker \partial = W$，并且 $z_C \neq 0$，因为 $c \neq c'$。□

定理 4.12 的证明。我们利用热带紧化 (X, Y) 计算两个秩。由 (13)，$\mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,8}) = \dim_{\mathbb{Q}} W$。令 $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ 为 $\mathcal{O}$ 的锥上方的 $2 \cdot 840$ 个角点的集合，并令r: $W \to \mathbb{Q}^{\mathcal{C}_{\mathcal{O}}}$ 为 $\mathbb{Q}^{\mathcal{C}}$ 中一个向量在这些角点上的限制。由引理 4.14，W 包含 840 个向量 $z_C, C \in \mathcal{O}$。$\mathcal{O}$ 的不同锥具有不相交的角点集，因此向量 $r(z_C)$ 的支集两两不相交，且线性无关。因此，r 的秩至少为 840，且 $\dim_{\mathbb{Q}} \ker r \leq \mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,8}) - 840$。对于一个区域 σ，向量 $(\partial_c \sigma)_{c \in \mathcal{C}}$属于 W，并且根据引理 4.5(1)，它在 $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ 上为零，因为如引理 4.14 之前所示，这些角点均不是实的。由 (14)，

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{X}_{3,8}\right) \leq \dim_{\mathbb{Q}} \ker r \leq \mathrm{cr}\left(\mathcal{X}_{3,8}\right) - 840.$$

□

结合 定理 3.8，这就证明了 定理 C。

注记 4.15。证明给出了这些区域所缺少的形式。根据（13），每个 z_C 都是唯一一个 $\omega_C \in \Omega^8_{\log}(\mathcal{X}_{3,\ 8})$ 的留数向量；其迭代留数在 C 处的两个角点上为 ± 1，在所有其他角点上均为 0；并且这 840 个形式 ω_C 的任何非零线性组合都不属于这些区域的典范形式所张成的空间。

对于六个点和七个点，热带簇的链接的同调已为人所知。$\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,\ 6}$ 的链接仅在3次有约化整系数同调，其秩为 126 [SS04，定理 5。4], 以及

$\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,\ 7}$ 的链接仅在5次有约化整系数同调，其秩为 7470 [HJJS09，定理 2。1]。在这两种情况下，该秩均为组合秩（定理 A），正如 [Hac08，定理 2.5，推论 3。3], 所解释的，这是因为热带紧化的所有分层都是光滑且连通的[Hac08，例 4。2], [Cor21，定理 1。2]。对于八个点，Möbius–Kantor 锥使这两个数值出现差异。

推论 4.16. $\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,8}$ 的链接具有1 115 640 个维数为7的球面之楔和的有理系数同调。

证明。设 (X, Y) 为第 4.4 节中相对于 Σ 的热带紧化。其分层均为光滑，且正维数者由 [CL23，定理 1.1，定理 1.4] 与 (11) 可知是连通的，因为 $\mathcal{O}$ 的锥是极大的。因此，由 [Hac08，定理 2.5] ，链接 L （$\mathrm{Trop}\mathcal{X}_{3,8}$ 的）仅在次数 7 上具有约化有理系数同调。由 [Hac08，定理 2.5], 的证明，对偶复形$\Delta(Y)$ 由 L 通过将每个极大胞腔 C 替换为沿其边界粘合的 $|X_C|$ 个副本而得到。由引理 4.3 与 [CL23，定理 1.3，定理 1.4], ，恰好 840 个锥（ $\mathcal{O}$ 的）带有两个角点，因此 $\widetilde{\dim}\ H_7(\Delta(Y);\mathbb{Q}) = \dim H_7(L;\mathbb{Q}) + 840$。左边是 $\dim_{\mathbb{Q}} W = \mathrm{cr}(\mathcal{X}_{3,8}) = 1\,116\,480$，此由 (13)与命题 3.7 得到。因此 $\dim\ H_7(L;\mathbb{Q}) = 1\,115\,640$。 □

5. 十个及更多点的正亏格

在本节中，我们证明 $g(\mathcal{X}_{3,\ 10}) \geq 1$，并由此推出，在很大范围的 k 和 n 中，$\mathcal{X}_{k,\ n}$ 的亏格为正。第 3 节 的点数无法揭示这一点，因为它们只能检测零亏格。相反，我们在边界中找到了亏格：$\mathcal{X}_{3,\ 10}$的边界中的一个层是 K3 曲面的开子集，并且我们证明其亏格在 $\mathcal{X}_{3,\ 10}$ 中仍然存在（第 5.1 节）。添加点以及格拉斯曼流形的对偶性随后给出一般性结论（第 5.2 节）。由推论 3.5可知，$\mathcal{X}_{3,\ n}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的点数对于 $n \geq 10$ 而言并不是关于 q 的拟多项式。

5.1. **十个点与一个 K3 曲面。** 我们按照 [Stu91、Sin23]中的方式，将这十个点标记为

$$\mathcal{L}_V := \{124, 138, 179, 237, 259, 350, 456, 480, 678, 690\}.$$

每个点都属于其中三条直线。设$\mathcal{Y} \supset \mathcal{X}_{3,\ 10}$ 为实数域 $\mathbb{P}^2$中十个点构型在 PGL_3, 作用下的空间，其中除 $\mathcal{L}_V$ 之外，没有任何三元组共线。设 $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_V} \subset \mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{L}_V$的实现空间，其中恰好 $\mathcal{L}_V$ 中的三元组共线。根据 [Sin23，定理 1.2]， $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_V}$ 与 K3 曲面的扎里斯基开子集 S同构，因此 $g(\mathcal{R}_{\mathcal{L}_V}) \geq g(S) = 1$。它是 $\mathcal{Y}$中余维为十的层。请注意，正亏格的边界层并不意味着一对的亏格必为正 [BD25，§2.4.3，§5.9]。这里确实如此，因为 $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_V}$ 是从$\mathcal{X}_{3,\ 10}$ 出发，通过逐次施加十个共线条件得到的，并且在每一步中，该层与下一层构成光滑仿射簇。

我们使用 $\mathcal{Y}$ 由以下矩阵给出的 [Sin23，Stu91]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & a & x_7 & x_8 & x_9 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_4 & 1 & b & u & y_8 & y_9 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其列为点 P_1、……、P_9、P_0 的射影坐标。在 $\mathcal{Y}$这些点P_1、P_2、P_3、P_5 构成一个射影标架，而该坐标图只需要 $p_{234} \neq 0$ 和 $p_{12q} \neq 0$ 来确定 $q \neq 4$。这些三元组均不属于 $\mathcal{L}_V$。因此，该坐标图将 $\mathcal{Y}$ 识别为 $\mathbb{A}^{12}$ 的主开子集，其中标签不在 $\mathcal{L}_V$ 中的 110 个 Plücker 坐标均非零。

定理 5.1。 我们有 $g(\mathrm{Gr}_{3,\ 10},\ Z_{3,\ 10}) \ = g\ (\mathcal{X}_{3,\ 10}) \ \geq 1$。特别地，$(\mathrm{Gr}_{3,\ 10},\ Z_{3,\ 10})$ 不是正配置。

证明。 我们按以下方式排列三元组： $\mathcal{L}_V$ 与以下构造序列相匹配： [Stu91，§2]

$$I_1, \ldots, I_{10} = 237, 124, 456, 138, 678, 179, 259, 350, 480, 690.$$

对于 $0 \leq k \leq 10$，我们定义

$$R_k := \{p_I = 0 \ \forall\ I \in \{I_1, \ldots, I_k\}\} \cap \left\{p_I \neq 0 \ \forall\ I \in \binom{[10]}{3} \setminus \{I_1, \ldots, I_k\}\right\} \subset \mathcal{Y},$$

因此 $R_0 = \mathcal{X}_{3,\ 10}$ 且 $R_{10} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_V}$。对于 $0 \leq k \leq 9$，令 $W_k := R_k \cup R_{k+1}$，其中允许 $p_{I_{k+1}}$ 取零。

每个 W_k 都与 $\mathbb{A}^{12-k}$ 的一个非空主开子集同构。特别地， W_k 光滑、仿射且不可约。事实上， W_0 是 $\mathcal{Y} \subset \mathbb{A}^{12}$ 中满足 $p_I \neq 0$（对 $I \in \mathcal{L}_V \setminus \{237\}$）的主开子集。接下来， W_1 是 $\mathcal{Y} \cap \{x_7 = 0\} \subset \mathbb{A}^{11}$ 中满足 $p_I \neq 0$（对 $I \in \mathcal{L}_V \setminus \{237, 124\}$）的主开子集，依此类推。每次迭代时，施加 $p_{I_{k+1}} = 0$ 后，便可将一个坐标表示为其他坐标的正则函数。经过九步后，得到 W_9，它是 $\mathbb{A}^3_{u,\ a,\ b}$ 的一个主开子集，其点对应于以下构型

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & a & 0 & \frac{ua}{u-b} & 1 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-1}{a-1} & 1 & b & u & 0 & u & x_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = -\frac{ua(b-1)}{(a-b)(u-b)},$$

其中分母 $a - 1 = p_{256}$、 $b - u = p_{167}$ 和 $b - a = p_{356}$ 是 $\mathcal{L}_V$ 外的括号，因此在 $\mathcal{Y}$ 上非零。在 W_9 上我们有

$$p_{690} = -\frac{F}{(u-b)(b-a)}, \qquad F = u^2a^2 - ua^2 - b^3 + ub^2 + ab^2 - uab + ua - u^2a,$$

且 F是 [Sin23 的曲面方程] 在该坐标图中。因此我们得到 $R_{10} = W_9 \cap \{F = 0\} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_V}$。

设 X_k 是 W_k的紧化，并设 $Y_k = X_k \setminus R_k$ 和 $Z_k = X_k \setminus W_k$。则 $Z_k \subset Y_k$，且 Y_k 在 X_k 中具有余维一，因为 $Y_k \setminus Z_k = R_{k+1}$。由于 $X_k \setminus Z_k = W_k$ 光滑且仿射， [BD25，命题 3.10] 给出

$$g(R_k) = g(X_k, Y_k) = g(X_k, Z_k) + g(Y_k, Z_k) = g(W_k) + g(R_{k+1}) \geq g(R_{k+1}).$$

˜因此， $g(\mathcal{X}_{3,\ 10}) = g(R_0) \geq g(R_{10}) = g(\mathcal{R}_{\mathcal{L}_V})$。最后， $S \setminus \mathcal{R}_{\mathcal{L}_V}$ 是一条曲线与有限个点的并，因此

$$g(\mathcal{R}_{\mathcal{L}_V}) = g(\tilde{S}, \tilde{S} \setminus \mathcal{R}_{\mathcal{L}_V}) \geq g(\tilde{S}) = h^0(K_{\tilde{S}}) = 1$$

由 [BD25、命题 3.9、推论 3.11、命题 3.2]。 □

注 5.2。 在上面的坐标图中，形式

$$\omega = \frac{da \wedge db \wedge du \wedge dx_7 \wedge dy_4 \wedge dz_4 \wedge dx_8 \wedge dy_8 \wedge dx_9 \wedge dy_9 \wedge dx_0 \wedge dy_0}{\prod_{I \in \mathcal{L}_V} p_I}$$

沿着这十个除子具有简单极点 $\{p_I = 0\}$， $I \in \mathcal{L}_V$，且其沿˜它们的迭代留数是 K3 曲面的全纯2-形式 $\pm du \wedge da/\partial_b F$ S。我们通过计算机验证该留数：沿构造序列对 ω 进行裂项因式分解，并在 W_9 [KL26]上进行雅可比计算。我们预计 ω 在$\mathcal{X}_{3\text{上是对数型的},\ 10}$ 并且属于映射 R 在（6）中的核；这样它将是 $\ker R$中的一个非零元素，其维数为$g(\mathcal{X}_{3,\ 10})$。

注 5.3。 在 [Sin23，定理 1。2], 中证明了，还有三个类似的直线构型同样会产生作为 K3 曲面开子集的实现空间。除了由 S_{10}的作用所导致的重新标记之外，在$\mathcal{X}_{3,\ 10}$的边界中还有大量正亏格的层。因此我们预计 g（$\mathcal{X}_{3,\ 10}$）远大于 1，尽管证明定理 5.1的策略每次只处理一个层，并未给出更好的界。

注 5.4。仅凭正亏格并不能排除 $\mathcal{X}_{3,}$10 的某个区域是 [AHBL17] 意义下的正几何：存在其数对具有正亏格的正几何 [KPS26, §6]。定理 5.1 所表明的是，Brown 和 Dupont 的框架并未为这些区域唯一确定典范形式：映射 R of (6) 将其送到某个区域的类的对数形式相差 ker R 中的元素，而 ker R 的维数为 $g(\mathcal{X}_{3,}10) \geq 1$。对于单个区域 σ，也可以改用其代数边界 $\partial_a\sigma$ 作为边界。这样只能降低亏格[BD25, 命题 3.10], ；如果亏格变为零， σ 就具有典范形式。正格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_{3\ 10}^{\geq 0}$， 就是这种情况，其代数边界由十个循环 Plücker 除子组成（推论 6.22）。

5.2. **更多点与更高秩**。 加入一个点不会使亏格降低，且亏格在格拉斯曼流形对偶性下保持不变。结合 定理 5.1 即可得出，在很大范围内亏格为正。

命题 5.5。 设 $2 \leq k \leq n-3$。那么 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n}$ 同构于 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n-1} \times \mathbb{G}_m^k$ 中某个除子的补集，并且

$$g(\mathcal{X}_{k,n}) \ \geq \ g(\mathcal{X}_{k,n-1}), \qquad \mathrm{cr}(\mathcal{X}_{k,n}) \ \geq \ \mathrm{cr}(\mathcal{X}_{k,n-1}).$$

证明。 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n}$ 中的每个点都有唯一的代表元，形式为 $(E \mid A \mid z)$，其中 E是单位矩阵， A 是一个 $k \times (n-1-k)$ 矩阵，且 $z \in \mathbb{C}^k$。矩阵 $(E \mid A)$ 表示 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n-1}$中的一个点，并且对所有 $r \in [k]$, $z_r = \pm p_{([k]\setminus r)\cup n} \neq 0$。因此，$(E \mid A \mid z) \mapsto \big((E \mid A)\ z\big)$ 是将 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n}$ 开浸入到 $V := \mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n-1} \times \mathbb{G}_m^k$中的映射。其像是这样一组数对：矩阵 $(E \mid A \mid z)$ 中涉及最后一列的所有极大子式均非零。因此，其补集是一个除子。
</output>

设 X 是 V 的紧化，设 $Z = X \setminus V$，并设 $Y \supseteq Z$ 为 $\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n}$ 在 X 中的像的补集。则 Y 的余维为一，因此根据 [BD25、命题 3.10、命题 4.8], $g(X,Z) \leq g(X,Y)$，且 $\mathrm{cr}(X,Z) \leq \mathrm{cr}(X,Y)$。这里，$g(X,Y) = g(\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n})$，并且 $g(X,Z) = g(V) = g(\mathrm{Gr}^{\circ}_{k,n-1})$，因为环面因子不会改变亏格 [Koe26，命题 2.3。10], 组合秩同样如此 [Koe26，命题 2.2。19]该断言由命题 2.3 得出。□

有序 n-弧在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$中的数量，即 n-元组中任意三点均不共线的点组数量，为 $|\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)| \cdot \#\mathcal{X}_{3,\ n}(\mathbb{F}_q)$ 当 $n \geq 4$时。对于 $n \leq 9$，它是关于 q[Gly88、ISS95]的拟多项式。

推论 *5.6*。 *(1)* 对所有 $n \geq 10$，我们有 $g(\mathcal{X}_{3,n}) \geq 1$。对于 $n \geq 10$，$\mathcal{X}_{3,n}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的点数以及 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ 中的 n-弧的数量都不是关于 q 的拟多项式。 *(2)* 对于 $2 \leq k \leq n-2$，我们有 $g(\mathcal{X}_{k,n}) = g(\mathcal{X}_{n-k,n})$，并且 $cr(\mathcal{X}_{k,n}) = cr(\mathcal{X}_{n-k,n})$。 *(3)* 当 $3 \leq k \leq n-7$ 或 $7 \leq k \leq n-3$ 时，我们有 $g(\mathcal{X}_{k,n}) \geq 1$。在这些情况下，$(Gr_{k,n}, Z_{k,n})$ 不是正配置。

证明。 (1) 该不等式由 定理 5.1 和 命题 5.5 通过对 n进行归纳法得到。如果两个计数中的一个是拟多项式，那么另一个也必然是拟多项式，因为二者相差一个多项式因子 $|\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)|$，并且 $\#\mathcal{X}_{3,n}(\mathbb{F}_q)$ 对于所有素数幂 q 而言都是 $q \equiv 1$ (模 N) 上的多项式。根据 推论 3.5，于是亏格将为零。

(2) 将子空间映射到其正交补的同构 $\mathrm{Gr}_{k,n} \to \mathrm{Gr}_{n-k,n}$ 将 p_I 映射到 $\pm p_{[n]\setminus I}$，因此它将 $Z_{k,n}$ 映到 $Z_{n-k,n}$。现在应用 命题 2.3。

(3) 令 P 为由满足 $g(\mathcal{X}_{k,n}) \geq 1$ 的数对 (k,n) 构成的集合。由 (1) 可知，其中包含满足 $n \geq 10$ 的 $(3,n)$，因此由 (2) 也包含满足 $k \geq 7$ 的 $(k,k+3)$；再由命题 5.5，包含所有满足 $7 \leq k \leq n-3$ 的 (k,n)；最后再由 (2)，包含所有满足 $3 \leq k \leq n-7$ 的 (k,n)。□

第 (1) 部分与 命题 2.3共同证明了 定理 D。关于十个点时弧的陈述已在 [Ish22，§1 中公布。1], 对于更多点的情形，这一猜想已在 [Ish22，§1 中提出。1]。

注 5.7。结合 定理 I、命题 3.7和对偶性，推论 5.6 对每个满足 $2 \leq k \leq n-2$ 的数对 $(k,\ n)$，都能判定 $(\mathrm{Gr}_{k,\ n},\ Z_{k,\ n})$ 是否为正配置，唯有满足 $4 \leq k \leq 6$ 和 $4 \leq n-k \leq 6$ 的九个数对例外。由命题 5.5 及对偶性，$g(\mathcal{X}_{4,\ 8}) \leq g(\mathcal{X}_{k,\ n}) \leq g(\mathcal{X}_{6,\ 12})$ 对所有这些数对均成立。我们不知道 $g(\mathcal{X}_{4,\ 8}) = 0$ 是否成立。

6. $\mathrm{Gr}_{k,n}$ 的小边界递推

由推论 5.6可知，只要 $3 \leq k \leq n-7$ 或$7 \leq k \leq n-3$，数对 $(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{k,n})$ 就具有正亏格，因此对于大多数 k 和 n，完整 Plücker 边界并不构成正配置。本节将证明，添加一个点以及一组受控的 Plücker 除子后，亏格和组合秩保持不变。其机制是一个同构

$$(\mathrm{Gr}_{k,n-1} \setminus Z_S) \times (\mathbb{C}^*)^k \ \cong\ \mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{S \cup D(\Gamma)},$$

只要 S 包含一个由组合数据 $N(\Gamma)$ 确定的集合 Γ，我们就称之为嵌套（引理 6.12），这样的同构便存在。由于亏格和组合秩只取决于补集，且在环面因子作用下保持不变，因此它将二者从 $\mathrm{Gr}_{k,n-1}$ 带到 $\mathrm{Gr}_{k,n}$。第二步从边界中移除$Z_{N(\Gamma)}$：对数形式的推前沿 $Z_{N(\Gamma)}$(第 6.2 节) 没有极点，由此得到 定理 6.21。作为应用，我们重新得到正格拉斯曼流形（推论 6.22），并在 第 7节 中讨论堆叠多胞体。

6.1. 关联 $\mathrm{Gr}_{k,\ n-1}$ 与 $\mathrm{Gr}_{k,\ n}$。

嵌套为前 $n-1$ 列选择一个典范矩阵代表元，使得添加第 n 列后成为与环面相乘。我们首先定义嵌套及其分子和分母，然后构造这些代表元，最后构造同构。

定义 6.1。有限集 E 上的一个 k-嵌套 是一个元组 $\Gamma = (I_1,\ \ldots,\ I_k)$，其中各项是 E 的互不相同的 $(k-1)$-元素子集，并且对每个 $r \in [k-1]$，存在一个嵌套指标 j_r，满足 $j_r \notin I_r$ 和 $j_r \in \bigcap_{s>r} I_s$。

引理 6.2。对于一个 k-嵌套 $\Gamma = (I_1,\ \ldots,\ I_k)$，嵌套指标 $j_1,\ \ldots,\ j_{k-1}$ 是唯一的。此外，存在唯一的指数 j_k，满足 $j_k \notin I_k$ 和 $j_k \in I_{k-1}$。

证明。嵌套指标彼此不同，因为对于 $s > r$ 有 $j_r \in I_s$ 和 $j_s \notin I_s$。由于嵌套指标的集合固定为 $I_k = \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$，另一种嵌套指标的选择将通过一个排列 $(j'_1,\ \ldots\ldots,\ j'_{k-1}) = (j_{\sigma_1},\ \ldots\ldots,\ j_{\sigma_{k-1}})$ 与原选择相关联。如果 σ 不是恒等映射，则存在一个 r 使得 $\sigma_r < r$，而 $j'_r = j_{\sigma_r} \notin I_r$ 与 $j_{\sigma_r} \in \bigcap_{s>\sigma_r} I_s$矛盾。

对于第二个陈述，请注意 $I_k = \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$，并且 $I_{k-1} \supset \{j_1, \ldots, j_{k-2}\}$ 不包含 j_{k-1}。因此，$I_{k-1} \setminus I_k$ 由单个元素 j_k组成。□

例6.3。 元组 $\Gamma=(234,\ 167,\ 159,\ 158)$ 是 $[9]$ 上的4-嵌套，其嵌套指标为 $(j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4)=(1,\ 5,\ 8,\ 9)$。

元组 $\Gamma=(45,\ 15,\ 12)$ 在 $[5]$ 上是一个 3-嵌套。这里 $j_1=1$ 属于 $15\cap 12$，但不属于 45； $j_2=2$属于 12，但不属于 15；而 $j_3=5$ 是属于 15 但不属于 12 的元素。

为了比较 $\mathrm{Gr}_{k,\ n-1}$ 与 $\mathrm{Gr}_{k,\ n}$，我们为一个嵌套附上两组普吕克坐标。

定义6.4。 设 Γ 是基集 E上的一个 k-嵌套。它的嵌套分子 是集合$N(\Gamma)=\{I_r\cup j_r:\ r\in[k-1]\}$。对于 $e\notin E$，它的嵌套分母 是 $D_e(\Gamma)=\{I_r\cup e:\ r\in[k]\}$。

集合 $J:=\{j_1,\dots,j_k\}$ 等于 $I_{k-1}\cup j_{k-1}=I_k\cup j_k$，因此 $J\in N(\Gamma)$。通常，基集为 $[n-1]$，而嵌套分母为 $D(\Gamma):=D_n(\Gamma)$。于是 $N(\Gamma)$ 和 $D(\Gamma)$ 都是 $\binom{[n]}{k}$的子集，并在 $\mathrm{Gr}_{k,n}$上定义除子 $Z_{N(\Gamma)}$ 和 $Z_{D(\Gamma)}$。对于例6.3中的 4-嵌套以及 $n=10$，我们得到 $N(\Gamma)=\{1234,1567,1589\}$。对于 3-嵌套 Γ 和 $n=6$，我们有 $N(\Gamma)=\{145,125\}$ 以及 $D(\Gamma)=\{456,156,126\}$。

注6.5。 用格拉斯曼–凯莱代数的语言来说， [Stu08，第 3 节。3], 条件 定义 6.1 足以保证交 $I_1\wedge\cdots\wedge I_k$ 在括号展开中是一个单项式。该单项式为 $\prod_{r\in[k-1]}p_{I_r\cup j_r}$，因此嵌套分子列出了其中出现的集合。关于这一关系在格拉斯曼–凯莱代数中的探究，我们留待今后研究。

从定义显然可知， $D(\Gamma)$ 不依赖于集合在 Γ中的排列顺序。我们证明，只要该排列仍构成一个 k-嵌套， $N(\Gamma)$ 也具有相同性质。因此，下面仅依赖于 $N(\Gamma)$ 和 $D(\Gamma)$ 的结果将与排列顺序的选择无关。

引理 6.6。 设 Γ 是一个 k-嵌套，且对某个 $r\in[k]$ 有 $j_r\notin I_r$ 和 $j_r\in\bigcap_{s\neq r}I_s$。那么， $\Gamma':=(I_r,I_1,\cdots,\hat{}I_r,\cdots,I_k)$ 是一个 k-嵌套，其中 $N(\Gamma')=N(\Gamma)$。

证明。 可以验证，嵌套指标

$$(j_1',j_2',\cdots,j_{k-1}'):=(j_r,j_1,\cdots,\hat{j}_r,\cdots,j_{k-1})$$

满足定义 6.1中的条件。此外，

$$N(\Gamma')=\{I_r\cup j_r,I_1\cup j_1,\cdots\}=N(\Gamma).$$

□

引理 6.7。 设 $\Gamma=(I_1,\dots,I_k)$ 是基集 E 上的一个 k-嵌套，并设 $\sigma\in S_k$ 是一个排列，使得 $\sigma\Gamma=(I_{\sigma_1},\dots,I_{\sigma_k})$ 也是一个 k- 嵌套。那么 $N(\sigma\Gamma)=N(\Gamma)$。

证明。 我们对 k 使用归纳法证明此结论，从基本情形 $k=1$ 开始，此时两个嵌套分子均为空。假设该引理对 $k'<k$ 成立：

由于 $\sigma\Gamma$ 是一个 k-嵌套， $j_{\sigma_1}\notin I_{\sigma_1}$ 和 $j_{\sigma_1}\in\bigcap_{s\neq\sigma_1}I_s$，因此我们可以应用前述引理，得出 $\Gamma'=(I_{\sigma_1},I_1,\cdots,\hat{}I_{\sigma_1},\cdots,I_k)$ 是一个带有 $N(\Gamma')=N(\Gamma)$ 的 k-嵌套。接着，从 Γ' 和 $\sigma\Gamma$中去掉 I_{σ_1}和 j_{σ_1}，便可在基集 $E\setminus j_{\sigma_1}$上得到 $(k-1)$-嵌套，

$$\widetilde{(\Gamma')}:=(I_1\setminus j_{\sigma_1},\cdots,\widehat{I_{\sigma_1}},\cdots,I_k\setminus j_{\sigma_1}),$$
$$\widetilde{(\sigma\Gamma)}:=(I_{\sigma_2}\setminus j_{\sigma_1},\cdots,I_{\sigma_k}\setminus j_{\sigma_1}).$$

原始嵌套分子可以通过以下方式恢复

$$N(\Gamma') = \bigcup_{I\in N\left(\widetilde{(\Gamma')}\right)} \{I\cup j_{\sigma_1}\}\cup\{I_{\sigma_1}\cup j_{\sigma_1}\},$$
$$N(\sigma\Gamma) = \bigcup_{I\in N\left(\widetilde{(\sigma\Gamma)}\right)} \{I\cup j_{\sigma_1}\}\cup\{I_{\sigma_1}\cup j_{\sigma_1}\}.$$

$\sim$ $\sim$由于 (Γ') 和 $(\sigma\Gamma)$ 是 $(k-1)$-嵌套，因此归纳假设适用，并且

$$N\left(\widetilde{(\Gamma')}\right) = N\left(\widetilde{(\sigma\Gamma)}\right) \implies N(\Gamma') = N(\sigma\Gamma).$$

回顾 $N(\Gamma) = N(\Gamma')$，还可得到 $N(\Gamma) = N(\sigma\Gamma)$，如所要求。 □

现在，我们继续利用这些嵌套来构造显式的矩阵代表元。

定义 6.8。 **</style}令 $(, \ldots, I_k)$** 为 $[m]$ 的一个子集上的 k-嵌套。 Γ-代表元 是 $C \in \mathrm{Gr}_{k,m} \setminus Z_{N(\Gamma)}$ 的一个矩阵 C_Γ，代表 C，使得对于每个 $r \in [k]$ 都有

$$(C_\Gamma)_{r\,j_r} = 1 \qquad \text{and} \qquad (C_\Gamma)_{r\,i} = 0 \quad \text{for all } i \in I_r.$$

引理 6.9。 令 Γ 为 $[m]$ 的一个子集上的 k-嵌套。每个 $C \in \mathrm{Gr}_{k,m} \setminus Z_{N(\Gamma)}$ 都有唯一的 Γ-代表元 C_Γ。其元素为

$$(C_\Gamma)_{r\,i} \;=\; \pm\frac{p_{I_r\cup i}(C)}{p_{I_r\cup j_r}(C)},$$

其中符号取决于 i 和 j_r 相对于 I_r 的位置。特别地，它们是 $\mathrm{Gr}_{k,m} \setminus Z_{N(\Gamma)}$ 上的正则函数。

证明。 固定一个表示该点的矩阵 C。其他所有表示都具有以下形式： MC，其中 $M \in GL_k$。我们希望构造一个可逆矩阵 M，使得 MC 是一个 Γ-表示。为此，对于 $r \in [k]$，我们将使用子矩阵 C_r，其列为 $I_r \cup j_r$。由于$C \in \mathrm{Gr}_{k,\,m} \setminus Z_{N(\Gamma)}$，行列式 $\det C_r = \pm p_{I_r\cup j_r}(C)$ 均非零，因为 $I_r \cup j_r \in N(\Gamma)$ 对于$r < k$ 以及 $I_k \cup j_k = J \in N(\Gamma)$。

MC的第 r 行为 M_rC，其中 M_r是 M的第 r 行。要求 MC是一个 Γ-表示，等价于要求对于每个 $r \in [k]$都有 $M_rC_r = e_{j_r}$，其中 e_{j_r} 是 $\mathbb{C}^k$ 中的单位向量，并且在 $I_r \cup j_r$中 j_r 所在的位置取 1。对于每个 r，该方程有唯一解 $M_r = e_{j_r}(C_r)^{-1}$。

检查 M 可逆等价于验证 MC 满秩。 MC 中列标号为 $I_k \cup j_k = J$ 的子矩阵，按 j_1，……， j_k 排列后，是上单位三角矩阵，因此 MC 确实具有秩 k，且 M 可逆。□

从几何上看，由 I_r 标记的 C 的列张成超平面 $H_r \subset \mathbb{C}^k$，因为 $p_{I_r\cup j_r}(C) \neq 0$。 C_Γ 的第 r 行列出了线性形式 $\lambda_r = M_r$ 在 C 的各列上的取值；该线性形式在 H_r 上为零，并在列 j_r 上取值 1。形式 λ_1，……， λ_k 线性无关，因此超平面 H_1，……， H_k 围成一个单纯形，而 C_Γ 则用该单纯形的坐标 λ_1，……， λ_k 表示为 C。

例6.10。 对于 $\Gamma = (45, 15, 12)$，$\mathrm{Gr}_{3,5} \setminus Z_{\{145,125\}}$ 中的一个点具有 Γ-表示

$$C_\Gamma \;=\; \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

例 6.11。 对于 $\Gamma=(234,167,159,158)$, Γ-表示的前九列为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & 1 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\Gamma=(234、134、124、123)$, Γ-代表在前四列中具有单位矩阵。更一般地, $\binom{[k]}{k-1}$ 的每一种排列都是 $[k]$ 上的一个 k-嵌套, 其 Γ-代表在前 k 列中具有一个置换矩阵。对于 $\Gamma=(123、126、156、456)$ 以及对于 $\Gamma=(234、135、126、123)$, 前六列是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & * & 1 \\ 0 & 0 & * & * & 1 & 0 \\ 0 & * & * & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

现在我们添加一列。对于矩阵 M, 将列 z 附加后, 我们记作 $(M\mid z)$。

引理 6.12。 设 $[n-1]$ 上有一个 k-嵌套 Γ。映射

$$\begin{aligned} f_\Gamma : (\mathrm{Gr}_{k,n-1}\setminus Z_{N(\Gamma)})\times(\mathbb{C}^*)^k &\to \mathrm{Gr}_{k,n}\setminus Z_{N(\Gamma)\cup D(\Gamma)}, \\ (C,z) &\mapsto (C_\Gamma|z), \end{aligned}$$

是簇的同构。该映射限制为一个同构

$$f_\Gamma : (\mathrm{Gr}_{k,n-1}\setminus Z_S)\times(\mathbb{C}^*)^k \to \mathrm{Gr}_{k,n}\setminus Z_{S\cup D(\Gamma)},$$

对于任意包含 $N(\Gamma)$ 的 $S\subset\binom{[n-1]}{k}$。在其像上,

$$z_r \;=\; \pm\frac{p_{I_r\cup n}}{p_{I_r\cup j_r}} \qquad \textit{for } r\in[k]. \tag{20}$$

证明。我们用 $\Delta_{A,\,B}(M)$ 表示矩阵 M 的子式, 其行指标为 A, 列指标为 B.

由于 C_Γ 的各项是 $\mathbf{Gr}_{k,\,n-1}\setminus Z_{N(\Gamma)}$上的正则函数, 其分母为 p_I, 对应于$I\in N(\Gamma)$, 因此映射 f_Γ 在 $Z_{N(\Gamma)}$之外是正则的。由于 C_Γ 是满秩矩阵, 所以 $(C_\Gamma|z)$ 也是满秩矩阵。由于对于 $I\in\binom{[n-1]}{k}$, $\Delta_{[k],\,I}(C_\Gamma|z)=\Delta_{[k],\,I}(C_\Gamma)$, 定义域中子式的非零性意味着像中相应子式也非零。因此, 像避开了 Z_S。由于

$$\Delta_{[k],I_r\cup n}(C_\Gamma|z)=\epsilon\Delta_{[k]\setminus r,I_r}(C_\Gamma)\cdot z_r=\epsilon\Delta_{[k],I_r\cup j_r}(C_\Gamma)\cdot z_r, \tag{21}$$

对于某个适当的符号 ϵ, 像也避开了 $Z_{D(\Gamma)}$。

反之, 对于 $C'\in\mathrm{Gr}_{k,\,n}\setminus Z_{S\cup D(\Gamma)}$, 存在一个 Γ-代表元 C'_Γ, 其各项是 Plücker 坐标的正则函数, 定义在 $Z_{N(\Gamma)}$之外。前 $n-1$ 列 C'_Γ 构成一个满秩矩阵; 对方程 (21) 进行类似计算可知, 最后一列的各项均非零。因此, 取前 $n-1$ 列为 $\mathbf{Gr}_{k,\,n-1}\setminus Z_S$ 中的一个元素, 取最后一列为 $(\mathbb{C}^*)^k$ 中的一个向量, 便得到一个定义良好的正则映射 g_Γ。映射 f_Γ 和 g_Γ 互为逆映射, 因为二者都经过唯一的 Γ-代表元。□

用这些术语来说, 最后一列 z 由新点 λ_r 在由 n 界定的单纯形的坐标中所取的值 H_1、……、H_k组成。它可以自由选取, 并且当且仅当该点避开超平面 H_1、……、H_k时, 其各项均非零; 这正是条件 $D(\Gamma)$。图3和4展示了 $k=3$ 和 $k=4$时的这个单纯形。

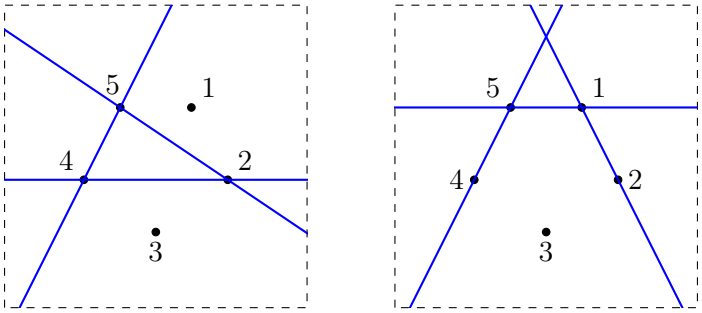

图3。$\mathcal{X}_{3,\ 5}$中的构型，可将其想象为 Gr3,5中各点的投影。蓝线由3-嵌套 Γ_L = (24，25、45)（左）和 Γ_R =(45、15、12)（右）给出。

例6.13。 对于 $\Gamma_R = (45、15、12)$ 引理 6.12 中的同构与 $S = N(\Gamma_R)$ 可写为

$$\big(\mathrm{Gr}_{3,5} \setminus Z_{\{145,125\}}\big) \times \mathbb{G}_m^3 \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Gr}_{3,6} \setminus Z_{\{145,125,456,156,126\}}, \qquad (C, z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & * & * & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & * & * & 1 & z_3 \end{pmatrix}.$$

T维数为 $6 + 3 = 9$。利用该矩阵直接计算可得其逆 e:

$$z_1 = \frac{p_{456}}{p_{145}}, \qquad z_2 = -\frac{p_{156}}{p_{125}}, \qquad z_3 = \frac{p_{126}}{p_{125}}.$$

因此，第六个点可以位于不在经过4，5、经过1，5以及经过1，2的三条直线上的任意位置，而 z 记录了它所在的位置。

例6.14。图3描绘了两个3-嵌套。左图显示 Γ_L = (24, 25, 45)，其嵌套指标为(5, 4, 2)， $N(\Gamma_L)$ $= \{245\}$ 和 $D(\Gamma_L) = \{246, 256, 456\}$；右图显示$\Gamma_R$。只要五个点位于 $Z_{N(\Gamma)}$之外，三条蓝线就构成一个三角形，也就是说，它们处于一般位置。对于 Γ_L，这仅表示2、4、5不共线。对于 Γ_R，这表示经过1、2的直线与经过1、5的直线彼此不同，并且经过4、5的直线不经过它们的交点1。第六个点构成 $Z_{D(\Gamma)}$ 之外的构型，当且仅当它避开蓝线时。图4展示了 $k = 4$的类似图景，其中超平面张成四面体的各个面。

现在我们将其专门化为一种与正格拉斯曼流形相关的嵌套。

例 6.15。 令 $S_{k\ ,\ n}^{+} \subset \binom{[n]}{k}$ 为循环区间 $\{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$、 $i \in [n]$ 的集合，模 n 取值，因此 $Z_{S_{k\ ,\ n}^{+}} = \partial_a \mathrm{Gr}_{k\,n,}^{\geq 0}$。对于 $n - 1 \geq k$，考虑 k-嵌套 $\Gamma = (I_1、\ldots\ldots、I_k)$ 于 $[n-1]$ 上，其中

$$I_r = \{n - k + r, \ldots, n-1, 1, \ldots, r-1\}, \qquad r \in [k],$$

k 中大小为 $k-1$、在 $[n]$中变得与 n 相邻的 $[n-1]$ 循环区间。其嵌套指标对于 $r < k$ 为 $j_r = r$，对于 $j_k = n - 1$为 $j_r = r$。分母 $D(\Gamma) = S_k^+{}_{,n} \setminus S_k^+{}_{,n-1}$ 由包含 n的 $[n]$ 循环区间组成。对于 $n \geq k+2$，分子 $N(\Gamma) = S_k^+{}_{,n-1} \setminus S_k^+{}_{,n}$ 由同时包含 $n-1$ 和 1 的 $[n-1]$ 循环区间组成；插入 n 后，这些区间不再是循环区间；对于 $n = k+1$，所有 $I_r \cup j_r$ 都等于 $[k]$。对于 $k = 3$ 和 $n = 6$，这就是图3中的嵌套Γ_R = (45, 15, 12)。在这两种情况下，$S_k^+{}_{,n-1} \cup D(\Gamma) = S_k^+{}_{,n} \cup N(\Gamma)$，因此引理 6.12 结合$S = S_k^+{}_{,n-1}$ 给出了一个同构

$$f_\Gamma \colon (\mathrm{Gr}_{k,n-1} \setminus Z_{S_{k,n-1}^+}) \times (\mathbb{C}^*)^k \longrightarrow \mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{S_{k,n}^+ \cup N(\Gamma)}.$$

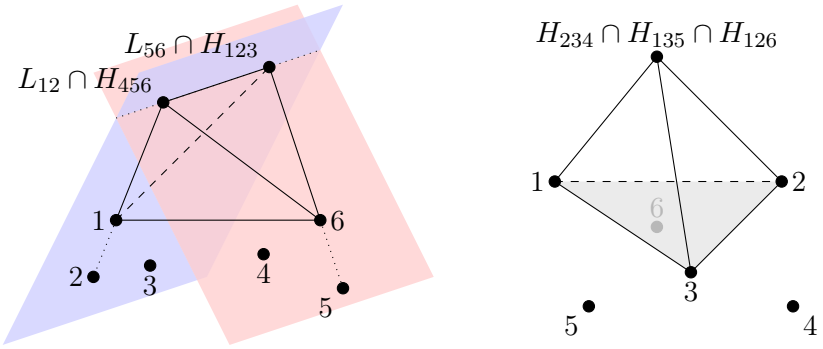

图4。 $\mathbb{P}^3$中六个点的构型。这里， L_{ab} 是经过 a、 b的直线，而 H_{abc}是经过 a、 b、 c的平面。左：4-嵌套 $\Gamma_L =$（123、126、156、456）的面 H_{123}、 H_{126}、 H_{156}、 H_{456}围成了顶点为1、6、 $L_{12} \cap H_{456}$ 和 $L_{56} \cap H_{123}$的四面体；阴影平面为 H_{123} 和 H_{456}。右：对于$\Gamma_R =$（234、135、126、123），顶点为1、2、3和 $H_{234} \cap H_{135} \cap H_{126}$。第七个点位于 $Z_{D(\Gamma)}$ 之外，当且仅当它避开四个面平面，而 z 记录了它相对于该四面体的坐标。

备注 6.16。Gorsky 和 Scroggin 构造了同构 Φ_a: $U_a \to \Pi^\circ_{k,n-a+1} \times \Pi^\circ_{k,a+k-1}$，其中 U_a 是开正拟阵簇 $\Pi^\circ_{k,n} = \mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{S_k^+,n}$ [的开子集，参见 GS26，定理 1.1]。对于 $n \geq k+2$，例 6.15 中的同构 f_Γ 是 Φ_2的逆矩阵，其中 $\Pi^\circ_{k,k+1} \cong (\mathbb{C}^*)^k$；经过对 $[n]$进行循环重标记 $i \mapsto i+1$ 后，该重标记保持 S_k^+, n 不变，并将列 n 移至第一个位置 [，参见 GS26，引理 3.9]的证明。

6.2. **微分形式的递归**。 沿着 f_Γ 向前推将 $\mathrm{Gr}_{k\text{中的对数形式}n-1}$ 变为 $\mathrm{Gr}_{k\text{中的对数形式}n}$，并给出一个显式公式（引理 6.17）。我们首先回顾格拉斯曼流形 [AHBL17，第7.4节和附录C.2，公式（C.9）中的顶次形式的标准记号]，；另见 [Lam14，第13], 节，因为我们需要在由 Γ-代表元给出的坐标图中使用它。

对于 $I \in \binom{[n]}{k}$，令 $U_I := \mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_I$。对于 $C \in U_I$，令 $C_I := (C_{[I]})^{-1} C$ 为矩阵代表元，其在列 I 中为单位矩阵。 $k(n-k)$ 中 C_I 在列 I 之外的项 c_{ab} 是 U_I 上的坐标，我们按固定顺序记为 $dC_I := \bigwedge_{a \in [k], b \in [n] \setminus I} dc_{ab}$。在 $U_I \cap U_J$ 上，可以验证

$$dC_J = \pm \left(\frac{p_I}{p_J} \right)^n dC_I.$$

这反映了 $K_{\mathrm{Gr}_{k,n}} \cong \mathcal{O}(-n)$。对于 h 这个关于普吕克坐标的 $-n$ 次齐次有理函数，函数 hp_I^n 是 $\mathrm{Gr}_{k,n}$ 上定义良好的有理函数。对于所有 I，形式 $hp_I^n dC_I$ 除符号外均相同，我们将此形式记为 $h(C)dC$。对于 $k=1$，微分 dC 是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上的形式 $\sum_i (-1)^i x_i dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n$；在物理学文献中， dC 常记作 $d^{k \times n} C / \mathrm{vol}\, GL(k)$。

设 Γ 是 $[n-1]$上的一个 k-嵌套。由于 $J = \{j_1, \ldots, j_k\} = I_{k-1} \cup j_{k-1} \in N(\Gamma)$， f_Γ 的定义域和目标域包含在坐标图 $U_J \subset \mathrm{Gr}_{k,n-1}$ 和 $U'_J \subset \mathrm{Gr}_{k,n}$ 中。令 $M := (C_\Gamma)_{[J]}$ 为由列 J 构成的子矩阵，因此 $(C_\Gamma)_J = M^{-1} C_\Gamma$ 且

$$(f_\Gamma(C,z))_J = (C_J | M^{-1} z).$$

在两个坐标图的仿射坐标中，映射 f_Γ 是映射 $(C_J,\ z) \mapsto (C_J | M^{-1} z) =: C'_J$。由于 M 仅取决于 C 且为上单位三角矩阵，该映射的雅可比矩阵是分块三角矩阵，在 C_J-块上为恒等映射，在 $\vec{z}$-块上为 M^{-1}，因此其行列式为

$\det M^{-1} = 1$，由此得到 $(f_\Gamma)_*(dC_J \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_k) = \pm dC'_J$。因此，沿着 f_Γ 分析 $(\mathrm{Gr}_{k,n-1} \setminus Z_{N(\Gamma)}) \times (\mathbb{C}^*)$ 上顶形式的推前，可简化为

$$(f_\Gamma)_* \left(h(C) dC \wedge \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_k}{z_1 \cdots z_k} \right) = \pm p_J^{-1} (f_\Gamma)_* \left(\frac{h(C)}{z_1 \cdots z_k} \right) dC'.$$

p_J^{-1} 的因子源于 dC 和 dC'的权重不同。

引理 6.17。设 Γ 是 k上的一个 $[n-1]$ 和 $S \subseteq \binom{[n-1]}{k}$，并设 f_Γ 是相应的同构，如 引理 6.12所示。设 $h(C)dC$ 是 $\Omega^{k(n-1-k)}$ 对数 $(\mathrm{Gr}_{k,n-1} \setminus Z_{N(\Gamma)\cup S})$上的一个形式。那么

$$\omega = h(C) dC \wedge \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_k}{z_1 \cdots z_k}$$

这是 $(\mathrm{Gr}_{k,n-1} \setminus Z_{N(\Gamma)\cup S}) \times (\mathbb{C}^*)^k$上的一个对数形式，并且沿 f_Γ 的推前是对数形式

$$(f_\Gamma)_* \omega = \pm \frac{\prod_{r\in[k-1]} p_{I_r \cup j_r}}{\prod_{I \in D(\Gamma)} p_I} h(C') dC'.$$

证明。由于 $h(C)$只依赖于指标属于 $[n-1]$的普吕克坐标，$f_\Gamma)_* h(C) = h(C')$。由（21），$z_r = \pm p_{I_r \cup n}/p_{I_r \cup j_r}$ 对所有 $r \in [k]$，作为 C'的函数。由于 $I_k \cup j_k = J$，

$$\frac{1}{p_J \, z_1 \cdots z_k} = \pm \frac{\prod_{r\in[k]} p_{I_r \cup j_r}}{p_J \prod_{I \in D(\Gamma)} p_I} = \pm \frac{\prod_{r\in[k-1]} p_{I_r \cup j_r}}{\prod_{I \in D(\Gamma)} p_I},$$

由上面的公式即可得出结论。该形式是对数型的，因为 ω 也是如此，而且 f_Γ 是一个同构。□

表达式 $(f_\Gamma)_* \omega$ 中的分子和分母正是“嵌套分子”[2] 和“嵌套分母”这两个名称的由来。

推论 6.18. 设 $n-1 > k$ 和 $N(\Gamma) \subseteq S$。那么$(f_\Gamma)_* \omega$ 可延拓为$\mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{(S\setminus N(\Gamma))\cup D(\Gamma)}$上的一个对数形式，并且对每个 $S' \supseteq (S \setminus N(\Gamma)) \cup D(\Gamma)$，它在$\mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{S'}$ 上限制为一个对数形式。

证明。令 $V := \mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{(S\setminus N(\Gamma))\cup D(\Gamma)}$。根据引理 6.17，$(f_\Gamma)_* \omega$ 在 $V \setminus Z_{N(\Gamma)} = \mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{S\cup D(\Gamma)}$上是对数型的。由于 $n-1 > k$，每个 $Z_{\{I\}} \subset \mathrm{Gr}_{k,n-1}$ 都是一个超曲面，因此根据 BD25，命题 1.13]，$h\,dC$ 沿着 $Z_{\{I\}}$ 至多有简单极点，其中 $I \in S$ [BD25。分子 $\prod_{r\in[k-1]} p_{I_r \cup j_r}$ 对每个 $I \in N(\Gamma)$都包含 p_I，因此 $(f_\Gamma)_* \omega$ 在 V上全纯。

设 V 是 V 的一个紧化，其边界 E为正规交叉。由 [BD25，命题 1。13],$(f_\Gamma)_* \omega$ 沿 $E \cup Z_{N(\Gamma)} \cap V$至多有简单极点。由于它在 V上全纯，Hartogs 定理表明它沿 E至多有简单极点。由于 E 是正规交叉，因此该形式在 V [BD25，命题 1。13]上是对数型的。

对 $\mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{S'} \subseteq V$的限制由对数形式的函子性可知是对数型的 [BD25，§1.5.1]，，将其应用于 $V \setminus (\mathrm{Gr}_{k,n} \setminus Z_{S'})$ 的一个对数消解即可。□

下一个例子表明，一个区域的边界上可以有带有 Z_I $I \in N(\Gamma)$的部分，而其典范形式在那里却没有极点。

[2]注意，~~$\prod_{r\in[k-1]} p_{I_r \cup j_r} \neq \prod_{I \in N(\Gamma)} p_I$~~ 一般不成立，因为某些项可能需要以更高重数出现。取自 $\Gamma = (234, 134, 124, 123)$ 的例 6.11，有 $\prod_{r\in[k-1]} p_{I_r \cup j_r} = (p_{1234})^3$。

例6.19。 令 $S=\{12,23,34,41\}$ 如 $\partial_a \mathrm{Gr}_{2\,4}^{\geq 0}$，以及 $\Gamma=(\{1\},\{4\})$。那么，$N(\Gamma)=\{14\}$且 $D(\Gamma)=\{15,45\}$。区域 $\sigma=\{p_{12},p_{13},p_{14},p_{15}\geq 0,\ p_{42},p_{43},p_{45}\geq 0,\ p_{32}\geq 0\}$ 是 $\mathrm{Gr}_{2,5}\setminus Z_{S\cup N(\Gamma)\cup D(\Gamma)}$中的一个区域，其中 $Z_{\{14\}}$ 构成其边界的一部分。可以将其分解为

$$\sigma=(\sigma\cap\{p_{25}\geq 0,p_{35}\geq 0\})\cup(\sigma\cap\{p_{25}\leq 0,p_{35}\geq 0\})\cup(\sigma\cap\{p_{25}\leq 0,p_{35}\leq 0\}),$$

其中每一个都是 $\mathrm{Gr}_{2,5}\setminus Z_{2,5}$中的一个单独的定向拟阵分层。计算典范形式可得

$$\begin{aligned}\omega_\sigma&=\frac{dC}{p_{14}p_{43}p_{32}p_{25}p_{51}}+\frac{dC}{p_{14}p_{43}p_{35}p_{52}p_{21}}+\frac{dC}{p_{14}p_{45}p_{53}p_{32}p_{21}}\\&=-\frac{dC}{p_{15}p_{54}p_{43}p_{32}p_{21}},\end{aligned}$$

尽管 $Z_{\{14\}}$ 是 σ的边界的一部分，但沿 $Z_{\{14\}}$并不存在极点。

例 6.20。 正格拉斯曼流形上的典范形式可以通过归纳法求得。利用 k-嵌套 Γ的例 6.15，可得

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{Gr}_{k,n}^{\geq 0}}&=(f_\Gamma)_*\big(\omega_{\mathrm{Gr}_{k,n-1}^{\geq 0}}\wedge\omega_{(\mathbb{C}^*)^k}\big)\\&=\pm\frac{p_{(n-k+1)\ldots(n-1)1}\cdots p_{(n-1)1\ldots(k-1)}}{p_{(n-k+1)\ldots n}\cdots p_{n1\ldots(k-1)}}\cdot\frac{1}{p_{1\ldots k}\cdots p_{(n-1)1\ldots(k-1)}}\,dC\\&=\pm\frac{dC}{p_{1\ldots k}\,p_{2\ldots(k+1)}\cdots p_{n1\ldots(k-1)}},\end{aligned}$$

其中，该比值的分子消去了原始形式的伪极点。

6.3. **通过归纳法得到亏格和组合秩**。 我们将本节的结果汇总为一个单独的陈述。

定理 6.21。 设 $2\leq k<n-1$，令 Γ 为 $[n-1]$上的一个 k-嵌套，并令 $S\subseteq\binom{[n-1]}{k}$ 满足$N(\Gamma)\subseteq S$。

(1) 亏格与组合秩满足

$$g(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S\cup D(\Gamma)})=g(\mathrm{Gr}_{k,n-1},Z_S),\qquad \mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S\cup D(\Gamma)})=\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n-1},Z_S).$$

特别地，$(\mathrm{Gr}_{k,\,n},Z_{S\cup D(\Gamma)})$ 是正配置，当且仅当$(\mathrm{Gr}_{k,\,n-1},Z_S)$ 是正配置。*(2)* 线性映射

$$\Omega_{\log}^{k(n-1-k)}\big(\mathrm{Gr}_{k,n-1}\setminus Z_S\big)\longrightarrow\Omega_{\log}^{k(n-k)}\big(\mathrm{Gr}_{k,n}\setminus Z_{S\cup D(\Gamma)}\big),\qquad \omega\longmapsto(f_\Gamma)_*\big(\omega\wedge\frac{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_k}{z_1\cdots z_k}\big),$$

由引理 *6.17*明确给出，是一个同构。

(3) 假设$(\mathrm{Gr}_{k,\,n-1},Z_S)$ 是一个正配置，并令 S'满足$(S\setminus N(\Gamma))\cup D(\Gamma)\subseteq S'\subseteq S\cup D(\Gamma)$。则 $(\mathrm{Gr}_{k,\,n},Z_{S'})$ 是一个正配置，并且

$$\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S'})=\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n-1},Z_S),$$

限制将$\mathrm{Gr}_{k,\,n}\setminus Z_{S'}$ 上的对数形式与*(2)*中的形式对应起来。

定理 6.21 的第(3)部分证明了定理 E。情形 $S'=(S\setminus N(\Gamma))\cup D(\Gamma)$ 正是我们下面在正格拉斯曼流形中所使用的情形，并且在第7节中用于堆叠多胞体。

证明。 在整个过程中，$f_\Gamma\colon(\mathrm{Gr}_{k,\,n-1}\setminus Z_S)\times(\mathbb{C}^*)^k\to\mathrm{Gr}_{k,\,n}\setminus Z_{S\cup D(\Gamma)}$ 是引理 6.12中，对于集合 $S\supseteq N(\Gamma)$ 形式的同构。数对 $(X,\ Y)$ 的亏格和组合秩（其中 X 紧且 $X\setminus Y$ 光滑）仅取决于 $X\setminus Y$ [BD25，（16）]。

（1）簇 $\mathrm{Gr}_{k,\,n-1}\setminus Z_S$ 是光滑且拟射影的，因此环面因子既不改变亏格，也不改变组合秩 [Koe26，命题 2.3.10，命题 2.2.19]。关于最后一个断言，$\mathrm{Gr}_{k,\,n}$ 是光滑的，并定义在 $\mathbb{R}$ 上，且具有实点。每个 $Z_{\{I\}}$ 在置换列之后都是一个舒伯特除子，因此它是不可约的，并定义在 $\mathbb{R}$ 上。其奇异轨迹是 I 中的列的秩至多为 $k-2$的点集，因此，任何 I 中的列秩恰为 $k-1$的实矩阵都给出一个光滑实点。于是，对于满足 $S''\neq\emptyset$ 的数对（$\mathrm{Gr}_{k,\,n}$，$Z_{S''}$），它是正配置，当且仅当其亏格为零。

(2) 由引理 6.17可知，该映射的取值为对数形式。它是单射，因为与$\mathrm{dlog}\ z_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{dlog}\ z_k$ 楔积在从第一因子拉回的顶次形式上是单射的，并且 f_Γ 是一个同构。对于 X 光滑且紧，维数为 m的情形，$\dim\Omega^m_{\log}(X\setminus Y)=g(X,Y)+\mathrm{cr}(X,Y)$由（6）得出，见 [BD25，（16）、（21）、（24），引理 2。3]。由（1）可知，源空间与目标域的维数因此相同。

(3) 令 $W:=\mathrm{Gr}_{k,n}\setminus Z_{S\cup D(\Gamma)}$ 和 $W':=\mathrm{Gr}_{k,n}\setminus Z_{S'}$。由于 $Z_{S'}\subseteq Z_{S\cup D(\Gamma)}$，[BD25，命题 3.10] 和（1）给出 $g(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S'})\le g(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S\cup D(\Gamma)})=0$。由于 $S'\supseteq D(\Gamma)$ 非空，根据（1），$(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S'})$ 是一个正配置。对数形式的函子性 [BD25，第 1.5 节.1] 保证限制映射 $\Omega^{\log}(W')\to\Omega^{\log}(W)$ 定义良好。由于 W 在 W' 中稠密，该映射是单射；根据（2）和推论 6.18，它也是满射。两个数对均为零亏格，因此组合秩等于对数形式空间的维数，并且

$$\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S'})=\dim\Omega_{\log}(W')=\dim\Omega_{\log}(W)=\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n-1},Z_S).\qquad\square$$

推论 6.22 (正 Grassmannian 再访)。令 $S^+_{k,\,n}=\{(i,i+1,\cdots,i+k-1):i\in[n]\}$为循环连续的 k-子集的集合，因此 $Z_{S^+_{k,\,n}}=\partial_a\mathrm{Gr}^{\ge0}_{k,n}$，是非负 *Grassmannian* 的代数边界。那么，对所有 $k<n$，$g\big(\mathrm{Gr}_{k,\,n},Z_{S^+_{k,\,n}}\big)=0$ 尤其如此，且 $(\mathrm{Gr}_{k,\,n},Z_{S^+_{k,\,n}})$ 是一个正配置，

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S^+_{k,n}}\big)=\mathrm{cr}\big(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S^+_{k,n}}\big)=1.$$

证明。对于 $n=k+1$ 普吕克坐标将 $(\mathrm{Gr}_{k,\,k+1},Z_{S^+_{k,\,k+1}})$ 与 $\mathbb{P}^k$ 及其坐标超平面识别为一个环面对，其 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}=\mathrm{cr}=1$ [BD25，§5.3]，同理，$(\mathrm{Gr}_{1,\,n},Z_{S^+_1})$ 与 $\mathbb{P}^{n-1}$。

现在令 $k\ge2$ 和 $n\ge k+2$，并假设该结论对 $\mathrm{Gr}_{k,n-1}$成立。取例 6.15 的 k-嵌套 Γ，$S=S^+_{k,\,n-1}$，以及 $S'=S^+_{k,n}$。于是 $N(\Gamma)=S^+_{k,n-1}\setminus S^+_{k,n}\subseteq S$和 $D(\Gamma)=S^+_{k,n}\setminus S^+_{k,\,n-1}$，因此 $S'=(S\setminus N(\Gamma))\cup D(\Gamma)$。定理 6.21 的第 (3) 部分表明，$(\mathrm{Gr}_{k,n},Z_{S^+_{k,n}})$ 是一个正配置，且 $\mathrm{cr}=\mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n-1},Z_{S^+_{k,n-1}})=1$。最后，$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}=1$，因为区域 $\mathrm{Gr}^{\ge0}_{k,n}$ 具有例 6.20 的非零典范形式。□

注 6.23. 这些同构使人们能够在 $\mathrm{Gr}_{3,n}$ 中为 $n\ge10$ 构造正配置，例如 $(\mathrm{Gr}_{3,10},Z(\binom{[9]}{3})\cup Z_{\{230,150,140\}})$，其方法是从 $(\mathrm{Gr}_{3,9},Z_{3,9})$ 出发，并使用与 $\Gamma=(23,15,14)$ 相关的同构。我们注意到，证明定理 5.1 的论证对这类配置并不成立，因为若要使 K3 曲面位于边界分层中，就需要对不同的 a_i 有 $D(\Gamma)=\{0a_1a_2,0a_3a_4,0a_5a_6\}$，而这不可能来自嵌套。

7. 单纯多面体的实现空间

迄今为止，我们的 Z_S 主要例子是完整 Plücker 边界和正格拉斯曼流形的边界。本节中，我们选择的 S 来自凸几何。对于一个具有 K个 n 带标号顶点的多面体，可以将一个半代数子集$\mathrm{Gr}^{\ge0}_K$ 附着于实 Grassmann 流形，它是其实现空间 [GMW23]的 Grassmann 流形模型。该子集由 Plücker

坐标上的符号条件刻画。如果 K 是平面内顶点按循环顺序标号的一个 n边形，那么 $\mathrm{Gr}_K^{>0}$就是正格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_{3}^{>0}{}_{,n}$。我们证明，对于一个单纯 3-多胞体 K，其实现空间 $\mathrm{Gr}_K^{>0}$是 $\mathrm{Gr}_{4,n}(\mathbb{R}) \setminus Z_K(\mathbb{R})$ 的一个连通分支，其中多面体除子 Z_K 由这样的 Plücker 除子构成：沿这些除子，两个相邻面变为共面（引理 7.5）。一旦数对 $(\mathrm{Gr}_{4,n}, Z_K)$ 具有零亏格，它就是一个正配置；$\mathrm{Gr}_K^{>0}$的闭包是其中一个区域，且该区域有唯一的典范形式 ω_K。我们证明，对于小型多面体，零亏格可由我们的主要定理推出（引理 7.7）。根据第 6 节的递归，在一个面上堆叠一个顶点会保持零亏格。这给出了典范形式的显式递归。对于堆叠多胞体，组合秩和实组合秩均为一。

7.1. **多面体的实现空间。** 组合多面体 是凸多面体的面格。设 K 是一个具有 n 个带标号顶点的组合（$k-1$）维多面体，其面为 F_1、……、F_l。我们将面 $F_i \subset [n]$ 视为其所包含的顶点集合。K 的一个实现 是点 q_1、……、q_n 的元组，其中这些点属于 $\mathbb{R}^{k-1}$，且 $\mathrm{conv}(q_1$、……、$q_n)$ 的面格为 K。我们关注所有实现所成空间的 Grassmann 流形模型。给定一个实现，我们构造 $k \times n$ 矩阵 Q，其 i 列为齐次化顶点 $\hat{}q_i = (q_i,\ 1) \in \mathbb{R}^k$。由于该多面体是满维的，矩阵 Q 的秩为 k，因此其行空间是 $\mathrm{Gr}_{k,\ n}(\mathbb{R})$ 中的一点，并且

$$p_I(Q) = \det(\hat{q}_{i\,i\in I}) = (k-1)! \cdot \mathrm{vol}(\mathrm{conv}(q_i : i \in I))$$

是由 I 中的顶点张成的单纯形的带符号体积。多面体 K 的组合结构反映在这些符号中。如果 $J = \{j_1 < \cdots < j_{k-1}\}$ 是一组仿射张成面 F 的顶点，则线性形式 $\ell_J(x) = \det(\hat{}q_{j_1}, \ldots, \hat{}q_{j_{k-1}}, x)$ 在 $\mathbb{R}^k$ 上恰好在 F 的超平面上为零；根据凸性，它在 $\hat{}q_v$ 处对每个顶点 $v \notin F$ 都具有相同的符号。因此，对于 $I = J \cup \{v\}$，$p_I(Q)$ 的符号记录了顶点 v 位于面 F 的哪一侧。

定义 7.1 ([GMW23])。 集合 $I \in \binom{[n]}{k}$ 是 K 的面扩张，如果 $I = J \cup \{v\}$，其中 J由 $k-1$ 个顶点组成，这些顶点仿射张成面 F K，并且 $v \notin F$。将 K的面扩张集合记为 $\mathcal{F}_K$。

—

定义 7.2 ([GMW23])。 固定 Q_0 的一个实现，并令 $\Delta_I = \mathrm{sign}\ p_I(Q_0)$ 表示 $I \in \mathcal{F}_K$。 K 的实现空间模型 是 $\mathrm{Gr}_K^{>0} \subset \mathrm{Gr}_{k,\ n}(\mathbb{R})$，其定义为：对于所有指标都包含在同一个面的普吕克坐标，令其为零；对于除一个指标外的所有指标都包含在同一个面的普吕克坐标，则固定其符号，

$$\mathrm{Gr}_K^{>0} = \left\{ Q \in \mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) : p_I(Q) = 0 \ \forall\ I \in \binom{F_i}{k} \text{ and all } i \in [l] \right\} \cap \left\{ \Delta_I p_I(Q) > 0 \ \forall\ I \in \overline{\mathcal{F}}_K \right\}.$$

这一实现空间模型的基本思想是，每个面的顶点都位于一个公共超平面上，而所有其他顶点都严格位于该超平面的内侧；这表示顶点处于凸位置，且具有指定的面格。

回顾一下，环面 $(\mathbb{R}^*)^n$ 通过缩放列作用于 $\mathrm{Gr}_{k,\ n}(\mathbb{R})$。令 $T_{>0} = \mathbb{R}^n_{>0}/\mathbb{R}_{>0}$ 为其正部分，它作用于 $\mathrm{Gr}_K^{>0}$。两个实现属于同一个 $T_{>0}$-轨道，当且仅当它们相差一个射影变换。

对于多边形，其实现空间是正格拉斯曼流形。

引理 7.3. 设 K 是一个 n 边形，其顶点按1、……、 n 的循环顺序标记。则 $\mathrm{Gr}_K^{>0} = \mathrm{Gr}_{3}^{>0}{}_{,\ n}$。

证明。 面是边 $\{i, i+1\}$，其中指标模 n，面扩张是包含两个循环相邻指标的集合 $\{i, i+1, j\}$。将边界定向为

逆时针方向，所有符号 Δ_I 均为 $+1$。因此，实现空间模型为

$$\mathrm{Gr}_K^{\geq 0} = \big\{p_{i,i+1,j} > 0 \ \forall\, i \in [n], j \in [n] \setminus \{i, i+1\}\big\},$$

因此显然有 $\mathrm{Gr}_3^{\geq 0}{}_{,\ n} \subset \mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$。对于反向包含，我们需要证明，具有两个连续指标的普吕克坐标为正，足以推出所有普吕克坐标均为正。设 $Q \in \mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 且 $r < s < t$。我们通过对 $t - r$ 归纳法证明 $p_{rst} > 0$。若 $\{r, s, t\}$ 含有两个循环相邻的指标，则无需证明，这涵盖了 $t - r = 2$ 的情形。否则 $r + 1 < s < t - 1$，固定 r 后，四个指标 $r + 1 < s < t - 1 < t$ 的三项普吕克关系为

$$p_{rst}p_{r(r+1)(t-1)} = p_{r(r+1)s}p_{r(t-1)t} + p_{r(r+1)t}p_{rs(t-1)}.$$

坐标 $p_{r(r+1)(t-1)}$，$p_{r(r+1)s}$，$p_{r(t-1)t}$，$p_{r(r+1)t}$ 含有连续指标，并且根据归纳法 $p_{rs(t-1)} > 0$。因此 $p_{rst} > 0$。□

7.2. 单纯多面体与多面体除子。 从现在起，K 是单纯的：每个面恰好有 $k - 1$ 个顶点。在这种情况下，实现空间模型仅由严格不等式刻画，因此 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$是 $\mathrm{Gr}_{k,\ n}(\mathbb{R})$ 的一个开子集，其维数为 $k(n-k)$。对于两个相邻面 F，F'它们的并集 $F \cup F'$有 k个元素，它是通过不在 F上的顶点 F'对 F进行的面扩张。

定义 7.4。 对于单纯多面体 K，多面体除子 Z_K 是 $\mathrm{Gr}_{k,\ n}$中的一个除子，定义为 $Z_K :$ $= Z_{S_K}$ for

$$S_K := \{F \cup F' \text{ for all adjacent facets } F \text{ and } F'\} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_K.$$

对于一个点配置，$p_{F\cup F'} = 0$当且仅当相邻面 F和 F'变得共面时成立：多面体沿脊 $F \cap F'$变平。对于三维多面体，Z_K是两个共享一条边的三角形变得共面的轨迹。由于 $S_K \subseteq \mathcal{F}_K$，$Z_K(\mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$不相交。对于半代数集 $A \subseteq \mathrm{Gr}_{k,\ n}(\mathbb{R})$，我们用 $\partial_a A$ 表示其代数边界，即其欧几里得边界在 $\mathrm{Gr}_{k,\ n}$ 中的 Zariski 闭包。我们用 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 表示 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 在 $\mathrm{Gr}_{k,\ n}(\mathbb{R})$ 中的欧几里得闭包。

现在我们证明，离开一个实现空间的唯一方式，是两个相邻面变为共面，而其他所有面扩张不等式都成为冗余。换言之，在某条边变平之前，顶点不可能到达一个非相邻面的平面，两个顶点也不可能重合。

引理 7.5. 设 K 是一个具有 n 个顶点的单纯 $(k-1)$-多面体。那么，$\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 的欧几里得边界包含于 $Z_K(\mathbb{R})$，且 $\partial_a \mathrm{Gr}_K^{\geq 0} \subseteq Z_K$。特别地，若 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 连通，则它是 $\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \setminus Z_K(\mathbb{R})$ 的一个连通分支。

证明。集合 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 是开集，且与 $Z_K(\mathbb{R})$ 不相交。我们证明每个点 $Q \in \mathrm{Gr}_K^{\geq 0} \setminus Z_K(\mathbb{R})$ 都属于 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$。于是，欧几里得边界 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0} \setminus \mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 包含于 $Z_K(\mathbb{R})$，其 Zariski 闭包也如此；而 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 在 $\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \setminus Z_K(\mathbb{R})$ 中既开又闭，因此若它连通，则是一个连通分支。

固定 $J \in S_K$，并用列为q_1、……、$q_n \in \mathbb{R}^k$和 $\Delta_J\, p_J > 0$的矩阵表示 $\{p_J \neq 0\} \supseteq \mathrm{Gr}_K^{\geq 0} \setminus Z_K(\mathbb{R})$ 中的点，使所有 p_I的符号都有明确的定义。对于一个面$G = \{g_1 < \cdots < g_{k-1}\}$，令 $\ell_G = \pm \det(q_{g_1}、\ldots\ldots、q_{g_{k-1}},\ \cdot)$，这是 $\mathbb{R}^k$ 上的一个线性形式，其符号选取为使得对所有顶点 $u \notin G$，都有 $\ell_G(q_u) = \Delta_{G\cup u}\, p_{G\cup u}$；它存在是因为在 Q_0 中，所有不属于 G 的顶点都位于 G 的超平面的同一侧。如果 $Q \in \mathrm{Gr}_K^{\geq 0} \setminus Z_K(\mathbb{R})$，那么由连续性

$$\ell_G(q_u) \geq 0 \text{ 对于所有面 } G \text{ 以及所有顶点 } u, \qquad \ell_G(q_u) > 0 \text{ 如果 } G \cup u \in S_K. \tag{22}$$

也就是说，每个顶点都位于每个面超平面的内侧（可在边界上），而如果它位于相邻的面上，则严格位于内侧。

步骤 1：如果一个面扩张坐标在 Q处为零，那么另一个面扩张坐标也为零。设$p_{F\cup w}=0$为一个面，F为一个顶点。对于 $a\in F$，令 $F_a=(F\setminus a)\cup\tilde{a}$表示沿脊 $F\setminus a$与 F相邻的面。由于 $F\cup\tilde{a}\in S_K$，我们有 $\ell_{F_a}(q_a)>0$ 以及 $w\neq\tilde{a}$。特别地，列 q_f、 $f\in F$线性无关，而 $p_{F\cup w}=0$给出

$$q_w=\sum_{f\in F}\alpha_f\,q_f.$$

计算在 $f\in F\setminus a$ 上为零的 ℓ_{F_a}（其中 q_f），得到 $\alpha_a\,\ell_{F_a}(q_a)=\ell_{F_a}(q_w)\geq 0$，因此对于所有 $a\in F$ 都有 $\alpha_a\geq 0$：顶点 w位于单纯形 F中。由于 $q_w\neq 0$，因为 w位于某个 $I\in S_K$中，所以某个α_a为正。有一个面 G 满足 $w\in G$ 和 $a\notin G$，因为经过 w 的面不可能全部包含 a：w 在 ∂K 中的链接是一个球面，而不是一个锥。然后

$$0=\ell_G(q_w)=\sum_{f\in F}\alpha_f\,\ell_G(q_f)$$

根据（22），它是非负项之和，因此 $\ell_G(q_a)=0$，也就是说，$p_{G\cup a}=0$。这是第二个坐标：如果 $G\cup a=F\cup w$，那么 $G=(F\setminus a)\cup w$ 就是面 F_a，因此 $w=\tilde{a}$。

步骤 2：余维二不足以构成边界。令 $W\subset\mathrm{Gr}_{k,\,n}$ 表示至少有两个坐标 p_I、 $I\in\mathcal{F}_K$为零的轨迹。它的余维为二，因为不同的普吕克坐标切出不同的不可约因子，因此 $W(\mathbb{R})$ 是一个维数至多为 $k(n-k)-2$ [BCR98，§28]的闭半代数集。由于 Q 是任意的，步骤 1 表明

$$\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}\setminus Z_K(\mathbb{R})\subseteq\overline{\mathrm{Gr}_K^{>0}}\cup W(\mathbb{R}). \tag{23}$$

现在反设某个 $Q\in\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}\setminus Z_K(\mathbb{R})$ 不属于 $\mathrm{Gr}_K^{>0}$，并令 B 为 Q 在 $\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})\setminus Z_K(\mathbb{R})$ 中的一个连通开邻域。于是 $B\setminus W(\mathbb{R})$ 是连通的（[HW41，第 IV 4 节，推论 1]），并且在 B中稠密。集合 $\mathrm{Gr}_K^{>0}\cap B$ 是 $B\setminus W(\mathbb{R})$ 的一个非空开子集。它在 $B\setminus W(\mathbb{R})$ 中也是闭的：$\mathrm{Gr}_K^{>0}$的极限点 $P\in B\setminus W(\mathbb{R})$ 属于 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}\setminus Z_K(\mathbb{R})$，因为$B$不与 $Z_K(\mathbb{R})$ 相交；然后根据（23），$P\in\mathrm{Gr}_K^{>0}$，因为 $P\notin W(\mathbb{R})$。连通空间中，除自身外不存在非空的开且闭的子集，因此 $\mathrm{Gr}_K^{>0}\cap B$ 就是 $B\setminus W(\mathbb{R})$ 的全部。由于该集合在 B中稠密，弱不等式 $\Delta_I\,p_I\geq 0$、 $I\in\mathcal{F}_K$根据连续性在 B的整个范围内成立。

但由于 $Q\notin\mathrm{Gr}_K^{>0}$，存在某个 $p_{F\cup w}$使得 $F\cup w\in\overline{\mathcal{F}_K}$在 Q处为零，并且它在 Q附近变号：由 Q 中以 F 为指数的列线性无关，因此我们可以将列 q_w移至 $q_w+\varepsilon d$，使得 $\ell_F(d)<0$；当 $\varepsilon>0$ 足够小时，这会给出 B 中的一个点，满足 $\Delta_J\,p_J>0$ 且$\Delta_{F\cup w}\,p_{F\cup w}=\varepsilon\,\ell_F(d)<0$。这就产生了矛盾。因此，$\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}\setminus Z_K(\mathbb{R})$ 中的每个点都属于 $\mathrm{Gr}_K^{>0}$，这就证明了该引理。□

注 7.6。由 [GMW23，定理 3。7]，的结论，$\mathrm{Gr}_K^{>0}$中的每个点都可以表示为 K的一个齐次化实现（列乘以正数进行缩放后）。因此，只要$\mathrm{Gr}_K^{>0}$的实现空间 K 是连通的，3-多胞体的实现空间就是如此；它们是可缩的 [RG96，定理 13.3。3]，对于任意维数的堆叠多胞体，情况也相同：在 K 的一个面上堆叠一个顶点所得多胞体的一个实现 F，就是 K 的一个实现，再加上一个位于 F 之外且位于所有其他面下方的点；这些点构成一个开凸集，因此连通性可从单纯形逐步传递。在四维及更高维中，单纯多面体的实现空间可能不连通，所以引理 7.5 最后一条陈述中的假设并非自动成立。

7.3。 **小型 3-多胞体**。 对于一个单纯3-多胞体 K，数对$(\mathrm{Gr}_{4,\,n},\ Z_K)$ 满足定义 2.2中的实性条件。根据引理 7.5，$\mathrm{Gr}_K^{>0}$是 $\mathrm{Gr}_{4\text{的一个连通分支},\,n}(\mathbb{R})\setminus Z_K(\mathbb{R})$，并且它是可定向的，因为对于任意 $I\in\mathcal{F}_K$，它都位于仿射图 $\{p_I\neq 0\}\cong\mathbb{R}^{4(n-4)}$ 中。因此，只要 $g(\mathrm{Gr}_{4,\,n},\ Z_K)=\overline{0}$，该数对就是一个正配置，而 $\mathrm{Gr}_K^{>0}$的闭包是其一个区域，并具有典范形式 $\omega_K=\omega(\mathrm{Gr}_K^{>0})$。

引理 7.7。 设 K 是一个具有 $n\leq 7$ 个顶点的单纯3维多面体。则 $(\mathrm{Gr}_{4,\,n},Z_K)$ 是一个正配置，并且$\mathrm{Gr}_K^{>0}$的闭包是其区域之一。

证明。只需证明亏格为零。由于 $Z_K\subseteq Z_{4,\,n}$，我们有 $g(\mathrm{Gr}_{4,n},Z_K)\leq g(\mathrm{Gr}_{4,n},Z_{4,n})$，且对偶性 $\mathrm{Gr}_{4,n}\cong\mathrm{Gr}_{n-4,n}$ 将 $(\mathrm{Gr}_{4,n},Z_{4,n})$ 与 $(\mathrm{Gr}_{n-4,n},Z_{n-4,n})$ 对应起来。对于 $n=4$ 个顶点，$\mathrm{Gr}_K^{>0}=\mathrm{Gr}^{4,4}$ 是一个单点。对于 $n=5$ 个顶点，它是一个具有五个处于一般位置的超平面的空间，其补集是环面 $(\mathbb{C}^*)^4$。对于 $n=6$ 个顶点，它是 $(\mathrm{Gr}_{2,6},Z_{2,6})$，根据定理 I，其亏格为零，因为 $\mathcal{X}_{2,6}\cong M_{0,6}$ 是一个超平面配置的补集。对于 $n=7$ 个顶点，它是 $(\mathrm{Gr}_{3,7},Z_{3,7})$，根据定理 3.8，其亏格为零。□

例 7.8。 设 K 为八面体，其顶点标记如 图 5所示，使得以下数对之间不存在边： 1和4、 2和5、 3 和6。仔细检查 图 5中每个四面体的定向，可以确定必要的符号，从而将实现空间模型 $\mathrm{Gr}_K^{>0}$表述为

$$\mathrm{Gr}_K^{>0}=\left\{\begin{array}{llll} p_{3456}>0, & p_{2456}>0, & & p_{2346}<0, \quad p_{2345}<0\\ & p_{1456}>0, & p_{1356}>0, & \quad p_{1345}<0\\ & & p_{1256}>0, & p_{1246}>0,\\ & & & p_{1236}>0, \quad p_{1235}>0\\ & & & \quad p_{1234}>0 \end{array}\right\}.$$

利用对偶性 $\mathrm{Gr}_{4,\,6}\cong\mathrm{Gr}_{2,6}$ 其中 $\mathrm{Gr}_{2,6}$ 上的普吕克坐标为 $\tilde{p}_{ij}=(-1)^{i+j}p_{[6]\setminus\{i,j\}}$，相差一个共同符号，我们得到实现空间模型的对偶为

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_K^{>0}=\left\{\begin{array}{llll} \tilde{p}_{12}<0, & \tilde{p}_{13}>0, & & \tilde{p}_{15}<0, \quad \tilde{p}_{16}>0\\ & \tilde{p}_{23}<0, & \tilde{p}_{24}>0, & \quad \tilde{p}_{26}<0\\ & & \tilde{p}_{34}<0, & \tilde{p}_{35}>0,\\ & & & \tilde{p}_{45}<0, \quad \tilde{p}_{46}>0\\ & & & \quad \tilde{p}_{56}<0 \end{array}\right\}.$$

$\tilde{p}_{14}$、 $\tilde{p}_{25}$ 和 $\tilde{p}_{36}$ 的符号将 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_K^{>0}$ 分解为八个区域（$\mathrm{Gr}_{2,\,6},\ Z_{2,\,6}$）。将这 8 个区域的典范形式相加，根据典范形式的线性性，并且由于 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_K^{>0}$ 的边界位于十二个除子 $\{\tilde{p}_{ij}=0\}$ 上，其中 $ij\notin\{14,25,36\}$，可得到表达式

$$\begin{aligned}\omega_{\widetilde{\mathrm{Gr}}_K^{>0}}&=\frac{dC}{\tilde{p}_{14}\tilde{p}_{42}\tilde{p}_{25}\tilde{p}_{53}\tilde{p}_{36}\tilde{p}_{61}}+\frac{dC}{\tilde{p}_{41}\tilde{p}_{12}\tilde{p}_{25}\tilde{p}_{53}\tilde{p}_{36}\tilde{p}_{64}}+\cdots\\&=\frac{(\tilde{p}_{16}\tilde{p}_{24}\tilde{p}_{35}-\tilde{p}_{15}\tilde{p}_{26}\tilde{p}_{34})^2}{\tilde{p}_{12}\tilde{p}_{13}\tilde{p}_{23}\tilde{p}_{34}\tilde{p}_{35}\tilde{p}_{45}\tilde{p}_{15}\tilde{p}_{16}\tilde{p}_{56}\tilde{p}_{24}\tilde{p}_{26}\tilde{p}_{46}}dC.\end{aligned}$$

回到原始普吕克坐标，即可恢复 $\mathrm{Gr}_K^{>0}$ 上的典范形式。

7.4. **堆叠多胞体**。 将一个顶点堆叠到一个面上，是扩展单纯多胞体的最简单方式。在格拉斯曼流形模型中，新顶点是一个新列，而它相对于旧多胞体的位置由 k Plücker 坐标记录，其中一个对应于该面，其他分别对应于它的每个邻面。这些坐标来自嵌套，因此 第 6.1 节 的递归适用，并表明堆叠多胞体给出了组合秩为一的正配置。

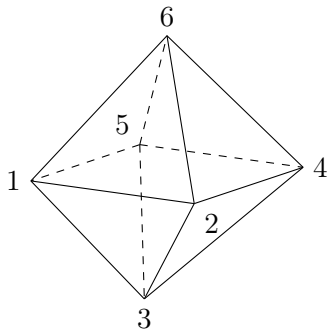

图 5. 一个八面体。

定义 7.9。 设 K 是一个顶点集为 $[n-1]$ 的单纯（$k-1$）多胞体，并设 $F=\{a_1,\dots,a_{k-1}\}$ 是 K的一个面。将一个新顶点 n 堆叠到 F上，得到单纯多胞体K'，其顶点集为 $[n]$，其面由 K 中除 F之外的各面，以及 $k-1$ 个集合 $(F\setminus a_r)\cup n$组成。在几何上，将顶点 n 置于 F 之外并位于 K 某个实现的所有其他面之下，然后取凸包。若一个单纯多胞体是通过从单纯形开始反复堆叠得到的，则称其为堆叠多胞体。

在本小节中， K、 F和 K' 均如定义所述。对于 $r\in[k-1]$，令

$$G_r=(F\setminus a_r)\cup b_r$$

为 K 上沿着脊 $F\setminus a_r$与 F 相邻的面。

现在我们说明多面体除子在堆叠下如何以嵌套的形式变化。

引理 7.10. 元组 $\Gamma(K,\ F):=(G_1,\ \dots\dots,\ G_{k-1},\ F)$ 是 $[n-1]$上的一个 k-嵌套，其关于 $r\le k-1$ 和 $j_k=b_{k-1}$的嵌套指标为 $j_r=a_r$。其分子和分母为

$$N(\Gamma)=\{F\cup b_r:\ r\in[k-1]\},\qquad D(\Gamma)=\{G_r\cup n:\ r\in[k-1]\}\cup\{F\cup n\},$$

来自 F的 S_K 中的元素，以及 $S_{K'}$ 中来自新面的元素。特别地，$S_{K'}\cup N(\Gamma)=S_K\cup D(\Gamma)$，并且引理 *6.12* 结合 $S=S_K$ 给出一个同构

$$f_\Gamma\colon\ (\mathrm{Gr}_{k,n-1}\setminus Z_K)\times(\mathbb{C}^*)^k\ \longrightarrow\ \mathrm{Gr}_{k,n}\setminus Z_{S_{K'}\cup N(\Gamma)}. \tag{24}$$

证明。对于 $r\le k-1$，我们有 $a_r\notin G_r$；而对于 $s\ne r$和 $a_r\in F$，则有 $a_r\in G_s$。因此，$j_r=a_r$ 满足定义 6.1，且 G_{k-1} 中不属于 F的元素是 b_{k-1}。于是 $N(\Gamma)=\{G_r\cup a_r\}=\{F\cup b_r\}$，并且 $D(\Gamma)$如所述。 K' 的相邻面有三种类型： K 中不涉及 F的面数对，它们在 K 中也相邻；沿脊 $F\setminus a_r$的数对 G_r 和（$F\setminus a_r$）$\cup\,n$，其并集为 $G_r\cup n$；以及沿（$F\setminus\{a_r,a_s\}$）$\cup\,n$的新面数对，其并集为 $F\cup n$。涉及 F的 K 的相邻数对为 F、G_r，其并集为 $F\cup b_r$。因此，$S_{K'}\setminus D(\Gamma)\subseteq S_K$ 且 $S_K\setminus N(\Gamma)\subseteq S_{K'}$，从而得到 $S_{K'}\cup N(\Gamma)=S_K\cup D(\Gamma)$。 $N(\Gamma)$中的元素 $F\cup b_r$可能在 $S_{K'}$中仍然存在，即当某个 $s\ne r$使得 $b_r=b_s$时，因为此时 $F\cup b_r=G_r\cup G_s$。最后， $N(\Gamma)\subseteq S_K$，故由引理 6.12 （取 $S=S_K$）可得（24）。□

注 7.11. 对于顶点按循环顺序排列为 $1,\dots,n-1$ 且 $F=\{n-1,1\}$ 的 $(n-1)$ 边形，堆叠得到 n 边形，而 $\Gamma(K,F)$ 同构于 $=(\{1,2\},\{n-2,n-1\},\{n-1,1\})$。其分子 $\{\{n-1,1,2\},\{n-2,n-1,1\}\}$ 和分母与例 6.15 中 $k=3$ 的嵌套相同，其中 $\Gamma(K,F)$ 是重新排序。因此，(24) 是一个同构，它连接的空间与推论 6.22 中 $\mathbf{Gr}_{3\,n}^{\ge0}$ 的递归所涉及的空间相同。

定理 7.12. 设 K 是一个具有 n 个顶点的堆叠（$k-1$）多面体。那么 $(\mathrm{Gr}_{k,\,n}, Z_K)$ 是一个正配置，而$\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$ 是其区域之一，并且

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Gr}_{k,n}, Z_K) \;=\; \mathrm{cr}(\mathrm{Gr}_{k,n}, Z_K) \;=\; 1.$$

证明。 重新标记顶点后，不妨设 K 由单纯形 $[k]$通过堆叠顶点 $k+1$、.....、 n得到。对于 $n=k$，格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_{k,\,k}$是一个点，无需证明。对于 $n>k$，将定理中的多面体记为 K': 它是在堆叠多胞体 K的一个面 F上堆叠 n 得到的，其中顶点集为 $[n-1]$；令 $\Gamma=\Gamma(K,F)$。我们对 n 使用归纳法，证明 $(\mathrm{Gr}_{k,\,n},\ Z_{K'})$ 是一个正配置，且 $\mathrm{cr}=1$。

对于 $n=k+1$， $S_{K'}$包含 k个集合 $D(\Gamma)$，它们是包含 $k+1$的 k-子集，此外还有 $[k]=G_r\cup G_s$对于 $r\neq s$。因此 $S_{K'}=\binom{[k+1]}{k}$，而 Plücker 坐标将 $(\mathrm{Gr}_{k,\,k+1},\ Z_{K'})$与 $\mathbb{P}^k$ 及其坐标超平面对应起来。这是一个环面对，其中 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}=\mathrm{cr}=1$ [BD25，第 5 节。3]。

对于 $n\geq k+2$，引理 7.10 给出 $N(\Gamma)\subseteq S_K$和 $S_{K'}\cup N(\Gamma)=S_K\cup D(\Gamma)$，且 $S_K\setminus N(\Gamma)\subseteq S_{K'}$，因此 $(S_K\setminus N(\Gamma))\cup D(\Gamma)\subseteq S_{K'}\subseteq S_K\cup D(\Gamma)$。由归纳法，$(\mathrm{Gr}_{k,\,n-1},\ Z_K)$ 是一个正配置，且 $\mathrm{cr}=1$。因此，定理 6.21 的第 (3) 部分结合 $S=S_K$ 和 $S'=S_{K'}$ 表明，$(\mathrm{Gr}_{k,\,n},\ Z_{K'})$ 是一个正配置，且 $\mathrm{cr}=1$。

还需证明 $\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}$ 是一个区域，且 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Gr}_{k,n}, Z_{K'})=1$；对此我们同样对 n使用归纳法。由引理 7.5，实现空间 $\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}$在 Gr_k中既开又闭，$_n(\mathbb{R})\setminus Z_{K'}(\mathbb{R})$。它是连通的，因为 K' 是堆叠的（注 7.6），所以它是一个连通分支，其闭包 $\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}$ 是一个区域。由于 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}\leq \mathrm{cr}=1$，只需证明 $\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}$ 的典范形式 $\omega_{K'}$ 非零。

对于 $n=k+1$，区域 $\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}$ 是 $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ 中由坐标超平面围成的单纯形，其典范形式非零，见 [BD25, §5.3]。对于 $n\geq k+2$，根据归纳法有 $\omega_K\neq 0$。令 W 为 (24) 的目标域。根据注 7.6，$\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}$ 中一点的前 $n-1$ 列属于 $\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}$（对于参考实现的相容选择），其中 $p_{F\cup b_r}\neq 0$。因此，连通集 $\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}$ 位于 $W(\mathbb{R})$ 中，并且对于 $(\mathbb{R}^*)^k$ 的某个正交象限 O，位于 $f_\Gamma(\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}\times O)$ 中。后者是 $W(\mathbb{R})$ 的一个连通分支，而 $\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}$ 在 $W(\mathbb{R})$ 中既开又闭，因此二者相等。

典范形式与乘积相容 [BD25，命题 2。12] 并且与推前相容[BD25，§2.3。4], 这里沿着同构 f_Γ 以及 Gr_k 的恒等映射$_n$，这将边界从 $Z_{K'}$ 扩大到 $Z_{S_K\cup D(\Gamma)}$；根据 定理 6.21，所有这些数对的亏格均为零。由于闭正交象限 O 的典范形式为 $\pm\,\mathrm{dlog}\ z_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{dlog}\ z_k$，我们得到

$$\omega_{K'}|_W=\pm(f_\Gamma)_*\big(\omega_K\wedge\mathrm{dlog}\,z_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{dlog}\,z_k\big),$$

像 $\omega_K\neq 0$ 在定理 6.21第 (2) 部分的单射映射之下。因此 $\omega_{K'}\neq 0$。

根据归纳法，对于每个堆叠多胞体，特别是定理中的多面体，实现空间的闭包都是一个具有非零典范形式的区域，并且 $\mathrm{cr}_{\mathbb{R}}=\mathrm{cr}=1$。□

例 7.13。 设 K' 为通过在四面体的面 3 上堆叠顶点 6 个顶点得到的5 个顶点的堆叠123，得到 K，它有 5 个顶点；然后再在面 6 上堆叠顶点 134，见图 6。

四面体中与面 123 相邻的面234、134 和 124，而 K中与 134 相邻的面为234、124 和 135，因此引理 7.10 中的4重嵌套为 引理 7.10 分别为

$$\Gamma_1=(234,134,124,123),\quad \Gamma_2=(234,124,135,134),$$

嵌套指标为 (1，2，3，4) 和 (1，3，4，5)，以及分子和分母

$$N(\Gamma_1)=\{1234\},\qquad D(\Gamma_1)=\{2345,1345,1245,1235\},$$
$$N(\Gamma_2)=\{1234,1345\},\quad D(\Gamma_2)=\{2346,1246,1356,1346\}.$$

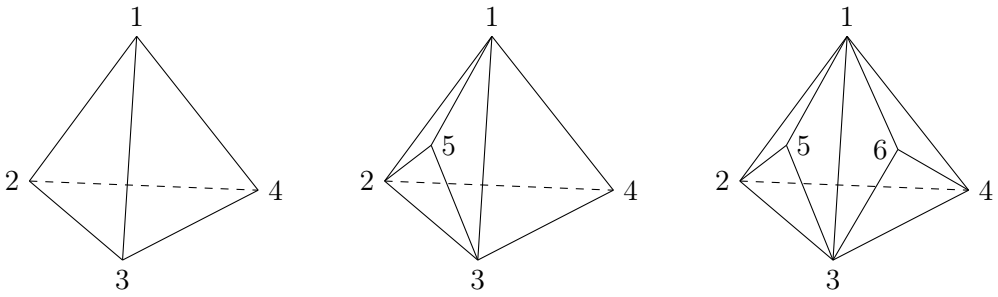

图 6. 四面体（左），将顶点 5 堆叠在面 123 上（中），然后再将顶点 6 堆叠在面 134 上（右）。

它们给出一个同构序列

$$\mathrm{Gr}_{4,4} \times (\mathbb{C}^*)^4 \times (\mathbb{C}^*)^4 \xrightarrow{f_{\Gamma_1} \times \mathrm{id}} (\mathrm{Gr}_{4,5} \setminus Z_K) \times (\mathbb{C}^*)^4 \xrightarrow{f_{\Gamma_2}} \mathrm{Gr}_{4,6} \setminus (Z_{K'} \cup Z_{\{1345\}}).$$

利用引理 6.17 并以 $\omega_{\mathrm{Gr}_{4,\ 4}} = 1 = p_{1234}^{-4} dC$ 开始，可以得到如下形式

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}} &= \pm \frac{p_{1234}^2 p_{1345}}{p_{2346} p_{1246} p_{1356} p_{1346}} \cdot \frac{p_{1234}^3}{p_{2345} p_{1345} p_{1245} p_{1235}} \cdot p_{1234}^{-4} dC \\ &= \pm \frac{p_{1234}}{p_{2345} p_{1245} p_{1235} p_{2346} p_{1246} p_{1356} p_{1346}} dC\,.\end{aligned}$$

注 7.14。 尽管定理 7.12 仅涉及归纳步骤以单纯形为基本情形的多胞体，但可以使用相同的论证，将顶点堆叠到并非其自身由堆叠得到的多胞体上，例如引理 7.7中的多胞体。

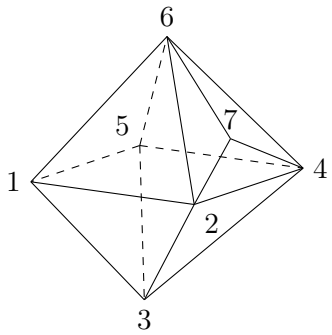

图 7。 图 5 中的八面体，其中顶点 7 堆叠在面 246上 .

例 7.15。 令 K' 为一个具有 7 个顶点的多胞体，它由 K 图 5中的八面体通过将顶点7 堆叠在面 246上得到，见图 7。与 K 中的 246相邻的面为456、126 和234，因此4-嵌套引理 7.10 为

$$\Gamma = (456, 126, 234, 246),$$

嵌套指标为（2、4、6、3），分子为 $N(\Gamma) = \{2456, 1246, 2346\}$，分母为 $D(\Gamma) = \{4567, 1267, 2347, 2467\}$。它给出了一个同构

$$(\mathrm{Gr}_{4,6} \setminus Z_K) \times (\mathbb{C}^*)^4 \xrightarrow{f_\Gamma} \mathrm{Gr}_{4,7} \setminus (Z_{K'} \cup Z_{N(\Gamma)}).$$

在$\mathrm{Gr}_{4,6}$, 的普吕克坐标中，例 7.8 的典范形式为

$$\omega_{\mathrm{Gr}_K^{\geq 0}} = \pm \frac{(p_{1246}p_{1356}p_{2345} - p_{1256}p_{1345}p_{2346})^2}{p_{1234}p_{1235}p_{1236}p_{1246}p_{1256}p_{1345}p_{1356}p_{1456}p_{2345}p_{2346}p_{2456}p_{3456}} dC.$$

利用引理 6.17，分子 $p_{2456}p_{1246}p_{2346}$ 消去了沿着 $Z_{N(\Gamma)}$的三个极点，从而得到

$$\omega_{\mathrm{Gr}_{K'}^{\geq 0}} = \pm \frac{(p_{1246}p_{1356}p_{2345} - p_{1256}p_{1345}p_{2346})^2}{p_{1234}p_{1235}p_{1236}p_{1256}p_{1345}p_{1356}p_{1456}p_{2345}p_{3456} \cdot p_{1267}p_{2347}p_{2467}p_{4567}} dC.$$

分母中的 13 个因子恰好是 $S_{K'}$ 的元素。

参考文献

[ABF+23] Daniele Agostini、Taylor Brysiewicz、Claudia Fevola、Lukas Kühne、Bernd Sturmfels、Simon Telen 和 Thomas Lam，似然退化，《Adv. Math.》414（2023），108863。[AE24] Dario Antolini 和 Nick Early，手性热带格拉斯曼流形 Trop$^{\chi}G(3,6)$、Trop$^{\chi}G(3,7)$、Trop$^{\chi}G(3,8)$（模掉线性部分）的数据集，Zenodo，2024，数据集，doi:10.5281/zenodo.13914104。[AE25] ，手性热带格拉斯曼流形，《Matematiche》80（2025），第1期，123–142。[AF59] Aldo Andreotti 和 Theodore Frankel，超平面截面上的 Lefschetz 定理，《Ann. of Math.》（第2辑）69（1959），第3期，713–717。[AHBC+16] Nima Arkani-Hamed、Jacob L. Bourjaily、Freddy Cachazo、Alexander B. Goncharov、Alexander Postnikov 和 Jaroslav Trnka，《散射振幅的格拉斯曼几何》，剑桥大学出版社，2016。[AHBHY18] Nima Arkani-Hamed、Yuntao Bai、Song He 和 Gongwang Yan，散射形式与运动学、颜色和世界面的正几何，《JHEP》05（2018），096。[AHBL17] Nima Arkani-Hamed、Yuntao Bai 和 Thomas Lam，正几何与典范形式，《JHEP》11（2017），039。[AHLS21a] Nima Arkani-Hamed、Thomas Lam 和 Marcus Spradlin，平面 $\mathcal{N}=4$ SYM 振幅的非微扰几何，《JHEP》03（2021），065。[AHLS21b] ，正构型空间，《Commun. Math. Phys.》384（2021），第2期，909–954。[AHT14] Nima Arkani-Hamed 和 Jaroslav Trnka，振幅子，《JHEP》10（2014），030。[BBRS24] Dominik Bendle、Janko Böhm、Yue Ren 和 Benjamin Schröter，大规模并行计算热带簇、其正部分及热带格拉斯曼流形，《J. Symbolic Comput.》120（2024），论文编号102224。[BCR98] Jacek Bochnak、Michel Coste 和 Marie-Françoise Roy，《实代数几何》，《Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete》（第3辑），第36卷，Springer-Verlag，柏林，1998。[BD25] Francis Brown 和 Clément Dupont，通过混合霍奇理论研究正几何与典范形式，《Commun. Math. Phys.》406（2025），第11期，267。[Ber20] Olof Bergvall，一般线性位置下七个点的空间的上同调，《Res. Number Theory》6（2020），第4期，论文编号48。[BG23] Olof Bergvall 和 Frank Gounelas，德尔佩佐曲面模空间的上同调，《Math. Nachr.》296（2023），第1期，80–101。[BLVS+99] Anders Björner、Michel Las Vergnas、Bernd Sturmfels、Neil White 和 Günter M. Ziegler，《有向拟阵》，第2版，《数学及其应用百科全书》，第46卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999。[CEGM19] Freddy Cachazo、Nick Early、Alfredo Guevara 和 Sebastian Mizera，散射方程：从射影空间到热带格拉斯曼流形，《JHEP》06（2019），039。[CEZ24] Freddy Cachazo、Nick Early 和 Yong Zhang，广义颜色排序：CEGM被积函数与解耦恒等式，《Nucl. Phys. B》1004（2024），116552。[CHY14] Freddy Cachazo、Song He 和 Ellis Ye Yuan，无质量粒子散射：标量粒子、胶子和引力子，《JHEP》07（2014），033。[CL23] Daniel Corey 和 Dante Luber， $\mathbb{C}^8$ 中的 3-平面 Grassmann 流形是 schön，《Algebr. Comb.》6（2023），第5期，1273–1299。[CLS11] David A. Cox、John B. Little 和 Henry K. Schenck，《托里克簇》，《Graduate Studies in Mathematics》，第124卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011。

[Cor21] Daniel Corey，格拉斯曼流形的初始退化，《Selecta Math.》（新系列）27（2021），第4期，论文编号57。[CR20] Freddy Cachazo 和 Jairo M. Rojas，双伴随振幅、Trop $G(3,7)$ 与 $X(3,7)$ 散射方程札记，《JHEP》04（2020），176。[DFGK20] James Drummond、Jack Foster、Ömer Gürdogan 和 Chrysostomos Kalousios，热带格拉斯曼流形、簇代数与散射振幅，《JHEP》04（2020），146。[DO21] Ronno Das 和 Ben O'Connor，射影平面中非共线点的构型，《Algebr. Geom. Topol.》21（2021），第4期，1941–1972。[EL26] Christopher Eur 和 Thomas Lam，有向拟阵的典范形式，《Bull. Lond. Math. Soc.》58（2026），第1期，论文编号e70272。[FF02] Lukas Finschi 和 Komei Fukuda，有向拟阵的生成——一种图论方法，《Discrete Comput. Geom.》27（2002），117–136。[Fin] Lukas Finschi，有向拟阵目录，https://finschi.com/math/om/，访问日期：2026年11月。[Gly88] David G. Glynn，几何环 II，《J. Combin. Theory Ser. A》49（1988），第1期，26–66。[GMW23] João Gouveia、Antonio Macchia 和 Amy Wiebe，结合多面体的实现空间模型，《Discrete Comput. Geom.》69（2023），第2期，505–542。[GS26] Eugene Gorsky 和 Tonie Scroggin，正拟阵簇的拼接，《Algebr. Comb.》9（2026），第2期，577–594。[Hac08] Paul Hacking，热带簇的同调，《Collect. Math.》59（2008），第3期，263–273。[HJJS09] Sven Herrmann、Anders Jensen、Michael Joswig 和 Bernd Sturmfels，如何绘制热带平面，《Electron. J. Combin.》16（2009），第2期，研究论文6。[HK12] David Helm 和 Eric Katz，单值化滤子与热带簇的拓扑，《Canad. J. Math.》64（2012），第4期，845–868。[HP20] Niklas Henke 和 Georgios Papathanasiou，七粒子和八粒子振幅有多热带？《JHEP》08（2020），005。[HPP26] Benjamin Hollering、Dmitrii Pavlov 和 Elizabeth Pratt，对数典范模型与正几何，2026，预印本，arXiv:2607.28368。[HRV08] Tamás Hausel 和 Fernando Rodriguez-Villegas，特征簇的混合霍奇多项式，《Invent. Math.》174（2008），第3期，555–624，附录由 Nicholas M. Katz 撰写。[HW41] Witold Hurewicz 和 Henry Wallman，《维数理论》，《Princeton Mathematical Series》，第4卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1941。[Ish22] Kelly Isham，一种计算高维射影空间中弧数的算法，《Finite Fields Appl.》80（2022），论文编号102006。[ISS95] Anna V. Iampolskaia、Alexei N. Skorobogatov 和 Evgenii A. Sorokin，MDS 码数量的公式，《IEEE Trans. Inform. Theory》41（1995），第6期，1667–1671。[KL26] Arne Kuhrs 和 Artyom Lisitsyn，定向拟阵层的正几何，计算笔记本，Zenodo，版本 v1，2026，https://doi.org/10.5281/zenodo.24258769。[Koe26] Joris Koefler，物理学中的正几何，博士论文，乔治-奥古斯特大学科学学院（GAUSS），德国哥廷根，2026。[KPS26] Joris Koefler、Dmitrii Pavlov 和 Rainer Sinn，来自振幅图的正亏格对，2026，预印本，arXiv:2601.11142。[Lam14] Thomas Lam，全非负 Grassmann 流形与 Grassmann 多胞体，《Curr. Dev. Math.》2014（2014），第1期，51–152。[Mnë88] Nikolai E. Mnëv，构型簇与凸多面体簇分类问题的普适性定理，《Topology and Geometry—Rohlin Seminar》，《Lecture Notes in Math.》，第1346卷，Springer，柏林，1988，第527–543页。[Pos06] Alexander Postnikov，全正性、格拉斯曼流形与网络，2006，预印本，arXiv:math/0609764。[RG96] Jürgen Richter-Gebert，《多面体的实现空间》，《Lecture Notes in Mathematics》，第1643卷，Springer，柏林，1996。[Ric88] Jürgen Richter，有向拟阵的组合可实现性判据，毕业论文，达姆施塔特工业大学，1988。[Sin23] Elias Sink，直线构型与 K3 曲面，2023，预印本，arXiv:2312.07542。

[Sko96] Alexei N. Skorobogatov，有限域上拟阵的表示数量，《Des. Codes Cryptogr.》**9** （1996），第2期，215–226页。[SS04] David Speyer 和 Bernd Sturmfels，热带格拉斯曼流形，《Adv. Geom.》**4** （2004），第3期，389–411页。[ST26] Bernd Sturmfels 和 Simon Telen，三次曲面中的正几何，2026年，预印本，arXiv:2605.11909。[Stu91] Bernd Sturmfels，射影构形的计算代数几何，《J. Symbolic Comput.》**11** （1991），第5期，595–618页。[Stu08] , 不变量理论中的算法，第二版，《符号计算中的文本与专著》，Springer，维也纳，2008年。[Tev07] Jenia Tevelev，环面子簇的紧化，《Amer. J. Math.》**129** （2007），第4期，1087–1104页。

马克斯·普朗克数学研究所，德国莱比锡电子邮件地址：arne.kuhrs@mis.mpg.de

物理与天文学系，加利福尼亚大学戴维斯分校，美国电子邮件地址：
alisitsyn@ucdavis.edu