arXiv:2611.32992v1 [cond-mat.stat-mech] 24 Nov 2026

来自活性介质的能量输运

Simon Krekels 、Christian Maes 和 Ion Santra*Department of Physics and Astronomy, KU Leuven, Celestijnenlaan 200D, 3001 Leuven, Belgium*（日期：2026年11月25日）

我们研究谐链中的能量电流：谐链左端通过短程接触势与在环上运动的过阻尼跑动-翻滚粒子介质耦合，右端则连接到零温朗之万储库。活性由推进速度 v_0 和持续时间 τ表征。在系统-介质弱耦合下，利用非平衡响应理论，我们预测稳态电流；模拟结果在（v_0，τ）平面的很大范围内与预测相符。这包括电流随 v_0和 τ变化可能出现的非单调性，以及与链的正常模发生共振的情况，其中在τ 较大、 v_0 较小时尤为显著。存在一个临界推进速度 v_c ，此时粒子的环穿越频率离开声子带：当 $v_0 < v_c$ 时，电流随持久性增强而增大；当 $v_0 > v_c$时，电流则按（$v_0^2\tau$）$^{-1}$衰减。我们还解释了理论预测失效的原因，尤其是左侧振子受到足够强的负摩擦后引发的振荡不稳定性。最后，持续介质会使链体相中的速度统计呈现强烈的非高斯特征，并产生长程、振荡性的速度关联。

关键词：活性物质；跑动-翻滚粒子；热传导；谐链；活性储库；记忆摩擦；负摩擦；负微分电导

I. 引言

置于两个储库之间的振子链中的热传导，是非平衡统计力学的标准研究对象 [1–3]。对于谐链，该问题可以精确求解：输运是弹道式的，体温度剖面是平坦的，稳态电流则呈现朗道–B¨uttiker形式，即对声子带内透射系数与储库谱差乘积进行积分 [4, 5]。在这种情况下，储库是平衡朗之万热浴，其特性完全由温度和通过爱因斯坦关系相互关联的摩擦系数决定。然而，当接触动力学使摩擦依赖于温度时，在高温差下可能产生负微分电导 [6]。

本文以一种非平衡介质替代其中一个储库。活性介质由消耗能量推动自身运动的单元组成，是一个重要例子 [7, 8]。它们无法用温度来表征，其涨落是有色的，并且它们施加在浸入式探针上的摩擦和噪声不再受涨落-耗散定理 [9–11] 约束。处于此类介质中的探针表现出增强扩散 [12–14], ，经历非平衡诱导力 [15, 16], ，以一种破坏时间反演对称性的方式弛豫 [17], ，甚至可能感受到负摩擦，使介质将能量输入其运动 [18–20]。

迄今为止，对活性驱动能量输运的研究主要集中于可精确求解的情形，即边界受活性力驱动的谐链 [21, 22], ，以及与振子线性活性介质耦合的链 [23]。这些模型已展现出非平凡的输运现象，包括负微分电导，以及电流随活性增强而反向 [21, 23]。然而，由于耦合是线性的，活性在这些模型中仅通过活性储库的噪声谱起作用，而诱导摩擦仍与被动浴中的相同。不过，与软物质系统的耦合可能远非线性。胶体或微型游泳者通过短程力与浸没其中的物体发生局部相互作用，因此只有粒子近距离经过时，物体才会受到冲击；反过来，粒子也会被物体偏转。本文研究的正是这种耦合：活性介质通过短程相互作用与导体耦合。

导体的第一个粒子通过局域接触势与环上的独立跑动-翻滚粒子（RTP）相互作用。介质的活性由粒子的推进速度 v_0 和持续时间 τ 表征。此前已有研究探讨了弹性弦和振子链与活性介质耦合时的类似相互作用 [24, 25]。为单独考察活性对输运的影响，我们将谐链作为导体，而其另一端的储库仍为温度为零的朗之万浴。

假设系统-介质耦合较弱，并以活性介质与链之间存在时间尺度分离作为充分条件，我们利用非平衡响应理论推导出链的约化非马尔可夫线性动力学。我们发现，活性介质会诱导出负刚度，以及一种记忆摩擦，它可以

变为负值，以及作用于第一个振子的有色噪声。约化线性系统的电流在（v_0，τ）平面的大部分区域内都能再现模拟电流，其中还包括与

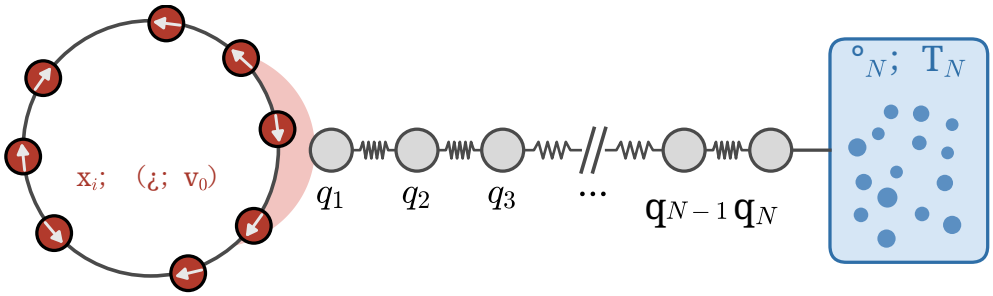


图 1. 装置示意图。由 N 个振子组成、位置为 $q_1,\ldots,q_N$ 的谐链，其左端与环上的跑动-翻滚粒子（RTP）活性接触介质耦合，粒子位置为 x_i，持续时间为 τ，推进速度为 v_0。链的右端与热朗之万浴耦合，其摩擦系数为 γ_N，温度为 T_N。

链的正常模相关的有趣类共振现象。电流在环穿越频率离开活性粒子的声子带时所对应的速度 v_c 处发生性质变化。在 v_c以上，电流在持久性较大时按 τ^{-1} 衰减，在推进速度较大时按 v_0^{-2}衰减。在 v_c以下，电流随持久性增加，并达到最大值。我们还发现，链的动能温度分布在体相中是平坦的，其体相值在（v_0，τ）平面内也遵循与电流相同的趋势。相比之下，高阶速度关联揭示了活性介质的显著影响。速度分布在两端可能变得偏斜，在体相中可能呈现多峰结构；振子的速度还表现出非平凡的空间关联。

本文结构如下。第 II 节介绍模型。第 III 节推导单个探针在活性介质中的约化动力学：诱导刚度、记忆摩擦和噪声。第 IV 节将其应用于链：Landauer–B¨uttiker 公式和两类不稳定性（第 IVA节）、关于 v_0 的电流，包括在 v_c 处发生的转变以及负微分电导（第 IVB节），以及关于 τ 的电流，并介绍第一种不稳定性区域内的修正理论（第 IVC节）。第 V 节讨论体相中的温度分布、速度分布和空间关联，第 VI 节作总结。

II. 模型

导体是一条由 N 耦合谐振子构成的一维链，振子的质量为 m，位置为 $\{q_j\}$，动量为 $\{p_j\}$、$j=1,\ldots,N$。第一个振子与一个由 N_b 个过阻尼活性粒子组成的储库耦合，这些粒子的位置为 $\{x_i\}$，并位于长度为 L 的环上；链的最后一个振子则受到一个朗之万储库的作用。该链及其与介质的接触由以下哈密顿量描述：

$$\mathcal{H}=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2m}+\frac{k}{2}\sum_{j=1}^{N-1}(q_{j+1}-q_j)^2+\frac{K}{2}\left(q_1^2+q_N^2\right)-\Lambda q_1+\lambda q_1\sum_{i=1}^{N_b}\mathcal{F}(x_i). \tag{1}$$

其中，$k>0$ 是链刚度，$K>0$ 是壁面钉扎，$\Lambda>0$将在后文具体说明。最后一项刻画了耦合强度为 $\lambda>0$ 的系统-介质相互作用。图 1 展示了该装置的示意图。对于上述哈密顿量，在最后一个粒子处接入由 γ_N,T_N 描述的朗之万储库后，相应的运动方程为：

$$m\ddot{q}_1=-Kq_1-k(q_1-q_2)-\lambda\sum_{i=1}^{N_b}\mathcal{F}(x_i)+\Lambda, \tag{2a}$$

$$m\ddot{q}_j=k(q_{j-1}-2q_j+q_{j+1}),\qquad j=2,\ldots,N-1, \tag{2b}$$

$$m\ddot{q}_N=-Kq_N-\gamma_N\dot{q}_N-k(q_N-q_{N-1})+\sqrt{2\gamma_N T_N}\,\eta_N, \tag{2c}$$

其中 η_N 为标准白噪声。位置为 x_i 的介质粒子遵循过阻尼跑动-翻滚动力学 [26]，

$$\zeta\dot{x}_i=-\lambda q_1\mathcal{F}'(x_i)+\zeta v_0\sigma_i(t),\qquad i=1,\ldots,N_b. \tag{3}$$

活性由推进速度 v_0 和电报噪声 $\sigma_i(t)$ 表征，后者以速率 α翻转。该随机噪声的自相关函数呈指数形式 $\langle\sigma(t)\,\sigma(0)\rangle = \exp(-|t|/\tau)$，其中 $\tau = 1/(2\alpha)$ 为持续时间。

相互作用势使活性粒子对第一个振子施加随机力 $-\lambda\sum_i \mathcal{F}(x_i)$，而第一个振子又对每个活性粒子施加力 $-\lambda q_1\mathcal{F}'(x_i)$。我们取 $\mathcal{F}$ 在环上的某一点附近局域化，因此相互作用是短程的。粒子只有在经过接触区域时才会作用于链，每次经过都会对第一个振子产生一次冲击。

长时间后，系统达到非平衡稳态，其特征是有稳态能流流经链。流经链的能流为：

$$J = \langle\mathcal{J}(t)\rangle = \left\langle \dot{q}_1\left(-\lambda\sum_{i=1}^{N_b}\mathcal{F}(x_i)\right)\right\rangle = -\lambda\, N_b\,\langle\dot{q}_1\,(\mathcal{F}(x_i))\rangle \tag{4}$$

其中 $\mathcal{J}(t)$ 表示瞬时流，平均值 $\langle\cdot\rangle$ 是在联合动力学 (2)–(3) 的非平衡稳态分布下求得的。体相动力学的哈密顿性质确保这等于从第 j个振子流向第 $(j+1)$ 个振子的电流，

$$J = \frac{k}{2m}\Big\langle (p_j + p_{j+1})(q_j - q_{j+1})\Big\rangle, \tag{5}$$

我们主要关注右侧热库为冷的情形，$T_N = 0$，从而使电流由含有活性粒子的储库产生。

我们选取接触核 $\mathcal{F}$ 为von Mises形式

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{I_0(p)}\exp\left[p\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right], \tag{6}$$

其中 I_0 是零阶修正贝塞尔函数。参数 p 控制相互作用的局域化程度。极限 $p\to\infty$ 趋近于周期狄拉克δ函数，从而模拟点状接触。

III. 作用于单探针的热浴诱导力

在研究完整链之前，将活性介质对单个缓慢探针坐标的效应分离出来是有益的$q(t)$，它代表谐链最左侧的粒子。我们将在弱耦合极限下工作，其中耦合参数 $\lambda \ll 1$。为此，我们考虑探针 $q(t)$，其质量为 m，处于刚度为K的谐阱中，并耦合到 N_b 个粒子上，耦合方式与 q_1 在式（2a）中相同，

$$m\ddot{q} = -Kq + F_A(t) + \Lambda, \qquad F_A(t) = -\lambda\sum_{i=1}^{N_b}\mathcal{F}(x_i(t)). \tag{7}$$

在迁移率为 $\mu \equiv \zeta^{-1}$时，粒子服从 $\dot{x}_i = -\mu\lambda q\,\mathcal{F}'(x_i) + v_0\sigma_i$。假设与介质的弛豫相比，探针是缓慢的，即 $\varepsilon = \omega_0 t_{\rm b} \ll 1$，其中$\omega_0 = \sqrt{K/m}$ 是探针的本征频率尺度，且 $t_{\rm b} = \overline{2\tau/\left(1-\mathrm{Re}\sqrt{1-(4\pi v_0\tau/L)^2}\right)}$是活性介质最慢密度模的弛豫时间（详见附录A 的详细讨论），我们将此力改写为，

$$F_A(t) = \langle F_A(t)\,|\,q(s),\, s\le t\rangle + \eta(t). \tag{8}$$

这里，第一项表示在给定探针历史 $q(s)$、$s\le t$ 的情况下，对介质动力学取平均。其响应展开给出了与该历史相关的平均力。涨落部分为 $\eta(t) = F_A(t) - \langle F_A(t)\,|\,q(s)\ s\le t\rangle$。在弱耦合的一阶近似下，这一涨落力在无耦合稳态介质中计算，其平均值为零。平均力包含准静态贡献和摩擦项，

$$\langle F_A(t)\,|\,q(s),\, s\le t\rangle = F^{\rm qs}(q(t)) + F^{\rm fric}(t). \tag{9}$$

这里， $F^{\mathrm{qs}}(q) = \langle F_A \rangle_q$ 表示作用于冻结在 q 处的探针上的平均力，该平均值是在该位置的稳态系综 $\rho_q(x)$ 上取的。也就是说，这就是准静态表达式

$$F^{\mathrm{qs}} = -\lambda N_b \int_0^L \mathrm{d}x\, \mathcal{F}(x)\, \rho_q(x) \tag{10}$$

在弱耦合 λ的最低阶下，可在附录B中计算：

$$F^{\mathrm{qs}} = -\lambda N_b + \kappa\, q, \qquad \text{with } \kappa = \frac{\lambda^2 N_b}{\zeta v_0^2 \tau} \left(\langle \mathcal{F}^2 \rangle_0 - \langle \mathcal{F} \rangle_0^2 \right) = \frac{\mu N_b \lambda^2}{v_0^2 \tau} \left[\frac{I_0(2p)}{I_0(p)^2} - 1 \right], \tag{11}$$

其中 $\langle \cdots \rangle_0$ 表示对环上的均匀分布取平均。需要注意的是$\kappa > 0$，这意味着介质会削弱势阱。准静态力中的常数部分不影响能量传导，因此我们在方程（ $\Lambda = \lambda N_b$ ）中取2a以将其抵消。

（9）中的剩余部分， F^{fric}源于探针位置改变引起的介质响应 ，

$$F^{\mathrm{fric}}(t) = \langle F_A(t) \,|\, q(s),\, s \le t \rangle - F^{\mathrm{qs}} = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}s\, R(t-s)\, [q(s) - q(t)]\,.$$

其中， $R(t)$是响应函数，用于衡量在较早时刻 s探针发生位移后，时刻 t 介质平均作用力的变化。通过分部积分，上式化为

$$F^{\mathrm{fric}}(t) = -\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}u\, \Gamma(t-u)\, \dot{q}(u), \qquad \text{with } \Gamma(u) = \int_u^{\infty} \mathrm{d}s\, R(s). \tag{12}$$

在最低阶下，响应函数可由久保-阿加瓦尔公式 [27] 作为自由介质中的关联函数得到， $R（t） = -\mu\lambda^2 N_b \langle \mathcal{F}（x（t）） \mathcal{F}'（x（0）\rangle_0$ [详情见附录B]。将其代入（12），可在频域 Γ 得到摩擦核[1]，

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \mu\lambda^2 \sum_{n \ge 1} a_n k_n^2\, \frac{1 - \Omega_n^2 \tau^2 - i\,\omega\tau}{\Omega_n^2 \left(\Omega_n^2 \tau^2 - \omega^2 \tau^2 - i\,\omega\tau \right)}, \tag{13}$$

其中 $\Omega_n = k_n v_0$（ $k_n = 2\pi n/L$），且 $a_n = 2N_b F_n^2$ 是该谐波的权重， $F_n = I_n(p)/I_0(p)$ 是 $\mathcal{F}$ 的傅里叶系数。

值得注意的是，决定耗散的摩擦核实部

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\Gamma}(\omega) = \mu\lambda^2 \sum_{n \ge 1} a_n k_n^2\, \frac{\omega^2\tau^2 + 1 - \Omega_n^2 \tau^2}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^2 \tau^2 + \omega^2}, \tag{14}$$

并不总是为正。事实上，对于 $\omega^2 < (\Omega_1^2 \tau^2 - 1)/\tau^2$，右端求和中的所有项均为负，这意味着在这些频率下，通常会耗散能量的诱导摩擦反而会向探针输入能量。

此外，时间积分摩擦系数 γ_{eff}，通过令 $\omega \to 0$ 得到，

$$\gamma_{\mathrm{eff}} = \mu\lambda^2 \sum_{n \ge 1} a_n\, \frac{1 - \Omega_n^2 \tau^2}{k_n^2 v_0^4 \tau^2} \tag{15}$$

在该区域会变为负值。此时，对于单探针，线性动力学没有稳态，因此需要加入高于 λ^2 阶的非线性项使其稳定。

噪声 $\eta = F_A - \langle F_A \,|\, q(s \le t) \rangle$ 已经包含因子 λ。因此，在最低阶近似下，其协方差可以在自由介质中计算，

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \lambda^2 N_b \langle \mathcal{F}(x(t)); \mathcal{F}(x(t')) \rangle_0. \tag{16}$$

---

[1] 傅里叶变换定义为 $\tilde{f}(\omega) = \int dt\, e^{i\omega t} f(t)$

在频域中，

$$\langle\tilde{\eta}(\omega)\tilde{\eta}(\omega')\rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega')S(\omega) \quad \text{with } S(\omega) = \lambda^2 \sum_{n\geq 1} \frac{2a_n\,\Omega_n^2\tau}{(\Omega_n^2-\omega^2)^2\tau^2+\omega^2}. \tag{17}$$

在时间尺度分离区间内， η 表现为白噪声，其相关函数为 $\langle\eta(t)\eta(t')\rangle \simeq S(\omega=0)\ \delta(t-t')$，其中 $S(0) = \lambda^2 \sum_{n\geq 1} \frac{2\,a_n}{\Omega_n^2\tau}$。

总之，探针的约化动力学为，对于 $O(\lambda^2)$，

$$m\ddot{q}(t) = -(K-\kappa)\,q(t) - \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\Gamma(s)\dot{q}(t-s) + \eta(t) + O(\lambda^3), \tag{18}$$

其中， F^{qs} 的常数项已由 Λ抵消。在以下各节中，我们研究完整链的能量输运问题。我们将这一约化描述用于链的最左侧粒子，即 q_1 在方程（2a）中，用于解析预测，并与完整系统动力学的模拟结果进行比较。

IV. 稳态电流

约化链的动力学，即使用（18），可写成矩阵形式：

$$m\ddot{\boldsymbol{q}}(t) = -\Phi\,\boldsymbol{q}(t) - \int_0^\infty \mathrm{d}s\ [\Gamma(s)\,E_1 + 2\gamma_N\,\delta(s)\,E_N]\,\dot{\boldsymbol{q}}(t-s) + \boldsymbol{\xi}(t). \tag{19}$$

这里 $\boldsymbol{q} = (q_1,\ldots,q_N)^T$, $(E_i)_{j\ell} = \delta_{ij}\delta_{i\ell}$, $\Phi = \Phi_0 - \kappa E_1$ 其中 ϕ_0 是裸链（不含任何储库）的力矩阵，其矩阵元为

$$(\Phi_0)_{j\ell} = \begin{cases} K+k, & j=\ell\in\{1,N\},\\ 2k, & j=\ell\in\{2,\ldots,N-1\},\\ -k, & |j-\ell|=1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{20}$$

$\boldsymbol{\xi}_i = \eta\delta_{i1} + \sqrt{2\gamma_N T_N}\,\eta_N\delta_{iN}$ 表示噪声向量。请注意，由于我们关注的是活性介质，在本文余下部分中我们将考虑 $T_N = 0$。为计算稳态电流，我们注意到，约化动力学的形式解最好在频域中表示

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(\omega) = G(\omega)\boldsymbol{\xi}(\omega), \tag{21}$$

且 $G(\omega)$是格林函数，

$$G(\omega) = \left[\Phi_0 - m\omega^2 I - \left[\kappa + i\omega\tilde{\Gamma}(\omega)\right]E_1 - i\omega\gamma_N\,E_N\right]^{-1} \tag{22}$$

其中 I 为单位矩阵。与式（19）对应的稳态电流由兰道尔-比特克公式¨给出 [4, 21, 28]

$$J = \frac{\gamma_N}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\omega^2\,|G_{1N}(\omega)|^2\,S(\omega), \tag{23}$$

值得指出的是，在先前的研究中 [21–23] 活性仅通过噪声谱 S（ω）进入，而在当前情形下，活性还会影响传导谱。我们对上述形式进行数值计算，并将其与式（2）-（3）的数值模拟进行比较。

A. 不稳定性

考虑不含活性介质 $\lambda = 0$ 的链。此时，链通过格林函数 $G_0(\omega) = [\Phi_0 - m\omega^2 I - i\omega\gamma_N E_N]^{-1}$ 演化。格林函数的所有极点都位于复 ω 平面的下半部，因此

裸链是稳定的，这意味着对于任意稳态驱动，线性方程组都会达到稳态。现在，正如上文所述，与活性介质的耦合会产生额外的负刚度和摩擦核，其耗散部分 $\mathrm{Re}\,\tilde{\Gamma}(\omega)$ 可能为负。接下来，我们将分析这些诱导力如何改变约化线性系统方程（19）的稳定性。

$G(\omega)$ 的所有元素都具有相同的极点，这些极点由 $\mathcal{D}(\omega) = \det G^{-1}(\omega)$ 的零点 z_j 给出。每个零点都对应链的一个模态，其演化形式为 $e^{-iz_j t}$；当 $\mathrm{Im}\, z_j < 0$ 时，该模态会衰减。由于核 $\Gamma(t)$ 是实数，$\mathcal{D}(-\omega^*) = \mathcal{D}(\omega)^*$，因此这些零点要么是纯虚数，要么成对出现为 $(z_j, -z_j^*)$。随着参数变化，零点连续移动；当某个零点穿过实轴进入上半平面时，动力学就会变得不稳定。此时一个模态会指数增长，线性动力学（19）不存在稳态，而公式（23）也不再描述稳态电流。然而，实际动力学确实存在稳态，其特征由非线性项决定。

为确定不稳定性的位置，我们将 $\mathcal{D}(\omega)$ 改写为

$$\mathcal{D}(\omega) = \det[G_0^{-1}(\omega)]\,(1 - \mathcal{L}(\omega)) \quad \text{with } \mathcal{L}(\omega) = (\kappa + i\omega\tilde{\Gamma}(\omega))\,[G_0(\omega)]_{11} \tag{24}$$

这里用到了 E_1 的显式形式。$\det G_0^{-1}$ 的零点是裸链的稳定极点，因此不稳定性只能由上半平面内 $1 - \mathcal{L}(\omega)$ 的零点引起。由于零点随参数连续移动，当这样的零点位于实轴上时，也就是达到稳定性边界，此时

$$\mathcal{L}(\omega) = \left(\kappa + i\omega\tilde{\Gamma}(\omega)\right)[G_0(\omega)]_{11} = 1 \tag{25}$$

对于某个实数 ω。不稳定性条件方程（25）可分为两类

1. 一个纯虚零点在 $z_j = 0$处穿过实轴。这种不稳定性的物理原因是，活性介质诱导的线性刚度变得很大且为负值。将$\omega = 0$ 代入方程（25）也可以看出这一点，从而得到

$$\kappa\,(\Phi_0^{-1})_{11} > 1. \tag{26}$$

我们将其称为 定常不稳定性，此时链被推向新的平衡位置

2. 一对零点（z_j，$-z_j^*$）在 $\pm\mathrm{Re}\; z_j$ 处穿过实轴。这种不稳定性的物理原因在于，诱导的线性摩擦变得高度为负，足以克服链另一端的阻尼。我们将其称为振荡不稳定性，因为不稳定模态在以频率 $\mathrm{Re}\, z_j$ 振荡的同时不断增长。

不稳定性的示意图 在第 IVC 节图附近讨论完稳态电流后，再讨论稳定性。 5.

B. 电流与推进速度

本小节讨论介质中活性粒子的推进速度如何影响稳态电流。图 2 (a) 展示了不同持久性 $v_0 \quad \tau = (2\alpha)^{-1}$下稳态电流随推进速度 v_0的变化。较小时，电流非常小；随后电流增大至平台状区域，之后经历两阶段衰减。

我们先关注曲线的上升部分。可以看到，对于持久性很强的介质，会出现振荡，电流在某些推进速度下达到峰值。为理解这一现象，我们注意到，持续介质动力学具有两个特征频率：介质穿过环时的频率 $\Omega_1 = 2\pi v_0/L$以及翻滚频率 $1/\tau = 2\alpha$。因此，当 $v_0 < v_c = L\omega_p/(2\pi)$ Ω_1 位于声子带内时$0 < \omega < \omega_p = 2\sqrt{k/m}$，$S(\omega)$ 在 Ω_1, 处以及可能在其谐波 Ω_n处的峰均位于声子带内 [（图 3(a)]）。对于持续介质，$\Omega_1\tau > 1$，这些峰很尖锐，链几乎受到周期性驱动。因此，每当 Ω_1 等于链的某个正规模时，电流就会出现共振，

$$v_0 \simeq \frac{L\omega_p}{2\pi}\,\sin\!\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right), \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{27}$$

这对于较短的链最为明显（见图 2 (b)），而对于更大的 N，随着相邻正常模之间的间距趋于零，峰会变得平滑。对于持久性较低的介质，$\Omega_1\tau < 1$，$S(\omega)$ 的峰会合并成平滑的谱（图 3(a) 中的绿色曲线），共振也会消失。

对于 $v_0 > v_c$，Ω_1 位于声子带之上。对于持续介质，$\Omega_1\tau \gg 1$，浴力此时接近频率为 $\Omega_n \geq \Omega_1$，的周期驱动，这些频率均位于频带之外。其谱在这些频率处呈峰状，而

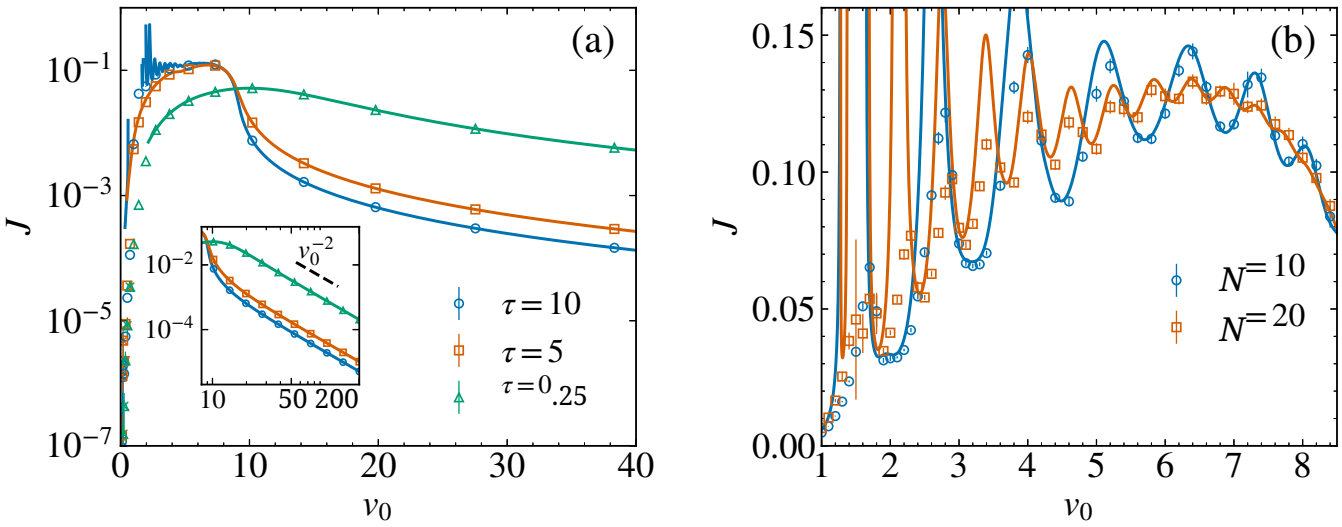


图2. 平均稳态电流 vs 推进速度。图(a)中的主图展示了电流随 v_0 的变化，适用于持久性取不同值、长度为 $N = 32$ 的链。插图展示了与主图相同数据在大 v_0 下的幂律衰减。图(b)展示了较小 v_0 附近以及 $\tau = 10$ 时的共振行为。在两个面板中，符号表示通过对完整微观动力学进行数值模拟得到的数据，而实线表示方程（23）的解析预测（积分通过数值方法计算）。对于两个面板，$m = k = K = \gamma_N = 1$, $\lambda = 0.1$, $N_b = 10$, $\zeta = 0.1$, $L = 28$, 以及 和 $p = 2$。

翻转运动使峰具有有限宽度 $\sim \tau^{-1}$。因此，链只能通过这些峰延伸至频带内的尾部获得能量。由式（17），对于 $\omega < \omega_p$,

$$S(\omega) \simeq 2\lambda^2 \sum_{n\geq 1} \frac{a_n\, \Omega_n^2}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^2\, \tau}, \tag{28}$$

它随 τ^{-1} 增大而减小。因此，当 v_0 超过 v_c时，电流会急剧下降，且 τ越大，下降越陡，见图3 (b)。这与一端受到周期性驱动的谐链情况类似：只有当驱动频率位于声子带内时，谐链才会响应，并在其正规模处出现共振 [29]。快速翻滚时，$\Omega_1\tau \lesssim 1$，频谱较宽（见图 $\tau = 0.25$ 3 中的曲线(b)），不会出现这种下降。初始下降之后，电流呈现较慢的幂律衰减。这些大 v_0 尾部也可由方程（23）估算。在有限 $v_0 \to \infty$ 下取 ω，并首先代入方程（17），得到

$$S(\omega) = \lambda^2\, 2/(v_0^2\tau) \sum_n a_n/k_n^2 + O(v_0^{-4}). \tag{29}$$

格林函数的相同极限给出：

$$G^{-1} \to [\Phi_0 - m\omega^2 I - i\omega\gamma_N E_N + O(v_0^{-2})]. \tag{30}$$

将这些结果代入式（23），可知电流预计按 v_0^{-2} 衰减。图 2 (a) 的插图验证了这一行为。值得注意的是，式（29）和式（30）表明，在此极限下，电流仅通过游走翻转粒子的众所周知的有效温度依赖于活性，$T_{\rm RT} = \zeta v_0^2\tau$,[2] 即 $J \propto T^{-1}{}_{\rm RT}$。这种行为类似于文献 [6] 中被动接触浴所发现的高温负微分电导。

C. 电流与持久性的关系

本节讨论平均稳态电流如何随持续时间变化 τ。图 4 展示了不同推进速度 v_0下电流随活性的变化。我们看到有两种明显不同的

[2] 等价地，$T_{\rm RT} = \zeta D_{\rm RT}$，其中 $D_{\rm RT} = v_0^2\tau$ 是自由游走翻转粒子的长时间扩散率 le.

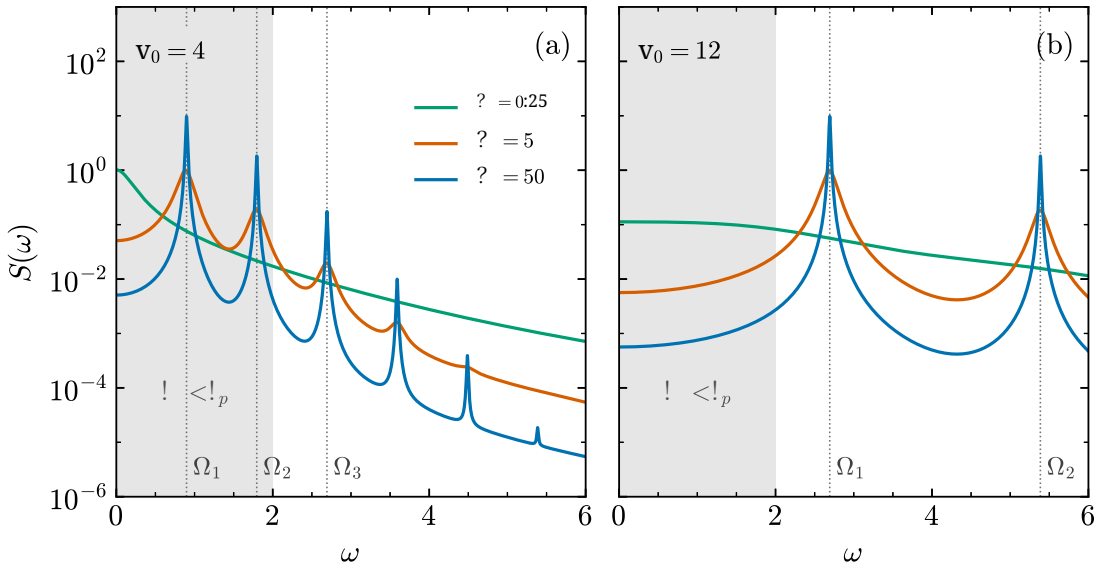


图3. 浴谱 $S(\omega)$，由式(17)得出，其中(a) $v_0 = 4 < v_c$ 和(b) $v_0 = 12 > v_c$ 对应于三种不同的持久时间尺度，参数与图2中相同。阴影区域为声子带 $\omega < \omega_p$，点线标出了交叉频率$\Omega_n = 2\pi n v_0/L$。对于 $v_0 > v_c$，链仅接收到峰的尾部，且尾部随 τ^{-1}减小。

行为，具体取决于 Ω_1 是大于还是小于 ω_p，换句话说，取决于 v_0和 v_c.之间的竞争

对于 $v_0 > v_c$，特征频率Ω_1 位于声子带之外。在此极限下，热浴谱遵循式(29)。因此，增大持久性会降低热浴在链所传输频率处的谱权重。此外，由于格林函数式(30)趋于一个与 τ 无关的极限，电流会减小。利用式(29)和式(30)代入式(23)，即可得到衰减规律：当 τ 较大时，电流按 τ^{-1}衰减。

另一方面，对于 $v_0 < v_c$，电流随 τ 增加，并在持久性非常大时趋于饱和。这里，$S(\omega)$ 的峰位于声子带内，其高度 $S(\Omega_n) = 2\lambda^2 a_n \tau$ 随持久性增加而增大（见图3(a)）。˜当 τ 很大时，Re $\Gamma(\omega)$（公式（14））在交叉频率以下为负；一旦这种负摩擦克服了链的阻尼，线性理论便会变得不稳定（振荡不稳定性）。图4(b)中也可以看到这一点：对于较大的 τ，与公式（23）对应的理论曲线开始偏离模拟结果。然而，随着$\tau \to \infty$，介质粒子做弹道运动，且翻滚时间超过所有其他时间尺度，因此电流变得与持久性无关。饱和值随 v_0 增加，直至 v_c。因此，最大电流出现在高度持久性介质中，且 Ω_1 位于声子带内。

在持久性较小时，电流也趋于零。然而，如 $v_0 = 2$ 图 4 (b) 所示，在这一参数区间内，线性理论同样失效。这可以这样理解：诱导产生的负刚度 $\kappa \propto (v_0^2\tau)^{-1}$在此极限下发散。一旦 $\kappa(\Phi_0^{-1})_{11} > 1$，原点附近的线性化动力学就会变得不稳定，形成定常不稳定性。因此，我们转而围绕具有非零位移 q_1^*的局域态展开。

此外，我们注意到，当 $\tau \to 0$，翻转运动会频繁发生，热浴噪声表现为强度为 $\sqrt{2D_{\rm RT}} = \sqrt{2v_0^2\tau}$ 的白噪声。随后，热浴粒子遵循，

$$\dot{x}_i = -\mu\lambda q_1 \mathcal{F}'(x_i) + \sqrt{2D_{\rm RT}}\,\xi_i(t), \qquad \langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t'). \tag{31}$$

在此 $D_{\rm RT} \to 0$ 极限下，我们寻找一个静止构型 $\boldsymbol{q}^* = (q_1^*, \ldots, q_N^*)^T$，其中介质粒子局域在 x^*，这里 $\mathcal{F}'(x^*) = 0$。平衡位置 $\boldsymbol{q}^*$ 由链上的力平衡确定，即将 $\ddot{q}_i = \dot{q}_i = 0$ 代入方程（2）。由此得到 $[\Phi_0 \boldsymbol{q}^*]_i = \lambda N_b[1 - \mathcal{F}(x^*)]\delta_{i1}$，即

$$q_1^* = \lambda N_b [\Phi_0^{-1}]_{11}[1 - \mathcal{F}(x^*)], \tag{32}$$

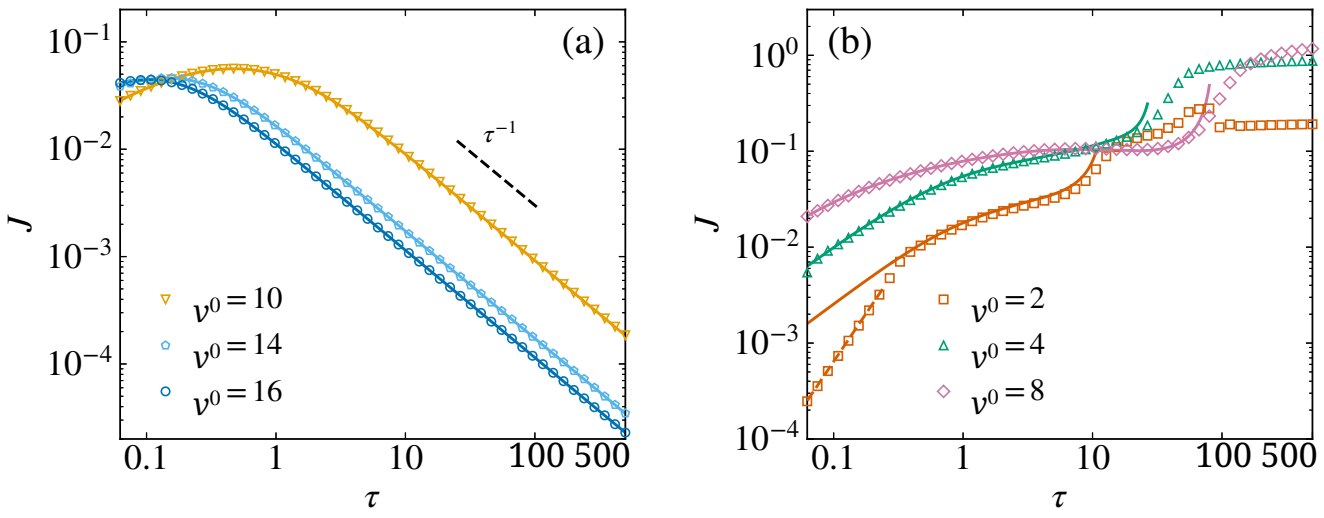


图4. 平均稳态电流 vs 持续时间对应 (a) $v_0 > v_c \approx 8.9$ 和 (b) $v_0 < v_{co}$。符号表示数值模拟所得的数据，实线表示对（23）的数值积分。在图 (b) 中，虚线（小 τ时）对应于 $v_0 = 2$ 的预测（38）。对于两幅图，$N = 32$，$m = k = K = \gamma_N = 1$，$\lambda = 0.1$，
$N_b = 10$ $L = 28$ $p = 2$ ，$\zeta = 0.1$，、以及。

对于满足 $p > 0$ 的 von Mises分布，存在两种局部稳定可能性，

$$x^* = L/2: \qquad q^*_{1,+} = \lambda N_b [\Phi_0^{-1}]_{11} \left[1 - \frac{e^{-p}}{I_0(p)}\right] > 0, \tag{33}$$

$$x^* = 0: \qquad q^*_{1,-} = \lambda N_b [\Phi_0^{-1}]_{11} \left[1 - \frac{e^{p}}{I_0(p)}\right] < 0. \tag{34}$$

二阶导数 $\mathcal{F}''(x) = k_1^2 \mathcal{F}(x)(p^2 \sin^2(k_1 x) - p\cos(k_1 x))$ 对于 $x^* = L/2$ 为正，对于 $x^* = 0$ 为负，这意味着 $\mu\lambda q_1^* \mathcal{F}''(x^*) > 0$。对于此处使用的参数，$q^*_{1,-}\mathcal{F}''(0) > q^*_{1,+}\mathcal{F}''(L/2)$，因此负分支上的热浴粒子受到更强的约束。因此，对于下面的小持续时间估计，我们使用 $q_1^* = q^*_{1,-}$ 和 $x^* = 0$。令 $x_i = x^* + y_i$，并将浴动力学按 y_i 展开至一阶，

$$\dot{y}_i = -\mu\lambda q_1^* \mathcal{F}''(x^*)\, y_i + \sqrt{2D_{\rm RT}}\, \xi_i(t), \qquad \langle y_i(t) y_j(0)\rangle = \delta_{ij} \frac{D_{\rm RT}}{\mu\lambda q_1^* \mathcal{F}''(x^*)} e^{-\mu\lambda q_1^* \mathcal{F}''(x^*)|t|}. \tag{35}$$

将接触力对 y_i展开至二阶，式（2a）变为

$$m\ddot{q}_1 = -Kq_1 - k(q_1 - q_2) - \left[\lambda \sum_{i=1}^{N_b} \left(F(x_i^*) + \mathcal{F}''(x_i^*) \frac{\langle y_i^2\rangle}{2} \right) - \Lambda \right] - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{N_b} \mathcal{F}''(x_i^*)(y_i^2 - \langle y_i^2\rangle). \tag{36}$$

括号内的项给出一个恒力，不影响电流，而最后一项 $\Sigma = -(\lambda/2)\sum_{i=1}^{N_b} \mathcal{F}''(x_i^*)(y_i^2 - \langle y_i^2\rangle)$则充当具有平稳相关性的噪声，

$$C_\Sigma(t) = \langle \Sigma(t)\Sigma(0)\rangle = \frac{N_b \lambda^2 \mathcal{F}''(x^*)^2}{2} \frac{D_{RT}^2}{[\zeta^{-1}\lambda q^* \mathcal{F}''(x^*)]^2} e^{-2[\zeta^{-1}\lambda q^* \mathcal{F}''(x^*)]|t|} \tag{37}$$

因此，在这一条件下，我们得到一组新的线性方程，其中 q_1 的运动方程满足式（36）和（37）。稳态电流仍满足式（23）给出的一般形式，

$$J = \frac{\gamma_N}{\pi} \int_0^\infty {\rm d}\omega\, \omega^2\, |G'_{1N}(\omega)|^2\, S'(\omega), \tag{38}$$

利用格林函数 $G' = [\Phi_0 - m\omega^2 I - i\omega\gamma_N E_N]^{-1}$，以及 $S'(\omega) = \tilde{C}_\Sigma(\omega)$。因此，观测电流与 $D_{RT}^2 = v_0^4 \tau^2$ 成正比。修正后的电流公式可在不稳定区域内进行数值计算，且结果吻合度很高。

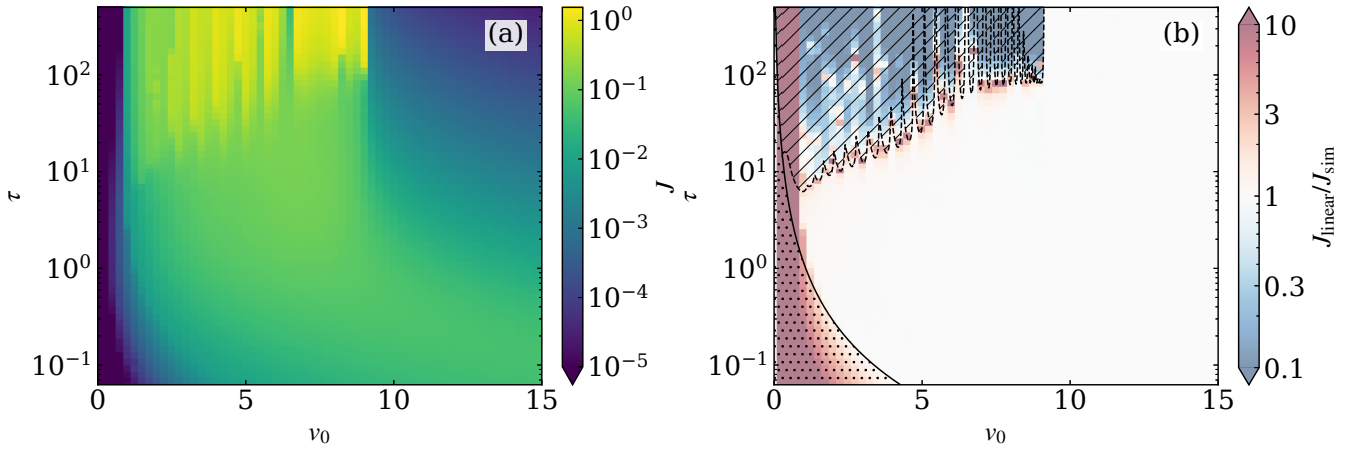


图5. (a)图展示了通过数值模拟获得的(v_0, τ)平面上的平均稳态电流。(b)图展示了同一组数据与通过公式(23)得到的数据之比。实线和虚线分别对应公式(26)和(25)（对于 $\omega \neq 0$）。两个图中均取 $N = 32$, $m = k = K = \gamma_N = 1$, $\lambda = 0.1$, $N_b = 10, \zeta = 0.1, L = 28$, 以及 $p = 2$。

最后讨论稳态电流，我们在图 5 (a) 中给出了 (τ， v_0) 平面上的电流等高线图。对于高度持久性介质，电流最大；此时推进速度 v_0 处于由声子模的特征频率所确定的范围内 v_c。在持久性较大的这一极限下，电流在超过 $v_0 > v_c$ 后会急剧下降。线性理论在两个区域内失效，这与方程（25）给出的一般预言一致。当线性诱导刚度 $\kappa \propto (v_0^2\tau)^{-1}$ 变得非常大时，会出现零频率交叉。方程（26）所给出的条件标示了这一以点状阴影填充的区域。另一种不稳定性由诱导的负线性摩擦引起；此时， $\omega \neq 0$ 对应的边界方程（25）以虚线标出，线性不稳定区域则以实线条纹阴影标示。在这两条边界之间，由约化动力学得到的有效线性理论能够很好地描述稳态电流。

V. 导热链的体相性质

现在我们希望了解活性介质的存在如何影响导体的稳态体性质。具体而言，我们考察动能温度分布、单振子速度分布以及空间速度关联。

A. 温度分布

我们首先考察谐链的动能温度分布，

$$T_i = m\langle \dot{q}_i^2 \rangle, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{39}$$

体温度剖面是平坦的，两端存在边界层，如图 6 （a）-（c）所示。这是导体具有谐性质并表现出弹道输运的结果。体温度剖面$T_{\mathrm{bulk}} = \frac{1}{N-l_0}\sum_{i=l_0/2}^{N-l_0/2} T_i$（其中 $l_0 \ll N$的选取是为了避开边界位置）。图 6 （d）显示了 T_{bulk}在（v_0, τ）平面中的分布。其定性行为与电流呈现相同的趋势。最大的体温出现在较大的τ和 $v_0 \lesssim v_c$情况下；当 v_0 增大超过 v_c时，电流急剧下降。对于较小的 τ，影响则要缓和得多，但仍表现出相同的性质，即先随 v_0增加，随后在 v_0 取较大值时缓慢下降。

B. 速度分布

动能温度分布刻画了沿导体的速度涨落。为了理解高阶涨落，我们考察体相中的速度涨落。具体而言，我们通过数值方法考察第一个、中间以及第 N个振子在 $v_0 < v_c$下的速度分布，结果如图 7所示。我们发现

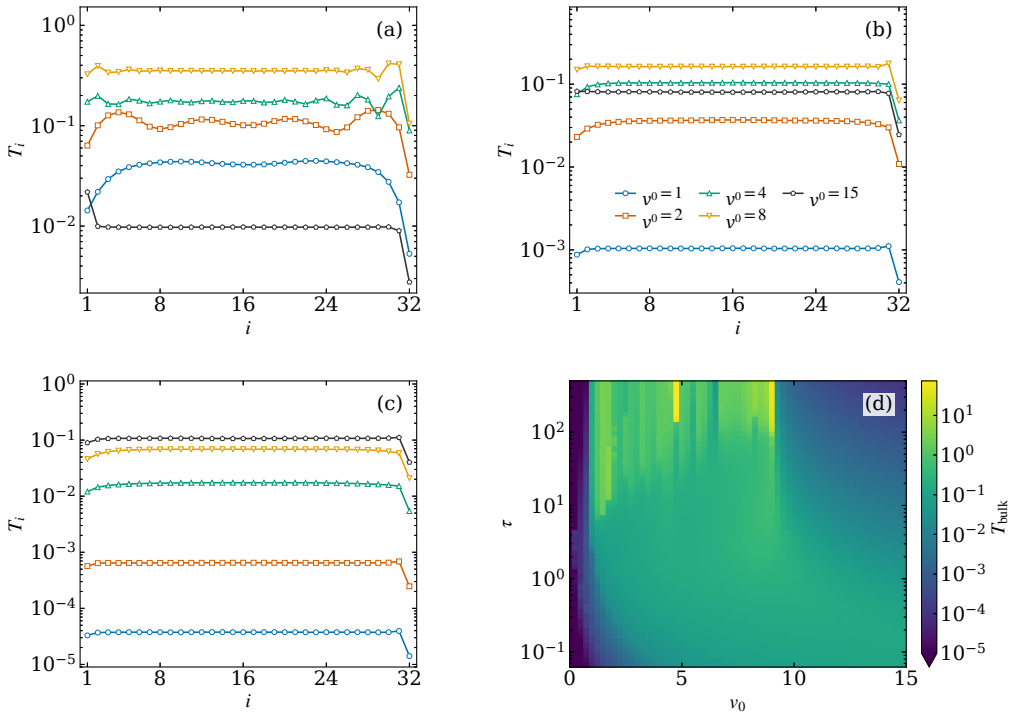


图6. 导体中的动能温度分布。面板(a)、(b)和(c)分别显示 τ = 5 0.5 0.0625 T_{bulk} $l_0 = 4$,,的完整温度分布。面板(d)显示体温，其中为。所有图中的数据均来自采用 $N = 32$, $m = k = K = \gamma_N = 1$, $\lambda = 0.1$, $N_b = 10, \zeta = 0.1, L = 28,$ 和 $p = 2$进行的数值模拟。

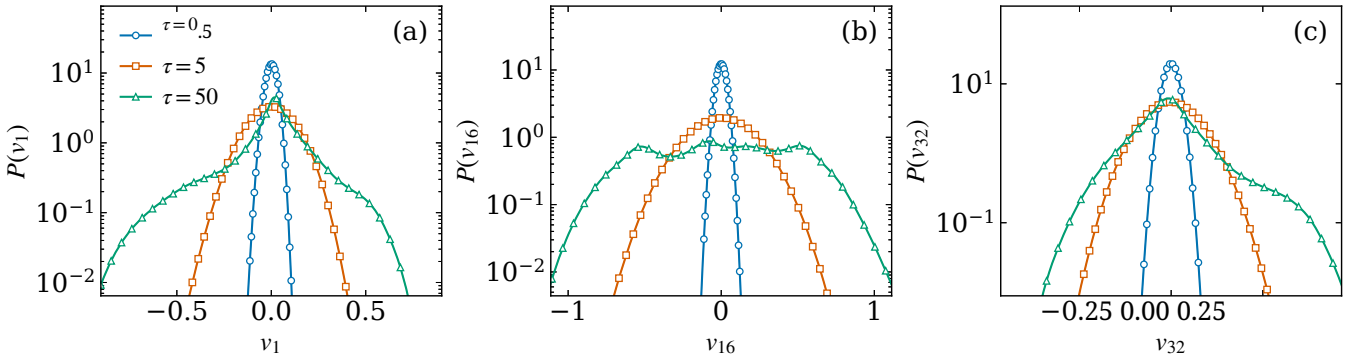


图7. 速度分布 $P(v_i)$，对应 $i = 1, 16, 32$，链长为 $N = 32$。图中的数据来自数值 方程(2)-(3的模拟，参数为 $v_0 = 1$, $m = k = K = \gamma_N = 1$, $\lambda = 0.1$, $N_b = 10, \zeta = 0.1, L = 28,$ 和 $p = 2$。

在高持久性下，所有分布都显著偏离高斯分布。更有意思的是， $P(v_1)$呈单峰正偏分布， $P(v_{N/2})$呈现对称多峰结构，而 $P(v_N)$呈单峰负偏分布。值得注意的是， $\tau = 50$ 处于第 IVA节讨论的振荡不稳定性区域，这表明非线性效应对于捕捉这些现象至关重要。当 τ取值较小时，这些分布可以很好地用高斯分布近似。这一点在稳定区域和定常不稳定性区域均成立。

C. 体相中的相关函数

速度分布清楚地表明，活性介质会沿着导体产生非平凡关联，尤其是在不稳定性区域。为了更好地理解这一现象，我们研究等时空 间关联

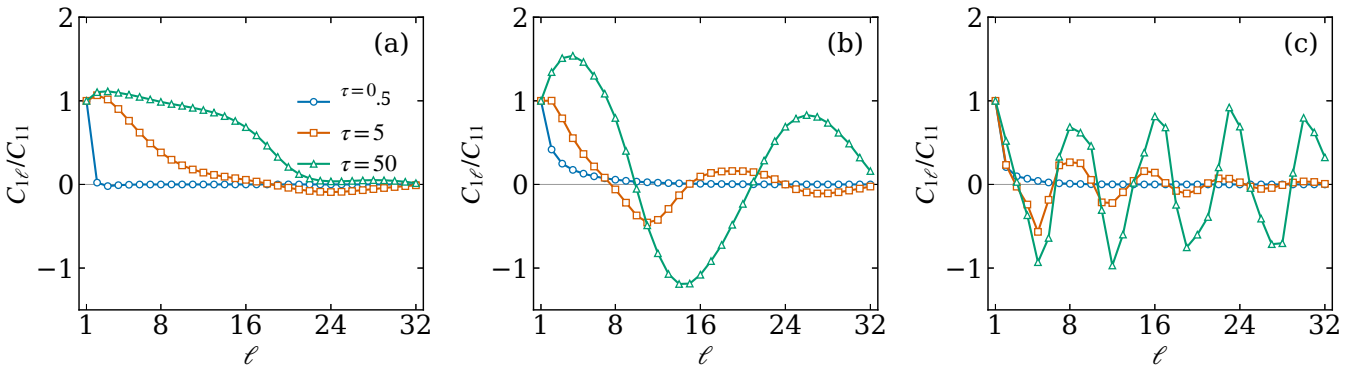


图 8. 沿链的连通速度关联，如式（40）所定义，保持 $j = 1$，对于长度为 $N = 32$的链。图中数据由式（2）-（3）的数值模拟得到，其中所有面板均取 $m = k = K = \gamma_N = 1$，$\lambda = 0.1$，$N_b = 10$，$\zeta = 0.1$，$L = 28$，$p = 2$ $v_0 = 1$ 2 4；面板 (a)、(b) 和 (c) 分别取 ,,。

振子速度的，

$$C_{j\ell} = \langle \dot{q}_j \dot{q}_\ell \rangle - \langle \dot{q}_j \rangle \langle \dot{q}_\ell \rangle \tag{40}$$

对于平衡朗之万热库之间的热传导，体相振子的速度彼此不相关，$C_{j\ell} \propto \delta_{j\ell}$. 先前关于主动能量传导的研究发现，振子介质会在导热链中产生相关函数，并且这些相关函数会指数衰减 [23]。在这里，我们观察到一种截然不同的结构。

图 8 显示了 $C_{1\ell}/C_{11}$ 对应三种推进速度 $v_0 = 1$、2 和 4，均低于 v_c，以及三种持续时间。持续时间较短时 $\tau = 0.5$，对于所有选定的 v_0，相关函数都会非常迅速地衰减至零。这对线性稳定区域（图 8 (b) 和 (c)）以及定常不稳定区域（$v_0 = 1$，图 8 (a)）均成立。持续时间处于中等水平时 $\tau = 5$，对于三种推进速度，线性理论均稳定。此时，相关函数会延伸至链中更远的位置；对于 $v_0 = 2$ 和 4，相关函数在衰减的同时发生振荡，这与主动鲁宾介质中的行为相似 [23]。振荡由与交叉频率 Ω_1, 共振的链模态决定，并且随着 v_0 增大而加快。

对于高持久性（$\tau = 50$），三个速度都处于振荡不稳定性区域，并且沿链的长度方向产生了非平凡关联。对于 $v_0 = 1$ （图8 （a）），速度与活性端之间在很长的距离内仍保持强烈的正相关。对于 $v_0 = 2$ （图8 （b）），相关性沿链长方向呈现振荡，但振幅逐渐衰减。对于 $v_0 = 4$ （图8 （c）），相关性沿链长方向呈现不衰减的振荡。

VI. 结论

我们研究了能量如何通过一条谐链输运：链的一端由跑动-翻滚粒子介质驱动，另一端则由零温朗之万储库排出能量。受软物质环境的启发，该介质通过短程接触相互作用与链相互作用。我们的目标是了解介质的活性（由推进速度 v_0 和持续时间 τ 表征）如何决定流经链的能量。

为此，我们首先在弱系统-介质耦合下，通过消去介质，求得与活性介质耦合的粒子的约化动力学，其中时间尺度分离是一个充分条件；保留介质的完整记忆后，该结果的适用范围远超这一条件。我们计算了弱耦合参数的二阶介质诱导力，发现诱导刚度 $-\kappa$ 为负，其中 κ 与 $(v_0^2\tau)^{-1}$成正比；一旦2α <Ω_n，记忆摩擦的耗散部分在低于环穿越频率的频率处变为负值，持续介质的摩擦便会向链中泵入能量，而不是吸收能量。相应的 Landauer-B¨uttiker 公式在 (v_0, τ) 平面的大部分区域内定量地给出了稳态电流。然而，其主要优点在于能够界定自身的适用范围。$\det G^{-1}(\omega)$ 的零点在以下两种情况下穿过实轴：在 $\omega = 0$ 处，此时诱导软化超过链本身的作用（定常不稳定性，小 $v_0^2\tau$ ）；或在一对 $\pm\omega \neq 0$处，此时诱导摩擦足够负，甚至超过了另一个热浴产生的阻尼（振荡不稳定性，大 τ 且 $v_0 < v_c$）。这两个边界均与线性预测偏离模拟结果的位置一致。在第一种情况下，失效较为温和：链弛豫到一个偏移的平衡位置，介质粒子在耦合极值附近呈类奥恩斯坦-乌伦贝克分布，而围绕该状态的线性理论再次

预测电流，此时其标度为 D_{RT}^2。在第二种情况下，线性不稳定模态只能通过耦合的非线性得到稳定，因此约化描述必须保留这种非线性。

电流的现象学特征由交叉频率 $\Omega_1 = 2\pi v_0/L$ 相对于声子带的位置决定。对于持久性介质和 $v_0 < v_c$，电流会与链的正常模发生共振，并达到最大值；对于 $v_0 > v_c$，电流则会骤降。对于快速翻滚运动，电流对 v_0 的依赖关系较为平滑。在推进速度较大且持久性固定时，电流按 v_0^{-2}衰减；而在 $v_0 > v_c$ 固定时，当持久性较大，电流按 τ^{-1} 衰减。这两种衰减都源于浴力在链频率处的谱权重降低，并由此产生负微分电导。当低于 v_c时，交叉频率位于声子带内；对于高度持久性介质，共振驱动与负诱导摩擦随即产生最强的输运。

同一状态在链上留下了最清晰的印记。尽管动能温度分布在体相中保持平坦并随电流变化，但在第二个不稳定性区域内，速度统计呈现出强烈的非高斯特征；等时速度关联则延伸至整条链，并表现出由发生共振的链模态所选择的阻尼或无阻尼空间振荡。平衡储库不会呈现上述任何现象，而这些现象也超越了由活性振子介质产生的指数衰减相关函数。

仍有几个问题悬而未决。针对振荡不稳定性的简化理论需要超越探针位移的线性阶，并应解释电流为何饱和以及非高斯速度统计。另一个值得研究的问题是，对于非谐导体，哪些特征仍然成立（此时传输不再是弹道式的）；若右端还有第二个活性介质，又会如何；以及电流涨落的情况如何。 [30], 对于非谐导体，传输不再是弹道式的 [31——33], 对于右端存在第二个活性介质的情况，以及电流涨落层面的情况。
更一般地说，这个例子表明，活性环境通过其所有诱导力（刚度、摩擦和噪声）作用于系统；决定能量通过量的，是这些因素之间的相互作用，而非有效温度。

致谢： IS 感谢 Bijay K Agarwalla 就周期驱动链中的能量传导进行的有益讨论。IS 感谢欧盟 Horizon Europe 研究与创新计划提供资助，资助依据为 Marie Sk·lodowska–Curie（HORIZON-TMA-MSCA-PF-EF）项目协议，编号 101205210。

附录 A：力的分解的有效性

为理解约化动力学，我们将式（8）中的浴力分解为准静态部分，以及围绕该状态的线性响应。本节将讨论这种分解在何种情况下成立。为此，我们首先写出完整动力学的后向生成元，

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^P \tag{A1}$$

$$\text{with } \mathcal{L}^B = \sum_{i=1}^{N_b} \left[(v_0\sigma_i - \mu\lambda q \mathcal{F}'(x_i))\, \partial_{x_i} + (2\tau)^{-1}(T_i - 1) \right] \tag{A2}$$

$$\mathcal{L}^P = v\partial_q - m^{-1} \left(Kq + \lambda \left[\sum_{i=1}^{N_b} \mathcal{F}(x_i) - N_b \right] \right) \partial_v, \tag{A3}$$

其中，算符 T_i 使第 i 个粒子反向运动。

令 $q_c > 0$ 为特征位移振幅。未耦合探针满足 $\ddot{q} = -\omega_0^2 q$，其中 $\omega_0 = \sqrt{K/m}$。因此，振幅为 q_c 的振荡具有速度振幅 $v_s = \omega_0 q_c$，对应的动量尺度为$mv_s = \sqrt{mK}\, q_c$。令 t_{b} 表示热浴的弛豫时间，其将在下文确定。用缩放变量 $y = q/q_c$、 $w = v/v_s$和 $\bar{t} = t/t_{\mathrm{b}}$表示，

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}^B + \varepsilon\, \widehat{\mathcal{L}}^P, \tag{A4}$$

其中

$$\widehat{\mathcal{L}}^B = t_{\rm b}\mathcal{L}^B, \qquad \widehat{\mathcal{L}}^P = w\partial_y - \left[y + \frac{\lambda}{Kq_c}\left(\sum_{i=1}^{N_b}\mathcal{F}(x_i) - N_b\right)\right]\partial_w, \quad \text{and} \qquad \varepsilon = t_{\rm b}\omega_0. \tag{A5}$$

对于准静态响应，我们假设探针固定在位置 q 时，介质以稳态分布 $\rho_q(x)$ 演化。这里 $\rho_q(x) = \sum_{\sigma=\pm1} P_q(x, \sigma)$，其中 P_q 是在固定 q，$[\mathcal{L}^B]^\dagger P_q = 0$ 时介质动力学的稳态解。该冻结稳态下的平均浴力定义了准静态贡献。然而，探针实际上并非静止，而是在 $s \le t$ 内沿轨迹 $q(s)$ 运动。因此，准静态力的第一个修正来自实际轨迹与固定位置之间的差异，$q(s) - q(t)$。我们将这一差异视为微扰，并对其作一阶展开。因此，微扰后的浴生成元为 $\mathcal{L}^B + \mathcal{L}'^B$，其中，

$$\mathcal{L}'^B = -\mu\lambda\,[q(s) - q(t)]\sum_i \mathcal{F}'(x_i)\partial_{x_i}, \tag{A6}$$

它与弱耦合参数 λ 成正比。为了估计 $q(s) - q(t) = \int_t^s \mathrm{d}u\, v(u)$，我们使用柯西–施瓦茨不等式和平稳性，

$$\left\langle [q(s) - q(t)]^2 \right\rangle^{1/2} \le (t-s)\left\langle \dot{q}^2 \right\rangle^{1/2} = \varepsilon\,\frac{t-s}{t_{\rm b}}\,q_c\left\langle \left(\frac{v}{v_s}\right)^2 \right\rangle^{1/2}. \tag{A7}$$

由于介质会在时间 $t_{\rm b}$ 内弛豫（下文将确定），因此只有近期的历史，$t - s = O(t_{\rm b})$，才会影响时刻 t的浴力。假设 $\langle (v/v_s)^2 \rangle$ 为数量级为一的量，则这段时间内的历史位移至多为 $O(\varepsilon q_c)$。只要满足 A6，微扰便相对于介质动力学足够小，$\mu\lambda\,\varepsilon q_c$最大 $|\mathcal{F}'| \ll v_0$。因此，$\varepsilon \ll 1$这一条件与弱耦合共同构成慢探针区间，此时线性响应展开成立。

需要强调的是，这些条件描述的是适用性的保守区间，而非有效性的明确边界。因此，只要耦合加权的历史微扰仍然很小，所得的弱耦合描述在慢探针区间之外也可能依然准确。我们的模拟也探索了这一更广泛的区间，并通过与完整微观动力学进行比较来评估约化描述的准确性。

确定 t_b

在弱耦合的最低阶近似下，可在 $\lambda = 0$ 处得到浴弛豫尺度。设 $P_\pm(x,\ t)$ 为具有 $\sigma = \pm1$ 的游走翻转粒子的概率分布。定义 $\rho(x) = P_+(x) + P_-(x)$ 和 $m(x) = P_+(x) - P_-(x)$，福克–普朗克方程为

$$\partial_t\rho = -v_0\,\partial_x m + \mu\lambda q\,\partial_x[\mathcal{F}'(x)\rho]\,, \tag{A8}$$

$$\partial_t m = -v_0\,\partial_x\rho + \mu\lambda q\,\partial_x[\mathcal{F}'(x)m] - \frac{m}{\tau}. \tag{A9}$$

对于 $\lambda = 0$，上述方程的两个特征值为

$$z_n^\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \Omega_n^2}. \tag{A10}$$

对于 $n = 0$，ρ 守恒；而对于 $n > 0$，最慢的衰减模为 $g_n = -\mathrm{Re}[z_n^+]$，其中最小值为 g_1。为了确定与探针相关的弛豫时间，我们考察接触剖面的傅里叶系数，

$$\mathcal{F}(x) = 1 + 2\sum_{n\ge1} f_n\cos(k_n x), \qquad f_n = \frac{I_n(p)}{I_0(p)}. \tag{A11}$$

For $p > 0$，$f_1 > 0$，因此力与最慢的非均匀模态耦合。因此我们选择 se

$$t_{\rm b} = \frac{1}{g_1} = \left[\frac{1}{2\tau} - \mathrm{Re}\sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \Omega_1^2}\right]^{-1}. \tag{A12}$$

在持久性状态 $\Omega_1\tau > 1/2$ 下，有 $t_{\rm b} = 2\tau$，因此对于高度持久性介质，$\varepsilon = 2\tau\omega_0$ 很大；在此情况下，需要通过与模拟进行比较来作出判断。

附录 B：有效介质力

在本附录中，我们推导出介质施加的诱导力，正如正文中所述。

1. 平均力

我们考虑探针位于固定位置时的介质动力学方程（3）。令 q， $P_{\pm}(x)$ 为 RTP 的平稳概率分布，其中 $\sigma = \pm 1$。在弱耦合极限下，福克-普朗克方程（A9）的平稳解可展开为微扰级数 $\rho(x) = \frac{1}{L} + \lambda\rho_1(x)$，且 $m(x) = \lambda m_1(x)$。在零阶时，

$$\rho_0(x) = \frac{1}{L}, \qquad m_0(x) = 0. \tag{B1}$$

将其代回可得一阶结果：

$$v_0\,\partial_x m_1 = \frac{\mu q}{L}\mathcal{F}''(x), \qquad v_0\,\partial_x \rho_1 = -\frac{m_1}{\tau}. \tag{B2}$$

利用 $\int_0^L \rho_1\,\mathrm{d}x = 0$,

$$m_1(x) = \frac{\mu q}{L v_0}\mathcal{F}'(x), \qquad \rho_1(x) = -\frac{\mu q}{L v_0^2 \tau}\left[\mathcal{F}(x) - \langle\mathcal{F}\rangle_0\right]. \tag{B3}$$

因此，一个粒子施加的准静态力变为

$$F_i^{\mathrm{qs}}(t) = -\lambda\int_0^L dx\,\rho(x)\mathcal{F}(x) = -\lambda\langle\mathcal{F}\rangle_0 + \lambda^2\frac{2\alpha\mu}{v_0^2}q(t)\left(\langle\mathcal{F}^2\rangle_0 - \langle\mathcal{F}\rangle_0^2\right). \tag{B4}$$

对 N_b 个粒子求和后，这就是式（11），其中 $\langle\mathcal{F}\rangle_0 = 1$。诱导刚度 κ 对应于有效温度为$T_{\mathrm{RT}} = \zeta v_0^2\tau$的热粒子浴。对于 von Mises 分布，可以得到 [6],

$$\langle\mathcal{F}^2\rangle_0 - \langle\mathcal{F}\rangle_0^2 = \frac{I_0(2p)}{I_0(p)^2} - 1. \tag{B5}$$

2. 摩擦

为求摩擦项，我们首先注意到，探针引入的微扰会使粒子的正向生成元改变 $q(t)L_1^\dagger$，其中

$$L_1^\dagger P = \mu\lambda\,\partial_x[\mathcal{F}'(x)P]. \tag{B6}$$

利用可观测量 O 的 Kubo-Agarwal线性响应公式，可得

$$\langle O(t)\,|\,q(s),\,s\le t\rangle = \langle O\rangle_{q(t)} + \int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}s\,R_O(t-s)\,(q(s)-q(t)), \qquad R_O(s) = \left\langle O(x(s))\,\frac{L_1^\dagger P_0}{P_0}(x(0))\right\rangle_0. \tag{B7}$$

自由密度 P_0 是均匀的，且与 σ无关，因此 $L_1^\dagger P_0/P_0 = \mu\lambda\,\mathcal{F}''$（$x$）。对于 $O = F_A$（见式（7），

$$R(t) = -\mu\lambda^2 N_b\,\langle\mathcal{F}(x(t))\,\mathcal{F}''(x(0))\rangle_0. \tag{B8}$$

接着，利用式（12），摩擦核为

$$\Gamma(u) = \int_u^\infty \mathrm{d}s\,R(s). \tag{B9}$$

为了计算响应函数式（B8）中出现的关联，我们改写

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n e^{ik_n x}, \qquad \text{with } k_n = \frac{2\pi n}{L}. \tag{B10}$$

以及 $F_{-n}=F_n$，对均匀初始位置取平均后，只剩下波数相反的项，

$$\langle \mathcal{F}(x(t)); \mathcal{F}(x(0))\rangle_0 = \sum_{n\neq 0} F_n^2\, C_n(t), \qquad \langle \mathcal{F}(x(t))\, \mathcal{F}''(x(0))\rangle_0 = -\sum_{n\neq 0} k_n^2 F_n^2\, C_n(t), \tag{B11}$$

自由粒子位移的特征函数，

$$C_n(t) = \langle e^{\mathrm{i}k_n[x(t)-x(0)]}\rangle_0. \tag{B12}$$

它正是无微扰 RTP 的生成函数，这一点广为人知 [34]。利用这一点，我们得到，

$$\tilde{R}(\omega) = \mu\lambda^2 \sum_{n\geq 1} a_n k_n^2\, \frac{1-\mathrm{i}\omega\tau}{\Omega_n^2\tau - \omega^2\tau - \mathrm{i}\omega}, \tag{B13}$$

由此可得摩擦核

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \mu\lambda^2 \sum_{n\geq 1} a_n k_n^2\, \frac{1-\Omega_n^2\tau^2-\mathrm{i}\omega\tau}{\Omega_n^2\,(\Omega_n^2\tau^2 - \omega^2\tau^2 - \mathrm{i}\omega\tau)}, \tag{B14}$$

这就是正文中给出的结果。

3. 噪声

力的涨落部分为 $\eta = F_A - \langle F_A \,|\, q(s\leq t)\rangle$。它带有一个因子 λ，因此在最低阶，其协方差与自由介质中的 F_A 相同，

$$\langle \eta(t)\eta(t')\rangle = \lambda^2 N_b \langle \mathcal{F}(x(t)); \mathcal{F}(x(t'))\rangle_0 + O(\lambda^3) = \lambda^2 \sum_{n\geq 1} a_n\, C_n(|t-t'|) + O(\lambda^3). \tag{B15}$$

其谱 $S(\omega) = 2\lambda^2 \sum_n a_n$实部 $\tilde{C}_n(\omega)$，由方程（B12）得出，

$$S(\omega) = \lambda^2 \sum_{n\geq 1} \frac{2a_n\Omega_n^2\tau}{(\Omega_n^2-\omega^2)^2\tau^2+\omega^2}. \tag{B16}$$

在时间尺度分离区间内， η 表现为白噪声，

$$\langle \eta(t)\eta(t')\rangle \simeq S(0)\,\delta(t-t'), \qquad S(0) = \lambda^2 \frac{2}{\tau} \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\Omega_n^2}. \tag{B17}$$

附录 C：数值模拟

我们使用速度-Verlet算法更新链，并结合显式欧拉更新介质粒子以及精确的右边界阻尼，来模拟方程（2）和（3）。每一步中，独立发生翻转的概率为 $(1-e^{-\Delta t/\tau})/2$。对于 $\Delta t = 10^{-3}$，我们采用 $v_0 < 50$；对于较大的 v_0，则采用 $\Delta t = 10^{-4}$。计算稳态平均值时，我们先让系统弛豫至稳态，随后在稳态下进行时间平均。

[1] Z. Rieder、J. L. Lebowitz 和 E. Lieb，J. Math. Phys. **8**，1073（1967）。[2] S. Lepri、R. Livi 和 A. Politi，Phys. Rep. **377**，1（2003）。[3] A. Dhar，Adv. Phys.**57**，457（2008）。[4] A. Dhar 和 D. Roy，J. Stat. Phys. **125**，801（2006）。[5] A. Casher 和 J. L. Lebowitz，J. Math. Phys. **12**，1701（1971）。[6] S. Krekels、C. Maes、I. Santra 和 R. Zhai，Transp. Phenom. **1**，20260042（2026）。

[7] M. C. Marchetti、J. F. Joanny、S. Ramaswamy、T. B. Liverpool、J. Prost、M. Rao 和 R. A. Simha，《现代物理评论》85, 1143 2013( )。[8] C. Bechinger、R. Di Leonardo、H. L¨owen、C. Reichhardt、G. Volpe 和 G. Volpe，《现代物理评论》88, 045006 (2016)。[9] C. Maes 和 S. Steffenoni，《物理评论E》91, 022128 (2015)。[10] C. Maes，《物理评论快报》125, 208001 (2020)。[11] I. Santra，《复杂物理学杂志》4, 015013 (2023)。[12] X.-L. Wu 和 A. Libchaber，《物理评论快报》84, 3017 (2000)。[13] C. Maggi、M. Paoluzzi、N. Pellicciotta、A. Lepore、L. Angelani 和 R. Di Leonardo，《物理评论快报》113, 238303 (2014)。[14] O. Granek、Y. Kafri 和 J. Tailleur，《物理评论快报》129, 038001 (2022)。[15] U. Basu、C. Maes 和 K. Neto˘cn´y，《物理评论快报》114, 250601 (2015)。[16] I. Santra 和 M. Kr¨uger，《统计力学杂志：理论与实验》2024, 123203。[17] G. Knotz 和 M. Kr¨uger，《物理评论E》110, 044137 (2024)。[18] J.-H. Pei 和 C. Maes，《物理评论E》111, L032101 (2025)。[19] J.-H. Pei 和 C. Maes，《物理评论快报》136, 038301 (2026)。[20] C.-U. Woo、J. Choi 和 H. Rieger，arXiv:2609.17047 (2026)，arXiv:2609.17047。[21] I. Santra 和 U. Basu，《SciPost物理》13, 041 (2022)。[22] R. Sarkar、I. Santra 和 U. Basu，《物理评论E》107, 014123 (2023)。[23] R. Sarkar、I. Santra 和 U. Basu，《英国皇家学会学报A辑》480, 20240275 (2024)。[24] A. Beyen、C. Maes 和 J.-H. Pei，《物理评论E》112, L042103 (2025)。[25] A. Beyen、C. Maes 和 I. Santra，arXiv:2605.16209 (2026)，arXiv:2605.16209。[26] K. Malakar、V. Jemseena、A. Kundu、K. Vijay Kumar、S. Sabhapandit、S. N. Majumdar、S. Redner 和 A. Dhar，《统计力学杂志：理论与实验》2018, 043215。[27] G. S. Agarwal，《物理学杂志A》252, 25 (1972)。[28] A. Dhar，《物理评论快报》86, 5882 (2001)。[29] A. Prem、V. B. Bulchandani 和 S. L. Sondhi，《物理评论B》107, 104304 (2023)。[30] I. Santra、U. Basu 和 S. Sabhapandit，《物理学杂志A：数学与理论》55, 385002 (2022)。[31] S. Lepri、R. Livi 和 A. Politi，《物理评论快报》78, 1896 (1997)。[32] T. Mai、A. Dhar 和 O. Narayan，《物理评论快报》98, 184301 (2007)。[33] S. Lepri、C. Mej´ıa-Monasterio 和 A. Politi，《物理学杂志A：数学与理论》42, 025001 (2009)。[34] A. Dhar、A. Kundu、S. N. Majumdar、S. Sabhapandit 和 G. Schehr，《物理评论E》99, 032132 (2019)。