arXiv:2611.32980v1 [cs.CG] 24 Nov 2026

抽象瓦片组装模型中唯一组装验证的强次二次算法*

Tim Wylie

timothy.wylie@utrgv.edu 德克萨斯大学泛美分校

摘要

我们首次给出了适用于任意常数温度的二维抽象瓦片组装模型（aTAM）中唯一组装验证（UAV）的强次二次算法。二维 aTAM 中的 UAV 可在 $\widetilde{O}(n^{71/36})$ 时间内求解。此外，对于三维情形，我们将 UAV 的时间复杂度改进了一个对数因子，达到 $O(n^2/\sqrt{\log(n+2)})$；随后我们证明，即使对于高度恒为二的三维组装（准三维组装），在正交向量猜想（OVC）成立的条件下，也不存在强次二次算法，因为该问题是 coOV-困难的。此外，我们证明准三维组装的 UAV 是 P 完全的，并结合 Circuit-SETH 分析这一结果。我们还证明，对于 UAV，任何三维 aTAM 系统都可以由准三维 aTAM 系统模拟。这清楚地表明，二维与三维问题之间存在条件性差异（即使只有两层），并改进了二维和三维算法自组装领域中最基本问题之一的时间复杂度。

1 引言

抽象瓦片组装模型（aTAM）可能是最知名的自组装模型之一 [31]。尽管定义系统看似简单，但它源于王氏瓦片 [30], ，该模型是图灵完备的[31], 、内在通用的 [17, 22], ，并且已被广泛研究，用于高效组装形状 [28], 和并行计算 [7, 25]等任务。许多推广模型也相继出现，例如允许删除 RNA 瓦片 [2, 13], 、进行多阶段生长 [8, 11, 14], ，甚至使用负胶水 [9, 16]。aTAM 之所以强大，不仅因为瓦片集可以存储信息，还因为研究者一直在利用种子 [5], ，甚至温度 [10, 29], ，使系统变得更加复杂。

该模型中的一个基本问题是唯一组装验证，它询问瓦片系统是否构建出所需的组装而不会构建出其他任何组装 [4]。最初的算法由 [4],提出，其结果为 $O(n^2+nt)$，其中 n 是最终组装的大小， t 是瓦片集的大小。该算法同样适用于三维 aTAM。自该算法于 2002 年提出以来，对于任意温度，尚未取得实质性进展。对于温度为 1 的系统，UAV 可在 $O(n\log\ t)$ [15] 中求解。

人工智能声明。本文的主要结果是借助 OpenAI 6 Astra 发现的，并且作为算法自组装研究组（ASARG）的一部分。目前这里尚未收录证明，但生成的详细信息和验证代码可在 [32]公开获取。随着论文的撰写，我们将补充完整细节。本文档完全由作者撰写，作者对其中的论断负责。

*本研究部分得到了美国国家科学基金会 CCF-2329918号资助的支持。

模型维度		时间	复杂度	参考文献
aTAM	2	1	$O(n\log\ n)$	[15]
		$O(1)$	$O(n^2)$	[4]
			$\widetilde{O}(n^{71/36})$	**定理 5**
	3	1	$O(n$对数 $n)$	[15]
		$O(1)$	$O(n^2)$	[4]
			$O(n^2/\sqrt{\log(n+2)})$	**定理 1**
			coOV-困难	**定理 2**
			P 完全	**定理 3**

表 1：aTAM 中唯一组装验证的已知结果及新结果。其中，$\sim$ n 是最终组装中的瓦片数， t 是瓦片集的大小。请注意， O 忽略了对数因子。为简化表述，我们还假设 $t = O(n)$。

贡献。 我们提出了若干新成果，展示了二维和三维 UAV 更短的运行时间，并明确区分了 UAV 在二维和三维情况下的表现。有关 aTAM 中 UAV 先前结果以及本文贡献的比较，请参见表 1。为简单起见，我们在表中假设 $t = O(n)$，其中 t 是瓦片集的大小， n 是组装的大小；不过，确切结果见各定理。

2 定义

抽象瓦片组装模型。我们简要介绍抽象瓦片组装模型（aTAM）的高层定义，详见 [21] ，并请读者参阅 [28] 了解其正式定义。概括而言，抽象瓦片组装模型（aTAM）使用一组瓦片，它们能够彼此粘合以构造形状。这些瓦片通常是正方形（二维）或立方体（三维），每一侧都有胶水，可借此相互连接。胶水带有标签，用于指明其类型，从而决定它可以与哪些其他瓦片结合，以及结合的强度。带有完整标签的一种瓦片称为瓦片类型。一个瓦片集包含该系统的所有瓦片类型。如果匹配胶水的总强度大于或等于温度 τ，则单个瓦片可以附着在某个位置。组装是由一个或多个结合在一起的瓦片构成的形状。构造过程从指定的种子组装体 S周围开始。任何能够从种子组装体生成的组装体都称为可生成的组装体。如果无法再附着更多瓦片，则该组装体称为终止组装体。所有可生成的组装体都有一条路径，可以继续生长为终止组装体。如果某个终止组装体是一个瓦片系统唯一能够生成的终止组装体，则称其为唯一生成的。瓦片系统的正式表示是一个有序三元组 $\Gamma = (T,\ S,\ \tau)$，分别对应瓦片集、种子组装体和温度参数。

准三维。 对于在 Z 维方向上的高度仅为 2 的三维 aTAM 系统，自组装文献中常使用术语 准三维 [12, 18, 19, 20]。我们采用稍严格的准三维 aTAM 系统定义：任一瓦片类型只能出现在上层或下层。也就是说，瓦片集是所有瓦片的一个划分 $T = \{T_u, T_l\}$ ，每个瓦片只能出现在 $Z = 0$ 层或 $Z = 1$ 层。虽然并非必须如此，但我们规定，上层集合 T_u 中的每个瓦片，其顶面都带有空胶水；而 T_l 中的每个瓦片，其底面都带有空胶水。即使未明确说明，本工作中的每个归约都针对这一更严格的定义。

问题 1 （唯一组装验证）。 给定一个 *aTAM* 系统 $\Gamma =$（T、S、τ）和一个组装 A，它是否会唯一地构建组装 A?

2.1 计算问题与假设

本文所使用的布尔电路是一个有限的有向无环图，其中指定了输入顶点 $\wedge$、$\vee$、$\neg$门以及一个指定的输出。我们使用双输入 AND 和 OR 门。设 v 为输入变量的数量， s 为门和连线的数量，不包括输入顶点。

问题 2 （电路可满足性（CircuitSAT））。 给定一个布尔电路 C： $\{0,1\}^v \to \{0,1\}$， C是否存在满足赋值?

如果 C 是一个具有 v 个输入的电路，这些输入被划分为长度为 r_A 和 r_B的块，且满足 $v = r_A + r_B$，那么 $C \in$CircuitSAT 等价于（C， $\{0,1\}^{r_A}$， $\{0,1\}^{r_B}$） $\in$CircuitSP。这将 CircuitSAT 表述为在完整布尔域上的满足对搜索。CircuitSAT 的输入是 C，而 CircuitSP 的输入是两个列表。因此，构造完整域是一种指数规模的转换。对于平衡划分$r_A = \lfloor v/2 \rfloor$， $r_B = \lceil v/2 \rceil$，这些列表的大小为 $N_A = 2^{\lfloor v/2 \rfloor}$， $N_B = 2^{\lceil v/2 \rceil}$。

CircuitSAT 还有另一种已有这一概念的推广。带有$k = 2$ 的加权电路可满足性等价于 CircuitSP [3]。

问题 3 (电路满足对 **(**CircuitSP**)** [1]**)**。 给定一个布尔电路 C： $\{0,1\}^{r_A} \times \{0,1\}^{r_B} \to \{0,1\}$，以及两个显式表示的有限列表 $A = (a_1, \ldots, a_{N_A})$和 $B = (b_1, \ldots, b_{N_B})$，其中 $a_i \in \{0,1\}^{r_A}$且 $b_j \in \{0,1\}^{r_B}$。所列字符串中是否存在一对能够满足电路 C?

如果将 CircuitSP 限定为 $N_A = N_B = 1$，就得到电路值问题。CVP 在确定性对数空间多一归约下是 P 完全的。

问题 4 (电路值问题 **(**CVP**))**。 给定一个布尔电路 C： $\{0,1\}^v \to \{0,1\}$ 和一个完全指定的赋值 $z \in \{0,1\}^v$，$C(z) = 1$吗?

问题 5 （正交向量（OV））。 给定两个向量列表 $A =$ （$a_1, \ldots, a_{N_A}$） $B =$ （$b_1, \ldots, b_{N_B}$），其中的向量属于 $0,1^d$。是否存在一对正交向量?

定义 1 （正交向量猜想（OVC） [24]）。 对于每个常数 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在一个常数 $c \geq 1$ ，使得没有任何算法能在时间 $O\left(N^{2-\varepsilon}\right)$内求解每个由两个各含 ***(N)*** 个向量的列表组成的平衡 ***OV*** 实例，其中向量的维度为 $d = \lceil c \log N \rceil$。这里 $N \geq 2$。这是 ***OVC*** 的对数维表述。

定义 2 （电路强指数时间假设（Circuit-SETH） [26]） 。 不存在常数 $\delta \in (0,1)$ 和 $k \geq 0$，也不存在一种算法，能够判定每个大小为 s 、含有 v 个变量的电路的 ***CircuitSAT***，且其运行时间为 $O\left(2^{(1-\delta)v}(s+v+1)^k\right)$。

推论 1。 假设 ***Circuit-SETH***，则不存在固定常数 $\varepsilon \in (0、1)$ 和 $k \geq 0$，使得能够在时间 $O\left(N^{2-\varepsilon}(s+v+1)^k\right)$ 内求解每个平衡电路***SP***实例的算法。

3 贡献

3.1 二维和三维的对数级改进

第一个结果是将三维 UAV 的运行时间进行了对数级改进。该简化同样适用于二维。该改进使用小型正方形区域，并枚举每个边界输入状态。枚举遵循一般的四个俄罗斯人原理 [6, 27] 和移位 [23]。

定理 1 (二维/三维 UAV)。 给定一个具有 $\tau \geq 1$ 的二维或三维 ***aTAM*** 系统，可以在时间内求解 ***UAV*** e

$$O\left(\frac{n^2}{\sqrt{\log(n+2)}} + (n+t)\log(n+t+2)\right)$$

使用 $O(n^{3/2}+t)$ 个单元，或使用 $O(n^{1+\eta}+t)$ 个单元，其中任意固定有理数 $0 < \eta < 1$ 对应的常数取决于 η。当 $t = O(n)$ 时，这给出 $O(n^2/\sqrt{\log(n+2)})$。

3.2 3DUAV 分离

我们在定理 1 中证明，三维 UAV 存在一种相较于二次时间有对数级改进的算法；现在，我们通过下界和一些分析来补充这一结果。首先，我们证明三维 UAV 是 coOV-困难的；根据正交向量猜想，这意味着不存在强次二次算法（即使对于高度为二的常数高度组装也是如此）。接着，我们给出从电路满足对到 nonUAV 的一种更一般的归约，可将其视为 OV 的推广（高度仍为二的常数）。将这一构造应用于所有半赋值对，可得到 Circuit-SAT 归约；在一般的 Circuit-SETH 假设下，这也排除了真正的次二次算法。最后，我们利用电路值问题证明三维 UAV 是 P 完全的。

尽管从技术上说，本节的其他结果已蕴含 coOV-困难性，但我们仍在此提及，因为 coOV-困难性已有较为充分的研究，而且它展示了三维瓦片系统灵活性的另一个方面。

定理 2 (三维 UAV 是 coOV-困难的)。 给定一个具有 $\tau \geq 1$ 的三维 *aTAM* 系统，即使组装的高度为两层，唯一组装验证也是 *coOV*-困难的。

下面的定理通过从 CVP 到温度为 2、具有单例种子的高度为 2 的组装的 UAV 的对数空间归约得到证明。

定理 3 (三维 UAV 是 P 完全的)。 给定一个具有 $\tau \geq 1$ 的三维 *aTAM* 系统，即使组装的高度为两层且具有单例种子，唯一组装验证仍是 *P* 完全的。

尽管下一个结果与运行时间无关，我们仍在此给出它，因为该构造及其存在性表明，三维 aTAM 系统的全部能力都源于拥有两层瓦片。这里不提供证明，但其基本技术与 CVP 归约相似。简而言之，可以将各个高度层视为在二维平面上彼此相邻放置的板层。然而，在构建每一层时，瓦片的放置实际上由 OR 门和 AND 门控制；这些门根据原系统是否能够放置相应瓦片来决定是否放置它们。

我们不对模拟作形式化定义，但在此结果中，我们指的是所有可生成组装路径在该模拟中都有一条等价路径。由于模拟中的通信延迟，这构成了从模拟系统到原系统的多对一满射。因此，我们只能保证它对 UAV 是一种保数归约。由于此处未给出确切的模拟定义，因此我们将其列为一项主张，而非定理。

主张 1 (板层模拟)。 每个三维 *UAV* 实例都可以通过多项式开销转换为一个等价的 *UAV* 实例，其模拟器仅限于两个层，温度为二，且具有单例种子。

3.2.1 Circuit-SETH

尽管 CircuitSP 问题并不属于典型的困难性类别，我们仍用它在 Circut-SETH 假设下证明二次下界。

定理 4 (三维 UAV 是 CircuitSP 困难的)。 给定一个带有 $\tau \geq 1$ 的三维抽象瓦片组装模型系统，即使组装体的高度为二，唯一组装验证问题仍是 *coCircuitSP* 困难的。

推论 2. 假设 *Circuit-SETH*，对于每个固定的 $\varepsilon > 0$，不存在能够在$O\left((n+t)^{2-\varepsilon}\right)$时间内判定三维 *UAV* 的算法，其中 n 是目标组装的大小，t 是瓦片类型的数量。即使 $t = O(n)$ 且组装的高度限制为两层，该条件下界仍然成立。

3.3 二维次二次算法

下面陈述利用瓦片集的平面性质所取得的结果。通过预处理小规模群组交互，我们可以将组装分解为更小的边界区域，并处理区域交互和边界条件。通过仔细选择群组大小，我们可以实现以下结果。

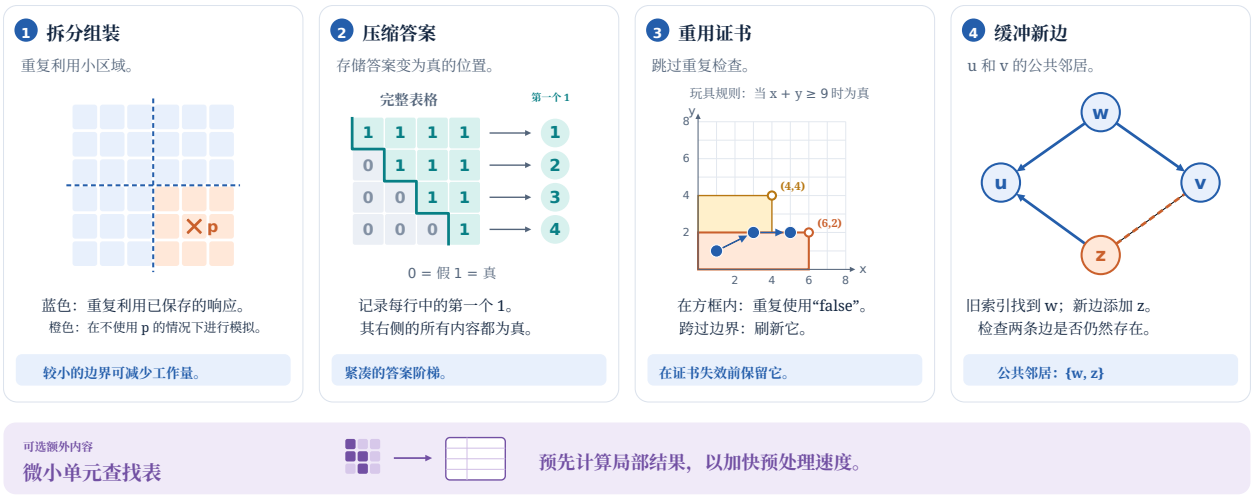

图1：所使用主要技术的人工智能图像概览。

定理5 （二维 UAV）。 给定一个具有 $\tau \geq 1$ 的二维 *aTAM* 系统，可以在以下时间内解决 *UAV*：

$$O(n^{71/36}\Lambda^{37/18} + P), \ s.t. \quad \Lambda = 1 + \log(n+2), \quad P = (n+t)\log(n+t+2)$$

时间使用 $O(n^{19/12}\Lambda^{11/6} + n + t)$ 空间。如果 $t = O(n)$，那么二维 *UAV* 可在 $O(n^{79/40}) = O(n^{1.975})$ 时间内求解，并使用 $O(n^{19/12}\Lambda^{11/6})$ 空间。

虽然这里不展开介绍细节，但完整验证可见 [32]。该算法使用平面图分隔器、剥离方法来移除依赖于已有瓦片的瓦片/顶点、用于确定放置顺序的排序约束信息、边界状态简化、几何范围搜索、稀疏接触图、阈值前沿压缩、事件驱动监控，以及对瓦片交互进行分组的预处理。图1简要概述了实现次二次运行时间所采用的最重要技术。

参考文献

[1] Amir Abboud、Thomas Dueholm Hansen、Virginia Vassilevska Williams 和 Ryan Williams。《利用编辑距离及其相关方法模拟分支程序：或者说，削去多对数项即可得到一个下界》。载于《 48th *ACM*计算理论研讨会论文集，STOC'16，第375–388页，美国纽约州纽约市，2016年。计算机协会。

[2] Zachary Abel、Nadia Benbernou、Mirela Damian、Erik D. Demaine、Martin L. Demaine、Robin Flatland、Scott D. Kominers 和 Robert Schweller。通过自组装和RNase酶进行形状复制。载于*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，SODA'10，第1045–1064页，2010年。

[3] Karl A. Abrahamson、Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。固定参数可处理性与完备性 I V：关于 w[p] 及 PSPACE 类比问题的完备性。纯粹与应用逻辑年刊，73(3)：235–276，1995年。

[4] Leonard Adleman、Qi Cheng、Ashish Goel、Ming-Deh Huang、David Kempe、Pablo Moisset de Es- pan´es 和 Paul Wilhelm Karl Rothemund。自组装中的组合优化问题。载于《 34th *ACM*计算理论研讨会年会，STOC '02，第23–32页，2002年。

[5] Andrew Alseth 和 Matthew J. Patitz。种子的必要性（抽象瓦片组装模型中）。载于 ACM-SIAM离散算法研讨会，SODA'23，第4540–4589页，2023年。[6] V. L. Arlazarov、Y. A. Dinitz、M. A. Kronrod 和 I. A. Faradzhev。有向图传递闭包的经济构造。苏联科学院学报，194(3)：487–488，1970年。俄文。[7] Yuriy Brun。瓦片装配模型中的算术计算：加法与乘法。理论计算机科学，378：17–31，2007年。[8] David Caballero、Timothy Gomez、Robert Schweller 和 Tim Wylie。分阶段自组装中的隐蔽计算：验证是 PSPACE完全的。载于 29th 欧洲算法研讨会，ESA'21，2021年。[9] Angel A. Cantu、Austin Luchsinger、Robert T. Schweller 和 Tim Wylie。自组装电路中的隐蔽计算。Algorithmica，83：531–552，2019年。[10] Cameron Chalk、Austin Luchsinger、Robert Schweller 和 Tim Wylie。使用高温和常数种类瓦片实现任意形状的自组装。载于 26th 欧洲算法年会，ESA'18，2018年。[11] Cameron T. Chalk、Eric Martinez、Robert T. Schweller、Luis Vega、Andrew Winslow 和 Tim Wylie。一般形状的最优分阶段自组装。Algorithmica，80(4)：1383–1409，2018年。[12] Matthew Cook、Yunhui Fu 和 Robert Schweller。温度1自组装：三维中的确定性装配与二维中的概率装配。载于 22nd ACM-SIAM离散算法研讨会，第570–589页。工业与应用数学学会，2011年。[13] Erik Demaine、Matthew Patitz、Robert Schweller 和 Scott Summers。使用RNase酶自组装任意形状：以小尺度因子达到Kolmogorov界。计算机科学理论方面研讨会（STACS2011），9，2010年1月。[14] Erik D. Demaine、S´andor P. Fekete、Christian Scheffer 和 Arne Schmidt。全连接分阶段自组装的新几何算法。理论计算机科学，671：4–18，2017年。计算自组装。[15] David Doty。层次化自组装中的可生产性。Natural Computing，15(1)：41–49，2016年。[16] David Doty、Lila Kari 和 Benoˆıt Masson。不可逆自组装中的负相互作用。Algorithmica，66(1)：153–172，2013年。[17] David Doty、Jack H Lutz、Matthew J Patitz、Robert T Schweller、Scott M Summers 和 Damien Woods。瓦片装配模型是内在通用的。载于 IEEE 53rd 计算机科学基础年会，FOCS'12，第302–310页。IEEE，2012年。[18] Phillip Drake、Matthew J. Patitz、Scott M. Summers 和 Tyler Tracy。抽象瓦片组装模型中的图案自组装。Natural Computing，24：731–761，2025年。[19] David Furcy、Samuel Micka 和 Scott M. Summers。温度1下三维自组装正方形的最优程序大小复杂度。Algorithmica，77(4)：1240–1282，2017年。[20] David Furcy、Scott M. Summers 和 Logan Withers。三维中非协作地唯一自组装细长矩形的瓦片复杂度上下界改进。载于 27th DNA计算与分子编程国际会议，DNA'21第205卷，第4:1–4:18页，2021年。[21] Timothy Gomez、Robert Schweller 和 Tim Wylie。预构建aTAM中的隐蔽计算。载于 37th 加拿大计算几何会议，（CCCG'25），第197–203页，2025年。

[22] Daniel Hader、Aaron Koch、Matthew J Patitz 和 Michael Sharp。维数、扩散和有向性对抽象瓦片组装模型中内在通用性的影响。载于《 31st *ACM-SIAM*离散算法年度研讨会论文集，第 2607–2624 页。SIAM，2020 年。[23] Dorit S. Hochbaum 和 Wolfgang Maass。图像处理和超大规模集成电路中的覆盖与装箱问题近似方案。《*ACM*学报》，32(1):130–136，1985 年。[24] Daniel M. Kane 和 Richard Ryan Williams。分支程序和公式的正交向量猜想。载于 10th 理论计算机科学创新会议，第 124 卷$ITCS'19$，第 48:1–48:15 页，2019 年。[25] Alexandra Keenan、Robert Schweller、Michael Sherman 和 Xingsi Zhong。算法自组装中的快速算术。$Natural\ Computing$，15(1):115–128，2016 年 3 月。[26] Michael Lampis。电路与后门：Seth 的五种面貌。载于*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，SODA，第 1945–2001 页，2026 年。[27] William J. Masek 和 Michael S. Paterson。一种更快的字符串编辑距离计算算法。《计算机与系统科学杂志》，20(1):18–31，1980 年。[28] Paul WK Rothemund 和 Erik Winfree。自组装正方形的程序大小复杂度。载于《 32nd *ACM*计算理论年度研讨会论文集，第 459–468 页，2000 年。[29] Robert Schweller、Andrew Winslow 和 Tim Wylie。高温双手瓦片自组装的复杂度。载于 Robert Brijder 和 Lulu Qian 编，*DNA*计算与分子编程，第 98–109 页，Cham，2017 年。Springer International Publishing。[30] Hao Wang。通过模式识别证明定理——II。《贝尔系统技术杂志》，40(1):1–41，1961 年。[31] Erik Winfree。*DNA*的算法自组装。博士论文，加州理工学院，1998 年 6 月。[32] Tim Wylie。唯一组装验证。github.com/asarg/AI-assisted-research/tree/main/ papers/UAV，2026 年。