arXiv:2611.32962v1 [math.DG] 24 Nov 2026

具有给定定向边界的曲率变分体

ERNST KUWERT 和 XUWEN ZHANG

Abstract. 设 $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$ 中一个闭的、嵌入的、连通的、定向的 C^1 子流形，其维数为 $m-1$，其中 $2 \le m < n$。我们证明，任何具有定向边界 γ 的浸入 m维子流形的面积，都可以用其曲率能量来界定，除非 γ 位于一个 m维平面中。该问题导出了一个涉及具有给定定向边界的定向曲率变分体的弱形式，我们在这一类对象中求解带障碍的边值极小化问题。

2020 年数学主题分类：53C42，49Q15

1. Introduction

设 $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个闭的、嵌入的、连通的、定向的 C^1 子流形，其维数为 $m-1$，其中 $2 \le m < n$。我们用 $\mathbf{S}^m(\gamma)$ 表示由紧的、定向的、 C^1 浸入 $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 所组成的类，其维数为 m，且其到 $\partial\Sigma$ 的限制映射参数化 γ，或者更一般地说，是 γ 的一个定向覆盖。假设该浸入在内部属于 C^2 类，则我们可以考虑其 L^p 曲率能量

$$\int_\Sigma |A|^p \, d\mathcal{H}^m \quad \text{where } 1 \le p < \infty.$$

这里， Σ 配备诱导度量，而 A 是第二基本形式。

一般而言，具有给定定向边界 γ 的浸入子流形的面积，并不受其曲率能量的控制。例如，一个二维圆盘 $D_1 := \{|x|^2 = 1\}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中具有正面积，但曲率为零。关于浸入的例子，只需取一个浸入到 $\mathbb{R}^3$ 中某个平面的浸入环带，其形式为

$$F : [a,b] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3, \quad F(r,\theta) = (r\cos k\theta, r\sin k\theta, 0),$$

其中 $0 < a < b$ 和 $k \in \mathbb{N}$。当 $k \to \infty$ 时，浸入环带的面积趋于无穷大，但曲率始终为零。这些例子表明， γ 必须是“非平面”的，才能使面积受曲率能量控制。

作为首个主要结果，我们证明了任意维数和余维的具有给定定向边界的子流形满足这样的界。

Date：2026年11月25日。

定理 1.1。 设 $\Sigma \in \mathbf{S}^m(\gamma)$ 满足 $\operatorname{diam}\Sigma \le R < \infty$。若 γ 不包含于任何仿射m-平面中，则对于每个 $p \in (1,\ \infty)$，存在 $C = C(m,\ n,\ p,\ \gamma,\ R) > 0$ 使得

$$|\Sigma| + |\partial\Sigma| \le C \int_\Sigma |A|^p \, d\mathcal{H}^m. \tag{1.1}$$

我们作几点说明。首先，请注意，γ 不包含于任何仿 m平面中，以及 Σ 的直径有界，这两个假设都是必要的。例如，考虑具有同一边界曲线的球冠 $S_r^+ := \Big\{x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x - (0,\ 0,\ \sqrt{r^2-1})| = r,\ x_3 \ge 0\Big\} (r > 1)$，其中边界曲线由单位圆 $\gamma_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 :\ |x| = 1,\ x_3 = 0\}$给出。由于 $r \to \infty$ 我们有 $|S_r^+| \to \infty$，但 $\int_{S_r^+} |A|^2 \, d\mathcal{H}^2 \to 8\pi$。对球冠族 $\{S_r^+\}_{r>1}$作一个简单的扰动，可以看出在此情形下，面积界并不成立。其次，值得注意的是，由于 Σ 是等距浸入，而 $\partial\Sigma$ 是 γ的定向覆盖映射，(1.1)中的界实际上意味着我们可以直接通过曲率能量估计覆盖映射的次数。第三，在 $m = 2 < n$的情形下，专家们都知道，作为 Simon 边界版本单调性公式 [Sim93、KS04、NP20], 的直接应用，在低于（临界）能量间隙 $\int_\Sigma |A|^2 \, d\mathcal{H}^2 < 8\pi$ 时，浸入$\Sigma \in \mathbf{S}^2(\gamma)$具有先验直径界。

有不少论文探讨面积与曲率之间的关系。这里列出与我们工作密切相关的文献。通过将黎曼流形嵌入环境欧几里得空间，并运用 Hutchinson 曲率变分流形， [Hut86], Mondino[Mon14] 通过反证法证明：在给定的黎曼流形上不存在零曲率曲率变分的条件下，黎曼流形中 m-变分的质量界可由其曲率控制。在特殊情形下，Bangert-Kuwert [BK25] 证明，要使这样的质量界成立，只需排除光滑的全测地浸入。

对于带边界的曲面，Novaga-Pozzetta [NP20] 在 Mantegazza 带边界的曲率变分流形框架下研究了 Willmore 能量的极小化问题 [Man96]。作为中间步骤，他们证明，若 Willmore 能量低于能量阈值$\int |H|^2 \, d\mathcal{H}^2 < 4\pi$，则 $|\Sigma|$ 可由 Willmore 能量 $\int |H|^2 \, d\mathcal{H}^2$ 和边界长度 $|\gamma|$控制，相关估计另见 [Poz21] 。最近，Kuwert-M¨uller[KM24] 证明，对于任意给定的容器 Ω，若 Ω 与任意仿射 m-平面的交集都不正交，则任何浸入 Ω 且沿 $\partial\Omega$具有正交边界的浸入都满足形式为 (1.1) 的界。

在我们的情形中，我们采用与文献[Mon14、KM24]一致的反证法来证明定理 1.1。关键在于，应为具有给定定向边界的浸入引入一种恰当的弱形式，以便建立一个良好的紧性定理，并将其用于反证法。在我们的情形中，我们研究所谓的定向变分，它们是定向格拉斯曼丛 $\sim \mathbb{R}^n \times G(m,\ n)$上的拉东测度。为实现这一目标，我们引入以下 $\gamma \times G(m,\ n)$ 的子空间，它为任意边界点处的定向切平面提供所有可能的选择

$\Sigma \in \mathbf{S}^m(\gamma)$:

$$\widetilde{G}_{m,n,\gamma} := \left\{(p,\omega) \in \gamma \times \widetilde{G}(m,n) : v \wedge \omega = 0 \text{ for every } v \in T_p\gamma\right\}. \tag{1.2}$$

这一定义的精神与文献 [KM24、WZ25、Zha26], 一致；与这些文献一样，我们可以将弱向内单位余法向量定义为

$$\eta(p,\omega) := (-1)^{n-m} \star (\tau_\gamma(p) \wedge \star\omega), \quad \forall (p,\omega) \in \widetilde{G}_{m,n,\gamma}, \tag{1.3}$$

其中， $\star$ 是霍奇星算子，而 $\tau_\gamma(p)$ 是与 γ 在 p处的定向切平面相关联的、选定的定向单位简单（$m-1$）向量。根据定义可以直接验证， $\eta(p,\ \omega)$ 是 $\mathbb{R}^n$中的单位向量，切于由 ω 张成的 m维平面，且垂直于 $T_p\gamma$。此外，对于由 $\Sigma \in \mathbf{S}^m(\gamma)$ 诱导的 $V = \mathcal{H}^m \llcorner \Sigma \otimes \delta_{T_p\Sigma}$ 和 $\Gamma = \mathcal{H}^{m-1} \llcorner \gamma \otimes \delta_{T_p\gamma}$，一阶变分公式（参见 [Sim83，引理 39.4]）成立：对于任意 $X \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \delta V[X] = \int_\Sigma \operatorname{div} X \, d\mathcal{H}^m &= -\int \langle H, X\rangle \, d\mathcal{H}^m - \int \langle \eta(p,\omega), X(p)\rangle \, d\Gamma(p,\omega) \\ &= -\int \langle H, X\rangle \, d\mathcal{H}^m - \int_\gamma \langle \eta(p, T_p\gamma), X(p)\rangle \, d\mathcal{H}^{m-1}(p), \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中， H 是平均曲率向量，而 $\eta(p,\ T_p\gamma)$ 与沿 $\gamma = \partial\Sigma \subset \Sigma$的经典向内单位余法向量一致。现在，我们可以定义具有给定定向边界 γ的定向曲率变分体$\widetilde{\ }$类，记作$\mathbf{CV}_{m,\ \gamma}(\mathbb{R}^n)$；其定义方式是允许式 (1.4) 中的测试函数 X 也依赖于格拉斯曼流形变量，正如 [Hut86]所做的那样。

我们将在命题 5.2 中证明，由于 $\widetilde{\mathbf{CV}}_{m,\ \gamma}(\mathbb{R}^n)$，给定的定向边界条件会传递到极限。我们将在定理 4.5 中证明，只要 γ 不包含于任何 m-平面中，$\mathbf{CV}_{m,\ \gamma}(\mathbb{R}^n)$ 中不存在具有零曲率和有界支集的$\widetilde{\ }$非零曲率变分。结合这两个事实，我们甚至可以在弱类 $\mathbf{CV}_{m,\ \gamma}(\mathbb{R}^n)$ 中得到$\widetilde{\ }$定理 1.1。此外，作为推论，我们可以证明，在$\mathbf{CV}_{m,\ \gamma}(\mathbb{R}^n)$ 的整数可求 rectifiable 子类（记作$\mathbf{ICV}_{m,\ \gamma}(\mathbb{R}^n)$）中，存在下述带障碍的边值问题的极小化子：

定理 1.2。 给定 $p \in (1,\ \infty)$、 $R \in (0,\ \infty)$ 以及正整数 k，只要该类非空，下述下确界即可达到：

$$\begin{aligned} &\beta^p_{k,R}(\gamma) \\ &:= \inf\left\{\int |\widetilde{B}|^p \, dV : V \in \widetilde{\mathbf{ICV}}_{m,\gamma}(\mathbb{R}^n), \operatorname{spt}\|V\| \subset \overline{B_R(0)}, \pi_\#\Gamma = k\mathcal{H}^{m-1}\llcorner\gamma\right\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

此外，如果 γ 不包含于任何仿射 m-平面中，那么 $\beta^p_{k,\ R}(\gamma) > 0$。

$\widetilde{\ }$这里， V表示弱浸入， B 表示其弱曲率， Γ 表示其弱边界。$\pi_\#\Gamma = k\mathcal{H}^{m-1}\llcorner\gamma$ 表示弱浸入的边界覆盖映射次数为 γ k。我们注意到，在极小化 (1.5) 时，弱曲面的余法向量可以在 γ上自由变化；若 (1.5) 的极小化解是光滑的，则欧拉-拉格朗日方程在内部实际上是一个四阶方程，参见例如 [KLL15], ，而在边界上是一个二阶方程。在 Willmore 能量的极小化问题中，同样的边界

条件已由 Pozzetta 在 [Poz21]，中研究，而 Dirichlet 型边界则在 [NP20] 中得到研究。

值得一提的是，极小化问题 (1.5) 无法利用 Mantegazza 的带边界无定向曲率变分体 [Man96] 得到解决。更确切地说，在他的定义中，整数曲率变分体 V 的边界由一个向量值拉东测度给出，记作 ∂V，而边界条件应表述为 $|\partial V| = k\mathcal{H}^{m-1}\llcorner\gamma$，其中 $|\partial V|$ 是 ∂V 的全变差。然而，我们注意到，在这种设定下缺乏良好的紧性。例如，考虑并集 $C_r := S_r^+ \cup S_r^-(r > 1)$，其中 S_r^+ 是上文定义的球冠，而 S_r^- 是 S_r^+ 关于超平面 $\{x_3 = 0\}$ 的反射。可以证明，C_r 诱导出一个带边界的整数曲率变分体 V_r，其边界为 ∂V_r，满足 $|\partial V_r| = 2\mathcal{H}^{m-1}\llcorner\gamma_1$ （回忆一下，γ_1 是单位圆）。然而，令 $r \searrow 1$，则 $(V_r, \partial V_r)$ 作为带边界的曲率变分体收敛到 $(V_1, \partial V_1)$，其中 V_1 由单位球面 $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 = 1\}$ 和 $\partial V_1 = 0$ 诱导而来；也就是说，边界条件无法传递到极限。

本文的结构安排如下。第 2 节汇集几何测度论中的一些基本事实，并研究定向变分的结构。第 3 节定义本文所研究的弱子流形类，即具有给定定向边界的定向曲率变分体，并研究其基本性质。随后，我们在第 4 节考察零曲率情形，并证明关键的结构性结果（定理 4.5）。第 5 节致力于建立具有给定定向边界的定向曲率变分体的紧性结果（命题 5.2），这主要基于关键估计引理 5.1。第 6 节证明面积界（定理 1.1），并在第 6.2 节详细研究二维情形。第 7 节研究极小化问题（1.5），并证明定理 1.2。

致谢。作者感谢 Fabian Rupp 在本项目中提供的有益讨论。本研究得到 DFG 通过资助项目 IRTG3132“非线性偏微分方程分析”的支持。

AI 披露。本文的撰写未使用 AI。

2. Preliminaries

我们首先收集几何测度论中的两个有用事实。第一个是众所周知的常值定理。

引理 2.1。设 μ 是开域 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上的拉东测度，并假设对所有 $f \in C_c^\infty(U)$

$$\int_U \partial_\alpha f(x)\, d\mu(x) = 0, \quad \forall \alpha = 1, \cdots, m.$$

那么，对于某个 $\theta \in [0, \infty)$，$\mu = \theta\mathcal{L}^m$ 在 U 上。

证明。参见 [Sim83，定理 26.27]。 □

第二个是拉东测度的解体，例如参见 [AGS08, Sim83]。

引理 2.2。设 μ 是 $X \times Y$ 上的一个紧支集拉东测度，其中 X、Y 是度量空间，并记投影映射为 $\pi\colon X \times Y \to X$。则 $\|\mu\| = \pi_{\#}\mu$ 是一个拉东测度，并且存在一个由 $\|\mu\|$-几乎处处唯一确定的族 $(\mu^x)_{x\in X}$，其元素是 Y 上的拉东概率测度，使得对任意 *Borel* 函数 $\phi\colon X \times Y \to [0,\infty]$，有

$$\int_{X\times Y} \phi \, d\mu = \int_X \int_Y \phi(x,y)\, d\mu^x(y) d\|\mu\|(x).$$

2.1. m 上的定向变分 $\mathbb{R}^n$。

2.1.1. 格拉斯曼流形。 无定向格拉斯曼流形和定向格拉斯曼流形分别为

$$G(m,n) = \mathrm{V}_m(\mathbb{R}^n)/\mathbb{O}(m) \quad \text{and} \quad \widetilde{G}(m,n) = \mathrm{V}_m(\mathbb{R}^n)/\mathbb{SO}(m),$$

其中 $\mathrm{V}_m(\mathbb{R}^n) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times m}\colon X^TX = I_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中正交归一 m-标架构成的斯蒂费尔流形。显然有覆盖映射

$$q : \widetilde{G}(m,n) \to G(m,n), \quad [X]_{SO(m)} \mapsto [X]_{O(m)}.$$

在 $V_m(\mathbb{R}^n)$ 上，我们采用由 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 诱导的度量，并选取格拉斯曼流形上的度量，使得商投影是黎曼浸没。对于 $\backsim[X]_{O(m)} \in G(m,n)$ 或 $[X]_{SO(m)} \in G(m,n)$，点 $[X]$ 处的切空间可识别为水平空间 $\mathcal{H}_X = \{Z \in \mathbb{R}^{n\times m}\colon X^TZ = 0\}$。商度量定义为

$$g_{[X]}(Z,W) = \mathrm{tr}(Z^TW) \quad \text{where } Z, W \in \mathcal{H}_X.$$

现在考虑映射

$$\iota : G(m,n) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad [X]_{O(m)} \mapsto XX^T.$$

这是良定义的，因为对于每个 $A \in O(m)$，都有

$$(XA)(XA)^T = XAA^TX^T = XX^T.$$

其像是秩为 m 的正交投影矩阵空间：

$$\iota(G(m,n)) = \mathcal{P}_{m,n} := \left\{P \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) : P^2 = P,\ \mathrm{tr}(P) = m\right\}.$$

我们在 $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 上赋予内积 $\langle A, B\rangle_{\mathrm{Sym}} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB)$，并注意到 ι 在 $[X]_{O(m)}$ 处的微分为

$$d\iota_{[X]_{O(m)}}(Z) = ZX^T + XZ^T.$$

利用 $X^TZ = X^TW = 0$，我们从而得到

$$\begin{aligned}\left\langle d\iota_{[X]}(Z), d\iota_{[X]}(W)\right\rangle_{\mathrm{Sym}} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left((ZX^T + XZ^T)(WX^T + XW^T)\right)\\ &= \mathrm{tr}(Z^TW) = g_{[X]_{O(m)}}(Z,W),\end{aligned}$$

这表明 $\iota\colon G(m,n) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 是等距嵌入。

对于定向格拉斯曼流形，定义

$$\widetilde{\iota}:\widetilde{G}(m,n)\to\Lambda_m(\mathbb{R}^n),\quad [v_1,\dots,v_m]_{SO(m)}\mapsto v_1\wedge\cdots\wedge v_m,$$

其中 $(v_1,\dots,v_m)$ 是一个定向正交归一标架。$\widetilde{\iota}$ 定义良好，因为将 $(v_1,\dots,v_m)$ 变换为某个 $A\in SO(m)$ 会使外积乘以 $\det A=1$。其像是单位简单 m-向量的空间：

$$\widetilde{\iota}(\widetilde{G}(m,n))=\mathcal{G}_{m,n}:=\{v_1\wedge\cdots\wedge v_m\in\Lambda_m(\mathbb{R}^n):(v_1,\cdots,v_m)\text{ 是一个正交归一 }m\text{-标架}\}.$$

我们在 $\Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ 上赋予由 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得内积诱导的内积，并注意，对于满足 $z_i\in\operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)^\perp$ 的 $X=(v_1,\dots,v_m)$ 和 $Z=(z_1,\dots,z_m)$，有

$$d\widetilde{\iota}_{[X]_{SO(m)}}(Z)=\sum_{i=1}^m v_1\wedge\cdots\wedge z_i\wedge\cdots\wedge v_m,$$

因此我们得出

$$\Big\langle d\widetilde{\iota}_{[X]_{SO(m)}}(Z),d\widetilde{\iota}_{[X]_{SO(m)}}(W)\Big\rangle_{\Lambda_m(\mathbb{R}^n)}=\sum_{i=1}^m\langle z_i,w_i\rangle=\operatorname{tr}(Z^TW)=g_{[X]_{SO(m)}}(Z,W).$$

因此 $\widetilde{\iota}:\ \widetilde{G}(m,n)\to\Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ 也是一个等距嵌入。

最后，覆盖映射 $\mathbf{q}:\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}\to\mathcal{P}_{m,n}$ 在两个嵌入之间诱导出一个覆盖映射：我们定义

$$\mathbf{q}:\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}\to\mathcal{P}_{m,n},\quad v_1\wedge\cdots\wedge v_m\mapsto\sum_{i=1}^m v_iv_i^T,$$

其中 $(v_1,\dots,v_m)$ 是一个正交归一标架。显然，这些映射满足 $\mathbf{q}\circ\widetilde{\iota}=\iota\circ q$。

对合映射在 $\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\,n}$ 定义为

$$\mathcal{I}:\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}\to\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n},\quad v_1\wedge\cdots\wedge v_m\longmapsto -v_1\wedge\cdots\wedge v_m,$$

其满足 $\mathcal{I}^2=\mathrm{Id}_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\,n}}$，并且容易验证 $\mathcal{I}$ 是一个等距映射。另请注意 $\mathbf{q}\circ\mathcal{I}=\mathbf{q}$，而对于每个 $\omega\in\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\,n}$，$\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{q}(\omega))=\{\omega,\mathcal{I}(\omega)\}=\{\omega,-\omega\}$。因此，$\mathcal{P}_{m,\,n}\cong\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\,n}/\langle\mathcal{I}\rangle$，其中商空间赋予商黎曼度量，并且 $\mathbf{q}:\mathcal{G}_{m,\,n}\to\mathcal{P}_{m,\,n}$ 是一个黎曼二重覆盖。

注 2.3。在本文余下部分，我们将 $G(m,\,n)$ $\widetilde{G}(m,\,n)$ 与其到欧几里得空间 $\operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$, $\Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ 中的等距嵌入 $\mathcal{P}_{m,\,n}$, $\mathcal{G}_{m,\,n}$ 视为相同对象。

2.1.2. 定向变分及其结构。对于任意开集 $U\subset\mathbb{R}^n$，m-定向变分 on U 是定义在 G_m 上的拉东测度 V，$_n(U):=U\times G(m,n)$。稍微滥用符号，我们还将 $\mathbf{q}$ 记作从 $G_{m,\,n}(U)$ 到 $G_{m,\,n}(U)$ 的映射：$=U\times G(m,n)$，它将 (x,ω) 映射为 $(x,\mathbf{q}(\omega))$；并将 $\mathcal{I}$ 记作从 $G_{m,\,n}(U)$ 到 $G_{m,\,n}(U)$ 的等距对合，它将 (x,ω) 映射为 $(x,\mathcal{I}(\omega))$。

我们记 e $V = V^s + V^{as}$ 分别表示其对称部分和反对称部分，其中

$$V^s := \frac{1}{2}(V + \mathcal{I}_\# V), \quad \text{and } V^{as} := \frac{1}{2}(V - \mathcal{I}_\# V). \tag{2.1}$$

注意， V^s 是拉东测度，而 V^{as} 只是带符号拉东测度。

我们进一步令 $V^0 = \mathbf{q}_\# V$。由于$\mathbf{q} \circ \mathcal{I} = \mathbf{q}$，因此我们推得

$$\mathbf{q}_\# V^s = V^0, \quad \text{and } \mathbf{q}_\# V^{as} = 0.$$

由 (2.1) 可知， V关于 V^s绝对连续，因此，由于 $V^{as} = V - V^s$， V^{as} 关于 V^s 也绝对连续。根据拉东-~尼科迪姆定理，存在一个 V^s-可测函数 $\sigma : G_{m,n}(U) \to \mathbb{R}$，使得

$$V^{as}(\phi) = \int \phi(x,\omega)\sigma(x,\omega)\, dV^s(x,\omega), \quad \forall \phi \in C_c^0(U \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n)). \tag{2.2}$$

命题 2.4. 在上述记号下， σ 是关于第二个变量的奇函数，并且对于 V^s-几乎处处的(x,ω)，其取值属于 $[-1,1]$。

证明. 首先，由 (2.1) 可知

$$\mathcal{I}_\# V^s = V^s, \quad \mathcal{I}_\# V^{as} = -V^{as}.$$

He根据推前的定义，我们得到 $V^{as}(\phi \circ \mathcal{I}) = (\mathcal{I}_\# V^{as})(\phi) = -V^{as}(\phi)$.

另一方面，根据测度的推前定义，我们有

$$\begin{aligned} V^{as}(\phi \circ \mathcal{I}) &\overset{(2.2)}{=} \int (\phi \circ \mathcal{I})\sigma \, dV^s = \int (\phi(\sigma \circ \mathcal{I})) \circ \mathcal{I} \, dV^s \\ &= \int \phi\,(\sigma \circ \mathcal{I})\; d(\mathcal{I}_\# V^s) = \int \phi(\sigma \circ \mathcal{I})\, dV^s. \end{aligned}$$

结合可得，对所有 $\phi \in C_c^0(U \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n))$

$$\int \phi\,(\sigma + \sigma \circ \mathcal{I})\; dV^s = 0.$$

通过稠密性论证，我们得出 $\sigma \circ \mathcal{I} = -\sigma$，即对于 V^s-几乎处处的 (x,ω)， σ 关于第二个变量是奇函数。

为了证明对于 V^s-几乎处处的 (x,ω)， $\sigma(x,\omega) \in [-1,1]$，只需注意到

$$V = V^s + V^{as} = (1+\sigma)V^s, \quad \mathcal{I}_\# V = V^s - V^{as} = (1-\sigma)V^s$$

两者都是非负测度，因此

$$-1 \le \sigma \le 1 \text{ for } V^s\text{-a.e.}$$

□

3. Oriented curvature varifolds with given oriented boundary

3.1. 边界条件。 现在，我们将具有给定定向边界的光滑曲面推广到定向变分的语境中。

设 $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个闭的、连通的、定向嵌入 C^1 子流形，其维数为 $m-1$。我们使用诱导的欧几里得度量，并将 $T_p\gamma$ 视为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，记 $\tau_\gamma(p) \in \Lambda_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ 为与 $T_p\gamma$ 相关联的定向单位简单（$m-1$）向量。

与给定定向边界 γ 相关联的定向格拉斯曼丛定义为 $G_{m,n,\gamma}$，如（1.2）所示。我们赋予 $G_{m,n,\gamma}$ 从 $\gamma \times \widetilde{G}(m,n)$ 继承的子空间拓扑，并将其纤维记为 $\widetilde{G}_{m,n,\gamma}(x) := \Big\{\omega \in \widetilde{G}(m,n) :$ 对每个 $v \in T_x\gamma\Big\}$，$v \wedge \omega = 0$。我们还使用由下式给出的内积 $\iota_v\omega$

$$\langle \iota_v\omega, \alpha\rangle := \langle \omega, v \wedge \alpha\rangle\,, \quad \forall \alpha \in \Lambda_{m-1}(\mathbb{R}^n).$$

对于每个 $(p,\ \omega) \in G_{m,\ n,\ \gamma}$，按照（1.3）定义弱内单位余法向量 $\eta(p,\ \omega)$。根据 G_m 的定义，由 $\tau_\gamma(p)$ 和 $\star\omega$ 表示的子空间彼此正交。因此 $\tau_\gamma(p) \wedge \star\omega$ 是一个单位简单（$n-1$）-向量，从而 $\eta(p,\ \omega)$ 是一个单位向量。更准确地说，$\eta(p,\ \omega) \in$ 张成空间 $(\omega) \cap (T_p\gamma)^\perp$，并且满足

$$\tau_\gamma(p) \wedge \eta(p,\omega) = \omega,$$

由（1.3）可知。我们还注意到，它可以由下式刻画：

$$\iota_{\eta(p,\omega)}\omega = (-1)^{m-1}\tau_\gamma(p). \tag{3.1}$$

3.2. 具有给定定向边界的定向曲率变分体。 按照[Hut86] 的思路（另见 [KM24，第 2]节），我们首先推导光滑曲面的曲率恒等式。

令 $\gamma \subset U \subset \mathbb{R}^n$ 如前，令 Σ 为一个维数为 m且边界非空的紧定向流形，并令 $F : \Sigma \to U$ 为一个 C^1 浸入，且在 C^2 内部 Σ。我们赋予 F 诱导度量，并通过 F的推前，将 Σ 和 $\partial\Sigma$的每个切空间分别与其在 $\mathbb{R}^n$ 中的像相识别；沿这些空间取导数也均指在此识别下进行。

现在，我们用 $\omega_\Sigma(z) \in \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ 表示与 $T_z\Sigma$ 关联的定向单位简单 m-向量，并用 $\eta_{\partial\Sigma}(z) \in \mathbb{R}^n$ 表示指向内侧的单位余法向量。边界定向定义为

$$\tau_{\partial\Sigma}(z) := (-1)^{m-1}\iota_{\eta_{\partial\Sigma}(z)}\omega_\Sigma(z). \tag{3.2}$$

对于任意的 $\Sigma \in \mathbf{S}^m(\gamma)$，由于 $F\,|_{\partial\Sigma}$ 是 γ 的保定向覆盖映射，我们有

$$\tau_{\partial\Sigma}(z) = \tau_\gamma(F(z)) \quad \text{for every } z \in \partial\Sigma. \tag{3.3}$$

此外，由于 $\partial\Sigma$ 是紧的且 γ 是连通的，我们知道这个覆盖映射是有限的，并且 $F(\partial\Sigma) = \gamma$。对于任意 $z \in \partial\Sigma$，我们有 $T_{F(z)}\gamma = T_z\partial\Sigma \subset T_z\Sigma$，因此根据定义，$(F(z),\ \omega_\Sigma(z)) \in G_{m,\ n,\ \gamma}$。由（3.3）、（3.1），再由（3.2），我们得到

$$\iota_{\eta(F(z),\omega_\Sigma(z))}\omega_\Sigma(z) = (-1)^{m-1}\tau_\gamma(F(z)) = (-1)^{m-1}\tau_{\partial\Sigma(z)}(z) = \iota_{\eta_{\partial\Sigma}(z)}\omega_\Sigma(z),$$

这意味着

$$\eta_{\partial\Sigma}(z) = \eta(F(z), \omega_\Sigma(z)). \tag{3.4}$$

因此，定向高斯映射为 $\omega_\Sigma : \Sigma \to \mathcal{G}_{m,n}$，为简便起见，我们还记 $P(z) := \mathbf{q}(\omega_\Sigma(z))$。对于 $z \in \mathrm{int}\Sigma$ 和 $v \in \mathbb{R}^n$，我们将曲率映射定义为

$$\widetilde{B}(z)[v] := D_{P(z)v}\omega_\Sigma(z).$$

显然，有

$$\widetilde{B}(z) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, T_{\omega_\Sigma(z)}\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}). \tag{3.5}$$

我们还定义双线性形式

$$B(z) := D\overline{\mathbf{q}}_\omega \circ \widetilde{B}(z)$$

其中，根据 (3.5)，$\mathbf{q}$ 可以取为$\mathbf{q}$ 在 $\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}$ 的某个邻域上的任意延拓。于是将 B 的迹记为 $\mathcal{T}(B) := \mathrm{tr}B = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)$。

为B的计算，我们选取一个局部定向正交切标架$X = (\tau_1, \dots, \tau_m)$，并对每个 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 定义

$$Z_i := (A(\tau_i, \tau_1), \dots, A(\tau_i, \tau_m)).$$

注意，$X^T X$是到 $T\Sigma$上的正交投影，因此由高斯公式可得 $A(\tau_i, \tau_j) = (I_n - XX^T)D_{\tau_i}\tau_j$，从而 Z_i可以改写为

$$Z_i = (I_n - XX^T)D_{\tau_i}X,$$

这意味着 $X^T Z_i = 0$，进而 $Z_i \in \mathcal{H}_X$。由链式法则，我们得到

$$\widetilde{B}[\tau_i] = D_{\tau_i}\omega_\Sigma = d\widetilde{\iota}_{[X]_{SO(m)}}(Z_i).$$

由于 $\widetilde{\iota}$ 是等距的，且根据定义，B 在法向量上消失，因此我们得到

$$\begin{aligned} |\widetilde{B}|^2 &= \sum_{i=1}^m g_{[X]_{SO(m)}}(Z_i, Z_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathrm{tr}(Z_i^T Z_i) = \sum_{i,j=1}^m |A(\tau_i, \tau_j)|^2 = |A|^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

对于任意测试向量场 $\phi \in C_c^1(U \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$，定义 $X(z) := \phi(F(z), \omega_\Sigma(z))$以及 $X^T(z) := P(z)X(z)$。由链式法则可得

$$\mathrm{div}X^T = D_\omega\phi \cdot \widetilde{B} + \left\langle \mathcal{T}(\widetilde{B}), \phi \right\rangle + \langle D_x\phi, P \rangle, \tag{3.7}$$

其中所有涉及 ϕ 的项均在 $(F(z), \omega_\Sigma(z))$ 处取值，并采用约定$D_\omega\phi \cdot B := \mathrm{tr}(D_\omega\phi \circ B)$，如 [KM24] 中所示。通过如 [KM24 第 2], 节中的逼近论证，并利用切向散度定理，我们得到

$$\int_\Sigma \mathrm{div}X^T \, d\mathcal{H}^m = -\int_{\partial\Sigma} \langle \phi(F(z), \omega_\Sigma(z)), \eta_{\partial\Sigma}(z) \rangle \, d\mathcal{H}^{m-1}. \tag{3.8}$$

利用映射 $\Phi(z) := (F(z)\ \omega_\Sigma(z))$，我们可以定义与 Σ 和 $\partial\Sigma$ 相关联的定向变分，如下所示：$V := \Phi_\#(\mathcal{H}^m \llcorner \Sigma)$，$\Gamma := (\Phi|_{\partial\Sigma})_\#(\mathcal{H}^{m-1}\llcorner\partial\Sigma)$。结合 (3.8)、(3.7) 和 (3.4)，我们得到

$$\int_{U\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \Big(D_\omega\phi\cdot\widetilde{B} + \Big\langle \mathcal{T}(\widetilde{B}),\phi\Big\rangle + \langle D_x\phi, \mathbf{q}(\omega)\rangle\Big)\, dV = -\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle\phi,\eta\rangle\, d\Gamma.$$

这促使我们给出以下定义。

定义 3.1。设 V 是 m-varifold，具有定向，且位于 $\mathbb{R}^n$ 中；设 $\mathcal{N}$ 是 $\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\,n}$ 在 $\Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ 中的管状邻域；并设 $\mathbf{q}:\mathcal{N}\to \mathrm{S\bar{y}m}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathbf{q}$ 到 $\mathcal{N}$ 的 C^1-延拓。若存在 $\widetilde{B}\in L^1_{\mathrm{loc}}(V;\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\Lambda_m(\mathbb{R}^n)))$ 以及定义在 $\widetilde{G}_{m,n,\gamma}$ 上的拉东测度 Γ，使得对于任意测试函数 $\phi\in C^1_c(\mathbb{R}^n\times\Lambda_m(\mathbb{R}^n);\mathbb{R}^n)$，曲率恒等式成立，则称 V 是具有给定定向边界 γ 的定向曲率 m-*varifold*：

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \Big(D_\omega\phi\cdot\widetilde{B} + \Big\langle \mathcal{T}(\widetilde{B}),\phi\Big\rangle + \langle D_x\phi, \mathbf{q}(\omega)\rangle\Big)\, dV = -\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle\phi,\eta\rangle\, d\Gamma. \tag{3.9}$$

注 3.2。若 $\Gamma = 0$，则可以通过直接计算表明，定向曲率恒等式（3.9）与 Delladio-Scianna [DS95] 和 Bellettini[Bel23] 推导出的恒等式是一致的。

根据定义 3.1 可直接得到以下曲率的切向性质。

命题 3.3。设 $(V$、B、$\Gamma)$ 满足定义 *3.1*。则有

$$\widetilde{B}(x,\omega)\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, T_\omega\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}) \tag{3.10}$$

对于 V-几乎处处的 $(x$、$\omega)$ 成立。因此，定义 *3.1* 与所选取的 C^1-延拓 $\mathbf{q}$ 无关，并且

$$B(x,\omega) := D\overline{\mathbf{q}}_\omega\circ\widetilde{B}(x,\omega) = D\mathbf{q}_\omega\circ\widetilde{B}(x,\omega) \tag{3.11}$$

证明。设 $\psi\in C^1_c(\mathbb{R}^n\times\Lambda_m(\mathbb{R}^n))$ 在 $\mathbb{R}^n\times\widetilde{\mathcal{G}}_m$ 上满足 $\psi = 0_{\,,\,n}$，于是对于每个 $\omega\in\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\,n}$，函数 $x\mapsto\psi(x,\ \omega)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上恒等于零，这意味着：对于每个 $(x,\ \omega)$，$\in\mathbb{R}^n\times\mathcal{G}_{m,\,n}$，

$$D_x\psi(x,\omega) = 0,\quad D_\omega\psi(x,\omega)[\zeta] = 0\quad \forall\zeta\in T_\omega\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}. \tag{3.12}$$

固定任意一个 $e\in\mathbb{R}^n$。用 $\phi = \psi e$ 检验 (3.9)，并注意到

$$D_\omega\phi\cdot\widetilde{B} = \mathrm{tr}(D_\omega\phi\circ\widetilde{B}) = \sum_{j=1}^n \Big\langle D_\omega\phi[\widetilde{B}[e_j]]], e_j\Big\rangle = \sum_{j=1}^n D_\omega\psi[\widetilde{B}[e_j]]\,\langle e,e_j\rangle = D_\omega\psi[\widetilde{B}[e]],$$

因此我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} D_\omega\psi(x,\omega)[\widetilde{B}(x,\omega)[e]]\, dV(x,\omega) = 0. \tag{3.13}$$

若令 $N_\omega\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n} := \left(T_\omega\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}\right)^\perp \subset \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ 和 $\widetilde{B}^\perp(x,\omega) := \mathrm{proj}_{N_\omega\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \circ \widetilde{B}(x,\omega)$，则被积函数可进一步写为

$$D_\omega\psi(x,\omega)[\widetilde{B}(x,\omega)[v]] = D_\omega\psi(x,\omega)[\widetilde{B}^\perp(x,\omega)[v]].$$

为继续进行，设 $Z:\ \mathbb{R}^n \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,\ n} \to \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ 是一个满足 $\sim Z(x,\ \omega) \in N_\omega\mathcal{G}_{m,\ n}$ 对每个 $(x,\ \omega)$ 都成立的紧支集 C^1 映射。设 $\mathfrak{p}:\ \mathcal{N} \to \mathcal{G}_{m,\ n}$ 是管状邻域 $\mathcal{N}$ 中的最近点投影，并定义

$$\nu(\xi) := \xi - \mathfrak{p}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{N},$$

它满足 $\nu\,|_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\ n}} = 0$。取一个截断函数 $\chi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times \mathcal{N})$，使得 $\chi = 1$ 在 $\mathrm{spt}Z$ 的某个邻域上成立，并令

$$\psi(x,\xi) := \chi(x,\xi)\left\langle \nu(\xi), Z\left(x, \mathfrak{p}(\xi)\right)\right\rangle.$$

将其在 $\mathbb{R}^n \times \mathcal{N}$ 外延拓为零后，函数 ψ 属于 $C_c^1(\mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n))\widetilde{\ }$，并且在 $\mathbb{R}^n \times \mathcal{G}_{m,\ n}$ 上满足 $\psi = 0$。

$\widetilde{\ }$在每个 $\omega \in \mathcal{G}_{m,\ n}$ 处，显然有

$$D\mathfrak{p}_\omega = \mathrm{proj}_{T_\omega\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}, \quad D\nu_\omega = \mathrm{proj}_{N_\omega\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}.$$

Si $\widetilde{\ }$nce $\nu(\omega) = 0$，因此对每个 $(x,\ \omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{G}_{m,\ n}$ 以及每个 $\zeta \in \Lambda_m(\mathbb{R}^n\ \ )$，

$$D_\xi\psi(x,\omega)[\zeta] = \left\langle \zeta^\perp, Z(x,\omega)\right\rangle$$

其中 $\zeta^\perp := \mathrm{proj}_{N_\omega\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}\zeta$。将 (3.13) 应用于此处选择的 ψ，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \left\langle \widetilde{B}^\perp(x,\omega)[v], Z(x,\omega)\right\rangle dV(x,\omega) = 0.$$

Si由于 v 是任意的，我们推得对 V-几乎处处的 (x,ω)，$\widetilde{B}^\perp = 0$ 成立，这就证明了 (3.10)

最后，设 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$ 是 $\mathbf{q}$ 在邻域上的两个 C^1-延拓 $\widetilde{\ }$ $\mathcal{G}_{m,n}$，由于它们在 $\mathcal{G}_{m,n}$ 上的限制一致，显然对每个 $\zeta \in T_\omega\mathcal{G}_{m,n}$ 都有 $D\mathbf{q}_{1,\ \omega}[\zeta] = D_{\mathbf{q}_{2,\omega}}[\zeta] = D_{\mathbf{q}_\omega}[\zeta]$。结合 (3.10)，可知 (3.11) 成立，且定义 3.1（尤其是曲率恒等式 (3.9)）与延拓 $\mathbf{q}$ 无关。□ $-$

该命题还表明，曲率恒等式 (3.9) 仅取决于环境测试场在定向格拉斯曼流形 $\mathbb{R}^n \times \mathcal{G}_{m,n}$ 上的限制 -$\widetilde{\ }$。

推论 3.4。 在定义 *3.1* 的假设下，(3.9) 的两边仅取决于 $\phi \in C_c^1$（$\mathbb{R}^n \times \Lambda_m$（$\mathbb{R}^n$）；$\mathbb{R}^n$）在 $\mathbb{R}^n \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,\ n}$ 上的限制。

证明。 设 ϕ_1，$\phi_2 \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,\ n}$ 上满足 $\phi_1 = \phi_2$，并令 $\psi := {}_\sim\phi_1 - \phi_2$，则在 $\mathbb{R}^n \times \mathcal{G}_{m,\ n}$ 上有 $\psi = 0$。由 (3.12) 和 (3.10)，我们得到

$$D_\omega\psi(x,\omega) \circ \widetilde{B}(x,\omega) = 0 \quad V\text{-a.e.}$$

Back 根据 (3.9)，我们看到两边的每一项都为零，这就完成了证明 的。□

3.3. 基本性质。 我们汇总定义 3.1 的一些直接推论。在本小节中，设 (V, B, Γ) 满足定义 3.1。我们回顾一下

$$\mathcal{T}(\widetilde{B})(x,\omega) = \mathrm{tr} B(x,\omega) \tag{3.14}$$

其中 B 由 (3.11) 给出。由于 $\mathbf{q}$ 光滑且 $\mathcal{G}_{m,n}$ 紧，存在 $C = C(m,n) > 0$，使得

$$|\mathcal{T}(\widetilde{B})(x,\omega)| \le C|\widetilde{B}(x,\omega)|, \quad V\text{-a.e } (x,\omega). \tag{3.15}$$

我们注意到以下简单事实：

(1) 令 $\pi : \mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n) \to U$ 表示到第一变量上的典范投影，并令 $\|\Gamma\| := \pi_\# \Gamma$。根据引理 2.2，存在一个 $\|\Gamma\|$-可测的 Radon 概率测度族 $\{\Gamma^x\}_{x\in\gamma}$，使得 Γ^x 支集于 $G_{m,n,\gamma}(x)$，对 $\|\Gamma\|$-几乎处处的 x 成立，且

$$\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} f(x,\omega)\, d\Gamma(x,\omega) = \int_\gamma \int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}(x)} f(x,\omega)\, d\Gamma^x(\omega) d\|\Gamma\|(x)$$

对每个非负 Borel 函数 f。

我们定义与 Γ 相关联的广义内向余法向量为

$$\eta_V(x) := \int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}(x)} \eta(x,\omega)\, d\Gamma^x(\omega) \tag{3.16}$$

对 $\|\Gamma\|$-几乎处处的 $x \in \gamma$，则 η_V 是 $\|\Gamma\|$-可测的，并且满足

$$|\eta_V(x)| \le 1 \quad \text{for } \|\Gamma\|\text{-a.e. } x.$$

注意，η_V 一般不是单位的，因为位于同一边界点上的不同定向切平面可能会在平均中相互抵消。

(2) 令 $\|V\| := \pi_\# V$。对于任意 $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$，用 $\phi(x, \omega) = \varphi(x)$ 对 (3.9) 进行检验，可得

$$\begin{aligned} \delta V^0(\varphi) = &- \int_{\mathbb{R}^n \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \Big\langle \mathcal{T}(\widetilde{B})(x,\omega), \varphi(x) \Big\rangle\, dV(x,\omega) \\ &- \int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle \varphi(x), \eta(x,\omega)\rangle\, d\Gamma(x,\omega). \end{aligned} \tag{3.17}$$

此处 $\delta V^0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_{m,n}} \langle D\varphi(x)\, P\rangle\, dV^0(x, P)$ 是无定向变分体 V^0 的一阶变分。根据引理 2.2，存在一个 $\|V\|$-可测的 Radon 概率测度族 $\{V^x\}_{x\in U}$，定义在 $\mathcal{G}_{m,n}$ 上。我们可以定义

$$H_{\widetilde{B}}(x) := \int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \mathcal{T}(\widetilde{B})(x,\omega)\, dV^x(\omega)$$

对 $\|V\|$-几乎处处的 x 均成立。由 (3.15)， $H_{\widetilde{B}}$ 是 $\|V\|$-可测的，且 $H_{\widetilde{B}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\|V\|; \mathbb{R}^n)$。利用 (3.16)，恒等式 (3.17) 遂变为

$$\delta V^0(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}}^{n} \left\langle H_{\widetilde{B}}(x), \varphi(x) \right\rangle d\|V\|(x) - \int_{\gamma} \langle \eta_V(x), \varphi(x) \rangle \, d\|\Gamma\|(x).$$

我们有如下缩放性质，另见 [KM24]。

注 3.5。 设 (V, B, Γ) 满足定义 3.1。对于每个 $\lambda > 0$，三元组 $(\lambda V, B, \lambda\Gamma)$ 也满足定义 3.1。也就是说， λV 具有相同的弱曲率场 B 和边界测度 $\lambda\Gamma$。此外，对于每个 $1 \le p < \infty$，我们有

$$\|\widetilde{B}\|_{L^p(\lambda V)} = \lambda^{1/p} \|\widetilde{B}\|_{L^p(V)}.$$

以下事实同样是标准的。

命题 3.6。 设 $(V, \widetilde{B}, \Gamma)$ 满足定义 *3.1*。则无定向变分 $V^0 = \mathbf{q}_{\#} V$ 具有局部有界的一阶变分。此外，对于 $\|V\|$-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，密度 $\Theta^m(\|V\|, x)$ 存在。若进一步存在 $a > 0$，使得对于 $\|V\|$- 几乎处处的 x 有 $\Theta^m(\|V\|, x) \ge a$，则 V^0 是一个可求 ***rectifiable*** 的 m- 变分。

证明。 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集，设 $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ 为满足 $|\varphi| \le 1$且 $\mathrm{spt}\varphi \subset K$ 的测试函数。由 (3.17) 和 (3.15)，

$$\begin{aligned} \left|\delta V^0(\varphi)\right| &\le \int_{K \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} |\mathcal{T}(\widetilde{B})(x,\omega)| \, dV(x,\omega) + \Gamma\left(\pi^{-1}(K \cap \gamma)\right) \\ &\le C \int_{K \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} |\widetilde{B}(x,\omega)| \, dV(x,\omega) + \|\Gamma\|(K \cap \gamma), \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $C = C(m, n) > 0$。由于 $\widetilde{B} \in L^1_{\mathrm{loc}}(V)$ 且 Γ 是拉东测度，右端有界。这表明 V^0 具有局部有界的一阶变分。

回忆一下， $\|V^0\| = \|V\|$，由 [Sim83，引理 40.5]可知，对于 $\|V\|$-几乎处处的 x， $\Theta^m(\|V\|, x)$ 的存在性随之成立。在附加的正下密度假设下，我们可以利用 [Sim83，定理 42.4] 推出 V^0的可整性。证明至此完成。□

命题 3.7。 设 (V, B, Γ) 满足定义 *3.1*。则有

$$\mathrm{spt}(\pi_{\#}\Gamma) \subset \mathrm{spt}\|V\|.$$

证明。 为简便起见，记开集 $U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{spt}\|V\|$。对任意 $\phi \in C^1_c(U_0 \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n))$ 使用曲率恒等式 (3.9) 进行检验，可得

$$\int \langle \phi, \eta \rangle \, d\Gamma = 0,$$

这表明，向量值拉东测度 $\eta\Gamma$ 在 $U_0 \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ 上消失。由于 η 在 G_m中为单位向量，n因此，γ，于是可得 $\pi_{\#}\Gamma(U_0) = 0$，证明完成。□

3.4. 与无向曲率变分的关系。Hut86], Hutchinson 在 [中引入了无向整变分的弱曲率概念。随后，Mantegazza [Man96] 将这一概念推广到了带边界的可整流曲率变分。相应的弱曲率恒等式对一般变分同样有意义，而无需预先假设其可整流性。现在我们将证明，定义 3.1 中的变分在遗忘定向后（即通过$\mathbf{q}$进行推前后）诱导出相应的无向曲率变分。

设 $(V,\ \widetilde{B},\ \Gamma)$ 满足定义 3.1。我们按照第 2.1.2 节进行分解：

$$V = V^s + V^{as},\quad \Gamma = \Gamma^s + \Gamma^{as},$$

使得 $V^{as} = \sigma_V V^s$ 和 $\Gamma^{as} = \sigma_\Gamma \Gamma^s$，其中 σ_V 和 σ_Γ 是由命题 2.4 得到的函数。我们在 $\mathbb{R}^n \times \mathcal{G}_{m,\ n}$ 上定义向量值拉东测度 $\mathcal{M}$，令

$$\int \langle \Psi(x,\omega), d\mathcal{M}(x,\omega)\rangle := \int \left\langle \Psi(x,\omega), D\mathbf{q}_\omega \circ \widetilde{B}(x,\omega)\right\rangle dV(x,\omega) \tag{3.19}$$

对每个 $\Psi \in C_c(\mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n);\ \mathbb{R}^{n\times n})$。于是，$\mathcal{M}$ 的对称部分和反对称部分分别为

$$\mathcal{M}^s := \frac{1}{2}\left(\mathcal{M} + \mathcal{I}_\# \mathcal{M}\right),\quad \mathcal{M}^{as} := \frac{1}{2}\left(\mathcal{M} - \mathcal{I}_\# \mathcal{M}\right). \tag{3.20}$$

由于 $\mathbf{q} \circ \mathcal{I} = \mathbf{q}$，因此有 $\mathbf{q}_\# \mathcal{M} = \mathbf{q}_\# \mathcal{M}^s$，$\mathbf{q}_\# \mathcal{M}^{as} = 0$。

现在定义 $A \in L^1_{\mathrm{loc}}\left(V^0;\ \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))\right)$ 如下：

$$AV^0 := \mathbf{q}_\#(BV), \tag{3.21}$$

其中 B 与 (3.11) 中相同。根据命题 3.3，我们有

$$A(x,P) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, T_P\mathcal{P}_{m,n}) \text{ for } V^0\text{-a.e. } (x,P).$$

另一方面，由 (1.3)，由于 η 满足 $\eta(x,\ -\omega) = -\eta(x,\ \omega)$，且函数 σ_Γ 关于 ω 也是奇函数（回忆命题 2.4），我们看到向量值函数 $\sigma_\Gamma(x,\ \omega)\eta(x,\ \omega)$ 关于 ω 为偶函数。因此，它下降为一个 Γ^0-可测函数，记作 $\widetilde{\eta}$，其定义为

$$\widetilde{\eta}\,(x, \mathbf{q}(\omega)) := \sigma_\Gamma(x,\omega)\eta(x,\omega).$$

特别地，对 Γ^0-几乎处处成立 $|\widetilde{\eta}| \le 1$。

命题 3.8。 设 $(V, \widetilde{B}, \Gamma)$ 满足定义 *3.1*。那么对于每个 $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n};\ \mathbb{R}^n)$，相应的无定向变分 $V^0 = \mathbf{q}_\# V$ 和 $\Gamma^0 = \mathbf{q}_\# \Gamma$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_{m,n}} \left(D_P\varphi \cdot A + \langle \mathrm{tr}A, \varphi\rangle + \langle D_x\varphi, P\rangle\right) dV^0 = -\int_{G_{m,n,\gamma}} \langle \varphi, \widetilde{\eta}\rangle\, d\Gamma^0, \tag{3.22}$$

其中 $G_{m,\ n,\ \gamma} := \mathbf{q}(G_{m,\ n,\ \gamma})$ 以及 $D_P\varphi \cdot A := \mathrm{tr}(D_P\varphi \circ A)$。这与 [Man96], 中的曲率恒等式一致，另见 [KM24]。

证明。令 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n};\, \mathbb{R}^n)$，并定义偶测试函数 $\phi(x,\ \omega) \colon = \varphi(x,\ \mathbf{q}(\omega))$。$\widetilde{}$根据链式法则，我们有 $D_x\phi = D_x\varphi$，同时还有 $D_\omega\phi \cdot B = D_P\varphi \cdot B$，其中涉及 φ 的项在 $(x,\ \mathbf{q}(\omega))$ 处取值。将这一 ϕ 代入 (3.9) 并使用 (3.21)，内部项于是写成

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_{m,n}} \left(D_P\varphi \cdot A + \langle \mathrm{tr} A, \varphi\rangle + \langle D_x\varphi, P\rangle\right) dV^0.$$

剩下需要考虑边界项。由于 $\Gamma = (1+\sigma_\Gamma)\Gamma^s$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle \varphi\left(x, \mathbf{q}(\omega)\right), \eta(x,\omega)\rangle \, d\Gamma(x,\omega) \\
=&\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle \varphi\left(x, \mathbf{q}(\omega)\right), \eta(x,\omega)\rangle \left(1+\sigma_\Gamma(x,\omega)\right) d\Gamma^s(x,\omega).
\end{aligned}$$

由于 Γ^s 在 $\mathcal{I}$下保持不变，而 $\eta(x,\ \omega)$ 是奇函数，$\varphi(x,\ \mathbf{q}(\omega))$ 是偶函数，因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle \varphi\left(x, \mathbf{q}(\omega)\right), \eta(x,\omega)\rangle \, d\Gamma(x,\omega) \\
=&\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle \varphi\left(x, \mathbf{q}(\omega)\right), \sigma_\Gamma(x,\omega)\eta(x,\omega)\rangle \, d\Gamma^s(x,\omega) \\
=&\int_{G_{m,n,\gamma}} \langle \varphi(x,P), \widetilde{\eta}(x,P)\rangle \, d\Gamma^0(x,P).
\end{aligned}$$

结合以上计算，我们如所需得到 (3.22)。 □

注释 3.9. 在命题 3.8 的证明中，我们只使用关于 ω 为偶函数的测试函数，这相当于在曲率恒等式 (3.9) 中忽略了定向。不过，我们注意到，(3.9) 实际上包含更多信息，因为我们可以用关于 ω 为奇函数的测试函数来检验它。我们将在下一小节详细讨论。

3.5. 奇测试函数。 我们继续使用第 3.4 节中的记号。正如注释 3.9 中所讨论的，我们希望用关于 ω 为奇函数的测试函数 $\phi(x,\ \omega)$ 来检验曲率恒等式 (3.9)。为此，设 $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_{m,\ n}$ 为任意一个开集，在该集合上存在 $\mathbf{q}$ 的光滑$\widetilde{}$提升，例如 $\ell : \mathcal{O} \to \mathcal{G}_{m,\ n}$，满足

$$\mathbf{q}(\ell(P)) = P, \quad \forall P \in \mathcal{O}.$$

此外，我们通过令以下内容来定义函数 $s \colon \ell(\mathcal{O}) \to \{-1, 1\}$

$$s(\ell(P)) = 1, \quad s(-\ell(P)) = -1. \tag{3.23}$$

对于由 $A'V^0 := \mathbf{q}\#(s\mathcal{M})$ 给出的 A'，其中 $\mathcal{M}$ 定义为 (3.19)，注意到根据 (3.20) 且 s 在 $\ell(\mathcal{O})$ 上是奇函数，可得 $A' \in L^1_{loc}(V^0; \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ T_P\mathcal{P}_{m,\ n}))$，并且

$$A'V^0 := \mathbf{q}_\#(s\mathcal{M}) = \mathbf{q}_\#(s\mathcal{M}^{as}).$$

命题 3.10。对于任意 $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n \times \mathcal{O};\ \mathbb{R}^n)$，有

$$\begin{aligned}(3.24)\qquad &\int D_P\varphi \cdot A' + \left\langle \mathrm{tr}A', \varphi \right\rangle + \sigma_V(x, \ell(P)) \left\langle D_x\varphi, P \right\rangle dV^0(x,P) \\ &= -\int_{G_{m,n,\gamma}} \langle \varphi, \eta(x, \ell(P)) \rangle \, d\Gamma^0(x,P).\end{aligned}$$

证明。设 $\phi(x,\omega) \in C^1_c(\mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$ 是一个奇测试函数，在 $\mathbb{R}^n \times \mathbf{q}^{-1}(\mathcal{O})$ 上与 $s(\omega)\varphi(x, \mathbf{q}(\omega))$ 一致，而在其他地方为零。由 (3.23) 可知，s 在 $\mathbf{q}^{-1}(\mathcal{O})$ 的连通分支上为常数，因此由 (3.11) 得，

$$D_\omega \phi \cdot \widetilde{B} = sD_P\varphi \cdot B.$$

用这样的 ϕ 测试曲率恒等式 (3.9)，可得

$$(3.25)\qquad \int sD_P\varphi \cdot B + s \left\langle \mathrm{tr}B, \varphi \right\rangle + s \left\langle D_x\varphi, \mathbf{q}(\omega) \right\rangle dV = -\int s \left\langle \varphi, \eta \right\rangle d\Gamma.$$

由于 s 在 ω 上是奇函数，我们有 $\mathbf{q}\#(sV) = \mathbf{q}\#(sV^{as}) = \mathbf{q}\#(s\sigma_V V^s)$。注意，$s\sigma_V$ 在 ω 上是偶函数，因此由 (3.23)，对 $\mathbf{q}_\# V^s$-几乎处处，它下降为 $\sigma_V(x, \ell(P))$。类似地，由于 η 在 ω 上是奇函数，我们得到 $\mathbf{q}\#(s\eta\Gamma) = \mathbf{q}\#(s\eta\Gamma^s)$；其中 $s\eta$ 在 ω 上是偶函数，并由 (3.23) 再次可知，对 $\mathbf{q}_\#\Gamma^s$-几乎处处，它下降为 $\eta(x, \ell(P))$。

将这些事实代回 (3.25)，并根据测度的推前的定义，我们得到 (3.24)。证明至此完成。□

众所周知，定向曲率变分比无向曲率变分更强，因为有许多例子满足 [Hut86, Man96] 中的定义，但不满足定义 3.1，参见例如 [DS95, 注 4.6]。

这些例子不满足定义 3.1，但仍满足 [Hut86, Man96]，因为变分的定向突然改变会违反定向曲率恒等式 (3.24)，但仍满足无向的曲率恒等式 (3.22)。为说明这一点，考虑任意一个 $(V, B, \Gamma)^\sim$，其满足定义 3.1；若 $B = 0$ 对 V-几乎处处成立，则对于任意满足 $\varphi|_\gamma = 0$ 的 φ，(3.24) 化为

$$\int \sigma_V(x, \ell(P)) \left\langle D_x\varphi, P \right\rangle dV^0(x,P) = 0.$$

特别地，假设 $V^0 = \theta\mathcal{H}^m \llcorner M_0 \otimes \delta_{P_0}$ 在 $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ 中局部成立，其中 $U_0 \cap \gamma = \emptyset$，$M$ 是仿射 m 平面 P_0 的一个连通开子集，并且 θ 在 M_0 上局部为常数，那么对于任意支集在 U_0 中的 φ，我们有

$$\int_{M_0} (1 + \sigma_V(x, \ell(P_0))) \left\langle D_x\varphi, P_0 \right\rangle d\mathcal{H}^m(x) = 0,$$

其中 $\int_{M_0} \langle D_x\varphi,\ P_0\rangle\, d\mathcal{H}^m(x)$ 可由散度定理得出。对非负测度 $(1 + \sigma_V(x,\ \ell(P_0)))\mathcal{H}^m \llcorner M_0$ 应用常值定理（引理 2.1），我们得出 $\sigma_V(x,\ \ell(P_0))$ 在 M_0 上几乎处处为常数（相对于 $\mathcal{H}^m$），这意味着定向不会突然改变。

4. The case of zero curvature

在本节中，设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个紧集。我们首先对定向变分应用引理 2.2，采用解体程序；该程序推广了 KM24 的第 3] 节中使用的方法。对于 $\omega \in \mathcal{G}_{m,\ n}$，我们令 $\mathbb{P}_\omega :=$ 张成空间(ω)，并设

$$p_\omega := \mathbf{q}(\omega), \quad p_\omega^\perp := I - p_\omega.$$

也就是说， p_ω 和 $p_\omega^\perp$ 分别是到 $\mathbb{P}_\omega$ 和 $\mathbb{P}_\omega^\perp$上的正交投影 .

设 V 是 $K \subset \mathbb{R}^n$上的一个定向 m-变差簇。根据标准解体（引理 2.2），我们有:

(1) 设 $p_2 :\ K \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n) \to \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$为到第二个因子上的投影，令

$$\nu := (p_2)_\# V.$$

存在一个 ν-可测的概率测度族$\{\mu_\omega\}_{\omega \in \widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}$，定义在 K上，使得对每个 $\phi \in C_c^0($ $\mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n))$,

$$\int_{K \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \phi(x,\omega)\, dV(x,\omega) = \int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \int_K \phi(x,\omega)\, d\mu_\omega(x) d\nu(\omega) \tag{4.1}$$

(2) 对于 ν-几乎处处的 ω，我们定义

$$\lambda_\omega := (p_\omega^\perp)_\# \mu_\omega,$$

这是定义在 $\mathbb{P}_\omega^\perp$ 上的概率测度。根据解体，存在一个 λ_ω-可测的概率测度族 $\{\mu_{\omega,z}\}_{z \in \mathbb{P}_\omega^\perp}$，使得 $\mu_{\omega,\ z}$ 支集于 $(z+\mathbb{P}_\omega) \cap K$，对 λ_ω-几乎处处的 z 成立，并且对每个 $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \varphi(x)\, d\mu_\omega(x) = \int_{\mathbb{P}_\omega^\perp} \int_{(z+\mathbb{P}_\omega)\cap K} \varphi(x)\, d\mu_{\omega,z}(x) d\lambda_\omega(z). \tag{4.2}$$

(3) 对每个 $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ 和 $\psi \in C^0(\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\ n})$，都有

$$\begin{aligned} &\int_{K \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \varphi(x)\psi(\omega)\, dV(x,\omega) \\ &= \int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \psi(\omega) \int_{\mathbb{P}_\omega^\perp} \int_{(z+\mathbb{P}_\omega)\cap K} \varphi(x)\, d\mu_{\omega,z}(x) d\lambda_\omega(z) d\nu(\omega). \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1. 具有零曲率和给定定向边界的定向曲率变分体。 设 $\gamma \subset K$ 是一个无边界的紧、连通、定向嵌入 C^1 子流形，其维数为$m-1$。继续使用上述记号，并且对于 $\omega \in \widetilde{\mathcal{G}}_{m,\ n}$, $z \in \mathbb{P}_\omega^\perp$, 为简便起见记作

$$L_{\omega,z} := z + \mathbb{P}_\omega. \tag{4.4}$$

~ ~**引理 4.1**。设 (V, B, Γ) 满足定义 *3.1*，且有 spt $\|V\| \subset K$。假设对于 V-几乎处处的 $B = 0$ 成立。则对于 ν-几乎处处的 $\omega \in \widetilde{\mathcal{G}}_{m,\,n}$ 以及 λ_ω-几乎处处的 $z \in \mathbb{P}_\omega^\perp$，有

$$\int_{L_{\omega,z}} \langle D\varphi(x), p_\omega \rangle \, d\mu_{\omega,z}(x) = 0 \tag{4.5}$$

对于每 个 $\varphi \in C_c^1$（$\mathbb{R}^n$；$\mathbb{R}^n$）满足以下两个条件之一：$\varphi = 0$ 在 γ 上，或 φ（x）$\in T_x\gamma$ 对于每个 $x \in \gamma$. 个

证明。 设 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 满足陈述中的两个条件之一，并令 $\psi \in C_c^1(\Lambda_m(\mathbb{R}^n))$。在 (3.9) 中取 $\phi(x,\ \omega) := \varphi(x)\psi(\omega)$ 作为测试函数，并利用 $\widetilde{B} = 0$，可得

$$\int_{K\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \psi(\omega) \, \langle D\varphi(x), p_\omega \rangle \, dV(x,\omega) = -\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \psi(\omega) \, \langle \varphi(x), \eta(x,\omega) \rangle \, d\Gamma(x,\omega).$$

若 $\varphi = 0$ 在 γ 上，则右端为零。若 $\varphi(x) \in T_x\gamma$ 在 γ 上，则右端同样为零，因为 $\sim\eta(x,\ \omega) \perp T_x\gamma$ 对于每个 $(x,\ \omega) \in G_{m,\ n,\ \gamma}$。因此在这两种情况下，我们都有

$$\int_{K\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \psi(\omega) \, \langle D\varphi(x), p_\omega \rangle \, dV(x,\omega) = 0.$$

由 (4.1)，从而得到

$$\int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \psi(\omega) \int_K \langle D\varphi(x), p_\omega \rangle \, d\mu_\omega(x) d\nu(\omega) = 0.$$

由于 ψ 是任意的，因此对 ν-几乎处处的 ω，

$$\int_K \langle D\varphi(x), p_\omega \rangle \, d\mu_\omega(x) = 0. \tag{4.6}$$

与 [KM24，引理 3.2]，中一样，通过使用测试向量场的可数稠密族，我们看到 ω 的零测集可选取为与 φ 无关，并且我们固定这样一个 ω。

令 $h \in C_c^1(\mathbb{P}_\omega^\perp)$，注意到

$$D_\tau[h(p_\omega^\perp x)] = Dh(p_\omega^\perp x)[p_\omega^\perp \tau] = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{P}_\omega,$$

因此

$$\Big\langle D\big[h(p_\omega^\perp x)\varphi(x)\big], p_\omega \Big\rangle = h(p_\omega^\perp x) \, \langle D\varphi(x), p_\omega \rangle \, .$$

在 (4.6) 中用 $h(p_\omega^\perp x)\varphi(x)$ 替换 $\varphi(x)$，再利用 (4.2)，我们得到

$$\int_{\mathbb{P}_\omega^\perp} h(z) \underbrace{\int_{L_{\omega,z}} \langle D\varphi(x), p_\omega \rangle \, d\mu_{\omega,z}(x)}_{:=\mathcal{I}_1} \, d\lambda_\omega(z) = 0.$$

由于 h是任意的，对于 λ_ω-几乎处处的 z，内积分 $\mathcal{I}_1$ 为零。如上所述进行论证，我们看到 z 的零测集与 φ无关，证明完毕。□

引理 4.2。 在引理 *4.1* 的假设下，对于 ν-几乎处处的 $\omega \in \mathcal{G}_{m,\ n}$ 以及 λ_ω-几乎处处的$z \in \mathbb{P}_\omega^\perp$，以下结论成立。对于$L_\omega$的 $\mathscr{U}$的每个连通分支 $\mathscr{U}$，其中 $L_{\omega,\ z}$ 由(4.4)给出，存在一个常数 $\theta_{\mathscr{U}} \geq 0$，使得

$$\mu_{\omega,z} \llcorner \mathscr{U} = \theta_{\mathscr{U}} \mathcal{H}^m \llcorner \mathscr{U}. \tag{4.7}$$

证明。 设 $\mathscr{U}$是 $L_{\omega,z} \setminus \gamma$的一个连通分支，并设 $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$是 $\mathbb{P}_\omega$的一个标准正交基。对于 $f \in C_c^\infty(\mathscr{U})$ 和 $a \in \{1, \dots, m\}$，我们将向量场 $f\hat{e}_a$ 从 $L_{\omega,z}$ 延拓为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个紧支集向量场 C^1 vector field φ，其支集与 γ不相交。根据构造，我们有

$$\langle D\varphi(x), p_\omega \rangle = D_{\hat{e}_a} f(x) \quad \text{on } L_{\omega,z}.$$

回到 (4.5)，我们得到

$$\int_{\mathscr{U}} D_{\hat{e}_a} f(x)\, d\mu_{\omega,z}(x) = 0$$

对每个 $a = 1, \dots, m$均成立。因此，常值定理（引理 2.1）推出 (4.7)，并完成证明。□

4.1.1. 二分性结果。 以下拓扑二分性将对我们的目的有所帮助。

命题 4.3。 设 $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ 是一个紧、连通、定向的嵌入子流形，其维数为 $m-1$，且无边界；设 $L \subset \mathbb{R}^n$ 是一个仿射 m-平面。那么，以下两种情况恰有一种成立：

(1) $\gamma \subset L$; *(2)* $L \setminus \gamma$ 是连通且无界的。

特别地，若 $\gamma \subset L$，则 $L \setminus \gamma$ 恰有一个有界连通分支，另一个连通分支无界。

证明。 若 $\gamma \subset L$，则结论由 Jordan–Brouwer 定理得出，因此只需证明 (2)。我们假设 $\gamma \not\subset L$，然后用反证法，假设 $L \setminus \gamma$不连通。

首先注意到，由于 γ 是紧的，存在 $R > 0$ 使得 $\gamma \subset B_R(0)$。现在由$m \geq 2$，集合 $L \setminus B_R(0)$ 是连通的，这意味着 $L \setminus \gamma$ 有唯一的无界连通分支。同时，假设它是不连通的，因此它必有一个非空的有界连通分支，记为 Ω。

断言。Ω 在 L 中的相对边界，记为 $\partial_L\Omega$，满足

$$\partial_L \Omega \subset \gamma \cap L.$$

事实上，若 $x \in \partial_L\Omega$ 且 $x \notin \gamma$，则 x 在 L 中的一个充分小邻域包含于 $L\setminus\gamma$，也就是说，x 必为 $L\setminus\gamma$的某个连通分支的内部点，这与$x \in \partial_L\Omega$矛盾。由于 γ是一个维数为 $m-1$ 的紧 C^1子流形，我们有 $\mathcal{H}^{m-1}(\gamma) < \infty$。因此 $\mathcal{H}^{m-1}(\partial_L\Omega) < \infty$，故 Ω 是 L中的有限周长集合。

为继续讨论，我们将 L 与 $\mathbb{R}^m$ 认同，并在 L上固定一个定向；接着令 $[\![\Omega]\!]$ 为由 Ω 诱导的m维流，其定向由 L诱导。由于 Ω 是一个

L中的有限周长集，我们看到 $T:=\partial[\![\Omega]\!]$ 是一个满足$\partial T=0$ 且$m-1$的整（$m-1$）流

$$\mathrm{spt}T\subset\partial_L\Omega\subset\gamma\cap L.$$

由于 γ 是连通的、定向的且没有边界，根据常值定理（参见 [Sim83，定理 26.27]）应用于 γ 可得：存在某个 $k\in\mathbb{Z}$，使得

$$T=k[\![\gamma]\!].$$

另一方面，由于 $\mathrm{spt}T\subset L$，如果 $k\neq 0$，则有 $\mathrm{spt}T=\mathrm{spt}[\![\gamma]\!]=\gamma$，从而 $\gamma\subset L$，这与假设矛盾。因此必有 $k=0$，从而 $T=\partial[\![\Omega]\!]=0$。也就是说，$D_L\chi_\Omega=0$。由于 L 是连通的，这意味着 χ_Ω 在 L 上几乎处处为常数；但这是不可能的，因为按照构造，Ω 是 L 的一个非空有界开子集。因此，我们得出 $L\setminus\gamma$ 是连通的。

最后，回顾 $\gamma\cap L\subset B_R(0)\cap L$，从而 $L\setminus B_R(0)\subset L\setminus\gamma$，因此 $L\setminus\gamma$ 是无界的。这说明了第二种情形，并完成了证明。□

定义 4.4 ($(m,\ \gamma)$-切片)。 设 $L\subset\mathbb{R}^n$ 为一个仿射 m-平面。$L\setminus\gamma$的一个连通分支称为 L中的一个 m-切片 。

若 Δ 有界，则称 m-切片 $\Delta\subset L$ 为一个（$m,\ \gamma$）-切片 。我们用 $\mathscr{S}_{m,\ \gamma}(L)$ 表示 L中所有（$m,\ \gamma$）-切片的集合。

由命题 4.3 可知，除非 $\gamma\subset L$，否则有$\mathscr{S}_{m,\ \gamma}(L)=\emptyset$。若 $\gamma\subset L$，则 $\mathscr{S}_{m,\ \gamma}(L)$由 $L\setminus\gamma$的唯一有界连通分支构成，其边界为 γ。

4.1.2. 结构定理。

定理 4.5。设 $\gamma\subset K\subset\mathbb{R}^n$ 是一个紧、连通、定向的嵌入子$\tilde{}$流形，其维数为 $m-1$，且无边界。设 (V,B,Γ) 满足定义 *3.1*，且$\tilde{}\mathrm{spt}\|V\|\subset K$。假设对 V-几乎处处的点，都有 $B=0$。那么，对 ν-几乎处处的 ω 以及 λ_ω-几乎处处的 z，存在常数 $\theta_{\omega,\ z,\ \Delta}\geq 0$，使得对任意 $\Delta\in\mathscr{S}_{m,\ \gamma}(L_{\omega,\ z})$，

$$\mu_{\omega,z}=\sum_{\Delta\in\mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})}\theta_{\omega,z,\Delta}\mathcal{H}^m\llcorner\Delta, \tag{4.8}$$

并且对于任意测试函数 $\phi\in C_c^0(\mathbb{R}^n\times\Lambda_m(\mathbb{R}^n))$，有

$$V(\phi)=\int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}\int_{\mathbb{P}_\omega^\perp}\sum_{\Delta\in\mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})}\theta_{\omega,z,\Delta}\int_\Delta\phi(x,\omega)\,d\mathcal{H}^m(x)d\lambda_\omega(z)d\nu(\omega). \tag{4.9}$$

证明。我们固定避开引理 4.2 中的零测集的 ω 和 z，于是可知，在 $L_{\omega,z}\setminus\gamma$ 的任意连通分支 $\mathscr{U}$ 上，都存在 $\theta_{\mathscr{U}}\geq 0$ 使得

$$\mu_{\omega,z}\llcorner\mathscr{U}=\theta_{\mathscr{U}}\mathcal{H}^m\llcorner\mathscr{U}.$$

情形 *1.* $\gamma\not\subset L_{\omega,z}$。

根据命题 4.3，$L_{\omega,z}\setminus\gamma$ 是连通且无界的。由于 γ 是紧的，这个连通分支具有无限的 $\mathcal{H}^m$-测度。由于 $\mu_{\omega,z}$ 是概率测度，它在 $L_{\omega,z}\setminus\gamma$ 上的重数必为零。因此我们得出

$$\mu_{\omega,z}\llcorner(L_{\omega,z}\setminus\gamma)=0.$$

情形 2. $\gamma\subset L_{\omega,z}$。

在此情形下，再次由命题 4.3 可知，$L_{\omega,z}\setminus\gamma$ 由唯一的有界连通分支 $\Delta\in\mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})$ 和唯一的无界连通分支组成。无界连通分支的 $\mathcal{H}^m$-测度为无穷，因此 $\mu_{\omega,z}$ 在其上的重数为零。在 Δ 上，我们写作

$$\mu_{\omega,z}\llcorner\Delta=\theta_{\omega,z,\Delta}\mathcal{H}^m\llcorner\Delta,$$

并注意到 $\partial\Delta=\gamma$。

为继续讨论，我们定义 $\widetilde{V}:=V\llcorner\Big((\mathbb{R}^n\setminus\gamma)\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}\Big)$。由 (4.1)、(4.2) 及上述结论可知，对于每个紧支集连续 ϕ，有

$$\widetilde{V}(\phi)=\int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}\int_{\mathbb{P}^\perp_\omega}\sum_{\Delta\in\mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})}\theta_{\omega,z,\Delta}\int_\Delta\phi(x,\omega)\,d\mathcal{H}^m(x)d\lambda_\omega(z)d\nu(\omega)\tag{4.10}$$

还需证明 V 在 $\gamma\times\mathcal{G}_{m,n}$ 上的质量为零。为此，我们令

$$\Lambda:=V-\widetilde{V}=V\llcorner\Big(\gamma\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}\Big).$$

显然，Λ 是一个非负拉东测度。由于 γ 是 C^1 且紧的，我们知道映射 $x\to\mathrm{proj}_{N_x\gamma}$ 在 γ 上连续，且

$$|\mathrm{proj}_{N_x\gamma}(y-x)|=o(|y-x|)$$

对 $x,\ y\in\gamma$ 一致成立。因此，我们可以使用 C^1-Whitney 延拓定理（参见 [Mag12，第 15.2] 节）得到一个函数 $\varphi\in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$，使得 $\varphi=0$ 在 γ 上成立，并且

$$D\varphi(x)=\mathrm{proj}_{N_x\gamma},\quad\forall x\in\gamma.\tag{4.11}$$

现在，令 $\chi\in C^1_c(\Lambda_m(\mathbb{R}^n))$ 为一个截断函数，该函数在 $\widetilde{\mathcal{G}}_{m,\,n}$ 的邻域内满足 $\equiv1$。由于 $B=0$，且 $\varphi=0$ 在 γ 上成立，用 $\phi(x,\ \omega):=\chi(\omega)\varphi(x)$ 检验曲率恒等式 (3.9)，可得

$$\int_{K\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}\langle D\varphi(x),p_\omega\rangle\,dV(x,\omega)=0.\tag{4.12}$$

另一方面，利用 (4.10) 可得

$$\begin{aligned}&\int_{K\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}\langle D\varphi(x),p_\omega\rangle\,d\widetilde{V}(x,\omega)\\=&\int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}\int_{\mathbb{P}^\perp_\omega}\sum_{\Delta\in\mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})}\theta_{\omega,z,\Delta}\int_\Delta\mathrm{div}_{L_{\omega,z}}\varphi\,d\mathcal{H}^m d\lambda_\omega(z)d\nu(\omega)\\=&0,\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中，在最后一个等式中，我们使用了散度定理，以及以下事实： $\partial\Delta = \gamma$ 和 $\varphi = 0$在 γ 上。

将式 (4.13) 从式 (4.12) 中减去，我们得到

$$\int_{\gamma\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \langle D\varphi(x), p_\omega\rangle \, d\Lambda(x,\omega) = 0.$$

还要注意，对于 $x \in \gamma$，由式 (4.11) 可得

$$\langle D\varphi(x), p_\omega\rangle = \operatorname{tr}\big(p_\omega(\mathrm{Id} - \mathrm{proj}_{T_x\gamma})\big) = m - \operatorname{tr}(p_\omega \mathrm{proj}_{T_x\gamma}) \geq m - (m-1) = 1.$$

由于 Λ 非负，因此可得 $\Lambda = 0$，进而得到 $V = \widetilde{V}$，这就证明了式 (4.8)。 $\Lambda = 0$ (4.9) 随即由式 (4.3) 得出。证明完毕。 □

对于每个 $\Delta \in \mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})$，我们将 $\eta^{\mathrm{in}}_\Delta(x)$ 记为仿射平面 $L_{\omega,z}$ 内相对于 $\gamma = \partial\Delta$ 的指向内侧的单位余法向量。

推论 4.6。 在定理 *4.5* 的假设和记号下，边界测度 Γ 的特征如下：对于每个 $\phi \in C^0_c(\mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n))$，

$$\Gamma(\phi) = \int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \int_{\mathbb{P}^\perp_\omega} \sum_{\Delta\in\mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})} \theta_{\omega,z,\Delta} \int_\gamma \big\langle \eta^{\mathrm{in}}_\Delta(x), \eta(x,\omega)\big\rangle \, \phi(x,\omega)\, d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\lambda_\omega(z) d\nu(\omega).$$

证明。 令 $\phi \in C^0_c(\mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n))$. 由于 $\widetilde{G}_{m,\,n,\,\gamma}$ 是紧的，且 η 在 $\widetilde{G}_{m,\,n,\,\gamma}$上连续，由标准逼近论证可知，存在 $\widetilde{\phi}_j \in C^1_c(\mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$ 使得

$$\widetilde{\phi}_j \to \phi\eta \text{ uniformly on } \widetilde{G}_{m,n,\gamma} \text{ as } j \to \infty. \tag{4.14}$$

利用曲率恒等式 (3.9)、 $B = 0$以及 (4.9)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \Big\langle \widetilde{\phi}_j(x,\omega), \eta(x,\omega)\Big\rangle \, d\Gamma(x,\omega)\\
&= -\int_{K\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \Big\langle D_x\widetilde{\phi}_j(x,\omega), p_\omega\Big\rangle \, dV(x,\omega)\\
&= -\int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \int_{\mathbb{P}^\perp_\omega} \sum_{\Delta\in\mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})} \theta_{\omega,z,\Delta} \int_\Delta \mathrm{div}_{L_{\omega,z}} \widetilde{\phi}_j(x,\omega)\, d\mathcal{H}^m(x) d\lambda_\omega(z) d\nu(\omega)\\
&= \int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} \int_{\mathbb{P}^\perp_\omega} \sum_{\Delta\in\mathscr{S}_{m,\gamma}(L_{\omega,z})} \theta_{\omega,z,\Delta} \int_\gamma \Big\langle \widetilde{\phi}_j(x,\omega), \eta^{\mathrm{in}}_\Delta(x)\Big\rangle \, d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\lambda_\omega(z) d\nu(\omega).
\end{aligned}$$

令 $j \to \infty$，由 (4.14) 以及 η 为单位的事实，我们得出证明 f. □

5. Compactness and existence of minimizers

设 (V, B, Γ) 满足定义 3.1。为简洁起见，我们将 $V \in \mathbf{CV}_{m,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathbb{M}(V) := \|V\|(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{M}(\Gamma) = \|\Gamma\|(\mathbb{R}^n)$ 记作总质量。对于 $1 \leq p < \infty$，我们定义

$$\mathcal{E}_p(V, \widetilde{B}) := \int_{\mathbb{R}^n\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} |\widetilde{B}(x,\omega)|^p \, dV(x,\omega).$$

5.1. **紧性**。

引理 5.1。 对于每个 $p \in [1,\infty)$，都存在一个正常数 $C = C(m,n,p,\gamma)$，使得每个 $V \in \mathbf{CV}_{m,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ 都满足

$$\mathbb{M}(\Gamma) \le C\left(\mathbb{M}(V) + \mathcal{E}_p(V,\widetilde{B})\right). \tag{5.1}$$

此外，若支集 $\|V\| \subset K$ 包含在某个紧 $K \subset \mathbb{R}^n$ 中，则对每个 $p \in [1,\infty)$，都存在正常数 $C_K = C_K(m,n,p,\gamma,K)$ 使得

$$\mathbb{M}(V) \le C_K\left(\mathbb{M}(\Gamma) + \mathcal{E}_p(V,\widetilde{B})\right). \tag{5.2}$$

~ ~证明。 由于 $G_{m,n,\gamma}$ 是紧的，且 η 在 $G_{m,n,\gamma}$上连续，由标准逼近可得，存在一个紧支撑的 C^1-映射 $\widehat{\eta}\colon \mathbb{R}^n \times \Lambda_m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ 使得

$$|\widehat{\eta} - \eta| \le \frac{1}{2} \quad \text{on } \widetilde{G}_{m,n,\gamma}, \quad \|\widehat{\eta}\|_{C^1} \le C(m,n,\gamma).$$

令 $\mathcal{U}_1(\gamma) := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,\gamma) < 1\}$，令 $\ell \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ 为一个支集包含于 $\mathcal{U}_1(\gamma)$ 的标准截断函数，使得在 γ 的某个邻域上 $0 \le \ell \le 1, \ell = 1$，并且 $|D\ell| \le C(\gamma)$。

由于 η 是单位的，且 $\ell = 1$ 位于 γ上，我们有

$$\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle \phi, \eta \rangle \, d\Gamma \ge \frac{1}{2}\mathbb{M}(\Gamma).$$

用 $\phi(x,\omega) := \ell(x)\widehat{\eta}(x,\omega)$ 检验 (3.9)，并利用 (3.15)，得到

$$\mathbb{M}(\Gamma) \le C(m,n,\gamma)\left(V\left(\mathcal{U}_1(\gamma) \times \widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}\right) + \int_{\mathcal{U}_1(\gamma)\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}} |\widetilde{B}(x,\omega)| \, dV(x,\omega)\right).$$

对于 $1 \le p < \infty$，由于对任意 $t \ge 0$，我们都有逐点不等式 $t \le 1 + t^p$，因此 (5.1) 成立。

接下来证明 (5.2)。设 $\chi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ 满足：在 $K \cup \gamma$的某个邻域内有 $\chi = 1$，并用 $\phi(x,\omega) := \chi(x)x$ 检验曲率恒等式 (3.9)。注意到 $D_x\phi = \mathrm{Id}$ 且 $D_\omega\phi = 0$ 在 $\operatorname{spt}\|V\|$ 上，因此得到

$$m\mathbb{M}(V) = -\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}} \langle x, \eta(x,\omega)\rangle \, d\Gamma(x,\omega) - \int \left\langle \mathcal{T}(\widetilde{B})(x,\omega), x \right\rangle dV(x,\omega),$$

其中我们用到了 (3.14) 和 $\langle \mathrm{Id}, \mathbf{q}(\omega)\rangle = \operatorname{trq}(\omega) = m$。由 (3.15)，我们推得

$$m\mathbb{M}(V) \le C_K\mathbb{M}(\Gamma) + C_K\int |\widetilde{B}| \, dV. \tag{5.3}$$

对于 $p = 1$，这直接证明了该断言。对于 $p > 1$，在必要时增大 $C_K = C_K(m,\ n,\ p,\ \gamma,\ K)$ 后，由杨氏不等式可得

$$C_K|\widetilde{B}| \le \frac{m}{2} + \tilde{C}_K|\widetilde{B}|^p.$$

对 V 进行积分，我们得到质量项 $\frac{m}{2}\mathbb{M}(V)$，该项可以吸收到 (5.3) 的左端，因此 (5.2) 得证。□

命题 5.2。设 $p\in(1,\ \infty)$。对于每个 $j\in\mathbb{N}$，令 $(V_j、\ \widetilde{B}^j、\ \Gamma_j)$ 满足定义 *3.1*，并假设 $\sup_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{M}(V_j)\ <\infty$。若

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{E}_p(V_j,\widetilde{B}^j)\le\Lambda<\infty.$$

~那么，取一个子序列后，存在满足定义 *3.1* 的 $(V、\ B、\ \Gamma)$，使得 $V_j\overset{*}{\rightharpoonup}V$ 作为定向变分收敛，$\Gamma_j\overset{*}{\rightharpoonup}\Gamma$ 作为定义于 $\widetilde{G}_{m、\ n、\ \gamma}$上的拉东测度收敛，并且

$$\mathcal{E}_p(V,\widetilde{B})\le\liminf_{j\to\infty}\mathcal{E}_p(V_j,\widetilde{B}^j). \tag{5.4}$$

证明。根据引理 5.1及假设，有 $\sup_j\mathbb{M}(\Gamma_j)\ <\infty$。由拉东测度的紧性，取一个子序列后，对于某个定向~变分 V 以及定义于 $G_{m、\ n、\ \gamma}$上的拉东测度 Γ，有 $V_j\overset{*}{\rightharpoonup}V$ 和 $\Gamma_j\overset{*}{\rightharpoonup}\Gamma$ 。

~我们将 B 视为取值于 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \Lambda_m(\mathbb{R}^n))$ 的函数，进而定义向量值拉东测度 $\mathcal{B}_j:=\widetilde{B}^jV_j$。由 H¨older 不等式，

$$|\mathcal{B}_j|\left(\mathbb{R}^n\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}\right)\le\mathcal{E}_p(V_j,\widetilde{B}^j)^{1/p}\mathbb{M}(V_j)^{1-1/p}.$$

因此，$\mathcal{B}_j$ 的全变差一致有界；再取一个子序列后，$\mathcal{B}_j\overset{*}{\rightharpoonup}\mathcal{B}$ 对某个取值于 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \Lambda_m(\mathbb{R}^n))$ 的向量值拉东测度 $\mathcal{B}$ 成立。

由所谓的测度-函数对 的标准紧性结果（参见 [Hut86，第 4] 节），可知，对于某个 $B\in L^p(V;(\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \Lambda_m(\mathbb{R}^n))),\ \mathcal{B}=BV$成立，且 (5.4) 成立。此外，对于任意固定的测试函数 $\phi\in C^1_c(\mathbb{R}^n\times\Lambda_m(\mathbb{R}^n);\mathbb{R}^n)$，每个 $(V_j,\ B_j,\ \Gamma_j)$ 对应的 (3.9) 中的内部项~均收敛；由于 η 连续，边界项也收敛。令 $j\to\infty$，于是得到

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}}\left(D_\omega\phi\cdot\widetilde{B}+\left\langle\mathcal{T}(\widetilde{B}),\phi\right\rangle+\langle D_x\phi,\mathbf{q}(\omega)\rangle\right)dV=-\int_{\widetilde{G}_{m,n,\gamma}}\langle\phi,\eta\rangle\,d\Gamma,$$

~这表明（$V,\ B,\ \Gamma$）满足定义 3.1，从而完成证明。 □

5.2. **紧性的推论**。

5.2.1. 曲率能量的极小化。我们考虑以下两个极小化问题。

定义 5.3。对于 $p\in(1,\ \infty$，定义

$$\kappa^p_{m,\gamma}:=\inf\left\{\mathcal{E}_p(V,\widetilde{B}):V\in\widetilde{\mathbf{CV}}_{m,\gamma}(\mathbb{R}^n),\mathbb{M}(V)=1\right\}.$$

定义 5.4。对于紧域 $K\subset\mathbb{R}^n$ 和 $p\in(1,\ \infty)$，定义

$$\kappa^p_{m,\gamma,K}:=\inf\left\{\mathcal{E}_p(V,\widetilde{B}):V\in\widetilde{\mathbf{CV}}_{m,\gamma}(\mathbb{R}^n),\mathbb{M}(V)=1,\mathrm{spt}\|V\|\subset K\right\}.$$

注记 5.5。 定义 5.3 和 5.4 中的可容许类非空。事实上，包含于 $\mathbb{R}^n$ (或 K) 中的一个圆 m-球面诱导出一个边界为 $\Gamma = 0$ 的定向曲率变分体，随后可将其质量归一化为 1，从而得到这些可容许类中的所需元素。

命题 5.6. 对于任意 $p \in (1, \infty)$，有

$$\kappa^p_{m,\gamma} = 0.$$

证明.设 $\Sigma_r := \mathbb{S}^m_r \subset \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^n$ 是半径为 r的圆球， V_r 是与之关联且经 $\mathbb{M}(V_r) = 1$ 归一化的定向变分。Σ_r 的第二基本形式 A 满足 $|A| = \sqrt[]{m}{r}$ 。另注意，根据 (3.6) 和注 3.5， V_r, $\widetilde{\quad\quad}$ 的曲率场（记作 B_r）满足 $|B_r| = |A|$。因此，对于任意 $p \in (1, \infty)$,

$$\mathcal{E}_p(V_r, \widetilde{B}_r) = m^{p/2} r^{-p}.$$

令 $r \to \infty$ 即可证明该断言。 □

命题 5.7. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为一个紧域，且 $p \in (1, \infty)$，则下确界$\kappa^p_{m,\gamma,K}$ 有限且可取到。

证明. 设 $\{(V_j, \widetilde{B}^j, \Gamma_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为一个极小化序列。根据定义，

$$\mathbb{M}(V_j) = 1, \quad \mathrm{spt}\|V_j\| \subset K, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

曲率能量一致有界，因此由 5.1 可得 $\widetilde{\ }\mathbb{M}(\Gamma_j)$一致有界。由命题 5.2，我们得到一个满足定义 3.1 的子序列极限三元组 (V, B, Γ)。由于每个 V_j 都支撑在 K中，我们还有

$$\mathbb{M}(V) = 1, \quad \mathrm{spt}\|V\| \subset K.$$

由 (5.4) 可知，下确界由 (V, B, Γ) 取到，由此完成证明 f. □

5.2.2. 能量下界。

命题 5.8. 设连通子流形 γ 不包含于任何仿射m-平面中。则对于任意满足 $\gamma \subset K$ 的紧 $K \subset \mathbb{R}^n$ ，以及每个 $p \in (1, \infty)$,

$$\kappa^p_{m,\gamma,K} > 0.$$

证明。 我们用反证法，假设满足定义 3.1 的三元组 $(V_j, \widetilde{B}^j, \Gamma_j)$ 序列满足 $\mathbb{M}(V_j) = 1$，spt $\|V_j\| \subset K$，但是

$$\mathcal{E}_p(V_j, \widetilde{B}^j) \to 0 \text{ as } j \to \infty.$$

根据命题 5.2，我们得到一个满足定义3.1 的子序列极限三元组 (V, B, Γ)，其中 $\mathbb{M}(V) = 1$、$\mathrm{spt}\|V\| \subset K$，且 $B = 0$ 对 V-几乎处处成立。然而，这与结构定理（定理 4.5）矛盾，因为 γ 不包含在任何仿射 m-平面中。证明至此完成。□

6. Mass and topology bounds for immersions

如定义 3.1 之前的光滑计算所示，每个 $\Sigma \in \mathbf{S}^m(\gamma)$ 都诱导出一个满足定义 3.1 的三元组 $(V,\ B,\ \Gamma)$，并且由 (3.6) 可得 $|B| = |A|$，其中 A 是该浸入的第二基本形式。

6.1. 任意维数和余维下的质量界。

~~

~定理 *1.1* 的证明。令 (V, B, Γ) 表示由 $\Sigma \in \mathbf{S}^m(\gamma)$ 诱导的三元组。设 $V := \frac{1}{|\Sigma|} V$, $\widetilde{\Gamma} := \frac{1}{|\Sigma|}\Gamma$，使得 $\mathbb{M}(\widetilde{V}) = 1$，并且 $(\widetilde{V}, \widetilde{B}, \widetilde{\Gamma})$ 满足定义 3.1，这得益于注记~3.5。根据假设，存在紧集 $K = K(\gamma, R) \subset \mathbb{R}^n$，使得对每个 $j \in \mathbb{N}$，都有 $\operatorname{spt}\|V_j\| \subset K$。由此可得

$$\kappa^p_{m,\gamma,K} \le \mathcal{E}_p(\widetilde{V}, \widetilde{B}) \le \frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma |A|^p \, d\mathcal{H}^m,$$

这证明了 $|\Sigma|$ 上的界。再结合 (5.1)，证明即告完成。 □

6.2. 曲面的质量与拓扑界。 在本小节中，设 $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ 是一条紧、连通、定向的嵌入 C^1-曲线，并设 $\Sigma \in \mathbf{S}^2(\gamma)$，其浸入由 $F\colon \Sigma \to \mathbb{R}^n$ 给出，边界浸入记为 $\beta := F|_{\partial\Sigma}$。我们将

$$\partial\Sigma = S_1 \cup \cdots \cup S_b$$

表示为连通边界分支的不交并。由于 γ 连通且 β 是保定向局部微分同胚，每个限制映射 $\beta_a := \beta|_{S_a}\colon S_a \to \gamma$ 都是有限保定向覆盖。若令

$$d_a := \deg \beta_a \in \mathbb{N}$$

并将边界覆盖总重数定义为

$$N(\beta) := \sum_{a=1}^{b} d_a,$$

则有

$$|\partial\Sigma| = N(\beta)\mathcal{H}^1(\gamma), \tag{6.1}$$

并且 $b \le N(\beta)$。

对于 $N_0 \in \mathbb{N}$，我们考虑 $\mathbf{S}^2(\gamma)$ 的以下子类：

$$\mathbf{S}^2_{N_0}(\gamma) := \left\{\Sigma \in \mathbf{S}^2(\gamma) : \Sigma \text{ is connected and } N(\beta) \le N_0\right\}.$$

下面的估计是 Simon 单调性公式的直接推论，我们将其记录在附录 A 中。

引理 6.1. 设 $N_0 \in \mathbb{N}$，且 $\Sigma \in \mathbf{S}^2_{N_0}(\gamma)$。若

$$\int_\Sigma |A|^2 \, d\mathcal{H}^2 < 8\pi - \delta \tag{6.2}$$

对某个 $\delta \in (0,\ 8\pi)$成立。则

$$\sup_{x\in F(\Sigma)} \operatorname{dist}(x,\gamma) \le \frac{4N_0\mathcal{H}^1(\gamma)}{\delta}, \tag{6.3}$$

并且存在 $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\gamma、\ \delta、\ N_0)<\infty$，使得 $F(\Sigma)\subset B_{\mathcal{R}}(\overline{0})$。

证明。令 $x_0\in F(\Sigma)\setminus\gamma$。则 x_0在 F下有一个内部原像，且 $\Theta(F,\ x_0)\ge 1$。根据推论 A.2，有

$$\pi \le \frac{1}{16}\int_\Sigma |H|^2\,d\mathcal{H}^2 + \frac{|\partial\Sigma|}{2\operatorname{dist}(x_0,\gamma).} \tag{6.4}$$

由于 $|H|^2\le 2|A|^2$，由此 (6.2) 给出

$$\frac{1}{16}\int_\Sigma |H|^2\,d\mathcal{H}^2 < \pi - \frac{\delta}{8}.$$

利用 (6.1) 以及 (6.4) 中的 $N(\beta)\le N_0$，我们因此得到

$$\frac{\delta}{8} < \frac{N_0\mathcal{H}^1(\gamma)}{2\operatorname{dist}(x_0,\gamma)},$$

这证明了 (6.3)。最后一个断言显然成立，从而证明完毕 . □

定义 6.2。 对于 $\delta\in(0,\ 8\pi)$ 和 $N_0\in\mathbb{N}$，定义 $\mathcal{S}_2^{N_0,\ \gamma}$ 中具有较小临界能量的子类:

$$\mathcal{F}_{\gamma,\delta,N_0} := \left\{\Sigma\in\mathbf{S}^2_{N_0}(\gamma) : \int_\Sigma |A|^2\,d\mathcal{H}^2 < 8\pi-\delta\right\}.$$

对于 $p\in(1,\ \infty)$，我们考虑极小化问题

$$\mathfrak{h}^p_{\gamma,\delta,N_0} := \inf\left\{\frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma |A|^p\,d\mathcal{H}^2 : \Sigma\in\mathcal{F}_{\gamma,\delta,N_0}\right\}.$$

命题 6.3。 假设 γ 不包含于任何仿射 2-平面中。那么，对于每个$p\in(1,\ \infty)$、 $\delta\in(0,\ 8\pi)$ 和 $N_0\in\mathbb{N}$，如果 $\mathcal{F}_{\gamma,\ \delta,\ N_0}\neq\emptyset$，则

$$\mathfrak{h}^p_{\gamma,\delta,N_0}>0,$$

并且每个 $\Sigma\in\mathcal{F}_{\gamma,\ \delta,\ N_0}$ 都满足

$$|\Sigma| \le \frac{1}{\mathfrak{h}^p_{\gamma,\delta,N_0}}\int_\Sigma |A|^p\,d\mathcal{H}^2.$$

证明。 由引理 6.1，存在 $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\gamma,\delta,N_0)$，使得对每个 $\Sigma\in\mathcal{F}_{\gamma,\delta,N_0}$， $F(\Sigma)$ 都支撑于 $B_{\mathcal{R}}(0)$ 中。令 (V,B,Γ) 表示由 Σ 诱导的三元组，并定义归一化的定向变分和边界测度如下

$$\widetilde{V} := \frac{1}{|\Sigma|}V,\quad \widetilde{\Gamma} := \frac{1}{|\Sigma|}\Gamma.$$

Th $\widetilde{\quad\quad\quad

因为 Σ 是二维的。此外，在 $\partial\Sigma$ 上，

$$|\kappa_g| \le |D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma| \circ F.$$

由于 β 是 γ 的覆盖映射，我们得到

$$\int_{\partial\Sigma} |\kappa_g|\, d\mathcal{H}^1 \le N(\beta) \int_\gamma |D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma|\, d\mathcal{H}^1 \le N_0 \int_\gamma |D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma|\, d\mathcal{H}^1.$$

回到 (6.8)，我们得到

$$2\pi|\chi(\Sigma)| \le \frac{1}{2}\int_\sigma |A|^2\, d\mathcal{H}^2 + N_0 \int_\gamma |D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma|\, d\mathcal{H}^1.$$

利用 (6.7) 可知 $g(\Sigma) = (2 - \chi(\Sigma) - b)/2 \le 1 + |\chi(\Sigma)|/2$，从而得到

$$g(\Sigma) \le C(\gamma, N_0)\left(1 + \int_\Sigma |A|^2\, d\mathcal{H}^2\right), \tag{6.10}$$

这就证明了 $p = 2$ 情形下的 (6.5)。对于 $p > 2$，H¨older 不等式给出

$$\int_\Sigma |A|^2\, d\mathcal{H}^2 \le \left(\int_\Sigma |A|^p\, d\mathcal{H}^2\right)^{2/p} |\Sigma|^{1-2/p}. \tag{6.11}$$

在条件 (1) 下，我们可以应用定理 1.1 得到

$$|\Sigma| \le C\int_\Sigma |A|^p\, d\mathcal{H}^2.$$

在条件 (2) 下，同样的估计可由命题 6.3 得出。在这两种情形下，回到 (6.11)，我们从而得到

$$\int_\Sigma |A|^2\, d\mathcal{H}^2 \le C\int_\Sigma |A|^p\, d\mathcal{H}^2.$$

结合（6.10），因此得证（6.5）。

现在考虑 γ 包含于一个仿射二维平面中的情形。为证明（6.6），我们反设（6.6）不成立。于是存在一个序列 $\Sigma_j \in \mathbf{S}^2_{N_0}(\gamma)$（其中浸入映射 $F_j\colon \Sigma_j \to \mathbb{R}^n$），满足与陈述中相同的约束，但有

$$\frac{\displaystyle\int_{\Sigma_j} |A|^2\, d\mathcal{H}^2 + 2\pi\,|2 - 2g(\Sigma_j) - b(\Sigma_j)|}{|\Sigma_j|} \to 0. \tag{6.12}$$

在条件 (1) 下，所有 $F_j(\Sigma_j)$ 都包含于 K 中。在条件 (2) 下，借助引理 6.1，我们同样可以找到这样的紧集 K。因此，在这两种情况下，都存在一个紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，使得

$$F_j(\Sigma_j) \subset K \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

~令 $(V_j,\ B_j,\ \Gamma_j)$ 表示由 Σ_j 诱导的三元组，并将归一化定向变分和边界测度定义为

$$\widetilde{V}_j := \frac{1}{|\Sigma_j|} V_j, \quad \widetilde{\Gamma}_j := \frac{1}{|\Sigma_j|}\Gamma_j.$$

~然后 $\mathbb{M}(V_j) = 1$，并且

$$\mathcal{E}_2(\widetilde{V}_j, \widetilde{B}_j) \le \frac{1}{|\Sigma_j|}\int_{\Sigma_j} |A|^2 \, d\mathcal{H}^2 \to 0.$$

~根据命题 5.2，经过取一个子序列，存在 V 和 Γ，使得 $V_j \to V$ 作为定向变分，$\widetilde{\Gamma}_j \overset{*}{\rightharpoonup} \Gamma$，并且 $(V,\ 0,\ \Gamma)$ 满足定义 3.1。此外，我们有 $\mathbb{M}(V) = 1$ 以及 $\mathrm{spt}\|V\| \subset K$。

~为继续进行，我们在 $G_{1,\ 2,\ \gamma}$ 上定义函数

$$\mathfrak{k}_\gamma(x,\omega) := \left\langle D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma(x), \eta(x,\omega)\right\rangle,$$

^然后考虑一个紧支连续延拓 $\mathfrak{k}_\gamma :\ \mathbb{R}^n \times \Lambda_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$，它是 $\mathfrak{k}_\gamma$ 的延拓。由于 $\partial\Sigma$ 是 γ 的定向覆盖，我们有

$$\widetilde{\Gamma}_j\left(\widehat{\mathfrak{k}}_\gamma\right) = \frac{1}{|\Sigma_j|}\int_{\partial\Sigma_j} \kappa_g \, d\mathcal{H}^2.$$

由 (6.8)、(6.9) 和 (6.12)，我们得到

$$\left|\widetilde{\Gamma}_j\left(\widehat{\mathfrak{k}}_\gamma\right)\right| \le \frac{2\pi\,|2-2g(\Sigma_j)-b(\Sigma_j)|}{|\Sigma_j|} + \frac{1}{2|\Sigma_j|}\int_{\Sigma_j}|A|^2\,d\mathcal{H}^2 \to 0,$$

这意味着

$$\Gamma\left(\widehat{\mathfrak{k}}_\gamma\right) = 0. \tag{6.13}$$

令 L 为包含 γ 的仿射二维平面，并令 Δ 为 $L\setminus\gamma$ 的唯一有界连通分支。对零曲率变分簇 V 应用定理 4.5，若设

$$W := \int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{2,n}}\int_{\mathbb{P}^\perp_\omega}\sum_{\Delta'\in\mathscr{S}_{2,\gamma}(L_{\omega,z})}\theta_{\omega,z,\Delta'}\,d\lambda_\omega(z)\,d\nu(\omega),$$

则由 (4.9) 可得

$$1 = \mathbb{M}(V) = W\mathcal{H}^2(\Delta),$$

从而 $W = \mathcal{H}^2\llcorner(\Delta)^{-1} > 0$。

另一方面，使用推论 4.6 和测试函数 $\mathfrak{k}_\gamma$，我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\widehat{\mathfrak{k}}_\gamma\right) = \int_{\widetilde{\mathcal{G}}_{2,n}}\int_{\mathbb{P}^\perp_\omega}\sum_{\Delta'\in\mathscr{S}_{2,\gamma}(L_{\omega,z})}\theta_{\omega,z,\Delta'}\\ \cdot\int_\gamma \left\langle \eta^{\mathrm{in}}_\Delta(x),\eta(x,\omega)\right\rangle\left\langle D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma(x),\eta(x,\omega)\right\rangle d\mathcal{H}^1(x)\,d\lambda_\omega(z)\,d\nu(\omega).\end{aligned}$$

注意到，$\eta_{\Delta}^{\mathrm{in}}(x)$ 和 $\eta(x,\ \omega)$ 都是一维空间 $L\cap\left(T_x\gamma^{\perp}\right)$ 中的单位向量，因此 $\eta(x,\ \omega)$ $=\pm\eta_{\Delta}^{\mathrm{in}}(x)$，从而

$$\left\langle \eta_{\Delta}^{\mathrm{in}}, \eta(x,\omega)\right\rangle \left\langle D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma, \eta(x,\omega)\right\rangle = \left\langle D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma, \eta_{\Delta}^{\mathrm{in}}\right\rangle .$$

根据霍普夫转数定理，

$$\int_{\gamma}\left\langle D_{\tau_\gamma}\tau_\gamma, \eta_{\Delta}^{\mathrm{in}}\right\rangle \, d\mathcal{H}^1 = 2\pi,$$

由此可得

$$\Gamma\left(\widehat{\mathfrak{k}}_{\gamma}\right) = 2\pi W = \frac{2\pi}{\mathcal{H}^2(\Delta)} > 0,$$

这与 (6.13) 矛盾，并完成了证明。 □

7. Exstence of minimizers of the boundary value problem with obstacle

7.1. 积分定向变分数。在 [Hut86]，中引入了所谓积分定向变分数的概念，现简要回顾如下。

定义 7.1. 给定一个定义在 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的定向 m-变分 V。若存在一个 U 中的 m-可求 rectifiable 集 $\mathcal{R}$、一个可测的定向选择 $\widetilde{\ }$，定向为 $\xi\colon \mathcal{R}\to G(m,n)$，使得对于 $\mathcal{H}^m$-几乎处处的 $x\in\mathcal{R}$，$\xi(x)\in G(m,n)$ 是与近似切空间 $T_x\mathcal{R}$ 相关联的两个单位简单 m-向量之一；并且存在一对 (θ_1,θ_2)，它们是定义在 $\mathcal{R}$ 上的局部可积 $\mathbb{N}$-值函数，且对于 $\mathcal{H}^m$-几乎处处的 $x\in\mathcal{R}$，$(\theta_1,\theta_2)\neq(0,0)$，从而 V 在 $\phi\in C_c^0(U\times\Lambda_m(\mathbb{R}^n))$ 上的作用如下：

$$V(\phi) = \int_{\mathcal{R}}\theta_1(x)\phi(x,\xi(x)) + \theta_2(x)\phi(x,-\xi(x))\, d\mathcal{H}^m(x).$$

即，$V=\mathcal{H}^m\llcorner\mathcal{R}\otimes\left(\theta_1(x)\delta_{\xi(x)}+\theta_2(x)\delta_{-\xi(x)}\right)$。为简便起见，我们记 $V=\mathbf{v}(\mathcal{R},\ \xi,\ \theta_1,\ \theta_2)$。

对于 U 中任意定向的 m-变分 V，与之对应的 m-流 $\mathbf{c}(V)$ 通过其对任意具有紧支集且支集位于 U 中的 m-形式 α 的作用定义如下：

$$\mathbf{c}(V)(\alpha) = \int\langle\omega,\alpha(x)\rangle\, dV(x,\omega). \tag{7.1}$$

特别地，对于 $V=\mathbf{v}(\mathcal{R},\ \xi,\ \theta_1,\ \theta_2)$，我们可以明确写成

$$\mathbf{c}(V)(\alpha) = \int_{\mathcal{R}}(\theta_1(x)-\theta_2(x))\,\langle\xi(x),\alpha(x)\rangle\, d\mathcal{H}^m(x),$$

这与 Hutchinson 在 [Hut86，第 50] 页中提出的诱导流概念一致。

我们将使用 Hutchinson 在 [Hut86，定理 3.1] 中关于定向整变分簇的以下著名紧性定理。

定理 7.2。设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是一个紧集。设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 K 上的定向整数 m-变分，使得

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\|\mathbf{q}_{\#}V_j\|(K)+\|\delta(\mathbf{q}_{\#}V_j)\|(K)+\|(\partial\mathbf{c}(V_j))\|(K)\right\}<\infty.$$

那么存在一个 K 上的定向整数 m-变分 V，使得 V_j 作为定向变分子列收敛于该变分。

7.2. 障碍边值问题的极小化子。 为在给定边界条件下极小化L^p-曲率能量，我们尤其关注 $\mathbf{CV}_{m,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ 的整数可求 rectifiable 子类，即$\mathbf{ICV}_{m,\gamma}(\mathbb{R}^n)$；其元素满足：$V \in \mathbf{CV}_{m,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 V 整数定向 m-变分流形。

我们首先利用曲率恒等式 (3.9) 来估计诱导流$\mathbf{c}(V)$ 的边界质量。

引理 7.3。 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为一个紧集。设(V, B, Γ) 满足定义 *3.1*，且 V为整数，并假设$\mathrm{spt}\|V\| \subset K$，则

$$\|(\partial \mathbf{c}(V))\|(K) \le C(m,n) \int |\widetilde{B}|\, dV + \mathbb{M}(\Gamma). \tag{7.2}$$

证明。 对任意在 $\mathbb{R}^n$上光滑且紧支撑的$(m-1)$-形式 α，根据定义有

$$\partial \mathbf{c}(V)(\alpha) = \mathbf{c}(V)(d\alpha) \overset{(7.1)}{=} \int \langle \omega, d\alpha(x) \rangle \, dV(x,\omega). \tag{7.3}$$

现在我们任取一个光滑截断函数 $\chi \in C_c^\infty(\Lambda_m(\mathbb{R}^n))$，使其在 $\mathcal{G}_{m,n}$ 附近恒等于 1，并通过令其为 Φ_α 来定义一个紧支撑测试函数

$$\langle \Phi_\alpha(x,\omega), v \rangle := \chi(\omega) \, \langle \iota_v \omega, \alpha(x) \rangle \,, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{7.4}$$

固定任意一个 $(x,\omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{G}_{m,n}$，我们可以在局部写成 $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$，其中 $e_1, \cdots, e_m$是正交归一的，并计算得

$$\begin{aligned} \langle D_x \Phi_\alpha, \mathbf{q}(\omega) \rangle &= \left\langle D_x \Phi_\alpha, \sum_{i=1}^m e_i \otimes e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle D_{e_i} \Phi_\alpha, e_i \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \iota_{e_i} \omega, D_{e_i} \alpha \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} (D_{e_i} \alpha)(e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_m) = d\alpha(e_1, \cdots, e_m) = \langle \omega, d\alpha \rangle \,, \end{aligned}$$

其中我们利用了 $\iota_{e_i}\omega = (-1)^{i-1} e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i} \wedge \cdots \wedge e_m$ 这一事实。将其代回 (7.3)，再利用曲率恒等式 (3.9)，我们得到

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{c}(V)(\alpha) &= \int \langle D_x \Phi_\alpha, \mathbf{q}(\omega) \rangle \, dV \\ &= - \int \Big(D_\omega \Phi_\alpha \cdot \widetilde{B} + \Big\langle \mathcal{T}(\widetilde{B}), \Phi_\alpha \Big\rangle \Big) \, dV - \int \langle \Phi_\alpha, \eta \rangle \, d\Gamma. \end{aligned}$$

现在，对每个 $(x,\ \omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{G}_{m,\ n}$ 以及每个 $\xi \in \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$，沿 $\omega + t\xi$ 对 (7.4) 关于 t 求导，可得

$$D_\omega \Phi_\alpha(x,\omega)[\xi] = \sum_{i=1}^n \langle \iota_{e_i} \xi, \alpha(x) \rangle \, e_i,$$

其中我们将 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 扩展为 $\mathbb{R}^n$ 的一个正交归一基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$。因此不难看出

$$|\Phi_\alpha|+|D_\omega\Phi_\alpha|\le C(m,n)|\alpha(x)|,\quad \forall(x,\omega)\in\mathbb{R}^n\times\widetilde{\mathcal{G}}_{m,n}.$$

考虑到 $|\mathcal{T}(B)|\le C(m,n)|B|$，我们推得

$$|\partial\mathbf{c}(V)(\alpha)|\le C(m,n)\|\alpha\|_{C^0}\left(\int|\widetilde{B}|\,dV+\mathbb{M}(\Gamma)\right),$$

由此得到所需的估计 (7.2)。 □

定理 *1.2* 的证明。 设 (V_j,B_j,Γ_j) 满足定义 3.1，且 V_j 积分是 (1.5) 的一个极小化序列。

由于 $\mathbb{M}(\Gamma_j)=k\mathcal{H}^{m-1}(\gamma)$，由 (5.2) 可得

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\|V_j\|(\overline{B_R(0)})\right\}<\infty.$$

由 Hölder 不等式，对于该极小化序列，有

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\int|\widetilde{B}_j|\,dV_j\right\}\le\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\left(\int|\widetilde{B}_j|^p\,dV_j\right)^{1/p}\|V_j\|(\overline{B_R(0)})^{1-1/p}\right\}<\infty.$$

由 (3.18) 和 (7.2)，我们还得到

$$\begin{aligned}&\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\|\delta(\mathbf{q}_\#V_j)\|(\overline{B_R(0)})+\|\partial\mathbf{c}(V_j)\|(\overline{B_R(0)})\right\}\\ \le&C(m,n)\sup_j\left\{\int|\widetilde{B}_j|\,dV_j\right\}+2k\mathcal{H}^{m-1}(\gamma)<\infty.\end{aligned}$$

因此，我们可以应用积分紧致性定理 7.2 以及命题 5.2，得到一个子列极限（仍以 $j\in\mathbb{N}$ 为指标）$(V,\ B,\ \Gamma)$，满足定义 3.1，其中 V 为整数，使得 $V_j\to V$ 作为变分收敛，$\Gamma_j\to\Gamma$ 作为拉东测度收敛，且 $\mathrm{spt}\|V\|\subset B_R(0)$，$\pi_\#\Gamma=k\mathcal{H}^{m-1}\llcorner\gamma$，以及

$$\int|\widetilde{B}|^p\,dV\le\liminf_{j\to\infty}\int|\widetilde{B}_j|^p\,dV_j=\beta^p_{k,R}(\gamma).$$

由于极限变分 V 属于 (1.5) 中的同一类，因此我们得出 $\beta^p_{k,R}(\gamma)$ 可以取到。

最后，如果 $\beta^p_{k,R}(\gamma)=0$ 将满足 m 平面中对 V 上子变换成立。由定理 4.5 可知必有 $V=0$，因此根据命题 3.7，必有 $\pi_\#\Gamma=0$。然而，这与 $\pi_\#\Gamma=k\mathcal{H}^{m-1}\llcorner\gamma\neq0$ 矛盾，因此 $\beta^p_{k,R}(\gamma)>0$。证明完毕。 □

Appendix A. Simon's monotonicity formula for immersed surfaces with boundary

设 $F\colon\ \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个紧的、定向的、 C^1 浸入的带非空边界的曲面，并且在 C^2 内部。令 H 表示平均曲率向量，令 η表示沿着 $\partial\Sigma$指向内侧的单位余法向量。根据切向散度定理，对于任意 $X \in C^1(\Sigma;\ \mathbb{R}^n)$,

$$\int_\Sigma \operatorname{div} X \, d\mathcal{H}^2 = -\int_\Sigma \langle H, X\rangle \, d\mathcal{H}^2 - \int_{\partial\Sigma} \langle \eta, X\rangle \, d\mathcal{H}^1. \tag{A.1}$$

固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Sigma)$，为简单起见，我们采用以下记号。对于 $y \in \Sigma$，令$r(y) := |F(y) - x_0|$，对于 $\rho > 0$，定义

$$\Sigma_\rho(x_0) := \{y \in \Sigma : r(y) < \rho\}.$$

我们还将密度函数定义为

$$\Theta(F, x_0) := \#F^{-1}(\{x_0\}) = \lim_{\rho \searrow 0} \frac{|\Sigma_\rho(x_0)|}{\pi\rho^2}.$$

以下 Simon 型单调性公式为专家所熟知，参见 [Sim93, KS04], 和 [NP20] 中涉及边界项的版本。

命题 A.1. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Sigma)$，对于 $\rho > 0$，定义

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{x_0}(\rho) :=& \frac{|\Sigma_\rho(x_0)|}{\rho^2} + \frac{1}{16}\int_{\Sigma_\rho(x_0)} |H|^2 \, d\mathcal{H}^2 \\ &+ \frac{1}{2\rho^2}\int_{\Sigma_\rho(x_0)} \langle H, F(y) - x_0\rangle \, d\mathcal{H}^2(y) \\ &- \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma\cap\Sigma_\rho(x_0)} \left(\frac{1}{|F(y)-x_0|^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) \langle F(y) - x_0, \eta\rangle \, d\mathcal{H}^1(y).\end{aligned}$$

于是 $\mathfrak{g}_{x_0}$ 是非递减的。事实上，对于每个 $0 < \rho_1 < \rho_2$,

$$\mathfrak{g}_{x_0}(\rho_1) + \int_{\Sigma_{\rho_2}(x_0)\setminus\Sigma_{\rho_1}(x_0)} \left|\frac{H}{4} + \frac{(F(y)-x_0)^\perp}{|F(y)-x_0|^2}\right|^2 d\mathcal{H}^2(y) = \mathfrak{g}_{x_0}(\rho_2). \tag{A.2}$$

这里 $(F(\cdot) - x_0)^\perp$ 表示将 $F(\cdot) - x_0$ 正交投影到浸入的法空间上所得的投影。

证明概要。 用形如 $X(y) = \zeta(r(y))\,(F(y) - x_0)$ 的径向向量场检验 (A.1)，其中 ζ 是一个截断函数，即可得到结论。□

推论 A.2。设 $x_0 \in F(\Sigma \setminus \partial\Sigma) \setminus F(\partial\Sigma)$。则

$$\begin{aligned}&\pi\Theta(F, x_0) + \int_\Sigma \left|\frac{H}{4} + \frac{(F-x_0)^\perp}{|F-x_0|^2}\right|^2 d\mathcal{H}^2 \\ =& \frac{1}{16}\int_\Sigma |H|^2 \, d\mathcal{H}^2 - \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma} \frac{\langle F(y) - x_0, \eta\rangle}{|F(y)-x_0|^2} \, d\mathcal{H}^1(y).\end{aligned} \tag{A.3}$$

因此，

$$\pi\Theta(F,x_0)\le\frac{1}{16}\int_\Sigma|H|^2\,d\mathcal{H}^2+\frac{|\partial\Sigma|}{2\mathrm{dist}\,(x_0,F(\partial\Sigma))}. \tag{A.4}$$

证明。令 $\rho_1\searrow 0$ 和 $\rho_2\to\infty$ 见（A.2）。由于 x_0 不包含在边界像中，当 ρ_1 足够小时，边界项为零。由于该浸入远离边界是 C^2，显然有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{|\Sigma_\rho(x_0)|}{\rho^2}=\pi\Theta(F,x_0),$$

当 $\rho\to 0$ 时，其余各项趋于零。

由于 Σ 是紧的，当 $\rho\to\infty$ 时，面积比项以及（A.2）中包含 ρ^{-2} 的项趋于零，而边界项收敛于

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma}\frac{\langle F(y)-x_0,\eta\rangle}{|F(y)-x_0|^2}\,d\mathcal{H}^1(y).$$

这就证明了（A.3）。注意，$\left|\frac{\langle F(y)-x_0,\eta\rangle}{|F(y)-x_0|^2}\right|\le\frac{1}{\text{距离}(x_0,F(\partial\Sigma))}$，（A.4）随即成立。 □

References

[AGS08] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, 第二版, 苏黎世联邦理工学院数学讲义, Birkhäuser Verlag, 巴塞尔, 2008 年, MR 2401600[Bel23] Costante Bellettini, *Hypersurfaces with mean curvature prescribed by an ambient function: compactness results* **285** 2023 10, 110125, 30 , 《J. Funct. Anal.》（），第 篇论文。4629747 MR[25] *An area bound for surfaces in Riemannian manifolds*BK Victor Bangert 和 Ernst Kuwert, ，《J. Dif- ferential Geom.》 **129** 2025 1, 65 113 4856592（），第 – 期。MR DS S. Delladio 和 G. [95] Scianna, *Oriented and nonoriented curvature varifolds*, 《Proc. Roy. Soc. Edin- burgh Sect. A》 **125** 1995 1, 63 83 1318623（），第 – 期。MR Hut John E. Hutchinson, [86] *Second fundamental form for varifolds and the existence of surfaces minimising curvature* **35** 1986 1, 45 71 825628 , 《Indiana Univ. Math. J.》（），第 – 期。MR[KLL15] Ernst Kuwert、Tobias Lamm 和 Yuxiang Li, *Two-dimensional curvature functionals with superquadratic growth* **17** 2015 12, 3081 3111 , 《J. Eur. Math. Soc. (JEMS)》（），第 – 期。MR[24] 3429160 *Curvature varifolds with orthogonal boundary* KM Ernst Kuwert 和 Marius Muller, , 《J. Lond. Math. Soc. (2 **110** 2024 3, 12976 4787572)》（），第 e 号论文。MR KS Ernst Kuwert 和 Reiner Schatzle, [04] *Removability of point singularities of Willmore surfaces*, 《Ann. of Math. (2)》**160**（2004），第 1 期，315–357。MR 2119722[Mag12] Francesco Maggi, *Sets of finite perimeter and geometric variational problems*, 《剑桥高等数学研究丛书》第 135 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2012 年，《几何测度论导论》。MR[96] 2976521 Man Carlo Mantegazza, *Curvature varifolds with boundary* **43** 1996 4, , 《J. Differential Geom.》（），第 – 期。MR[Mon14] Andrea Mondino, 807 843 1412686 *Existence of integral m-varifolds minimizing $\int|A|^p$ and $\int|H|^p$ $p>m$ in , , ,* 《《变分法与偏微分方程》》（），*Riemannian manifolds* **49** 2014 1 2, 431 470 第 - – 期。MR 3148123[NP20] Matteo Novaga 和 Marco Pozzetta, *Connected surfaces with boundary minimizing the Willmore energy* **2** 2020 3, 527 556 4141858 , 《Math. Eng.》（），第 – 期。MR

[Poz21] Marco Pozzetta, *On the Plateau-Douglas problem for the Willmore energy of surfaces with planar boundary curves* **27** 2021 2, 35 4222150 , 《ESAIM Control Optim. Calc. Var.》（），论文编号 S 。MR[Sim83] Leon Simon, *Lectures on geometric measure theory*, 《澳大利亚国立大学数学分析中心论文集》第 3 卷，澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1983 756417 。MR Sim , *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, [93]《Comm. Anal. Geom.》**1**（1993），第 2, 281 326 1243525 – 期。MR WZ Guofang Wang 和 Xuwen Zhang, [25] *Varifolds with capillary boundary*, 2025 年，arXiv: 2503.19052 [Zha26] Xuwen Zhang, *Compactness of capillary hypersurfaces with mean curvature prescribed by ambient functions* **313** 2026 4, 74, 23 5101659 , 《Math. Z.》（），第 篇论文。MR

（E.K） Mathematisches Institut, Universität Freiburg, Ernst-Zermelo-Str.1, 79104, Freiburg, Germany*Email address*: ernst.kuwert@math.uni-freiburg.de

(X.Z) Mathematisches Institut, Universität Freiburg, Ernst-Zermelo-Str.1, 79104,Freiburg, Germany*Email address*: xuwen.zhang@math.uni-freiburg.de