arXiv:2611.32988v1 [cond-mat.supr-con] 24 Nov 2026

朗道能级中的拓扑安德森超导体

Uddalok Nag, [1,2] Koji Kudo, [3] 和 J. K. Jain [1,2,4]

[1] *Department of Physics, 104 Davey Lab, The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania 16802, USA*
[2] *Center for Theory of Emergent Quantum Matter,The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania 16802, USA* [3] *Department of Physics, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, Japan*
[4] *Lodha Theoretical Physics Institute, 17th Floor,Lodha NCP Supremus, Wadala (E), Mumbai 400037, India*

具有奇数 Bogoliubov-de Gennes（BdG）陈数 C_{BdG} 的二维超导体引起了广泛关注，这类超导体通常称为拓扑超导体，因为据预测，它们能够容纳马约拉纳零模。由于磁场会产生具有非零陈数的朗道能级（LL），因此自然会产生这样的问题：施加磁场能否使一种由自旋费米子构成、具有Rashba自旋轨道耦合的常规二维超导体进入拓扑态？对于格点内吸引相互作用，BdG 方程的自洽解给出的相图几乎处处都是具有偶数 C_{BdG} 的超导态；随着化学势等参数变化，这些态会从一个陈数值跃迁至另一个。我们预测，引入会使朗道能级展宽并相互混合的安德森型格点内无序后，在跃迁区域会产生拓扑超导性发生渗流的态。这种拓扑安德森超导态是无序能够产生拓扑非平庸态的又一例证。

一、引言

在拓扑超导体中，Bogoliubov–de Gennes（BdG）准粒子态具有非平庸的能带拓扑，从而使BdG陈数取得奇整数值 C_{BdG} （定义见下文）。一个典型例子是手征 $p_x + ip_y$ 超导体，其非平庸拓扑在边界产生手征马约拉纳模，并在涡旋中束缚马约拉纳零模 [1–5]。已有研究提出，这类激发遵循非阿贝尔编织统计，并可为实现容错量子计算提供途径 [6–14]。需要指出的是，具有非零偶数BdG陈数的超导体也被称为拓扑超导体，但它们不具有马约拉纳零模；在下文中，拓扑超导性一词将仅限于BdG陈数为奇整数 C_{BdG}的情形。

目前尚未有天然存在的电子拓扑超导体得到确凿鉴定。分数量子霍尔效应是一个能够自然产生类似物理的体系。许多偶数分母分数量子霍尔态已经被观测到 [15–20] ，并被解释为具有 p波、 f波及其他类型配对的复合费米子拓扑超导体 [1, 21–26]。

已有研究提出，可以从常规系统出发构造拓扑超导性。一个典型例子是：将三维拓扑绝缘体的表面态与普通的 s 波超导体耦合，从而在其表面态中诱导邻近超导性；超导性与具有非平庸自旋-动量锁定的正常态能带结构相结合，产生有效的拓扑超导态 [11, 27, 28]。这表明了一种普遍的策略：从具有非平庸拓扑的电子能带出发，并在其中引入超导配对。

朗道能级（LL）为实现这一构想提供了尤为自然的平台，因为每个朗道能级都具有非零陈数。这推动了人们对量子霍尔-超导体杂化系统的广泛研究；在这类系统中，量子霍尔系统通过邻近效应与常规超导体耦合 [29–41]。在此类系统中，邻近诱导超导体的阿布里科索夫涡旋晶格与相邻超导体的涡旋晶格结构相同。这种晶格结构会强烈限制可能出现的拓扑相。特别是，对于常规涡旋晶格（如六角形或正方形），BdG谱的简并性会迫使陈数以偶数为单位变化，因此不存在具有奇数 C_{BdG} 的相 [33, 37, 42, 43]。

另一种可能性是本征量子霍尔超导性：超导体暴露于产生朗道能级的磁场中时，便会产生这种超导性。在这里，我们考虑占据朗道能级的电子彼此之间存在吸引相互作用 [44–46]。在这种情况下，超导序参量和涡旋结构并非外部施加的，这与上述考虑邻近效应诱导超导性的模型不同；相反，它们是问题解的一部分。Schirmer等人 [43] 研究了自旋电子在具有 Rashba 自旋轨道耦

pling于垂直磁场中，通过求得格点内吸引相互作用下BdG平均场方程的自洽解。他们发现拓扑超导的区域非常小，但表明引入周期性单粒子超晶格势可以在很大的参数范围内产生拓扑超导。该超晶格势展宽了原本狭窄的类朗道能带，并改变了

涡旋结构，其中拓扑超导在阿布里科索夫涡旋结合形成“巨” h/e 涡旋时表现得最为显著。这种物理现象在超导性由近邻效应诱导的模型中不可能出现，并表明暴露于磁场中的超导体的物理性质可能与近邻诱导超导体的物理性质存在根本差异。

众所周知，即使相应的洁净系统中不存在拓扑相，无序也能诱导出拓扑相。此前已有研究表明，无序可以将平庸金属转变为拓扑绝缘体，这种现象被称为拓扑安德森绝缘体 [47–50]。在许多关于近邻诱导超导性的研究中，人们发现无序也能重组超导体的电子结构和拓扑性质 [39, 51–53]。在二维自旋轨道耦合超导体中，无序可以将洁净系统中两个拓扑扇区之间的直接相变分裂，从而产生具有不同陈数的额外中间相 [53]。最近，Kudo等人 [39] 研究了 Rashba 耦合量子霍尔–超导混合系统中的无序。在他们的模型中，配对由近邻效应诱导，来源于一种 II s-波超导体，而 BdG 哈密顿量则投影到 Rashba 耦合的朗道能级上。随机杂质会使朗道能级展宽；无序与近邻诱导配对的共同作用产生了一个具有奇数 BdG 陈数的中间拓扑超导相。

本文提出，无序也可以为本征量子霍尔超导体中的拓扑超导提供一条途径。我们研究垂直磁场中具有Rashba自旋轨道耦合的自旋电子，它们通过格点吸引相互作用耦合；在存在随机格点势的情况下，我们根据 BdG 方程自洽地确定超导序参量。我们发现，无序会展宽并混合原本狭窄的类朗道能带，还能产生奇数值的BdG陈数。确定 BdG陈数存在一个难点：对于给定的一组参数，BdG陈数取决于无序。然而，我们研究了无序构型系综；如果同一个陈数出现的频率超过 50%，就将其指定为代表贯穿体系的超导序参量的陈数。在这一条件下，我们发现，尽管相应的洁净系统除若干孤立点外均呈现偶陈数相，无序仍会在参数空间中形成具有奇数值 BdG陈数的扩展区域。具体而言，当化学势位于无序展宽的最低类朗道能带内时，我们发现存在一个具有 $C_{\mathrm{BdG}} = -1$ 的稳健区域。我们的结果表明，无序能够在本征量子霍尔超导体中产生拓扑超导；其中超导序参量及其空间结构均由自洽计算得出，而非通过邻近耦合预先设定。

II. 模型

我们研究垂直磁场和格点势 V_i作用下方形晶格上的自旋-1/2 费米子。后者用于模拟无序。按照标准做法，在计算中我们将晶格划分为大小为 $N \times M$ 的晶胞，其中包含MN 个晶格点，并选择磁场，使得该晶胞内包含整数个磁通量子。我们将其称为磁性原胞（MUC）。为简便起见，在数值实现中，我们令 V_i 具有与磁性原胞相同的周期性，从而能够在与磁性原胞对应的约化布里渊区内的动量空间中进行计算。

微观哈密顿量为

$$H = H_0 + H_{\mathrm{int}}, \tag{1}$$

with

$$H_0 = \sum_{\langle ij \rangle} c_i^\dagger e^{iA_{ij}} \left[-t\sigma_0 - iV_{\mathrm{so}}(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{d}}_{ij}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] c_j + \mathrm{H.c.} + \sum_i (V_i - \mu) c_i^\dagger c_i, \tag{2}$$

and

$$H_{\mathrm{int}} = -U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, \qquad U > 0. \tag{3}$$

其中 $c_i = (c_{i\uparrow},\ c_{i\downarrow})^T$，这里 $c_{i\sigma}^\dagger (c_{i\sigma})$ 分别表示在格点 i 上产生（湮灭）自旋为 σ 的费米子，σ_0 是自旋空间中的单位矩阵，$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$ 表示泡利矩阵，$\hat{}\mu$是化学势，$\mathbf{d}^{ij}$ 是从 i 指向 j 的定向最近邻键上的单位矢量，而 $\hat{}\mathbf{z}$ 是垂直于晶格的单位矢量。参数 V_{so}表示Rashba自旋轨道耦合的强度。格点内吸引相互作用的强度为 U，且 $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$。

垂直磁场通过最近邻跃迁和自旋轨道耦合矩阵元中的 Peierls相位引入。采用的约定是：沿基本方格定向求和 A_{ij} 得到穿过该方格的磁通：

$$\sum_{\square} A_{ij} = 2\pi \frac{\Phi_p}{\Phi_0}, \qquad \Phi_0 = h/e, \tag{4}$$

其中 Φ_p 为每个方格的磁通。磁通被选为在上述定义的 $M \times N$ 磁性晶胞上具有周期性。如果穿过一个磁性晶胞的总磁通为 $a\Phi_0$，其中a 为整数，那么

$$\Phi_p = \frac{a}{MN} \Phi_0. \tag{5}$$

为简化计算，我们忽略塞曼耦合，因此垂直磁场仅通过轨道耦合起作用。

无序势在一个磁性晶胞内的 MN 个格点上独立生成。我们首先选择

$$\widetilde{V}_i \in \left[-\frac{W_{\rm dis}}{2}, \frac{W_{\rm dis}}{2}\right] \tag{6}$$

从均匀分布中取样，随后减去磁性晶胞内的平均值，

$$V_i = \widetilde{V}_i - \frac{1}{MN}\sum_{j\in \rm MUC} \widetilde{V}_j. \tag{7}$$

因此，每个无序实现都满足

$$\sum_{i\in \rm MUC} V_i = 0. \tag{8}$$

A. BdG平均场解耦

按照通常的Bogoliubov–de Gennes平均场处理，我们在配对通道中对吸引性现场相互作用进行解耦。定义现场自旋单态超导序参量

$$\Delta_i = U\left\langle c_{i\downarrow} c_{i\uparrow}\right\rangle. \tag{9}$$

这里我们研究零温情形，$\langle\mathcal{O}\rangle$表示 $\mathcal{O}$的基态期望值。根据此定义，平均场相互作用为

$$H_{\rm int}^{\rm MF} = -\sum_i \left[\Delta_i c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\downarrow}^\dagger + \Delta_i^* c_{i\downarrow} c_{i\uparrow}\right] + \sum_i \frac{|\Delta_i|^2}{U}. \tag{10}$$

本计算中忽略了吸引相互作用的Hartree贡献。允许超导序参量在磁性原胞内随格点变化，包括幅值和相位的变化。因此，完整的平均场哈密顿量为

$$H_{\rm MF} = H_0 + H_{\rm int}^{\rm MF}, \tag{11}$$

其中 H_0 由方程（2）给出。

方程（11）是进行自洽 Bogoliubov–de Gennes 计算的起点。在磁场和无序存在时，超导序参量可以在磁性晶胞内的每个格点独立调整。

B. 傅里叶变换

由于 Peierls相位模式和格点势都以磁性晶胞为周期，因此可以方便地用晶胞矢量 $\mathbf{R}$和子晶格指标 $\alpha = 1, \ldots, MN$来标记磁性晶胞内的每个晶格格点：

$$i \equiv (\mathbf{R}, \alpha). \tag{12}$$

磁性晶胞的原始平移矢量为 $\mathbf{a}_1 = N\hat{x}$ 和 $\mathbf{a}_2 = M\hat{y}$，我们将 $\mathbf{R} = n_x\mathbf{a}_1 + n_y\mathbf{a}_2$ 记作$n_x = 0, 1, \ldots, N_x - 1$ 以及 $n_y = 0, 1, \ldots, N_y - 1$。这里，$N_x$ 和 N_y 分别是沿 x方向和 y方向的磁性晶胞数。

我们引入布洛赫算符

$$c_{\mathbf{R},\alpha,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} c_{\mathbf{k},\alpha,\sigma}, \tag{13}$$

其中 $A = N_xN_y$ 和$\mathbf{k}$ 属于与磁性晶胞相关的约化布里渊区：

$$k_x \in \left[-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right), \qquad k_y \in \left[-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}\right). \tag{14}$$

对于具有周期性边界条件的有限系统，允许的离散动量可选为

$$k_x = \frac{2\pi m_x}{N_xN}, \qquad k_y = \frac{2\pi m_y}{N_yM}, \tag{15}$$

其中 $m_x = 0, 1, \ldots, N_x - 1$且 $m_y = 0, 1, \ldots, N_y - 1$。在热力学极限下，对 $\mathbf{k}$ 的求和变为对式（14）中约化布里渊区的积分。

对于每个$\mathbf{k}$，我们首先定义自旋单粒子旋量

$$\psi_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k},1,\uparrow} \\ \vdots \\ c_{\mathbf{k},MN,\uparrow} \\ c_{\mathbf{k},1,\downarrow} \\ \vdots \\ c_{\mathbf{k},MN,\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

以及相应的南部旋量

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}} \\ (\psi_{-\mathbf{k}}^\dagger)^T \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中 $(\psi_{-\mathbf{k}}^\dagger)^T$ 是 $\psi_{-\mathbf{k}}^\dagger$的转置。在此基底下，平均场哈密顿量具有标准形式

$$H_{\rm MF} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{H}_{\rm BdG}(\mathbf{k}) \Psi_{\mathbf{k}} + E_{\rm const}, \tag{18}$$

其中，$\mathcal{H}_{\rm BdG}(\mathbf{k})$ 是 $4MN\times 4MN$博戈留波夫-德热讷矩阵，定义为

$$\mathcal{H}_{\rm BdG}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} h(\mathbf{k}) - \mu\,\mathbb{1} & \tilde{\Delta} \\ \tilde{\Delta}^\dagger & -[h(-\mathbf{k}) - \mu\,\mathbb{1}]^* \end{pmatrix}. \tag{19}$$

这里， $h(\mathbf{k})$ 是动量空间中 H_0 的 $2MN\times 2MN$ 矩阵，不包括化学势项。位点自旋单态配对块表示为

$$\widetilde{\Delta}=\begin{pmatrix}0 & -\widehat{\Delta}\\ \widehat{\Delta} & 0\end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\widehat{\Delta}=\mathrm{diag}\left(\Delta_1^{\mathrm{MUC}},\Delta_2^{\mathrm{MUC}},\ldots,\Delta_{MN}^{\mathrm{MUC}}\right), \tag{21}$$

其中，根据 MUC 周期性， $\Delta_{(\mathbf{R},\alpha)}\equiv\Delta_\alpha^{\mathrm{MUC}}$与 MUC 位置 $\mathbf{R}$ 无关。 Δ 的反对称自旋结构 $\widetilde{}$ 源于格点内配对的费米子反对称性。

BdG 本征值问题为

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}(\mathbf{k})\Phi_{n,\mathbf{k}}=E_{n,\mathbf{k}}\Phi_{n,\mathbf{k}}, \tag{22}$$

其中，本征值按 $E_{1,\mathbf{k}}\le E_{2,\mathbf{k}}\le\cdots\le E_{4MN,\mathbf{k}}$ 的顺序排列。由于粒子-空穴对称性，我们有$E_{i,\mathbf{k}}=-E_{4MN-i+1,-\mathbf{k}}$。对于零能处有能隙的系统，前 $2MN$ 个态因此构成负能 BdG 子空间。

C. 自洽方程

序参量必须满足式（9）中的平均场定义。数值计算中，通过在约化布里渊区的一组 $\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}(\mathbf{k})$ 网格$\mathbf{k}$ 点上对角化，利用所得 BdG 本征矢计算格点内反常关联函数，并据此获得更新后的序参量。

自洽方程可示意地写为

$$\Delta_\alpha^{\mathrm{MUC}}=\frac{U}{A}\sum_{\mathbf{k}}\left\langle c_{-\mathbf{k},\alpha,\downarrow}c_{\mathbf{k},\alpha,\uparrow}\right\rangle, \tag{23}$$

为求得自洽解，我们从随机选取的序参量初始构型 $\{\Delta_\alpha^{\mathrm{MUC}}\}$开始，将 BdG 哈密顿量对角化，并根据式（23）计算序参量。然后将其作为输入构型，迭代这一过程，直至收敛。收敛的定义为相对差值 $|(\Delta_\alpha^{\mathrm{MUC}})^{\mathrm{new}}-(\Delta_\alpha^{\mathrm{MUC}})^{\mathrm{old}}|/|(\Delta_\alpha^{\mathrm{MUC}})^{\mathrm{old}}|\le 10^{-5}$ 对所有 α均满足要求。为确保所得解不是局部极小值，我们从多个（~ 10）初始构型出发，确认得到相同的解。在几乎所有情况下，所有初始构型都会产生相同的最终解。

对于此处讨论的无序计算，采用相同 U、 μ、 V_{so} 和 t 取值下相应洁净系统中收敛的序参量作为初始条件。随后在存在无序势的情况下重复进行自洽计算，使序参量能够在磁性晶胞（MUC）内随空间位置变化。

在下文的相图中，我们使用以下指标来表征超导性的强度：

$$\Delta_{\max}=\max_\alpha|\Delta_\alpha^{\mathrm{MUC}}|. \tag{24}$$

对于收敛解，我们将 BdG 谱隙定义为

$$E_{\mathrm{gap}}=\min_{\mathbf{k}}E_{2MN+1,\mathbf{k}}. \tag{25}$$

D. 正常态能带基底中的配对

自洽 BdG 计算得到磁性晶胞的序参量 $\Delta_\alpha^{\mathrm{MUC}}$，其中 $\alpha=1,\ .....,\ MN$，因此得到$\widetilde{}$配对矩阵 Δ，其定义见式（20）。将此配对表示在正常态哈密顿量 $h(\mathbf{k})$ 的本征基底中很有用。

我们首先对正常态布洛赫哈密顿量进行对角化，

$$h(\mathbf{k})\mathbf{v}_n(\mathbf{k})=\epsilon_n(\mathbf{k})\mathbf{v}_n(\mathbf{k}),\qquad n=1,\ldots,2MN, \tag{26}$$

其中本征值按照 $\epsilon_1(\mathbf{k})\le\epsilon_2(\mathbf{k})\le\cdots\le\epsilon_{2MN}(\mathbf{k})$ 的顺序排列。随后，我们将正常态本征矢量汇集为酉矩阵

$$\mathcal{V}(\mathbf{k})=\left(\mathbf{v}_1(\mathbf{k})\ \mathbf{v}_2(\mathbf{k})\ \cdots\ \mathbf{v}_{2MN}(\mathbf{k})\right), \tag{27}$$

因此，能带基底中的湮灭算符为

$$\gamma_{\mathbf{k}}\equiv\begin{pmatrix}\gamma_{\mathbf{k},1}\\ \gamma_{\mathbf{k},2}\\ \vdots\\ \gamma_{\mathbf{k},2MN}\end{pmatrix}=\mathcal{V}^\dagger(\mathbf{k})\psi_{\mathbf{k}}. \tag{28}$$

随后，我们得到 BdG 哈密顿量的反常部分：

$$H_\Delta=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\left[\psi_{\mathbf{k}}^\dagger\widetilde{\Delta}\left(\psi_{-\mathbf{k}}^\dagger\right)^T+\mathrm{H.c.}\right] \tag{29}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\left[\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger\Delta^{\mathrm{band}}(\mathbf{k})\left(\gamma_{-\mathbf{k}}^\dagger\right)^T+\mathrm{H.c.}\right], \tag{30}$$

其中 $\Delta^{\mathrm{band}}(\mathbf{k})$ 是配对在能带基底中的表示，其矩阵元为

$$\Delta_{mn}^{\mathrm{band}}(\mathbf{k})=\mathbf{v}_m^\dagger(\mathbf{k})\widetilde{\Delta}\mathbf{v}_n^*(-\mathbf{k}). \tag{31}$$

为简化记号，我们省略上标“band”，并将该矩阵元记为 $\Delta_{mn}(\mathbf{k})$。

方程（31）使我们能够确定超导配对主要局限于单个正常态能带，还是有多个能带显著参与配对。我们聚焦于最低的两个正常态磁性布洛赫能带，并考虑

矩阵元 $\Delta_{11}(\mathbf{k})$、$\Delta_{12}(\mathbf{k})$和 $\Delta_{22}(\mathbf{k})$。对角元 Δ_{11} 和 Δ_{22} 分别描述第一和第二个正常态能带内的带内配对，而 Δ_{12} 描述两者之间的带间配对。

每个投影矩阵元的大小均与为正常态布洛赫本征矢任意选择的 $U(1)$ 相位无关。事实上，在变换 $\mathbf{v}_m(\mathbf{k}) \to e^{i\chi_m(\mathbf{k})}\mathbf{v}_m(\mathbf{k})$ 下，投影配对只会获得一个整体相位，

$$\Delta_{mn}(\mathbf{k}) \to e^{-i[\chi_m(\mathbf{k})+\chi_n(-\mathbf{k})]}\Delta_{mn}(\mathbf{k}),$$

因此 $|\Delta_{mn}(\mathbf{k})|$ 是规范无关的。我们将在下面的数值计算中对其进行研究。

反对称性 $\widetilde{\Delta}^T = -\widetilde{\Delta}$进一步意味着

$$\Delta^{\text{band}}(\mathbf{k}) = -\left[\Delta^{\text{band}}(-\mathbf{k})\right]^T,$$

特别地，带内分量满足$\Delta_{nn}(\mathbf{k}) = -\Delta_{nn}(-\mathbf{k})$。因此，尽管微观序参量是局域的自旋单态，其投影到非简并自旋轨道耦合能带上的带内分量却具有有效的奇动量依赖性。

$\Delta^{\text{band}}(\mathbf{k})$ 的对角元与非对角元的相对大小，可用于诊断单带描述的有效性。如果带间矩阵元相对于带内配对较小，则投影到孤立能带上或许可以提供一种适当的约化描述。相反，较大的带间配对表明必须保留多个正常态能带。

因此，我们使用能带基底投影来诊断自洽配对的动量结构和多能带特征。超导态的谱隙和拓扑特征由完整的 $4MN\times4MN$BdG 哈密顿量确定。

E. 陈数

获得自洽解后，我们计算 BdG陈数，其定义为所有负能量博戈留波夫-德热纳能带的总陈数。

为了数值计算 BdG陈数，我们采用标准的离散化布里渊区构造。利用负能量本征态 $\Phi_{n,\mathbf{k}}$ 在式（22）中定义，我们将重叠 $2MN \times 2MN$ 矩阵定义为

$$\mathcal{M}_\xi(\mathbf{k})_{mn} = \Phi^\dagger_{m,\mathbf{k}+\delta\mathbf{k}_\xi}\Phi_{n,\mathbf{k}}, \tag{32}$$

其中，$\delta\mathbf{k}_\xi$ 是沿 ξ 方向的网格间距。随后，我们将链变量定义为

$$U_\xi(\mathbf{k}) = \frac{\det\mathcal{M}_\xi(\mathbf{k})}{|\det\mathcal{M}_\xi(\mathbf{k})|}, \qquad \xi = x, y. \tag{33}$$

场强和BdG陈数分别为 [54]

$$F_{xy}(\mathbf{k}) = \arg\left[\frac{U_x(\mathbf{k})U_y(\mathbf{k}+\delta\mathbf{k}_x)}{U_x(\mathbf{k}+\delta\mathbf{k}_y)U_y(\mathbf{k})}\right], \tag{34}$$

$$C_{\text{BdG}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\mathbf{k}} F_{xy}(\mathbf{k}). \tag{35}$$

奇数 C_{BdG} 表示一种拓扑超导态，其中存在奇数个手征马约拉纳边缘模。

F. 数值参数

定义一次计算的数值输入包括：(i) 磁性晶胞的大小 $M\times N$，(ii) 穿过磁性晶胞的磁通量子数 a，(iii) 跃迁 t，其设为 1，(iv) Rashba自旋轨道耦合 V_{so}，(v) 吸引强度 U，(vi) 化学势 μ，(vii) 无序强度 W_{dis} 和无序实现，

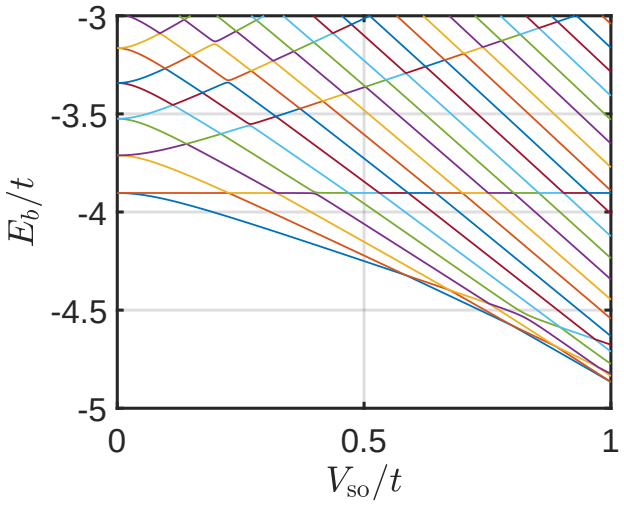

图 1：正常态类朗道能带随 Rashba自旋轨道耦合 V_{so}的变化。曲线表示含有一个磁通量子 $(\Phi_p/\Phi_0 = 1/64)$ 的洁净 $M = N = 8$磁性原胞中 H_0 的能带中点能量 E_b。能量以 t为单位。我们选择在接近最低能带的 $V_{\text{SO}} = 0.4t$ 处进行研究

对于下文给出的多数结果，我们取 $M = N$ =8，每个磁性晶胞内有一个磁通量子，因此每个格点方格有 1/64个磁通量子。我们也采用了这些参数的其他一些取值来研究结果的稳健性。图 1 展示了正常态类朗道能带随 Rashba 自旋轨道耦合 V_{so}的演化。增大 V_{so} 会使类朗道能级分裂并重新排列。以下计算中，我们选择 $V_{\text{so}} = 0.4t$，此时仍可清晰辨认“最低的 Rashba 耦合

类朗道能带”，并可从较弱的自旋轨道耦合连续追踪得到。在更大的 V_{so}下，会出现若干能带交叉，使得单个低能类朗道能带不再那么容易辨认。因此，取值 $V_{\mathrm{so}} = 0.4t$ 既能使系统具有显著的自旋轨道耦合，又能避免这些额外的能带交叉。下文中，我们重点关注这一最低能带附近的化学势。

III. 相图

图 2 比较了洁净系统和无序系统。图 2(a) 展示了洁净极限下的正常态态密度和 BdG 陈数相图，$W_{\mathrm{dis}} = 0$。最低类朗道能带非常窄，相图主要由具有$C_{\mathrm{BdG}} = 0$ 和 $C_{\mathrm{BdG}} = 2$的相构成。靠近这两种状态之间的转变处，也出现了少数具有$C_{\mathrm{BdG}} = 1$的孤立点。

图 2(b) 展示了存在无序时的相应结果，其中 $W_{\mathrm{dis}} = 0.2t$。随机的格点势使最低类朗道能带展宽。超导相图是基于每个可用的 U 和 μ取值下的 43 个独立无序实现的集合得出的。在每个点上，只有当至少 50% 的无序实现得到相同的陈数时，我们才赋予该点一个陈数；否则该点留白。

与之前一样，存在大片具有 $C_{\mathrm{BdG}} = 0$ 和 $C_{\mathrm{BdG}} = 2$ 的超导体区域。然而，在这两者之间的跃迁区域中，无序产生了相当大的奇陈数区域： $C_{\mathrm{BdG}} = \pm 1$。当化学势落在与无序展宽的最低类朗道能带相关的能量窗口内时，就会出现这些奇陈数区域。分隔某些彩色区域的白色区域表示这样的参数取值：在多数无序实现中，没有任何一个陈数占主导。

为了理解能带（或朗道能级）混合的作用，我们在 $C_{\mathrm{BdG}} = -1$ 相中选取一个有代表性的无序实现，并在图 3 $|\Delta_{11}(\mathbf{k})|$、 $|\Delta_{12}(\mathbf{k})|$和$|\Delta_{22}(\mathbf{k})|$ 中展示了相关结果。带间矩阵元 $|\Delta_{12}|$显然不可忽略，其数值可与最低能带带内配对 $|\Delta_{11}|$相当，这表明该区域内的超导配对涉及多个低能朗道能带。仅保留最低朗道能带的描述不足以刻画其物理性质。此外，单凭 $\Delta_{11}(\mathbf{k})$ 的零点或相位结构，无法判定准粒子能隙闭合或超导态的拓扑性质。特别是，一个投影矩阵元的零点并不一定对应于完整多能带 BdG谱的零点。

IV. 讨论与结论

本文探讨了通过引入无序，在本征量子霍尔超导体中实现拓扑超导的可能性。早已为人所知的是，无序能够在洁净极限下拓扑平庸的系统中诱导出拓扑绝缘相，这种相被称为拓扑安德森绝缘体 [47–50]。我们的结果表明，超导系统中存在类似的机制：无序能够在相图中产生具有奇数BdG陈数的区域，而这些区域在相应的洁净系统中基本不存在。

我们研究了处于垂直磁场中、具有 Rashba 自旋轨道耦合并存在格点内吸引相互作用的自旋电子，并在随机格点势存在时对超导序参量进行自洽处理。无序会展宽并混合原本狭窄的类朗道能带；当化学势位于这一无序展宽的能区内时，我们发现参数空间中存在相当大的奇陈数区域，包括 C_{BdG}，其中有 $C_{\mathrm{BdG}} = -1$。对无序实现进行集合分析后，我们进一步发现，在一些区域中，多数实现都呈现相同的奇陈数，这表明可能形成了贯通的拓扑超导态。我们还发现，在这一参数范围内存在显著的带间配对，说明奇陈数相通常无法通过投影到单个类朗道能带来理解。此外，无序会改变自洽确定的涡旋结构，将洁净系统中的巨型 h/e 涡旋分裂为两个$h/2e$ 涡旋。这些结果展示了本征量子霍尔超导体中的一种拓扑安德森超导态，其中超导性及其空间结构均由自洽过程产生，而非通过邻近耦合预先施加。

致谢 - U.N. 得到了美国能源部基础能源科学办公室 DE-SC0005042 号拨款的部分资助。K.K. 得到了日本学术振兴会科研费 JP25K17318 号拨款的部分资助。U.N. 和 K.K. 都感谢 Lodha 理论物理研究所的热情接待，本工作的部分内容正是在该研究所完成的。我们感谢宾夕法尼亚州立大学网络科学研究所提供的高级网络基础设施计算资源。

[1] N. Read 和 D. Green, 《物理评论B》**61**, 10267（2000）。[2] D. A. Ivanov, 《物理评论快报》**86**, 268（2001）。[3] M. Stone 和 R. Roy, 《物理评论B》**69**, 184511（2004）。[4] Y. E. Kraus、A. Auerbach、H. A. Fertig 和 S. H. Simon, 《物理评论B》**79**, 134515（2009）。[5] M. Sato 和 Y. Ando, 《物理学进展报告》

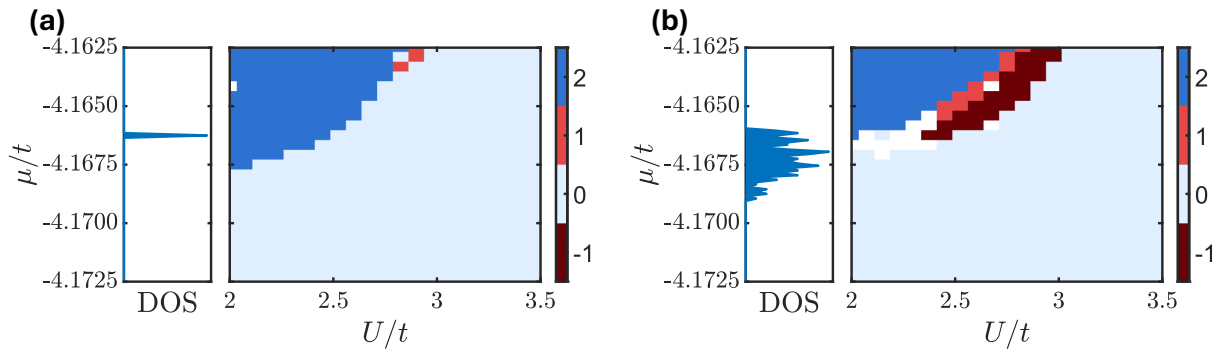

图 2：超导性的相图：(a) 无无序，(b) 有无序；相图随相互作用强度 U/t 和化学势 μ/t变化，其中 t 为跃迁强度。每个面板左侧的一列还显示了正常态态密度（DOS）。计算采用含有一个磁通量子的 8×8 磁性原胞，并考虑 Rashba自旋轨道耦合 $V_{\mathrm{so}} = 0.4t$。我们研究了 43 个随机无序实现的集合，其中 $W_{\mathrm{dis}} = 0.2t$；若某个陈数出现在超过 50% 的实现中，则将其标出（以颜色表示）。白色区域表示在大多数构型中均未出现陈数。显然，无序扩大了相图中具有奇数 BdG 陈数的拓扑超导相所占据的区域。

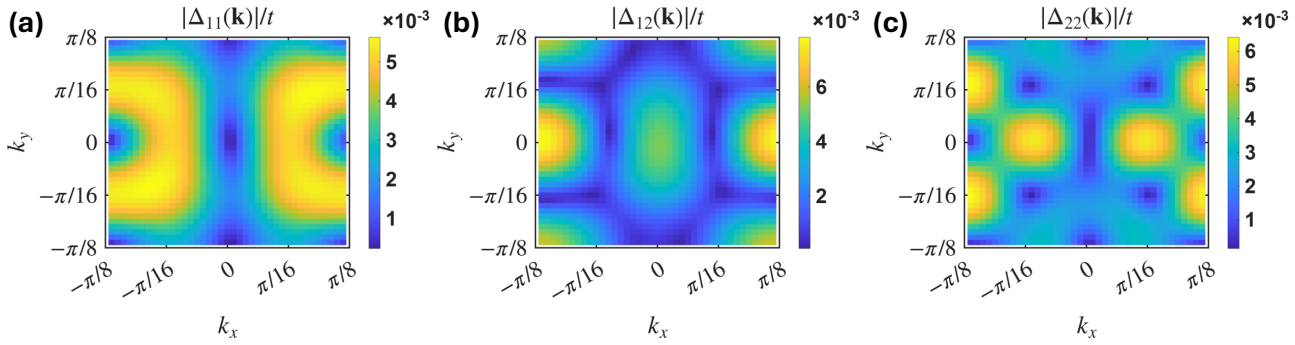

图 3：正常态能带基底中配对矩阵元的大小，定义见式（31），对应 $C_{\mathrm{BdG}} = -1$ 相中的一个代表性无序实现。(a) $|\Delta_{11}(\mathbf{k})|$，(b) $|\Delta_{12}(\mathbf{k})|$，以及 (c) $|\Delta_{22}(\mathbf{k})|$。显著的带间配对 $|\Delta_{12}|$与最低能带带内配对 $|\Delta_{11}|$大小相当，这表明仅基于最低朗道能级能带的单能带理论不足以描述这种超导性。

80, 076501（2017）。[6] A. Kitaev，《物理年鉴》303, 2（2003）。[7] M. Stone 和 S.-B. Chung，《物理评论B》73, 014505（2006）。[8] M. Oshikawa、Y. B. Kim、K. Shtengel、C. Nayak 和 S. Tewari，《物理年鉴》322, 1477（2007）。[9] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和 S. Das Sarma，《现代物理评论》80，1083（2008）。[10] J. D. Sau、R. M. Lutchyn、S. Tewari 和 S. D. Sarma，《物理评论快报》104，040502（2010）。[11] T. D. Stanescu、J. D. Sau、R. M. Lutchyn 和 S. D. Sarma，《物理评论B》81，241310（2010）。[12] J. Alicea，《物理学进展报告》75，076501（2012）。[13] H.-H. Hung、P. Ghaemi、T. L. Hughes 和 M. J. Gilbert，《物理评论B》87, 035401（2013）。[14] C. Beenakker，《凝聚态物理年度评论》4，113（2013）。

[15] R. Willett、J. P. Eisenstein、H. L. St¨ormer、D. C. Tsui、A. C. Gossard 和 J. H. English，《物理评论快报》59，1776 1987( )。[16] Y. W. Suen、L. W. Engel、M. B. Santos、M. Shayegan 和 D. C. Tsui，《物理评论快报》68，1379（1992）。[17] J. Shabani、T. Gokmen 和 M. Shayegan，《物理评论快报》103，046805（2009）。[18] J. Shabani、Y. Liu、M. Shayegan、L. N. Pfeiffer、K. W. West 和 K. W. Baldwin，《物理评论B》88，245413（2013）。[19] Y. Kim、A. C. Balram、T. Taniguchi、K. Watanabe、J. K. Jain 和 J. H. Smet，《自然物理》15，154（2019）。[20] C. Wang、A. Gupta、S. K. Singh、P. T. Madathil、Y. J. Chung、L. N. Pfeiffer、K. W. Baldwin、R. Winkler 和 M. Shayegan，《物理评论快报》131，266502（2023）。[21] G. Moore 和 N. Read，《核物理B辑》360，362（1991）。[22] G. M¨oller 和 S. H. Simon，《物理评论B》77，075319（2008）。[23] W. N. Faugno、J. K. Jain 和 A. C. Balram，《物理评论》

研究2，033223（2020）。[24] T. Zhao、A. C. Balram 和 J. K. Jain，《物理评论快报》130，186302（2023）。[25] A. Sharma、S. Pu、A. C. Balram 和 J. K. Jain，《物理评论快报》130，126201（2023）。[26] A. Sharma、A. C. Balram 和 J. K. Jain，《物理评论B》109，035306（2024）。[27] L. Fu 和 C. L. Kane，《物理评论快报》100，096407 2008( )。[28] J. Linder、Y. Tanaka、T. Yokoyama、A. Sudbø 和 N. Nagaosa，《物理评论快报》104，067001（2010）。[29] X.-L. Qi、T. L. Hughes 和 S.-C. Zhang，《物理评论B》82，184516（2010）。[30] N. H. Lindner、E. Berg、G. Refael 和 A. Stern，物理评论X 2，041002（2012）。[31] D. J. Clarke、J. Alicea 和 K. Shtengel，《自然通讯》4，1（2013）。[32] R. S. Mong、D. J. Clarke、J. Alicea、N. H. Lindner、P. Fendley、C. Nayak、Y. Oreg、A. Stern、E. Berg、K. Sht[33] engel 等，《物理评论X》4，011036（2014）。[34] F. Amet、C. T. Ke、I. V. Borzenets、J. Wang、K. Watan[35] abe、T. Taniguchi、R. S. Deacon、M. Yamamoto、Y. Bomze、S. Tarucha 和 G. Finkelstein，科学352，966 2016( )。[36] G.-H. Lee、K.-F. Huang、D. K. Efetov、D. S. Wei、S. Hart、T. Taniguchi、K. Watanabe、A. Yacoby 和 P. Kim，《自然物理》13，693（2017）。[37] G. S. Jeon、J. Jain 和 C.-X. Liu，《物理评论B》99，094509（2019）。[38] R. V. Mishmash、A. Yazdani 和 M. P. Zaletel，《物理评论B》99，115427（2019）。G. Chaudhary 和 A. H. MacDonald，《物理评论B》101，024516（2020）。[39] K. Kudo、R. Nakai 和 K. Nomura，《物理评论B》110，035147（2024）。[40] K. Kudo、R. Nakai、H. Isobe、J. K. Jain 和 K. Nomura，《物理评论快报》136，246601（2026）。[41] K. Kudo、R. Nakai、H. Isobe 和 K. Nomura，《物理评论B》114，214503（2026）。[42] G. Chaudhary 和 A. H. MacDonald，《物理评论B》101，024516 2020( )。[43] J. Schirmer、J. K. Jain 和 C. X. Liu，《物理评论B》109，134518（2024）。[44] Z. Tesanovic、M. Rasolt 和 L. Xing，《物理评论快报》63，2425（1989）。[45] G. Chaudhary、A. MacDonald 和 M. Norman，《物理评论研究》3，033260（2021）。[46] J. Schirmer、J. K. Jain 和 C.-X. Liu，arXiv 预印本 arXiv:2211.15001（2022）。[47] J. Li、R.-L. Chu、J. K. Jain 和 S.-Q. Shen，《物理评论快报》102，136806（2009）。[48] C. W. Groth、M. Wimmer、A. R. Akhmerov、J. Tworzyd-lo 和 C. W. J. Beenakker，《物理评论快报》103，196805（2009）。[49] H.-M. Guo、G. Rosenberg、G. Refael 和 M. Franz，《物理评论快报》105，216601（2010）。[50] S. St¨utzer、Y. Plotnik、Y. Lumer、P. Titum、N. H. Lind- ner、M. Segev、M. C. Rechtsman 和 A. Szameit，《自然》 560，461 （ 2018 ）。[51] P. W. Brouwer、M. Duckheim、A. Romito 和 F. von Oppen，《物理评论B》84，144526（2011）。[52] J. D. Sau 和 S. D. Sarma，《物理评论B》88，064506（2013）。[53] J. Borchmann、A. Farrell 和 T. Pereg-Barnea，《物理评论B》93，125133（2016）。[54] T. Fukui、Y. Hatsugai 和 H. Suzuki，《日本物理学会志》74，1674（2005）。