2026年11月24日草稿版本 使用LA
TEXtwocolumnstyleinAASTeX631排版

arXiv:2611.32978v1 [astro-ph.SR] 24 Nov 2026

使用基于波模拟的灵敏度核对经向流进行多频率子午流反演：核、方法和合成数据验证

THOMAS HARTLEP [1, 2] JUNWEI ZHAO [3]

[1]湾区环境研究所，美国加利福尼亚州莫菲特机场，*94035* [2]*NASA*艾姆斯研究中心，美国加利福尼亚州莫菲特机场，*94035* [3]*W.W. Hansen*实验物理实验室，斯坦福大学，美国加利福尼亚州斯坦福，*94305-4085*

摘要

测量太阳经向环流对于理解磁通量和角动量如何在太阳内部重新分布至关重要。尽管时距日震学一直是探测这些内部流动的主要工具，但现有方法通常依赖宽带传播时间测量，将波场的频率依赖性压缩为每种测量几何对应的单一数值。这种方法忽视了不同时间频率以不同方式探测太阳内部这一事实，因而可能限制我们解析复杂的随深度变化的流动结构的能力。在本文中，我们提出了一种利用频率相关的传播时间偏移进行经向环流反演的框架，并使用直接从全球尺度三维波传播模拟中推导出的相应灵敏度核。

我们分析了水平流和径向流的敏感性，并指出，较高的时间频率可提供更高的空间分辨率；但在实际应用中，3 毫赫兹太阳振荡峰值以上频率的传播时间测量值具有较低的信噪比，因此需要进行权衡。利用迭代正则化最小二乘求解器，我们证明，该方法能够成功恢复复杂环流模型的诸多特征，同时对现实模拟中的随机噪声保持稳健。我们考察了不同正则化算子对反演的影响，并通过施加质量守恒等约束来改善反演结果。

关键词：日震学(709)；流体力学模拟 (767)；太阳内部(1500)；太阳振荡(1515)；太阳经向环流 (1874)；计算方法(1965)

1. 引言

时间—距离日震学是探测太阳内部流动和波速扰动的主要工具之一
通过测量太阳表面位置对之间的声学传播时间扰动（Duvall等，1993年）。通常，根据两个点测得的多普勒速度（或强度）信号计算互协方差，并采用Gabor小波拟合（例如，Kosovichev与Duvall，1997年；Giles等，1997年）或相位偏移法（例如，Gizon与Birch，2002年；Chen与Zhao，2018年）估算声学传播时间。随后通过正向建模和反演来解释这些测量值：传播时间扰动与地下扰动之间的关系由灵敏度核描述，这些核通过射线近似计算（例如，Kosovichev1996；Zhao等，2001年），或通过Born近似计算；后者考虑了有限波长效应和波模物理（Gizon ˇ与Birch 2002；Birch等，2004年；Svanda等，2011年；B¨oning等，2016年）。最近，通过将全球尺度波场模拟与局部流动扰动相结合，Hartlep与Zhao（2021）提出了一种推导全球尺度流灵敏度核的新方法。这些核显式依赖于声学频率，这或可为太阳深层经向环流的反演策略开辟新途径，并纳入频率相关的传播时间偏移。

测量太阳的经向环流是日震学的核心目标，因为经向流在输运磁通量和重新分配太阳自转角动量方面发挥着重要作用（Miesch2005）。早期时间—距离研究证实了近表层存在向极流，并利用南北向传播时间差探究其随时间的变化（例如，Giles等，1997年；Zhao & Kosovichev 2004），推动了基于有限频率核并改进观测效应处理方法的反演日益精进。后续研究利用来自SOHO/MDI（Scherrer et al. 1995）以及后来的SDO/HMI（Scherrer et al. 2012；Schou etal. 2012）的长时间序列数据，约束对流区内的流动，包括寻找向赤道回流以及探究

通讯作者：Thomas Hartlephartlep@baeri.org

可能存在的多胞结构（例如，Zhao et al.2013；Kholikov et al. 2014；Jackiewiczet al. 2015；Rajaguru & An-tia2015；Chen & Zhao 2017；Lin & Chou 2018；Liang et al.2018）。

长期以来，一个难题是如何从系统效应中分离出相对微弱的经向流信号，这些系统效应包括中心至边缘效应（Zhao 等，2012年；Baldner 和 Schou，2012年；Chen 和 Zhao，2018年）、磁污染（Liang 和 Chou，2015年；Chen 和 Zhao，2017年）、缩短效应（Zhao 等，2016年），以及不同仪器造成的测量差异（Gizon 等，2020年；Braun 等，2021年）。这些效应可能与深层流预期的传播时间特征相当，甚至更强，因此需要改进校准策略、采用经验修正，并开展能够更好地捕捉测量过程的正向建模。尽管本文并未直接探讨这些观测或数据分析中的系统误差，但本文提出的框架提供了另一种反演方法，有望帮助缓解上述一个或多个问题。

几乎所有以往针对经向环流的时距反演都有一个显著的共同点：反演输入由宽频带传播时间偏移组成。对于每种测量几何（例如距离、环带、象限），通过在宽频率带上拟合互协方差，获得一个传播时间扰动（或一小组传播时间定义）。相应的灵敏度核针对同一定义计算，从而建立标量传播时间偏移与次表层流之间的积分关系。尽管这种方法功能强大，但它将波场的频率依赖性压缩成每种几何对应的单一数值。因此，它并未直接利用不同时间频率（进而不同模态成分）对太阳内部进行不同取样这一事实，也无法提供关于太阳内部动力学的完整信息。

在一篇较早的论文中，Hartlep & Zhao （2021）推导了全球尺度流的频率依赖的灵敏度核。本文提出了一个利用频率相关传播时间测量和改进后的灵敏度核进行经向环流反演的框架，并采用两阶段方法验证分析流程：首先使用正演模型进行测试，然后使用波场模拟产生的合成测量进行测试。这种受控验证确保我们的多频率框架在应用于真实太阳数据之前具有稳健性；而真实太阳数据仍受到显著系统效应的干扰，例如尚未得到充分理解的中心至边缘变化。

本文其余部分安排如下。第2节介绍灵敏度核。第3 节介绍经向环流模型和波场模拟。第4节展示频率依赖的测量值和反演过程。第5节讨论基于合成测量的反演，第6节总结全文并给出结论。

2. 改进的灵敏度核

日震学灵敏度核将太阳表面测得的旅行时间扰动与次表层流及波速扰动联系起来。传统的灵敏度核计算依赖射线近似或Hartlep& Zhao （2021），我们提出了一种基于数值波传播模拟的替代方法，可直接从中推断出频率依赖的灵敏度核。在此，我们展示这些灵敏度核的改进版本，并将该方法扩展至径向流。

本文沿用 Hartlep 和 Zhao（2021）的模拟和测量值，但以显著提高的径向分辨率和精度重新计算了灵敏度核。此前，为了节省计算成本并降低内存需求，我们采用的径向分辨率大致与水平分辨率相同。这一分辨率低于波场模拟所采用的分辨率；为了分辨太阳中强烈的径向梯度，波场模拟需要更高的径向分辨率。本文展示的新核计算采用波传播模拟中的完整径向分辨率。这使待求解线性系统的规模大幅增加。例如，对于传播距离为 $21^\circ.6$ 的水平核，线性系统的规模为 $15,599,528 \times 10,301,424$，而 Hartlep 和 Zhao （ 2021 ）采用的分辨率对应的规模为 $2,390,444 \times 2,243,052$。只有利用问题的稀疏性，并有意通过忽略与低于某一阈值的流幅值相关的矩阵元素来进一步提高稀疏度，才有可能存储和求解如此大的矩阵。Hartlep 和 Zhao（2021）采用的阈值比例为最大扰动速度的 10^{-3}，而本文的计算采用更低的阈值 10^{-4}，从而保留更多非零矩阵元素。我们采用稀疏矩阵存储，并使用 Python 库 SciPy（Virtanen 等，2020）提供的稀疏迭代最小二乘求解器 LSQR（Paige & Saunders（1982））。

在新的计算中，我们还修订了正则化的形式。在先前的工作（Hartlep& Zhao 2021）中，正则化通过最小化其平方模的体积分（并针对空间离散化进行适当加权）来惩罚核的整体幅度。这种方法会抑制各处的较大值，但只能间接地保证平滑性。在当前的公式中，我们改为通过应用基于拉普拉斯算子的正则化算子来惩罚空间曲率，并使用四阶有限差分进行离散化。该方法直接约束核的二阶空间变化，从而得到更平滑的解，同时避免对幅度进行不必要的阻尼。

正则化的强度由一个标量参数 γ 控制。随着 γ 减小，残差最初下降，达到一个明显的最小值，随后又开始增加，因为此时解开始补偿线性化和离散化所产生的误差。因此，我们将该最小值处的参数取为最优正则化参数。需要指出的是，这种行为不同于更为熟悉的 L曲线

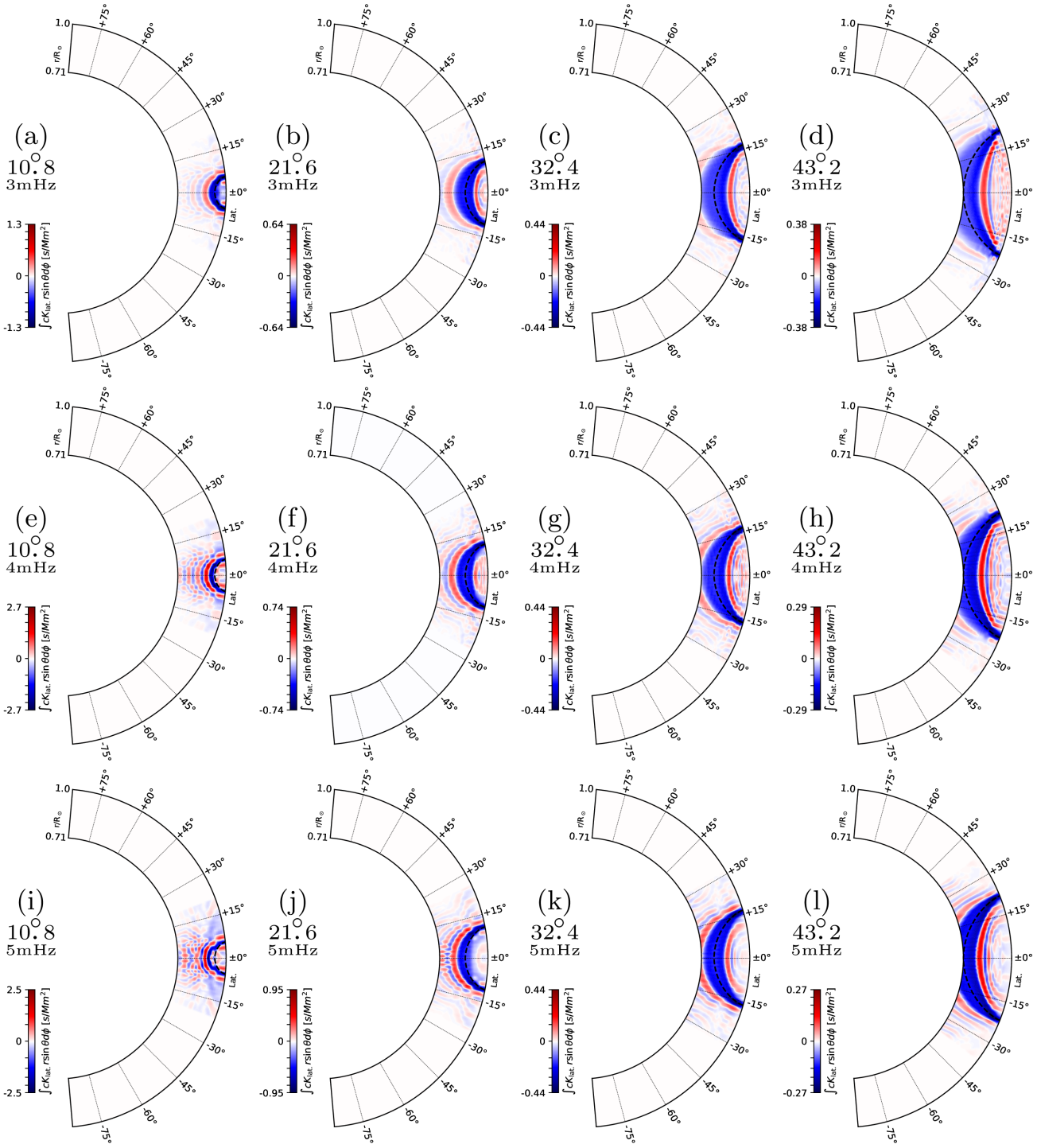

图1。 南北向波传播时间差对纬向流的方位角积分灵敏度核。图中所示为不同中心频率 $\nu = 3$、4 和 5 毫赫兹（从上到下）以及传播距离 $d = 10.^{\circ}8$、 $21.^{\circ}6$、 $32.^{\circ}4$ 和 $43.^{\circ}2$ （从左到右）对应的结果。每个面板中的虚线表示射线近似下的波传播路径。所示核以赤道为中心，对应于在 $\pm d/2$处对称纬度之间测得的传播时间差。图示核 $K_{\rm lat}$ 已乘以局部声速 c，以便更清晰地显示更深层内部的核，因为其振幅会随深度增加而显著减小。

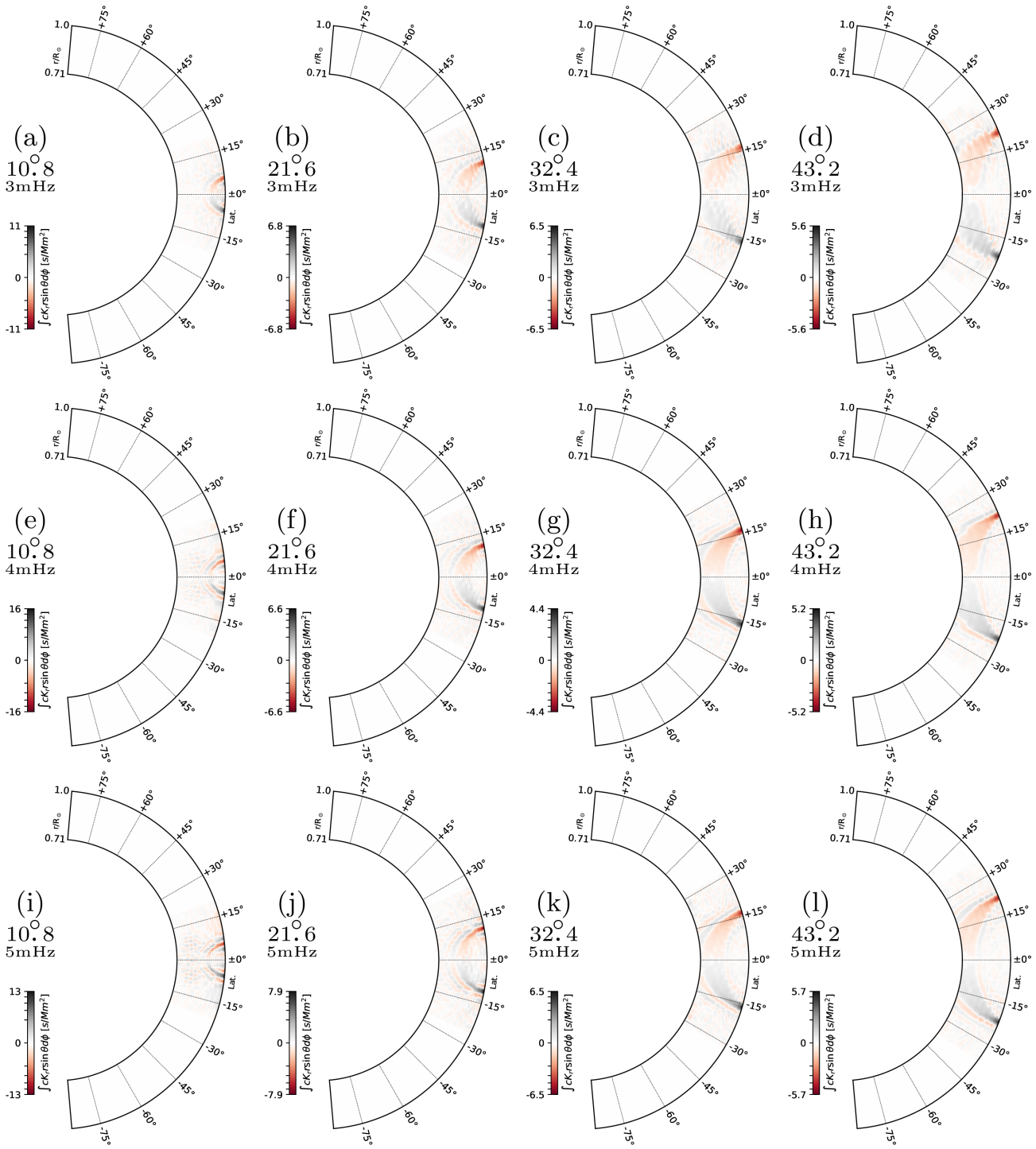

图2。 与图1类似的径向流方位角积分灵敏度核。各面板展示了以赤道为中心、中心频率区间为 $\nu = 3$、4 和 5 毫赫兹（从上到下）的核，以及对应四种传播距离 $d = 10.^\circ 8$、 $21.^\circ 6$、 $32.^\circ 4$ 和 $43.^\circ 2$ （从左到右）。同样，所示灵敏度核均以赤道为中心，对应于在对称纬度$\pm d/2$之间测得的传播时间差，并乘以声速 c 以增强深部内部的可见性。

使用固定核进行流反演时遇到的权衡（第 4 节）有所不同：残差随正则化减弱而单调下降。这种差异反映了两个问题中的主要误差来源：传播时间测量值中的实现噪声，以及核计算中的线性化和离散化误差。

除了改进水平流的核之外，我们还使用相同的模拟设置、扰动强度、测量和反演过程，对径向流重复了这一过程。具体而言，我们模拟了波在 784 个独立的三维高斯形径向流扰动中的传播，并测量波源与太阳表面所有点之间的波传播时间变化。随后，我们再次以最小二乘意义求解耦合方程组，推导出径向流的灵敏度核，方法与 Hartlep& Zhao(2021）相同。本文以及Hartlep& Zhao(2021) 中，我们在局部定义的离散球面网格上，沿径向、经向和横向计算这些三维核。

为了反演经向流，我们不会直接使用这些完整的三维核。相反，我们采用方位角积分核及相应的方位角平均传播时间测量值。图 1和2 展示了针对若干传播距离得到的部分此类积分核。这些核是通过沿横向对离散核进行积分计算得到的；横向定义为球面上垂直于波传播路径的水平方向。尽管这与沿太阳纬度积分并不完全等价，但差异源于横向沿着局部传播对齐坐标，而不是全局球坐标系；不过，由于这些核高度局限于横向偏移为零附近，因此这种差异很小。图中展示的是以赤道为中心的积分核，即它们对应于纬度 $+d/2$ 和 $-d/2$之间的传播时间测量值，其中 d为传播距离。在进行反演时，我们会将这些核移动到不同传播时间测量值的中心纬度处。与Hartlep & Zhao(2021)一样，我们针对不同的频率区间分别计算了核，这些频率区间的中心分别位于 3、4 和 5 毫赫兹，箱宽为 0.33 毫赫兹。核的符号经过选择，使其对应于向北传播的波在向北流（对于纬向核）或向上流（对于径向核）情况下经历的传播时间偏移。图中展示的是将核乘以局部声速 c后的结果，以便更清晰地显示深部内部的低振幅贡献。

从这些图中可以看出灵敏度核的一些特性。首先，纬向流的核相对于波的传播路径呈对称分布，而径向核则呈反对称分布。因此，纬向上空间均匀的流会产生非零的传播时间偏移，而径向流则需要在空间上发生变化，才能产生净效应。其次，径向核的振幅比水平核几乎大一个数量级；考虑到径向流通常产生较小的传播时间偏移，这一点似乎有些违背直觉。不过，传播时间偏移取决于流速与核值的乘积；由于径向分层显著且受质量守恒约束，太阳中的径向流往往远弱于水平流。径向核的反对称性也意味着，大尺度径向流产生的传播时间偏移往往会至少部分相互抵消。第三，两类核都呈现出特征性的“壳状”区域，其正负交替分布在一个主要灵敏区域周围；如图中虚线所示，该区域与射线路径大致对齐1。水平流的完整三维核（此处未显示）确实显示出沿射线路径的灵敏度显著降低，与我们先前论文中的核相同（Hartlep & Zhao2021），但这一现象在此处展示的方位角积分核中并不明显。径向流核沿射线路径似乎没有显著的灵敏度降低。与其他类似的核一样，较高频率波对应的核，其壳层间距小于较低频率波对应的核；而且，较高频率下的中心灵敏区域往往局限于更小的空间范围。

形式上，我们计算了 2.°16至 44.°64 （表面两点之间的日面经度距离）范围内、间隔为 0.°72的60个不同传播距离对应的时间—距离日震灵敏度核，以及3、4和5毫赫兹三个不同频率区间的灵敏度核。然而，反演中不采用最短的传播距离，因为在底层波传播模拟中，这些灵敏度核可能未得到充分分辨，而且对于两个测试流场，其结果似乎也与传播时间测量不一致。产生这一限制的原因是，短距离波在较浅的深度转向，而此处声速相对较低。对于给定的波频率，这意味着水平波长相应较短，因此需要较高的球谐度才能分辨这些波。在传播距离为 $10.8°$时，对于频率为3毫赫兹的波，所需的球谐度为 $\ell \sim 130$；考虑到模拟的去混叠分辨率（$\ell_{\max} \sim 170$），这一数值仅勉强可分辨。在更短的距离下，分辨率要求更加严苛：在 $8°$ 处为 $\ell \gtrsim 160$，在 $6°$处为$\ell \gtrsim 250$，超出了有效分辨率。[1] 对于频率更高的波，这些分辨率限制更加严格。相比之下，与较大传播距离相关的波在近表层低声速层中主要沿径向传播，只有接近较深的转向点时才会形成显著的水平结构；此处声速较高，相应的水平波长也足够长，因此能够得到良好分辨。为分辨太阳内部强烈的分层结构而设定的径向分辨率，对所考虑的所有波都足够。因此，我们将最短距离灵敏度核的不一致归因于正向模拟中的水平分辨率不足。下面的反演因此

[1] 这些估计基于射线路径上的较低转向深度和局部声速；例如，在 $10.8°$ 转向点位于 ~ 47 Mm 处，其中 $c_s \approx 93\,\mathrm{km\,s^{-1}}$，对应的水平波长为 ~ 31 Mm。

仅使用传播距离为 $\geq 10^\circ$ 的灵敏度核（适用于3和4毫赫兹），以及传播距离为 $\geq 16^\circ$ 的灵敏度核（适用于5毫赫兹）。

3. 流动模型与模拟

在本研究中，我们采用了两种不同的流模型，并使用相应日震波传播模拟生成的合成数据，来开发和验证我们的经向流反演代码。

我们将这些模型设定为三维线性化波传播代码中的背景流（Hartlep & Mansour 2005年；Hartlep 等, 2013年），以计算日震波在其中的传播。不同于用于推导灵敏度核的模拟（该模拟从初始条件出发，模拟单个波的传播），我们在此模拟随机日震波场的时间演化。通过在光球层下方不远处随机驱动密度扰动来激发波（$\sim$ 150km 以下），其方式与太阳类似；同时采用特定的时间和空间谱，使生成的波功率谱类似太阳。我们从这些模拟中提取合成日震观测数据，具体而言，是光球层上方 300 km 处的径向振荡速度。我们利用这些数据测量沿纬度方向传播的波的传播时间偏移。此方法遵循 Chen& Zhao(2018年）描述的频率依赖方法，但有一个关键区别。在他们的分析中，频率依赖偏移定义为沿相反传播方向测得的传播时间之差。然而，在我们的合成数据分析中，我们使用未设定流动的对应模拟组合作为参考模型，并测量相对于参考模型的传播时间偏移。这有助于减小模拟中的随机噪声对测量值的影响。我们将这些测量值乘以二，使其对应于观测测得的南北走时差。最后，对得到的传播时间差进行方位角平均。

3.1. 单细胞模型

我们考虑的第一个模型取自 Rempel (2006年) 的平均场较差自转和经向环流模型，但在此处我们仅使用其中的经向流。该流在每个半球内均由一个经向环流单元构成，因此我们将其称为“单细胞”流模型。它同时具有纬向分量和径向分量，并遵守质量守恒。 Hartlep 等人(2013年) 使用该模型生成了一个时长为 4096 分钟、时间步长为 1 分钟的数据集，我们在此处重新使用了该数据集。一个不包含经向流的相应模拟被用作参考，以测量相位和相应的传播时间偏移。

对于太阳观测，由于太阳振荡具有统计性质，且经向流对传播时间的影响很小，因此在推断经向流时通常会使用数月至数年的数据。然而，这样长时段的模拟目前仍无法实现。为了使较短的数值模拟在某种意义上等同于较长时段的模拟，Hartlep 等人（2013年）显著提高了

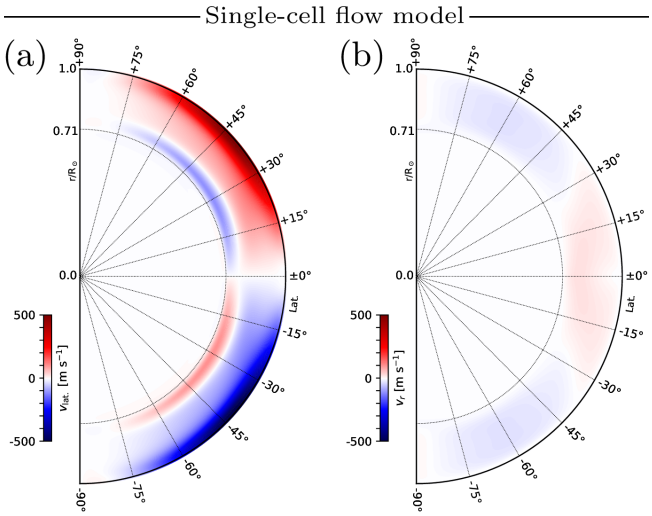

图 3。 本研究所用单细胞模型中的规定流，其中面板 (a) 和 (b) 分别显示纬向分量和径向分量。

模型的流幅值，将峰值提高到 500 毫秒$^{-1}$ （约增加了 36 倍）。这仍显著小于太阳内部任何位置的声速。因此，它不会改变问题的物理性质，只是大幅提高了所得传播时间偏移的信噪比（S/N）。由于（不相关的）实现噪声会随着时间序列长度的平方根增加而降低，因此，这类模拟的信噪比应等同于原始模型运行时长为 $\approx 36^2$ 倍的模拟。

图 3显示了模拟中运行的模型的径向分量和纬向分量。该数据集中，向北传播和向南传播波之间传播时间差的新测量值如图 4a–c 所示，对应所考虑的三个频率区间。3 毫赫兹的测量值相当平滑，而在较高频率下的测量值中可以看到更显著的随机噪声。我们还计算了正演模型，即根据流模型和我们的灵敏度核得到的预期传播时间偏移，如图 4d–f 所示。

测量值与正演模型在纬度和传播距离依赖性方面吻合良好：在每个半球的中纬度地区均呈现最大振幅，且传播时间偏移随传播距离增加而减小。5 毫赫兹正演模型在传播距离$\lesssim 16^\circ$处显示出异常值，我们将其归因于核模拟的分辨率极限（见第2节的讨论）。因此，在使用该频率进行反演时，我们将排除这些传播距离。

图5展示了针对所选传播距离的更详细比较，并揭示了正演模型与测量值之间存在明显偏差。尽管尚未真正弄清楚这种差异的起因，但值得注意的是，测量值与正演模型之间的吻合程度对于

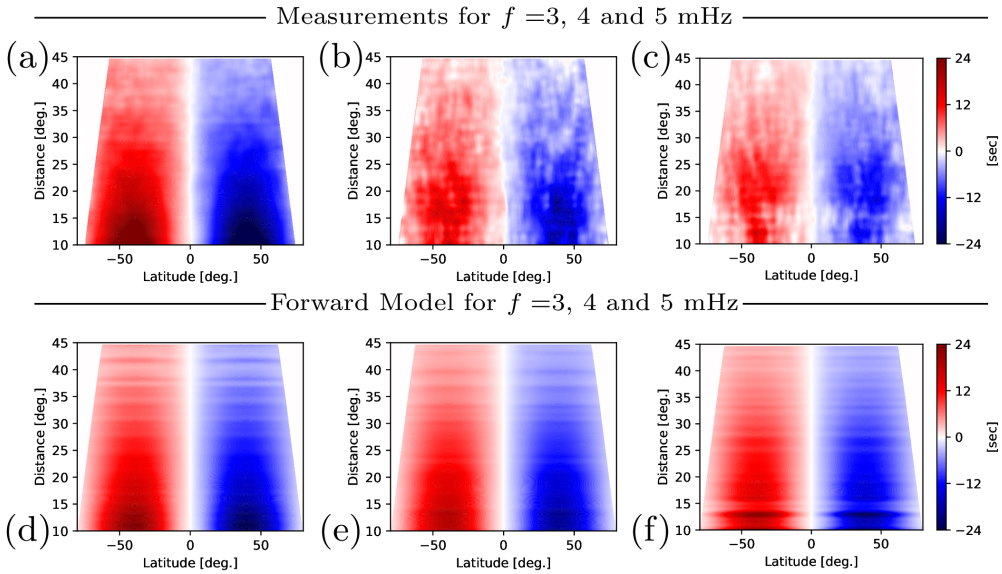

图4. 单胞流模型的传播时间偏移。面板（a–c）显示了在预设单胞流条件下，通过数值模拟获得的传播时间测量值，分别对应所考虑的三个频率区间。面板（d–f）显示了使用基于模拟的灵敏度核进行相应正演计算的结果。

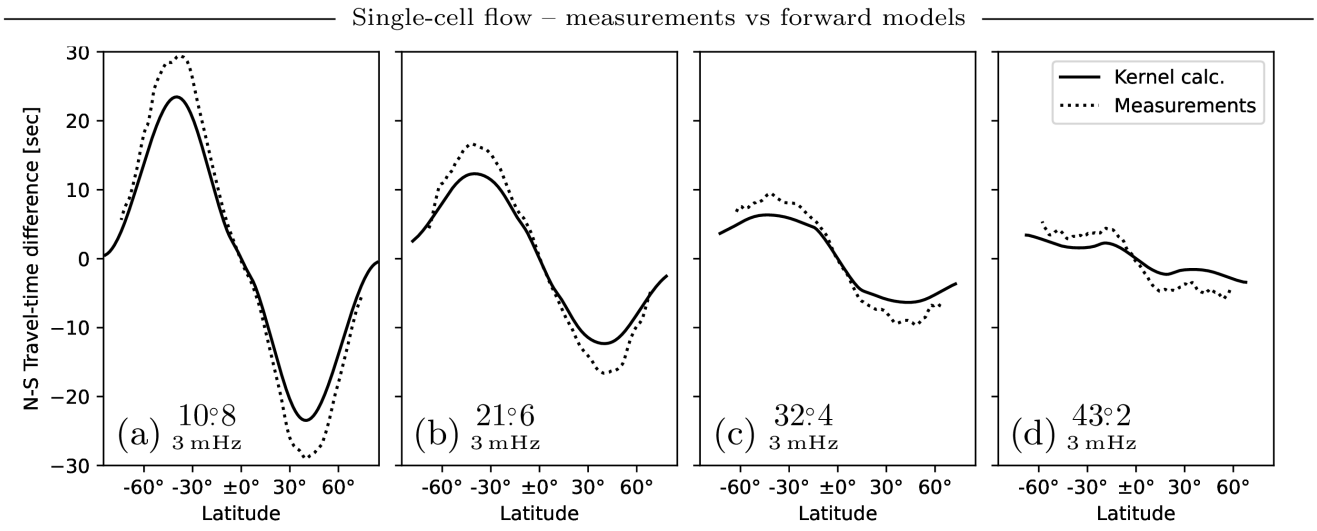

图5. 单胞流的测量值与正演模型比较。图中显示了四个不同传播距离处的南北向传播时间偏移，具体如图所示，且均对应3毫赫兹频率区间。点线表示在模拟波场上进行的日震学测量，实线表示使用基于模拟的灵敏度核进行正演计算的结果。

双环流胞模型（见图 7），我们针对该模型进行了三次独立模拟，每次使用不同的噪声实现；而单环流胞流动测量仅使用一次模拟。

3.2. 双环流胞模型

第二个流模型源自Zhao 等人 (2013年) 的经向流反演，其特点是每个半球都有两个环流胞。下文将该模型称为“双环流胞”流模型。不过，与Zhao 等人 (2013年) 发表的结果相比，我们做了一些修改。同样，我们将最大流速提高到 500 ms^{-1}，以提高信噪比。我们还将底部环流胞的流速加倍。该模型仅包含纬向流分量，并不严格满足质量守恒。

图 6a 显示了模拟中使用的模型纬向分量。在这种情况下，径向流为零。使用该模型，我们进行了三次独立模拟，每次采用不同的驱动项统计实现，各自产生 48 小时的数据集。每次模拟的前 4 小时均被舍弃，因为这段时间代表瞬态行为。

使用频率依赖测量程序，从这些合成数据中推导出相位移及对应的传播时间偏移。图6b–d 展示了三个频率区间（3、4 和 5 毫赫兹）的传播时间偏移，这些偏移分别对三个独立数据集取平均，并按方位角取平均。合并这些独立模拟可提高测得传播时间的信噪比，并可通过计算这些数据集之间的标准差来估计不确定性。然而，由于三个数据集不足以为每项测量的方差提供可靠约束，我们将所有测量值的方差合并，并在$\pm 7.5^\circ$ 纬度和 $\pm 1.5^\circ$ 传播距离范围内进行汇总，同时去除每项测量在各数据集间的均值。

对应的正演模型见图6e–g。测量值和正演模型在传播距离和纬度上的分布模式非常相似，尤其是在功率最强的频率（3 毫赫兹）下；而在较高频率区间，两者的差异开始增大。在 5 毫赫兹正演模型中，$\sim 13^\circ$ 传播距离处再次出现了一些伪特征，这表明这些核可能可靠性较低，且可能仅得到边缘分辨。

图 7 展示了若干选定传播距离的传播时间偏移，对测量值和正演模型进行了更为详细的比较。二者具有非常好的一致性，明显优于单元格比较结果。这些测量数据中的随机噪声在 3 毫赫兹时较小，但在更高频率下会变得明显更大（未显示）。

4. 反演过程

4.1. 基本问题

类似于我们根据已知的流动扰动及其引起的传播时间偏移来推断灵敏度核，我们也可以在已知核和观测到的传播时间扰动的情况下，确定太阳内部的流动。同样，这一问题是在离散网格上求解的。具体而言，我们使用覆盖约为 $[-85^\circ, +85^\circ]$ 、间距均匀为 $\sim 0.^\circ 7$ 的 243 个纬度网格点，以及覆盖 $[0.71, 1]\, r/R_\odot$、采用拉伸间距的 174 个径向网格点；该间距近似与太阳中随深度变化的声速成正比。在离散形式下，将流速与传播时间偏移联系起来的卷积方程变为求和：

$$\delta\tau_i = \sum_j \vec{K}_{i,j}\vec{u}_j S_j, \tag{1}$$

其中 $\delta\tau_i$ 表示方位角平均的南北向传播时间差，$\vec{K}_{i,\ j}$ 表示相应的方位角积分核，且 $\vec{u}_j$ 表示方位角平均流场。 S_j 表示积分元素，使得该求和对应于关于半径 r 和余纬度 θ 的积分，即 $S_j = r\, dr\, d\theta$。 dr和 $d\theta$ 使用四阶有限差分计算。方程编号中的索引 i 表示不同的测量值（传播距离和中心纬度），而 j 是覆盖我们区域内所有网格点的单一索引。注意， K 和 $\vec{u}$ 可能包含多个分量，例如纬向流和径向流。对于所有 1 的方程 i 构成一个矩阵方程

$$Ax = b \tag{2}$$

其中 A 包含核和积分元素， b包含测量值。

在我们的设置中，方程 2 是欠定的，未知数（流场）多于已知数（测量值），因此无法直接求解该方程。不过，我们可以求出其最小二乘解，也就是说，我们最小化$||Ax - b||$ 其中 $||\cdot||$ 是欧几里得范数。作为初步测试，我们可以不使用实际测量值，而使用给定流模型对应的预期传播时间差（正演模型）。具体而言，除非另有说明，我们使用基于 3 毫赫兹核计算得到的正演模型。

通常，求解该系统需要进行某种形式的正则化，以获得具有物理意义且足够平滑的解。然而，由于正演模型中没有噪声，其精度达到机器精度，因此这里只需很少的正则化。使用 LSQR（一种迭代最小二乘求解器），实际上无需显式正则化项即可求解方程 2。采用不同的截断参数 ϵ_{tol}，当残差$||Ax - b|| < \epsilon_{tol}(||A||||x|| + ||b||)$达到 ϵ_{tol}时便停止迭代。图 8 展示了针对双胞流模型、使用一系列截断参数所得的反演结果。较大的取值会导致提前停止，得到较平滑的反演结果；随着截断参数减小，流场逐步得到更准确的恢复。当 ϵ_{tol}的取值极小时，噪声会变得明显。一个较好的折中取值是 $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$，此时得到的解非常出色。

4.2. 显式正则化

不同于提前停止所提供的正则化，对测量数据进行反演需要显式正则化项，以获得稳定且具有物理意义的解。这种正则化同时补偿了统计

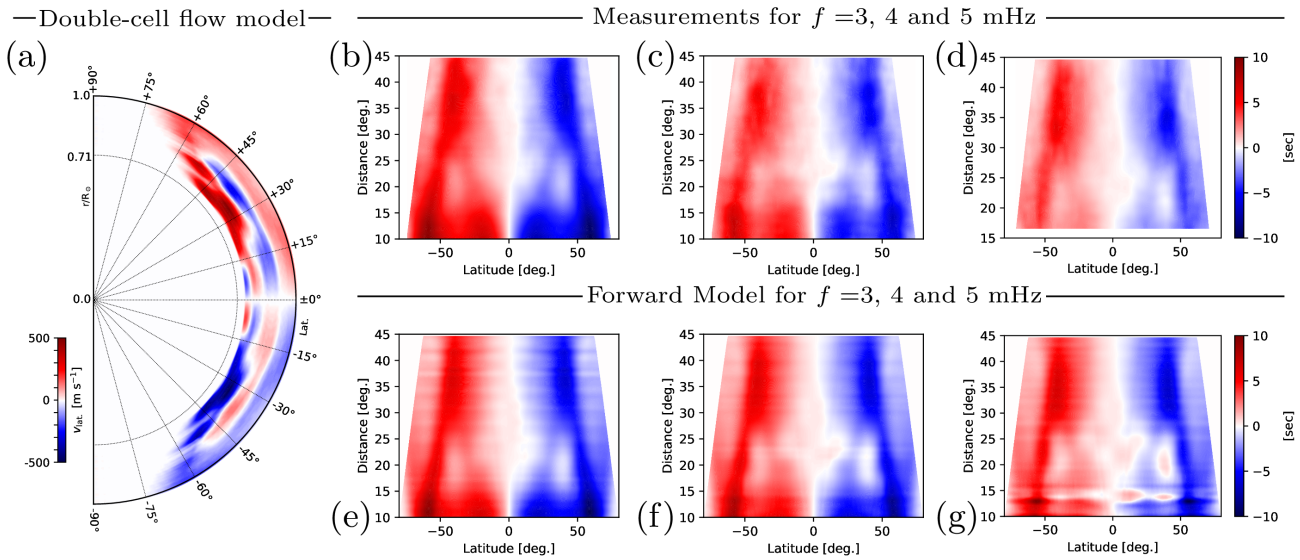

图 6. 类似于图 3，面板 (a) 显示了本文所用双环流胞模型中预先设定的纬向流。该模型中的径向流为零。面板 (b–d) 显示了使用频率依赖测量技术获得的 3、4 和 5 毫赫兹频率区间的传播时间测量值。面板 (e–g) 显示了相应正演计算的结果。

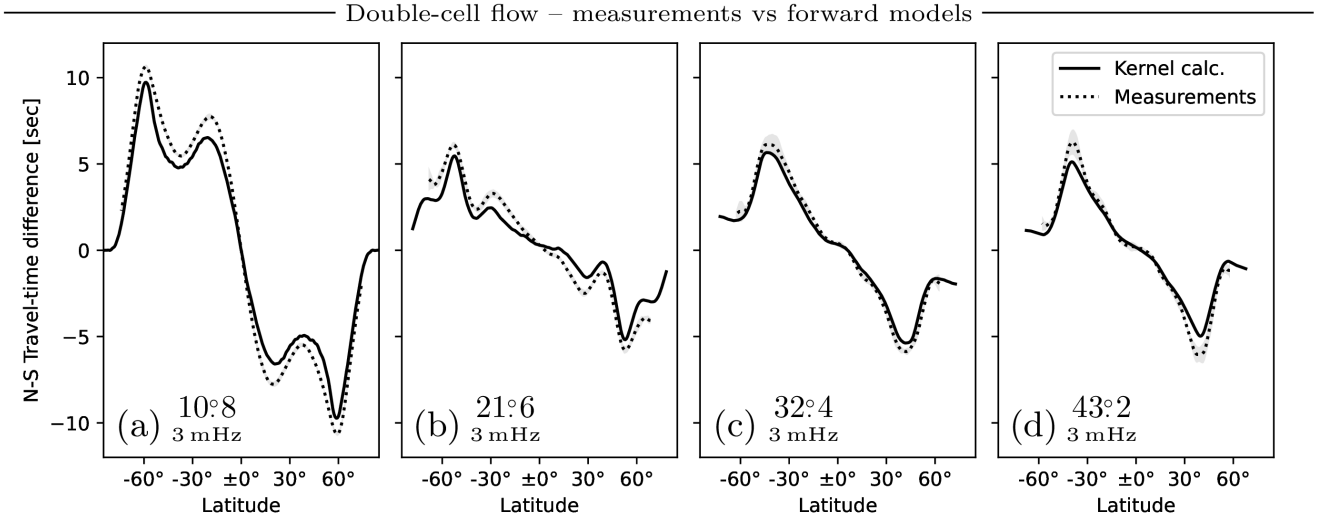

图 7. 双胞流的测量值与正演模型比较。图中显示了四种不同传播距离下的南北向传播时间偏移，具体数值见图，所有结果均对应于 3毫赫兹频率区间；虚线表示在模拟波场上进行的日震学测量，实线表示使用基于模拟的灵敏度核进行的正演计算。对于测量值，曲线周围的阴影表示合并后的统计不确定性，对应于一个标准差。

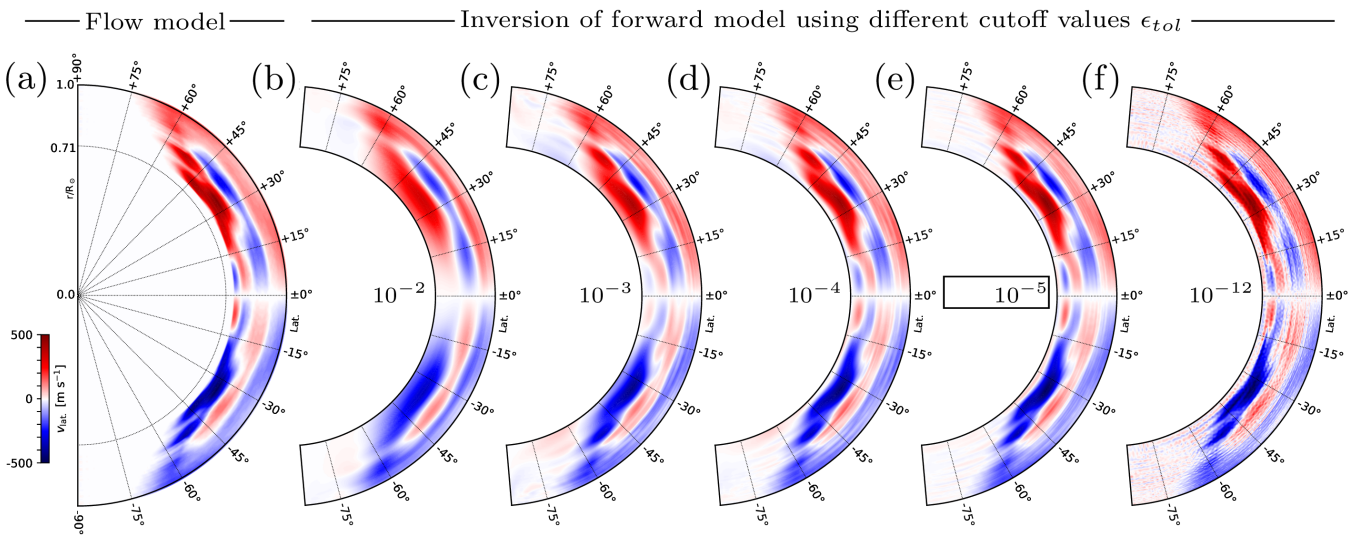

图8。 对双胞流模型进行正演计算的反演，未使用显式正则化项。面板 (b)–(f) 显示使用不同截断参数值求解得到的反演纬向流 $v_{\rm lat}$ ，该参数决定迭代求解器的提前停止。作为对比，面板 (a) 显示实际流模型。所有面板使用相同的色标。

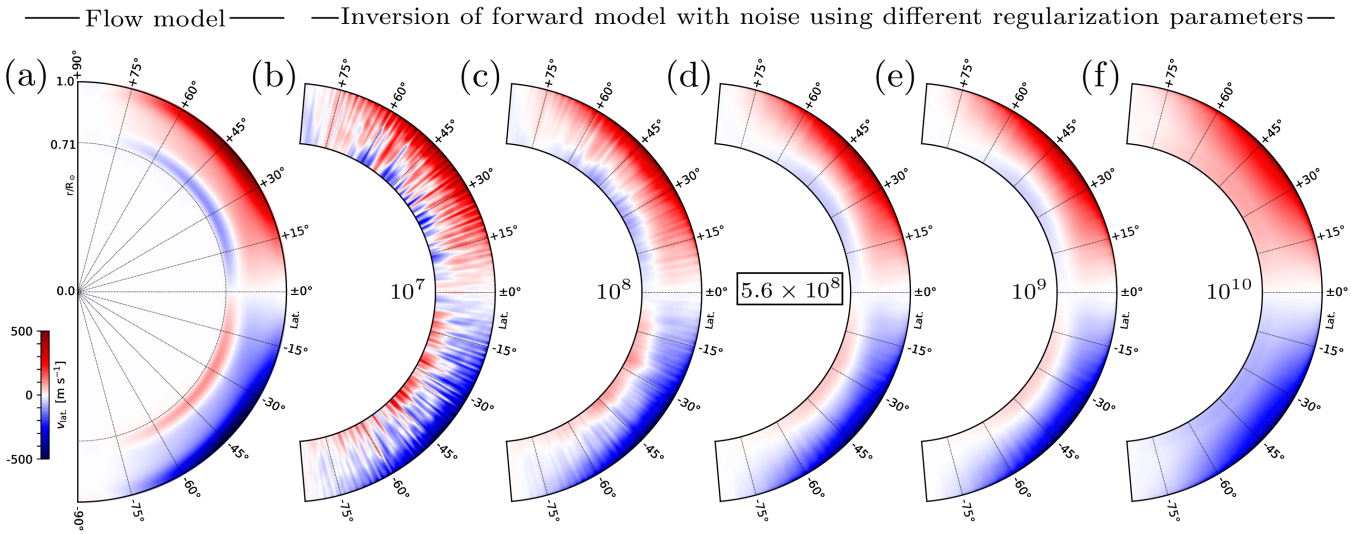

图9。 比较不同正则化参数对使用深度缩放拉普拉斯算子进行单胞经向流模型反演的影响 $s_{10}\Delta$ ，其中该算子用作正则化算子。面板 (a) 显示流模型本身的纬向流速以供参考，面板 (b)–(f) 则显示在正演模型中加入 5% 高斯噪声后的反演结果。对于此情形，正演模型和反演中仅使用纬向流。所有面板均使用最左侧所示的相同色标。根据 L 曲线的判据（见图 10），此情形下的最优正则化参数为 $\gamma_{\rm L} = 5.6 \times 10^8$。

测量值中的噪声（ b中的误差）以及近似灵敏度核与系统真实物理响应之间的系统性差异（ A中的误差）。因此，我们求解修正后的最小二乘问题

$$\min_x \left(||Ax - b||^2 + \gamma ||\Gamma x||^2 \right), \tag{3}$$

其中， γ 是标量正则化参数， Γ 是离散化的正则化算子，其中还包含离散积分元 S_i ，使得 $||\Gamma x||^2$ 对应于正则化项平方的方位角积分。该表达式也可以改写为增广矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\gamma}\Gamma \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

我们首先使用合成测量值说明 γ 的影响。这些合成测量值由单胞经向流模型生成，并利用数值核对正演建模的传播时间扰动。为评估

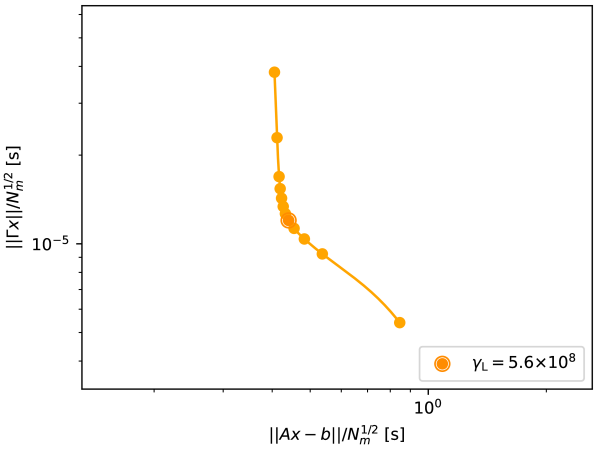

图10. 图9所示含高斯噪声的单胞正演模型反演的L曲线9，展示了反演残差、 $||Ax-b||$与正则化之间的权衡，其中正则化程度由 $||\Gamma x||$衡量。图中所示残差除以测量值的数量 N_m，以此衡量每次测量的平均失配。随着正则化参数减小，曲线从右向左移动。

随机扰动下的反演过程稳健性，我们加入了 5% 水平的高斯噪声。具体而言，每个合成测量值均叠加一个相互独立、服从正态分布的随机值，其标准差等于相应测量幅度的 5%。由于这些扰动在测量位置和传播距离之间互不相关，因此这代表了对反演稳定性相当严格的检验。图 9 展示了针对不同 γ 值、在某一特定正则化算子下得到的反演结果。当 γ 较小时，反演结果噪声很大；随着 γ 增大，结果逐渐变得平滑。

因此，解很大程度上取决于如何设定数据失配与模型平滑度之间的平衡，由此产生的问题是如何恰当地选择 γ。我们考虑两种准则：L曲线（无需了解噪声水平）和差异原理（需要了解噪声水平）。

L曲线（Hansen 1992；Hansen & O'Leary1993）绘制正则化半范数 $||\Gamma x||$与残差范数 $||Ax-b||$之间的关系，坐标轴采用对数刻度。随着 γ 减小，残差单调下降，而半范数则逐渐增大，起初增幅缓慢，随后在开始拟合噪声时急剧上升。所得曲线在拐角处弯折，从某种意义上说，该拐角代表了稳定性与分辨率之间的最佳折中。我们通过对一组在较大范围内按对数间隔取值的 γ 进行反演，并找出曲率最大的点来确定拐角。图10展示了单胞测试案例的L曲线。由于真实解是平滑的且噪声较强，在 γ 较大的分支上，半范数并非常数，而是有明显变化，但拐角仍清晰可辨。

然而，通常而言，L曲线准则是一种启发式方法，拐角可能并不明显，此时可能会导致正则化过度或不足。拐角的位置也可能取决于正则化算子的选择以及噪声中的相关性。

已知噪声水平时，选择 γ 更直接的准则是差异原理（Hansen 1992；Hansen & O'Leary 1993）。该原理指出，解对数据的拟合程度不应超过噪声水平所允许的范围。假设数据由一个已知模型生成， $b = Ax_{\text{true}} + \epsilon$，其中 ϵ 是在 σ^2个 N_m 测量值中各自方差为 $N_m\sigma^2$的不相关噪声，与我们的合成测试相同。此时，真实模型的残差恰好就是噪声，其平方范数的期望值为 x_{true}。尽管实际中 γ 未知，但这给出了可接受解的预期残差：残差显著较小，说明拟合了噪声（正则化不足）；残差显著较大，则说明信号受到抑制（正则化过度）。因此，差异原理选择满足以下条件的x_γ正则化解

$$||Ax_\gamma - b||^2 \approx N_m\sigma^2. \tag{5}$$

当测量值具有不同的不确定性 σ_i时（正如我们的噪声模型所示），我们可以将每个方程除以其 σ_i，即 $A_{ij} = A_{ij}/\sigma_i, b_i = b_i/\sigma_i$。这样，每个噪声项都具有单位方差，目标也不再取决于噪声水平，

$$||\tilde{A}x_\gamma - \tilde{b}||^2 \approx N_m. \tag{6}$$

这也意味着，在反演中，方差较大的测量值会被降低权重。在一般情况下，应考虑完整的噪声协方差矩阵；而我们关于不相关噪声的假设只考虑对角项。然而，根据有限的测量值估计非对角项会具有很大的不确定性。由于残差随 γ单调增加，因此可以在 $\log\gamma$中通过简单的二分搜索找到匹配值，从而使所需的反演次数保持较少。噪声加权会改变前向算子相对于正则化项的尺度关系，进而改变对应于给定平滑程度的正则化参数的数值。因此，对于加权反演，我们以归一化形式给出正则化参数 $\gamma = \gamma_w/{\sigma^{-1}}^2$，其中 γ_w 是加权系统中使用的参数，而σ^{-1} 是所有测量值上的 $1/\sigma_i$ 均值。这样，它们就可以与未加权系统中的 γ 进行比较。对于均匀不确定性，这种对应关系是精确的；否则则是近似的。

图 11展示了此类噪声加权反演的结果；这次使用了双胞流的正演模型，并同样加入了 5% 的噪声。我们在此考察了正则化算子的几种选择， Γ，并在每种情况下使用差异原理选择 γ。算子范围从最简单的单位矩阵 I（此时正则化项变为流幅值），到径向导数$\frac{\partial}{\partial r}$，以及拉普拉斯算子 Δ。导数算子采用四阶有限差分以矩阵形式表示

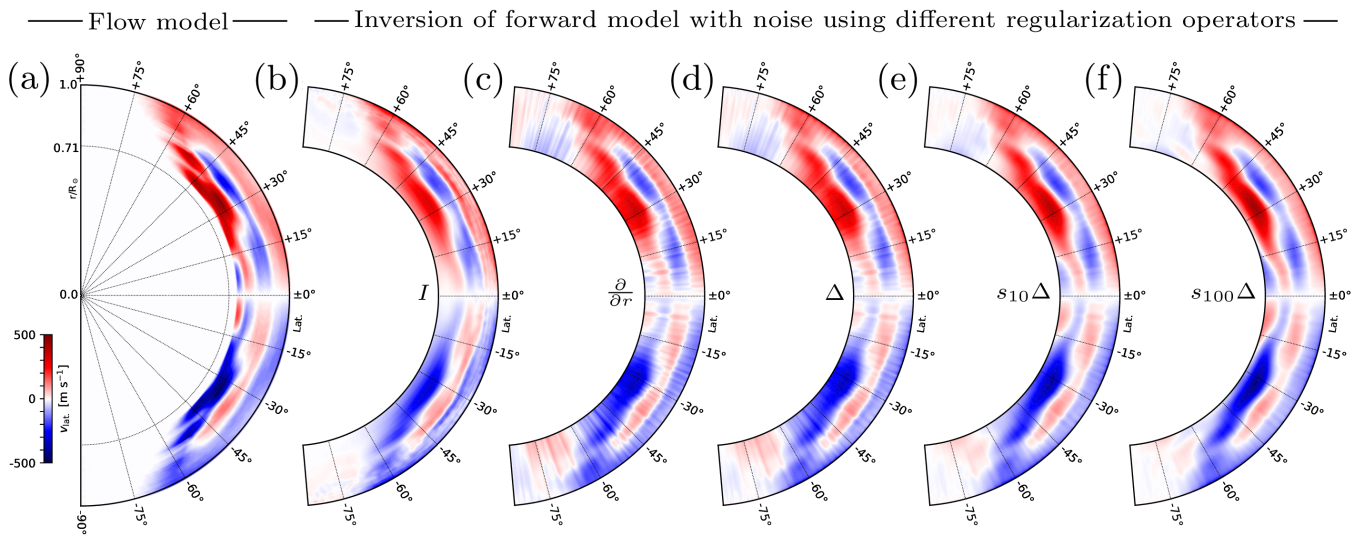

图11。 不同正则化算子对双胞经向流模型反演影响的比较。作为参考，面板 (a) 展示了该模型的纬向流速，而面板 (b)–(f) 展示了对含 5% 高斯噪声的正演模型进行噪声加权反演的结果。对于每种情况，最终正则化参数均通过差异原理选取，其取值如下：$\gamma_I \approx 1.7 \times 10^5$, $\gamma_{\frac{\partial}{\partial r}} \approx 5.6 \times 10^7$, $\gamma_\Delta \approx 5.1 \times 10^7$, $\gamma_{s_{10}\Delta} \approx 1.6 \times 10^7$, $\gamma_{s_{100}\Delta} \approx 5.4 \times 10^5$。所有面板均采用最左侧面板所示的相同色标。

使用 Python 软件包 *findiff* （Baer 2018）。我们还通过将 Δ 乘以缩放函数 $s_\beta(r) = \beta^{(r-R_T)\ /\ (2\ (R_\odot - R_T)\ )}$ 来探索在整个对流区内平滑改变有效正则化强度的效果，其中 $\beta > 1$ 表示在太阳表面附近的正则化强度高于日震荡层处 $R_T = 0.71 R_\odot$。如图 11 所示，正则化算子的选择会对解产生显著影响。出人意料的是，径向导数和拉普拉斯算子得到的反演结果非常相似，而采用随深度变化的缩放函数的拉普拉斯算子则显著提高了与真实流模型的一致性，尤其改善了对深部流向反转的恢复。因此，在本文其余部分，我们仅考虑$\Gamma = s_{10}\Delta$。未来的工作可以选择缩放函数，使误差在不同深度（对应不同传播距离）上均匀分布。

4.3. 多分量与约束反演

反演可以直接扩展到多个分量——例如不同的流动方向或声速扰动——以及多种测量类型，包括不同的几何结构和频率。在实际操作中，这只需将相应的灵敏度核和测量向量堆叠到同一个线性方程组中即可。在这类情况下，通常有必要对解施加额外约束。一类特别有用的约束是等式约束，它要求解满足预先规定的关系，例如质量守恒。这些约束可以通过拉格朗日乘子纳入，定义增广泛函 $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g x)$，其中 $f(x) = 1/2||Ax - b||^2 + 1/2\gamma||\Gamma x||^2$是待最小化的正则化最小二乘问题，而$g(x) = Cx - c$是约束。要求 $\mathcal{L}$ 的驻定性

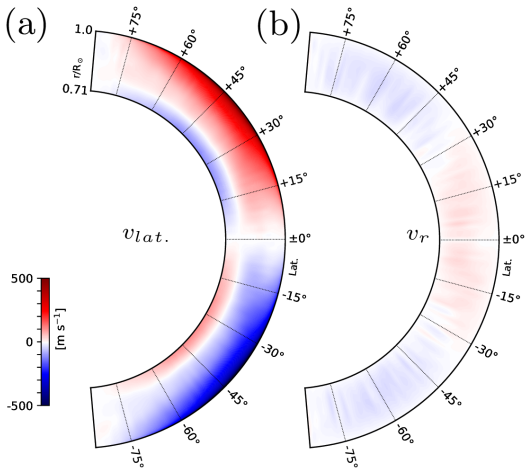

图12。 在质量守恒条件下，使用包含纬向和径向贡献的完整正演模型，并将高斯噪声作为合成测量值添加后，对单胞流进行反演。使用相同的色标，面板(a)和(b)分别显示纬向流速和径向流速。该案例的正则化算子为深度缩放拉普拉斯算子 $s_{10}\Delta$ ，并使用L曲线准则选择了正则化参数$\gamma = 5.6 \times 10^7$。

关于 x 和 λ 可得：

$$0 = A^T A x + \gamma \Gamma^T \Gamma x + C^T \lambda - A^T b \tag{7}$$

$$0 = Cx - c \tag{8}$$

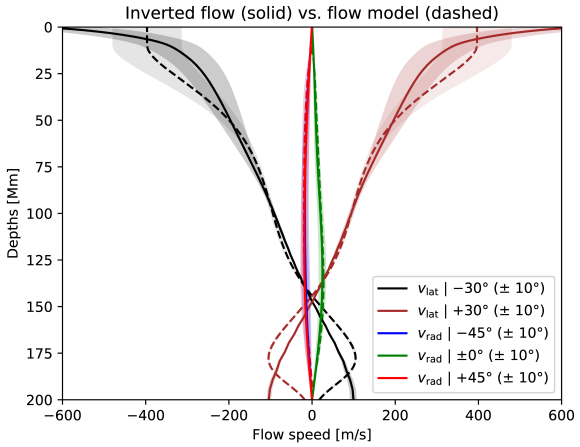

图13。 比较图12中基于质量守恒的单胞正演模型反演结果与流模型。图中展示了按纬度带平均的流剖面，其中实线表示反演结果，虚线表示流模型。阴影表示这些纬度带内的变化范围（一个标准差）。

可写成分块矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A^T A + \gamma \Gamma^T \Gamma & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T b \\ c \end{bmatrix}. \tag{9}$$

为改善增广系统的数值尺度，我们对约束算子 C 进行缩放，使其范数与正则化正规方程块 $M = A^T A + \gamma \Gamma^T \Gamma$的范数相当。具体而言，我们应用重缩放 $C \to sC$， $c \to sc$ 其中 $s = ||M||/||C||$ ，范数 $||M||$ 和 $||C||$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。这种平衡减小了矩阵块之间的数值差异，并提高了线性求解的稳定性和精度，同时保持约束解本身不变（拉格朗日乘子会相应地进行缩放）。由于增广系统构成的是鞍点问题，而非纯粹的最小二乘系统，因此我们使用标准线性系统方法直接求解，而不是采用本文其他部分使用的迭代LSQR过程。因此，约束反演在计算上比无约束LSQR反演要求更高，并且需要更多内存。文中所示的约束反演均以标称分辨率的一半计算，即在纬度方向使用123个点，在深度方向使用87个点。

图 12 展示了一种反演，其中在同时推断纬向流和径向流分量时施加了质量守恒条件。质量守恒要求质量流的散度为零（$\rho \vec{v} = 0$），且没有流入或流出该区域的流动。前者通过严格的等式约束来实现，相应的微分算子同样采用四阶有限差分在我们的空间网格上离散。另一方面，我们将边界条件实现为软惩罚项，因为严格施加边界条件可能导致病态系统。从这个意义上说，它们实际上起到了额外正则化项的作用，以牺牲边界条件的满足程度来提高反演的稳定性。

图中展示了反演流与实际流模型的比较：13该图绘制了两者沿纬度平均的流剖面。考虑到径向流比纬向流小一个数量级以上，其在反演中仍得到了良好恢复。例如，对于纬度带 0°（平均范围为 ±10°），反演径向流峰值为 21 m/s，而模型值为 27 m/s。就流幅值而言，内部的纬向流得到了良好恢复，尤其是在深度为 50–150 Mm 的范围内；流向反转的位置也位于 $\lesssim$ 3Mm。然而，在区域的上、下边界附近存在较大差异。反演结果的近表层呈现出较强的梯度，与流模型不符。相比之下，无显式正则化项的无噪声正演模型反演（图 8）并未呈现这种现象，即使在表面也与流模型高度吻合，因此我们认为这是正则化引入的偏差。

4.4. 平均核

所谓平均核表示某一位置的推断流场与真实流场之间的关系。一些局部反演方法，例如 OLA（最优局部化平均）和 SOLA（相减式最优局部化平均）（例如 Pijpers 与 Thompson（1994）），会专门构造平均核，使其尽可能接近某个局部化目标分布。我们的反演过程不直接涉及这类核，而是通过迭代过程，在最小二乘意义下全局求解线性系统。

不过，人们仍可能希望计算有效平均核，因为它们能够揭示反演的有效空间分辨率和跨深度泄漏，而这些取决于所选的正则化。平均核仅取决于前向算子和正则化，与数据无关。我们针对未加权系统计算平均核，因此它们不依赖于噪声模型。令 S 表示方程4中的系统增广矩阵， S^+ 表示其 Moore–Penrose 伪逆。正则化解为

$$x_\gamma = S^+ \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = R\, b, \tag{10}$$

其中 R 是 S^+ 中作用于数据的部分，即其前N_m 列。将 b 替换为无噪声的正演解Ax，其中 x 是真实流场，可得

$$x_\gamma = \mathcal{K}\, x, \qquad \mathcal{K} = R\, A, \tag{11}$$

其中 $\mathcal{K}$ 是平均核矩阵：其第 j行描述了真实流如何经过平均处理，从而得到网格点 j处的估计值。

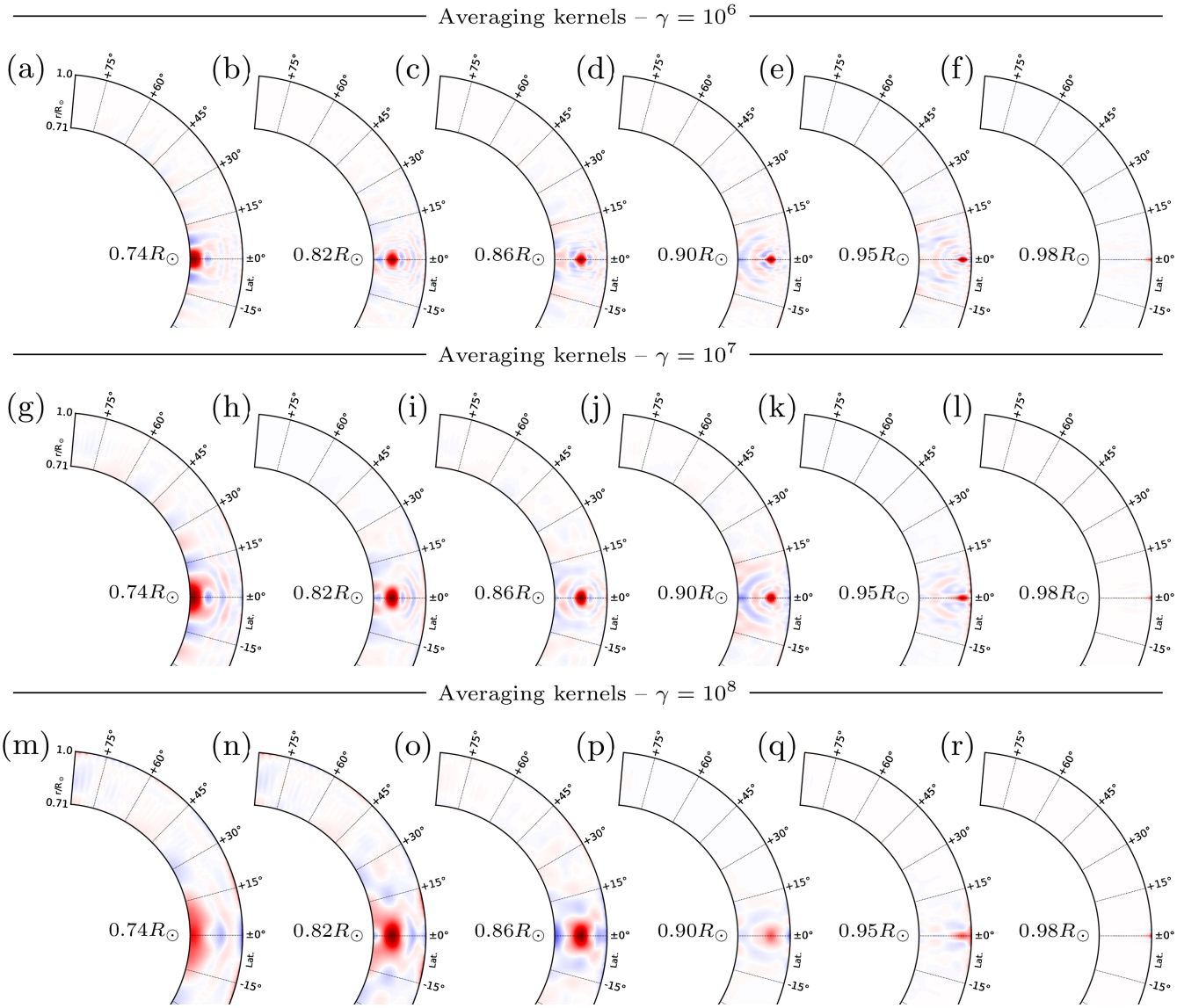

图14。 对于以深度缩放拉普拉斯算子 $s_{10}\Delta$ 作为正则化算子的反演，展示了正则化参数 γ 的三个取值（从上到下）对应的平均核。图中显示了位于零纬度、深度分别为0.74、0.82、0.86、0.90、0.95和 $0.98R_\odot$ 处的真实流所产生的推断的纬向流贡献（从左到右）。每个图的颜色范围均根据其相应的 ±绝对最大值进行缩放，该最大值会因情况而异。由于核在南北半球之间具有对称性，因此这里只展示了区域的一半。

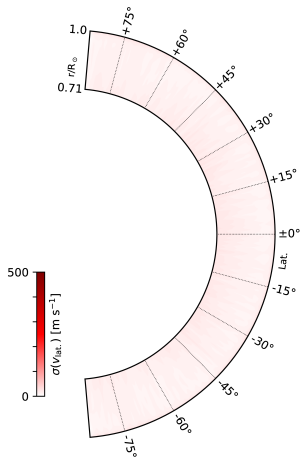

图15。对图11(e) 中的双环正演模型进行反演时，传播噪声导致的推断流场标准差。使用 LSQR 对 50 个蒙特卡洛样本进行计算，因此标准差的相对精度约受限于 10%。除标准差只有正值外，色标与全文所有流模型和反演结果所用色标相同。

我们使用奇异值分解 (SVD) 计算伪逆，调用 Python 软件包*pinv* 例程*SciPy*。为提高效率和数值稳定性，我们忽略奇异值极小的项。相对阈值 $rtol = 10^{-3}$ （所考虑的最小/最大奇异值）可得到与使用 LSQR、采用我们一直使用的 10^{-5} 容差计算出的解近似的结果（见第4节）。计算伪逆的代价远高于 LSQR，计算时间尤其是内存消耗都显著更大，因此我们仅在少数情况下使用伪逆来计算平均核，其他情况下则使用基于 LSQR 的求解器。

平均核确实取决于正则化的类型和程度。图14展示了纬向流反演的示例，采用深度缩放拉普拉斯算子正则化算子 $s_{10}\Delta$，以及 γ 的三个取值。正如预期的那样，较大的正则化参数会导致空间范围更大的平均区域。平均核还强烈依赖于深度。靠近太阳剪切层的目标位置显示出空间范围较大的平均核，而较浅层中的目标位置则具有较紧凑的平均核。这些核呈现出带有壳状结构的正、负侧瓣，这并不令人意外，因为底层的灵敏度核由交替排列的香蕉壳状结构组成。这些平均核的一个后果是，与核的宽度相比尺寸较小的真实流特征会在反演中受到抑制。

4.5. 不确定性估计

正则化解 x_γ 取决于数据中特定的噪声实现。因此，量化对于其他噪声实现，反演结果会有多大变化是有益的。传播噪声需要噪声信息，因此我们˜ ˜在此考虑噪声加权系统 A和 b，其中噪声在每个分量中都具有单位方差。如上所示，对于固定的 γ，解是数据的线性函数，即˜ ˜$x_\gamma = R\,b$，因此数据的扰动 ϵ 会使解˜发生 $R\epsilon$的变化，而与数据本身无关。因此，我们可以通过蒙特卡洛抽样估计不确定性：抽取 $N_s = 50$ 个相互独立的单位方差˜高斯噪声向量 $\epsilon^{(k)}$，使用相同的 A、Γ和 γ 分别进行反演，从而获得 $\delta x^{(k)} = \tilde{R}\epsilon^{(k)}$；然后将系综在每个点上的标准差作为$x_\gamma$的不确定性。该系综按构造具有零均值。我们在为实际数据选定的 γ 处进行评估，因此该不确定性不包括不同噪声实现之间所选 γ 的变化，无论其是通过L曲线还是不一致性原理选定的。该离散程度仅衡量噪声的传播。它也不包括正则化本身引入的偏差；这种偏差由上文的平均核描述，因此，在解受到强烈平滑的区域，真实解可能位于所报告的不确定性范围之外。图15展示了对图11(e)中的双胞细胞正演模型进行反演所得的此类计算结果。纬度方向的变化很小，但存在明显的深度趋势：在对流区底部，流速不确定性约为20 ms^{-1}，随后单调下降，在 $0.95\,R_s\odot$处降至10 ms^{-1}，然后向上边界升高至约30 ms^{-1}。

5. 合成测量的反演

第 4 节中的正演模型反演检验了我们反演过程的数学一致性，但并不能独立验证灵敏度核本身，因为正演模型是使用与反演完全相同的核生成的。在本节中，我们将模拟波场导出的旅行时间测量值应用于我们的框架，以评估完整的方法——包括基于模拟的灵敏度核和多频率测量过程——如第 3节所述。本节中的所有反演均采用深度缩放正则化算子 $s_{10}\Delta$。

5.1. 单胞流恢复

图16展示了使用单胞模拟测得的传播时间差以及 3 毫赫兹频率区间，对纬向流和径向流进行联合反演的结果。该反演将质量守恒作为严格的等式约束，并将零流入／流出边界条件作为软惩罚项（见第 4.3 节）。由于这组数据没有不确定性估计，我们依据 L 曲线准则选取正则化参数 $\gamma = 3.2 \times 10^9$。请注意，这种受约束的单胞反演中 γ 的值不能与无约束反演的相应值直接比较：受约束问题同时求解纬向流和径向流，正则化项作用于两个分量，并通过含拉格朗日乘子的增广系统施加质量守恒。图中比较了不同纬度带内流模型和反演流的平均深度剖面

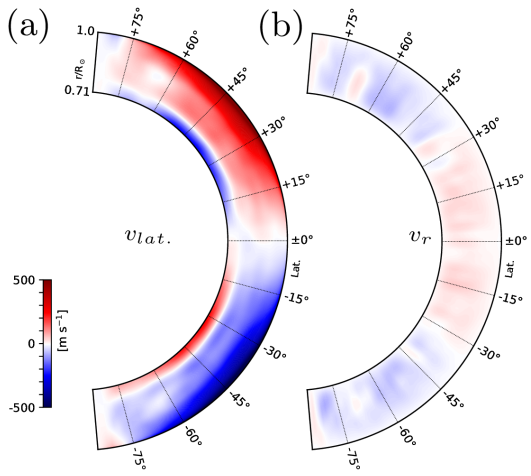

图16。 根据测得的传播时间偏移，在质量守恒约束下反演得到的单胞流。各面板使用相同的色标，展示了（a）纬向流和（b）径向流速度。该情形的正则化算子为深度缩放拉普拉斯算子 $s_{10}\Delta$，正则化参数 $\gamma = 3.2 \times 10^9$ 根据L曲线准则选取。

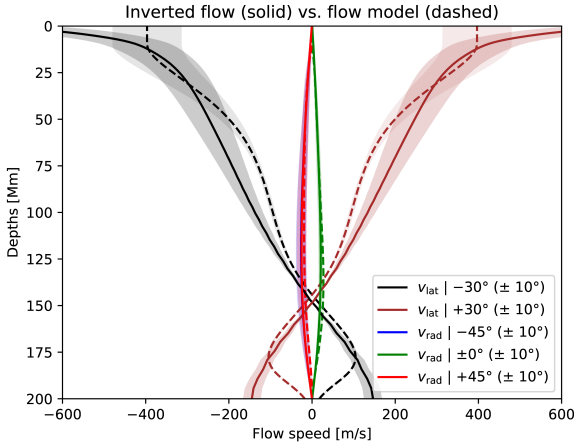

图17。 将单胞流动模型与图16中的测量反演结果进行比较。图中给出了在各纬度带内平均的流剖面，其中实线表示反演结果，虚线表示流模型。阴影表示这些纬度带内的变化范围（一个标准差）。

。17图显示，结果在许多方面与正演模型的反演结果非常相似。流向反转的位置得到了准确恢复；与模型相比，反演流中的交叉点深 ~ 4 Mm。径向流的方向和振幅与模型吻合良好。对于 $0°$ 纬度带（平均于 $\pm 10°$），反演径向流峰值为 21 m/s，而模型为 27 m/s。更大的差异出现在纬向流，尤其是在区域的顶部和底部。至少对于底部的差异而言，一个可能的原因是深度增加导致的分辨率降低，如第 4.4 节中的平均核所示。但请注意，这些核是针对单个场的无约束反演计算的，因此它们只能定性地表明分辨率如何随深度降低，而不能给出此处所示约束反演的确切分辨率。

5.2. 双胞流恢复

对于双胞流，我们分别对三个频率区间进行反演，并进行了联合反演。图 18展示了这些噪声加权反演的结果。各个频率的单独反演采用差异原理，选取与测量值噪声水平相匹配的正则化参数，三者均得到了合理的解，分别对应 3、4 和 5 毫赫兹下的$\gamma = 1.3 \times 10^7$、8×10^7 和 7.3×10^7。

高频测量值的噪声更大，因此，4 毫赫兹和 5 毫赫兹数据需要更强的正则化，得到的反演结果也比 3 毫赫兹数据更平滑。单独反演的L曲线拐角不明显，在此仅用作一致性检查。3 毫赫兹时，L曲线拐角与差异原理给出的数值一致。4 毫赫兹和 5 毫赫兹时，拐角位于 $\gamma = 10^7$，其 γ 与 3 毫赫兹时大致相同，而差异原理倾向于选择大约高出八倍的 γ（$\gamma^{1/2}$中的≈ 2.8）。这是预期的结果：当 γ 按平均权重归一化后，L曲线基本不受总体噪声幅度影响，而差异原理则会受到影响。

相比之下，对于联合反演——我们使用全部三种频率的核和测量值来反演一个共同的纬向流——差异原理失效了。只有在正则化非常小（$\gamma \lesssim 10^4$）时，加权失配才会达到噪声期望值；此时解不符合物理规律，并且明显过拟合。另一方面，L曲线在正则化为 $\gamma = 1.8 \times 10^8$ 处仍显示出一个拐角，该处对应于一个合理的解。因此，问题并不在于正则化本身：在拐角处，加权失配仍比预期值高出 2.5 倍，所以在任何合理的 γ 下，数据都无法拟合到所述噪声水平。这说明问题出在噪声模型上，因为该模型只包含根据测量值估计的随机不确定性。最可能缺少的因素是核的不确定性。

因此，我们将一个恒定的系统不确定性 σ_{sys} 以平方和开方的方式加入每次测量的不确定性 $\sigma_{\mathrm{eff}}^2 = \sigma^2 + \sigma_{\mathrm{sys}}^2$ 中，作为对核不确定性的一阶粗略估计。我们选择 $\sigma_{\mathrm{sys}} = 0.25$s，使差异限值在 L曲线拐角处达到。因此，两项标准的一致性是通过构造实现的；但加入 σ_{sys} 后拐角本身几乎没有移动（$1.8 \times 10^8 \to 1.6 \times 10^8$），这表明 γ 的选择对噪声模型并不敏感。失配并未在三个数据集中均匀分布：加权失配除以测量数量后，在 3、4 和 5 毫赫兹下分别为 1.34、0.70 和 0.94。因此，单一的恒定 σ_{sys} 只能是近似的折衷

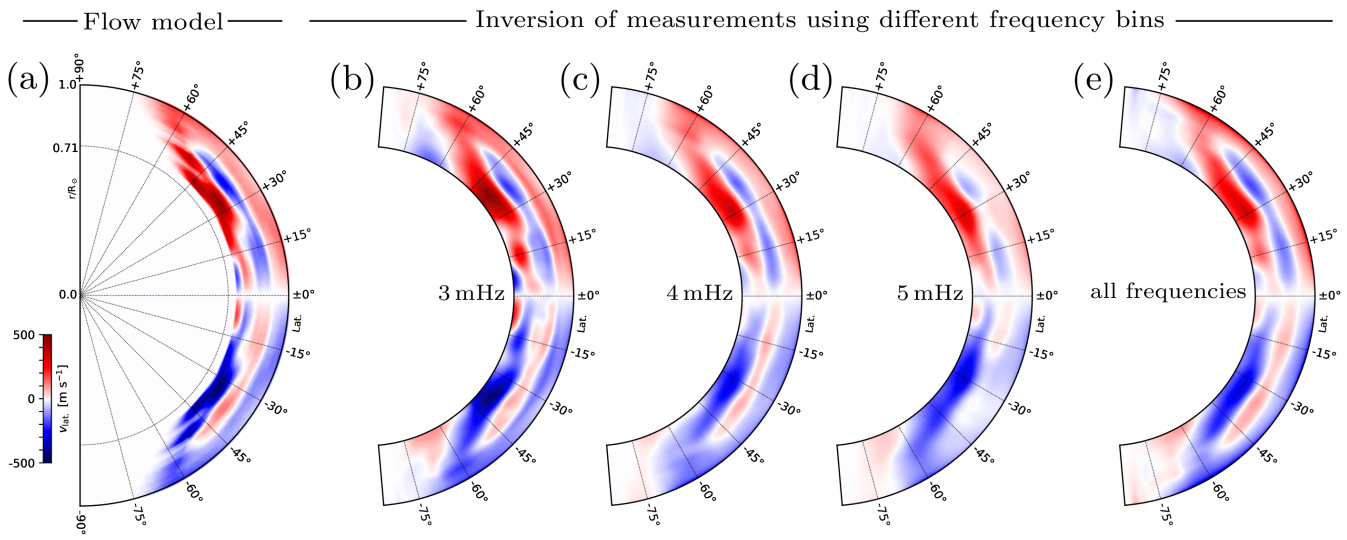

图18. 对太阳模型中采用预设双胞流的波传播数值模拟所测得的传播时间差进行反演。模型见面板(a)；面板(b)–(d)分别展示使用三个不同频率区间进行反演的结果，面板(e)则展示使用全部三个区间进行联合反演的结果。同样，所有面板使用相同的颜色标度。对于各个频率的单独反演，采用差异原理选择正则化参数，3、4和5毫赫兹对应的参数分别为 $\gamma = 1.3 \times 10^7$、8×10^7 和 7.3×10^7。联合频率反演还纳入了一个额外的系统噪声项 $\sigma_{\rm sys} = 0.25$s和一个 $\gamma = 1.6 \times 10^8$ （详见正文）。

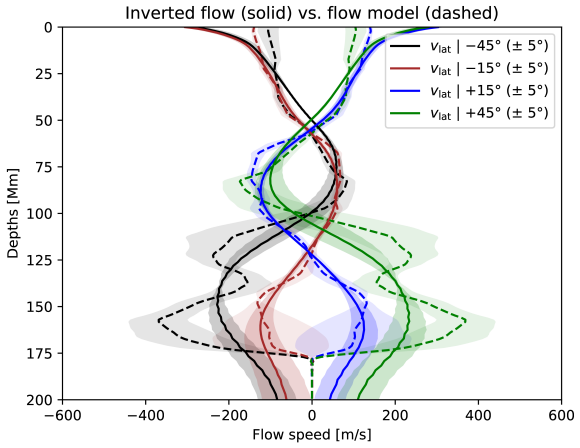

图19. 将双胞流模型与采用图18(e)中全部三个频率区间的测量值进行的反演结果进行比较。图中给出了按纬度带平均的流剖面，实线表示反演结果，虚线表示流模型。阴影显示各纬度带内的变化范围（一个标准差）。

方案，应将其理解为有效平均值，而非测得的核误差；后者很可能存在相关性并且随频率变化。图 18（e）所示的联合反演，最好被视为三个数据集之间的正则化折衷，而不是将每个数据集拟合到其噪声水平。

图 19 比较了该反演在不同纬度下得到的部分深度剖面与流模型。对于上部子午环流胞和深部内部的第二个环流胞，流向反转的深度均得到了较好的恢复，具体取决于纬度，范围为 1–7Mm。这些剖面还显示出与此前所见相似的趋势。近表层存在一个与原始流模型不匹配的梯度，这是我们的正则化反演通常会产生的结果。在区域底部附近，流模型会急剧趋近于零，而反演无法与之匹配，因为正则化会导致这些深度处的空间平均范围较宽（同样请参见第 4.4 节中的代表性平均核）。

6. 总结与结论

我们给出了针对多个时间频率（3、4 和 5 毫赫兹）下经向流传播时间测量值的基于模拟的灵敏度核，涵盖纬向和径向流分量；并通过对预设的单环流胞和双环流胞进行正演建模，再对所得的传播时间偏移（来自数值模拟）进行反演，检验了这些灵敏度核。

这些核再现了 Born近似核中熟悉的香蕉甜甜圈结构：对于水平流，敏感性集中在射线路径周围的一个区域内，沿射线路径本身的敏感性较弱，而更远处则出现旁瓣。在较高的时间频率下，主要敏感区域及其旁瓣间距更小，这表明空间分辨能力可能更高。然而在实际应用中，这一优势会被高频波振幅较小所抵消，使得真实世界的测量值噪声更大。在我们的双胞结构测试中，这体现为 4

和 5毫赫兹数据需要更强的正则化。相比之下，径向流核沿射线路径并未表现出类似的敏感性降低，反而可能在射线路径附近最强，更接近射线路径图景。水平流与径向流敏感性之间这种差异的物理起源仍有待研究，但它可能有助于深入了解有限波长效应如何改变对不同流分量的敏感性。

我们进行了两种反演。对于单胞流，我们使用 3 毫赫兹测量值，在质量守恒约束下，对完整的经向流（即纬向和径向分量）进行联合反演。尽管径向流的强度几乎比纬向流弱 20 倍，但对测量值的反演仍恢复出了径向流的符号和近似振幅。对于双胞流，我们仅反演纬向流，并分别和联合比较三个频率区间的反演结果。在这两种情况下，纬向流中流向反转的深度均得以恢复：单环流的误差在 ~ 4Mm 以内，双环流则为 1–7 Mm，其中包括较深的第二个环流。主要差异在于：流动模型中不存在的近表层梯度，以及区域底部附近的流动；在那里，流模型会急剧降至零，而平均核较为宽泛。

在联合反演中结合不同频率，暴露出噪声模型并不完备。仅考虑随机不确定性时，差异原理不适用于联合反演：在L曲线拐角处，加权失配约为预期值的2.5倍。我们认为这是由核误差导致的——而随机不确定性并未包含这些误差；与单独反演相比，采用单一共同模型的联合反演对这些误差更为敏感。加入 $\sigma_{\rm sys} = 0.25$s的恒定系统不确定性后，差异限值便移至L曲线拐角处，而拐角本身几乎没有移动。不过，这是一种粗略的修正：它无法使各频率之间的失配均匀分布，这表明系统误差与频率有关。因此，我们的联合频率反演是在三个数据集之间进行的一种正则化折中，其有效$\sigma_{\rm sys}$依据当前数据进行了校准，针对其他流场和实际观测则应重新评估。

自然的下一步是考虑依赖频率或与信号成比例的系统误差项，以相关协方差矩阵取代对角项，并联合估计正则化和系统不确定性；希望这能让多频测量得以用于提高分辨率。

致谢

本研究得到NASA日球物理支持研究计划资助（项目编号80NSSC19K0857和80NSSC24K0261），并获得NASA的SDO/HMI项目支持。本研究所用的计算资源由NASA高端计算（HEC）计划通过艾姆斯研究中心的NASA高级超级计算（NAS）部门提供。

参考文献

Baer, M.2018, findiff 软件包. https://github.com/maroba/findiffBaldner, C. S.,& Schou, J. 2012年, 《天体物理学杂志快报》, 760, L1, doi: 10.1088/2041-8205/760/1/L1Birch, A. C., Kosovichev, A. G., & Duvall, T. L., J. 2004年, 《天体物理学杂志》, 608, 580, doi:10.1086/386361B¨oning, V. G. A., Roth, M., Zima, W., Birch, A. C., & Gizon, L. 2016年, 《天体物理学杂志》, 824, 49, doi: 10.3847/0004-637X/824/1/49Braun, D. C., Birch, A. C., & Fan, Y. 2021, 《天体物理学杂志》, 911, 54, doi: 10.3847/1538-4357/abe7e4Chen, R.,& Zhao, J. 2017, 《天体物理学杂志》, 849, 144, doi: 10.3847/1538-4357/aa8eecChen, R.,& Zhao, J. 2018年, 《天体物理学杂志》, 853, 161, doi: 10.3847/1538-4357/aaa3e3Duvall, T. L., J.,Jefferies, S. M., Harvey, J. W., & Pomerantz, M. A. 1993, 《自然》, 362, 430, doi: 10.1038/362430a0Giles, P. M.,Duvall, T. L., Scherrer, P. H., & Bogart, R. S. 1997, 《自然》, 390, 52, doi: 10.1038/36294Gizon, L.,& Birch, A. C. 2002, 《天体物理学杂志》, 571, 966, doi: 10.1086/340015Gizon, L.,Cameron, R. H., Pourabdian, M., et al. 2020年, 《科学》, 368, 1469, doi: 10.1126/science.aaz7119 Hansen, P. C. 1992, 《SIAM评论》, 34, 561, doi: 10.1137/1034115Hansen, P. C., & O'Leary, D. P. 1993, 《SIAM科学计算杂志》, 14, 1487, doi: 10.1137/0914086Hartlep, T.,& Mansour, N. N. 2005,《太阳中的声波传播》,《年度研究简报》2005, 湍流研究中心, NASA艾姆斯研究中心/斯坦福大学 Hartlep, T., & Zhao, J. 2021, 《天体物理学杂志》, 909, 66, doi: 10.3847/1538-4357/abd0f7Hartlep, T., Zhao, J., Kosovichev, A. G., & Mansour, N. N. 2013, 《天体物理学杂志》, 762, 132, doi: 10.1088/0004-637X/762/2/132Jackiewicz, J., Serebryanskiy, A., & Kholikov, S. 2015, 《天体物理学杂志》, 805, 133, doi: 10.1088/0004-637X/805/2/133Kholikov, S., Serebryanskiy, A., & Jackiewicz, J. 2014, 《天体物理学杂志》, 784, 145, doi: 10.1088/0004-637X/784/2/145Kosovichev, A. G. 1996, 《天体物理学杂志快报》, 461, L55, doi: 10.1086/309989Kosovichev, A. G., & Duvall, Jr., T. L. 1997, 收录于《天体物理学与空间科学文库》第225卷, 《SCORe'96：太阳对流与振荡及其相互关系》, 编者：F. P. Pijpers、J. Christensen-Dalsgaard 和 C. S. Rosenthal, 241–260 Liang, Z.-C., & Chou, D.-Y. 2015, 《天体物理学杂志》, 809, 150, doi: 10.1088/0004-637X/809/2/150

Liang, Z.-C.,Gizon, L., Birch, A. C., Duvall, T. L., & Rajaguru,S. P. 2018, A&A, 619,A99, doi: 10.1051/0004-6361/201833673Lin, C.-H., & Chou, D.-Y. 2018, 《天体物理学杂志》, 860, 48, doi: 10.3847/1538-4357/aac026Miesch, M. S. 2005, 《太阳物理学生活评论》, 2, 1, doi: 10.12942/lrsp-2005-1Paige, C. C., & Saunders, M. A. 1982, ACM Trans. Math. Software, 8, 43 Pijpers, F. P., & Thompson, M. J. 1994, A&A, 281, 231 Rajaguru, S. P., & Antia, H. M. 2015, 《天体物理学杂志》, 813, 114, doi: 10.1088/0004-637X/813/2/114Rempel, M. 2006, 《天体物理学杂志》, 647, 662, doi: 10.1086/505170Scherrer, P. H.,Bogart, R. S., Bush, R. I., et al. 1995, SoPh, 162,129, doi:10.1007/BF00733429Scherrer, P. H.,Schou, J., Bush, R. I., et al. 2012, SoPh, 275, 207,doi: 10.1007/s11207-011-9834-2Schou,J.,Scherrer, P. H., Bush, R. I., et al. 2012, SoPh, 275, 229,doi: 10.1007/s11207-011-9842-2 Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., 等。2020年, 《自然·方法》, 17, 261, doi: https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2ˇSvanda, M., Gizon, L., Hanasoge, S. M., & Ustyugov, S. D. 2011年, A&A, 530, A148, doi: 10.1051/0004-6361/201016426Zhao, J., Bogart, R. S., Kosovichev, A. G., Duvall, T. L., J., & Hartlep, T. 2013年, 《天体物理学杂志快报》, 774, L29, doi: 10.1088/2041-8205/774/2/L29Zhao, J., & Kosovichev, A. G. 2004年, 《天体物理学杂志》, 603, 776, doi: 10.1086/381489Zhao, J., Kosovichev, A. G., & Duvall, Thomas L., J. 2001年, 《天体物理学杂志》, 557, 384, doi: 10.1086/321491Zhao, J., Nagashima, K., Bogart, R. S., Kosovichev, A. G.,& Duvall, T. L., J. 2012年, 《天体物理学杂志快报》, 749, L5, doi: 10.1088/2041-8205/749/1/L5Zhao, J., Stejko, A., & Chen, R. 2016年, SoPh, 291, 731, doi: 10.1007/s11207-016-0864-7