arXiv:2611.33001v1 [math.NT] 24 Nov 2026

局部魏尔显式公式及相关结构

MASATOSHI SUZUKI

Abstract. 我们研究由与黎曼ζ函数相关的局部韦伊二次型构造的再生核希尔伯特空间。在该二次型正定的范围内，我们证明一个局部显式公式，将韦伊分布表示为微分算子自伴扩张的离散谱。我们通过再生核对角值的一致有界性刻画黎曼猜想。随后，我们研究 de Branges 空间链，并在局部正性的条件下，不假设黎曼猜想，显式地从这些核中恢复相应典范系统的哈密顿量。最后，在假设黎曼猜想成立的前提下，我们研究该系统解的渐近行为。

1. 引言

等式

$$\sum_{p^k\le x}\log p = x - \sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) \quad (x>1,\ x\neq p^k) \tag{1.1}$$

将素数与黎曼ζ函数的非平凡零点联系起来 $\zeta(s)$，在利用ζ函数证明素数定理时起着至关重要的作用。这里，$\sum_\rho$ 遍历 $\zeta(s)$的非平凡零点，并按重数计数； $|\Im(\rho)|\le T$ 上的求和极限表示为 $T\to\infty$ （见 [3, (12.1)]）。在解析数论中，这类将素数幂与ζ函数零点联系起来的等式称为显式公式。以下魏尔显式公式通过引入满足适当条件的测试函数推广了这一等式。对于 $u\in C_c^\infty(\mathbb{R})$，定义

$$\begin{aligned} W(u) := {} & \int_{-\infty}^{\infty} u(x)(e^{x/2}+e^{-x/2})dx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}u(\log n) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}u(-\log n) \\ & - (\log 4\pi + C_0)u(0) - \int_0^\infty \Big\{u(x)+u(-x)-2e^{-x/2}u(0)\Big\}\frac{e^{x/2}dx}{e^x-e^{-x}}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 Λ 是冯·曼戈尔特函数，

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{if, for some prime } p,\ n=p^k\ (k\ge 1), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

而 C_0 是欧拉–马歇罗尼常数。线性泛函 $u\mapsto W(u)$称为韦伊分布（参见命题 2.1]的 [4, 证明以及 [7,§1.1]）。

令 $\xi(s) := (1/2)s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ 为黎曼 ξ 函数。关于 $\xi(s)$ 的函数方程及其零点的基本性质，参见 [3, §10.1、§10.2]。令 Γ表示函数 $z\mapsto\xi(1/2-iz)$ 的零点集合，并对每个 $\gamma\in\Gamma$, 令 m_γ 为

Date: 2026年11月25日版本。2020 *Mathematics Subject Classification.* 11M26，42A82，46E22，47B25。*Key words and phrases.* 韦伊二次型；局部魏尔显式公式；典范系统；de Branges 空间；螺旋函数。

零点 γ 的重数。Γ 中的元素不必为实数。我们使用傅里叶变换

$$\widehat{u}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{izx}\, dx.$$

那么，对于每个 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，我们有

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} m_\gamma\, \widehat{u}(\gamma) = W(u). \tag{1.3}$$

这就是魏尔显式公式（参见 [3, 定理 12.13] 和 [5, (5.15)]）。可容许测试函数的类 u 可以扩展到包含不连续函数，例如区间的示性函数，而经典公式 (1.1) 可视为一个特例。不过，我们先处理 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$。

魏尔显式公式在数论中有许多应用，包括素数定理的证明以及黎曼猜想的判据。黎曼猜想（黎曼假设，RH）断言，黎曼ζ函数的每个非平凡零点都位于临界线 $\Re(s) = 1/2$ 上；它等价于由韦伊分布定义的韦伊二次型非负，

$$Q_W(u, f) := W(u * \widetilde{f}), \qquad Q_W(u) := Q_W(u, u),$$

对每个 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 都成立。这称为韦伊正性判据 [9, 12]。这里

$$(u * f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} u(y) f(x - y)\, dy, \qquad \widetilde{u}(x) := \overline{u(-x)}.$$

写作本文时，黎曼假设仍是一个未解决的问题，因此尚不清楚 Q_W 是否非负。[1] 然而，已知若将测试函数 $u \neq 0$ 的支集限制在足够小的区间内，则 $Q_W(u) > 0$。事实上，Yoshida [12,引理 2] 的证明表明，对于所有充分小的 $a > 0$，存在 $c = c_a > 0$，使得对每个 $u \in C_c^\infty(-a, a)$，都有 $Q_W(u) \geq c\|u\|_{L^2}^2$。这里，$C_c^\infty(-a, a)$表示支集包含于 $(-a, a)$ 的 C^∞ 函数空间。将 Q_W限制在 $C_c^\infty(-a, a)$ 上，得到定义于 $L^2(-a, a)$ 上的下有界二次型，并且该二次型是可闭的 [7, §3]。我们将其闭包记为 Q_W^a，将与 Q_W^a 对应的唯一自伴算子记为 A_a。若存在 $c > 0$，使得在整个型域上 $Q_W^a(u, u) \geq c\|u\|_{L^2}^2$，则记为 $Q_W^a > 0$。上述估计可推广至 Q_W^a。

本文旨在从这种局部正性出发，得到魏尔显式公式的局部版本，并描述相关再生核希尔伯特空间族的结构。本文的结果进一步发展了 [7]中开启的研究。

现在我们来描述局部显式公式。首先假设 Q_W^a 为正，并令 $\mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$为将 $C_c^\infty(-a,\ a)$ 关于 Q_W^a完备化后得到的希尔伯特空间。其元素的傅里叶变换所构成的空间，

$$\mathcal{B}_a := \widehat{\mathcal{H}(\mathsf{A}_a)},$$

是一个再生核希尔伯特空间；我们将其再生核记为 $J_a(w,\ z)$。微分算子 $\mathscr{D}_a = i\, d/dx$ 在 $\mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$ 上的定义域为$C_c^\infty(-a,\ a)$，它有一族由 $\theta \in [0, 2\pi$ 参数化的自伴扩张 $\mathscr{D}_{a,\ \theta}$。每个扩张都有紧预解算子（命题 2.2）。令 $\Gamma_{a,\ \theta}$ 表示其特征值集合。于是有以下结果。

[1]本文完成后不久，L. Alp¨oge 宣布于2026年11月20日用 Lean 给出了黎曼假设的证明。这一进展不影响本文的结果。

定理 1.1 (局部魏尔显式公式)。固定满足 $Q_W^a > 0$ 的 $a > 0$ 。那么，对于每个 $\theta \in [0, 2\pi)$ 以及 $u \in C_c^\infty(-a,\ a)$，有

$$W(u) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{a,\theta}} \frac{\widehat{u}(\gamma)}{J_a(\gamma,\gamma)}, \tag{1.4}$$

并且右侧的级数绝对收敛。

对于固定的 $a > 0$，使得 $Q_W^a > 0$, (1.4) 的左侧与指定 $\mathscr{D}_a$ 的自伴扩张的相位 θ 无关，而右侧则是对与相位 θ 对应的特征值集合 $\Gamma_{a,\theta}$ 求和。此外，对于 $u \in C_c^\infty(-a, a)$，(1.2) 中的求和只有有限多项非零，且除了涉及 $u(0)$ 的项外，积分都在有界区间上进行。因此，定理 1.1 将由有界范围内的算术数据确定的韦伊分布表示为离散谱上的求和。

这些谱表示并非仅针对每个 $a > 0$ 分别得到；随着 a 变化，它们彼此相容。固定 $R > 0$，并假设对于每个 $0 < a < R$ 都有 $Q_W^a > 0$。若 $0 < a < b < R$，则 $C_c^\infty(-a, a) \subset C_c^\infty(-b, b)$，且韦伊分布在这些空间上的限制在较小空间上相一致。因此，这些包含关系诱导出等距嵌入 $\mathcal{H}(\mathrm{A}_a) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathrm{A}_b)$ 和 $\mathcal{B}_a \hookrightarrow \mathcal{B}_b$。另一方面，对于固定的 $u \in C_c^\infty(-a, a)$，局部魏尔显式公式对每个 $a \le b < R$ 都成立。尽管特征值集合 $\Gamma_{b,\theta}$ 和权重 $J_b(\gamma,\gamma)^{-1}$ 随 b 变化，所得的谱表示始终等于 $W(u)$。

因此，由局部韦伊二次型得到的希尔伯特空间在等距嵌入下构成一条链，而链上每一点的谱表示都通过同一个韦伊分布相互关联。只要局部韦伊二次型为正，这一结构就成立，而无需假设黎曼假设。

事实上，每个再生核希尔伯特空间 $\mathcal{B}_a$ 都是一个 de Branges 空间，上述等距嵌入定义了一条 de Branges 空间链。根据 de Branges 空间的一般理论 [1, 定理 40 和问题 153], ，这样的链可以用一个由 $z \in \mathbb{C}$参数化的一阶线性常微分方程组来描述，称为典范系统。在当前情形下，利用由 $\mathcal{B}_a$ 的生成元得到的实整函数 $A_a(z)$ $B_a(z)$，并采用 (5.2) 中规定的归一化，该系统具有如下形式：

$$\begin{gathered} J\frac{\partial}{\partial a}\begin{pmatrix} A_a(z) \\ B_a(z) \end{pmatrix} = -z\begin{pmatrix} \gamma(a) & 0 \\ 0 & \gamma(a)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_a(z) \\ B_a(z) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A_0(z) \\ B_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{a.e. } a \in (0, R). \end{gathered} \tag{1.5}$$

典范系统的存在性由一般理论保证，但系数 $\gamma(a)$ 通常无法明确确定。

我们证明，与 (1.5) 相关联的典范系统的基本矩阵的第二行是 $(-B_a(z)\ A_a(z))$，其中实整函数 $A_a(z)$ $B_a(z)$ 由再生核 J_a of $\mathcal{B}_a$ 确定（命题5.5）。这表明，相位 0，π 所对应的局部谱就是典范系统基本矩阵各项的零点。局部魏尔显式公式以及克雷因和朗格关于螺旋函数 延拓的定理（定理 4.4）在这一识别中起着核心作用。这一识别还使我们能够从再生核 J_a 显式地恢复典范系统 (1.5) 的系数 $\gamma(a)$。

定理 1.2. 假设对每个 $0 < a < R$ 都有 $Q_W^a > 0$，并令 $J_a(w, z)$ 为 $\mathcal{B}_a$ 的再生核。那么典范系统 (1.5) 中的系数 $\gamma(a)$ 为

由下式给出

$$\gamma(a) = \frac{J_a(i,0)}{J_a(i,i)} \frac{\partial}{\partial a} J_a(i,0) \quad a.e.\ on\ (0,R). \tag{1.6}$$

到目前为止，我们只考虑了满足 $a > 0\, Q_W^a > 0$ 的那些情形。这些结果均不 req[要求黎曼假设成立。]

在黎曼假设成立的情况下，对每个 $Q_W^a > 0\ \ a > 0$ [8, §2.2], ，上述希尔伯特空间链都延伸到整个正半直线。此外，根据 [8, 定理 1.1],$\Gamma_{a,\ \pi}$ 当 $a \to \infty$ 时收敛于 Γ 。如果恰当地选取 $\gamma_a \in \Gamma_{a,\ \pi}$ ，使其收敛于 $\gamma \in \Gamma$，那么 $J_a(\gamma_a,\ \gamma_a) \to 1/m_\gamma\ (a \to \infty)$。我们将在第 2 节证明这一点。因此，当 $a \to \infty$ 时，局部魏尔显式公式中的特征值及其权重，就能还原通常魏尔显式公式中的 ζ 零点及其重数。

另一方面，如果黎曼假设不成立， [7, 定理 1.3] 意味着存在 $a_* > 0$，使得对于 $0 < a < a_*,\ Q_W^a > 0$；而在 $a = a_*$ 处，至少存在一个非零函数 u ，它属于 $Q_W^{a_*}$ 的定义域，且满足 $Q_W^{a_*}(u) = 0$。考察链 $\mathcal{B}_a$ 在再生核方面的这种行为差异，可得以下结果。

定理 1.3。黎曼假设成立，当且仅当以下一致有界条件成立：对于每个 $R > 0$ ，若对所有 $0 < a < R$都有 $Q_W^a > 0$ ，则存在 $C_R > 0$ 使得

$$J_a(t,t) \le C_R \qquad (0 < a < R,\ t \in \mathbb{R}).$$

这一结果通过再生核的对角值 $J_a(t,\ t)$ 在 $a > 0$ 的有界范围内无界，来检测黎曼假设的失效。由于再生核的构造涉及 $\mathsf{A}_a{}^{-1}$，这种无界性也可以解释为对以下事实的另一种表述：在 $a = a_*$ 处，0 是 A_a 的特征值。（在 $a = a_*$ 处，核 $J_a(w,\ z)$ 未定义，但 A_a 有定义。）

最后，在假设黎曼假设成立的前提下，我们研究半直线上的典范系统。定理 1.2 中恢复的哈密顿量给出一条长度有限、质量无限的克莱因弦。利用 [8, 定理 1.1 和 1.2], 中局部谱的收敛性，我们确定基本矩阵的渐近行为，并证明以 $J_a(0,\ 0)$ 归一化的再生核在 $a \to \infty$ 时收敛到一个秩一核（命题 8.1 和定理 8.2）。

本文组织如下。第 2 节证明局部魏尔显式公式（定理 1.1）。第 3 节证明，黎曼假设等价于再生核对角值的一致有界性（定理 1.3）。第 4 节回顾关于 de Branges 空间、典范系统以及螺旋函数延拓所需的结果。第 5 节研究由局部韦伊二次型得到的 de Branges 空间链，并构造一个特定的典范系统。第 6 节显式恢复其哈密顿量，并利用它证明定理 1.2。第 7 节研究局部谱测度与 ζ 零点之间的关系、给出全局螺旋函数的延拓，以及相应弦的长度和质量。最后，在黎曼假设成立的前提下，第 8 节确定长度和质量的极限，以及基本矩阵和再生核的渐近行为。

2. Local Weil quadratic forms and the explicit formula

2.1. 局部韦伊二次型的谱表示。 在本文中，内积对第一个变量线性。局部韦伊二次型 Q_W^a的定义域为

$$H^{\log}(-a,a) := \left\{ u \in L^2(-a,a) \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(t)|^2 \log(2+|t|)\, dt < \infty \right\} \tag{2.1}$$

并且 $C_c^\infty(-a,\ a)$ 是 §3] 的一个核 [7, 。令

$$\lambda_a := \inf \sigma(\mathsf{A}_a).$$

那么 $Q_W^a > 0$ 当且仅当 $\lambda_a > 0$。若 $0 < a < b$，零延拓会保留测试函数上 Q_W^a 的取值及其 L^2 范数。因此，对相应的瑞利商取下确界即可得到 $\lambda_a \geq \lambda_b$。

当 $\lambda_a > 0$ 时，引言中定义的希尔伯特空间 $\mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$ 作为集合与 $H^{\log}(-a,\ a) = \mathfrak{D}(\mathsf{A}_a^{1/2})$ 相同，其内积由下式给出

$$\langle u, f\rangle_{\mathsf{A}_a} := Q_W^a(u, f).$$

此外，$u \in H^{\log}(-a,\ a)$ 属于 $\mathfrak{D}(\mathsf{A}_a)$ 当且仅当存在一个 $g \in L^2(-a,\ a)$，使得对于每个 $f \in H^{\log}(-a,\ a)$，都有 $Q_W^a(u,\ f) = \langle g,\ f\rangle_{L^2}$；此时，$\mathsf{A}_a u = g$。

引理 2.1。对于 $u, f \in H^{\log}(-a, a)$，将 $u * \widetilde{f}$ 代入 (1.2) 可得绝对收敛的积分和关于素数幂的有限和，所得结果等于$Q_W^a(u, f)$。

证明。根据定义，$u * f$ 是连续的。记 $\tau_x u(y) = u(y - x)$，则有

$$2(u * \widetilde{f})(0) - (u * \widetilde{f})(x) - (u * \widetilde{f})(-x) = \langle \tau_x u - u, \tau_x f - f\rangle_{L^2}.$$

普朗歇尔恒等式和 $|e^{iv} - 1| \leq \min(2, |v|)$ 给出

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|\tau_x u - u\|_{L^2}^2 \frac{dx}{x} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(t)|^2 \int_0^1 |e^{ixt} - 1|^2 \frac{dx}{x}\, dt \\ &\ll \int_{-\infty}^{\infty} \log(2 + |t|)|\widehat{u}(t)|^2\, dt < \infty.\end{aligned}$$

f 也同样成立。因此，关于 dx/x and$1 - e^{-x/2} = O(x)$ 的柯西–施瓦茨不等式表明，(1.2) 中的积分在原点附近绝对收敛。此外，$u * f$ 的支集包含于 $[-2a, 2a]$，且在每一点的绝对值均不超过 $\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}$。因此，关于素数幂的求和是有限的，其余积分也绝对收敛。

与 (2.1) 对应的加权范数，以及在加上足够大的 L^2 范数平方的倍数后，由闭二次型 Q_W^a 诱导的范数，在 $H^{\log}(-a, a)$ 上都是完备的，并且都将该空间连续嵌入 $L^2(-a, a)$。根据闭图像定理，这两个范数等价。前述估计表明，(1.2) 右侧定义了 $H^{\log}(-a, a)$ 上的连续半双线性型。由于 $C_c^\infty(-a, a)$ 是二次型 Q_W^a 的核，其取值与 $Q_W^a(u, f)$ 一致。□

从 $H^{\log}(-a,\ a)$ 到 $L^2(-a,\ a)$ 的嵌入是紧的 [7, §4.1]。事实上，将傅里叶变换限制在有限区间 $[-T, T]$ 上，会得到一个从 $L^2(-a,\ a)$ 到 $L^2(-T,\ T)$ 的希尔伯特–施密特算子，其平方范数在 $|t| > T$上的取值不超过$1/\log(2 + T)$ 乘以 (2.1) 中的积分。因此，对每个 $a > 0$，与Q_W^a 相关联的算子 A_a 都有紧预解算子。

以下假设 $\lambda_a > 0$。[7, §6.2,‿§6.3] 中对点求值的表示表明，$\mathcal{B}_a = \mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$ 是一个再生核希尔伯特空间。令 $e_z(x) = e^{-izx}(-a < x < a)$，并且

$$u_{z,a} := \mathsf{A}_a^{-1} e_z \in \mathfrak{D}(\mathsf{A}_a).$$

那么，它的再生核 J_a 由下式给出

$$J_a(w, z) = \widehat{u_{\bar{w},a}}(z) = \langle u_{\bar{w},a}, u_{\bar{z},a}\rangle_{\mathsf{A}_a}. \tag{2.2}$$

由于点求值非零，$J_a(w, w) > 0$ 对每个 $w \in \mathbb{C}$都成立。此外，由（1.2）可知，反射 $u(x) \mapsto u(-x)$是等距变换，而再生性质给出$J_a(-w, -z) = J_a(w, z)$。定义 $\mathscr{D}_a f = if'$于 $C_c^\infty(-a, a) \subset \mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$上。其闭包的亏格指标为 $(1, 1)$，且 $\ker(\mathscr{D}_a^* - z) = \mathbb{C}u_{z,a}$ [7, §6]。令‿$\mathscr{D}_{a,\theta}$为自伴

延拓，其定义域为 $\mathfrak{D}(\mathscr{D}_a)+\overline{\mathbb{C}}(u_{i,a}+e^{i\theta}u_{-i,a})$。这里，亏格向量 $u_{\pm i,a}$的范数相等。该延拓的特征值恰好是.....的零点

$$W(a,\theta;z)=(z-i)J_a(-i,z)+e^{i\theta}(z+i)J_a(i,z), \tag{2.3}$$

以上各项均为实数 [7, 定理 1.5]。特征子空间均为一维，且 $W(a,\ \theta;\ \cdot)$ 的零点也都是单零点。事实上，对于一个特征值 t，写作 $u_{t,\ a}=u_0+c(u_{i,\ a}+e^{i\theta}u_{-i,\ a})$，其中 $u_0\in\mathfrak{D}(\mathscr{D}_a)$。将 $\mathscr{D}_a^*$应用于这一分解并进行傅里叶变换。由点求值的连续性及图闭包的定义，

$$\widehat{\mathscr{D}_a u_0}(z)=z\widehat{u}_0(z).$$

因此，特征值方程和 (2.3) 给出

$$cW(a,\theta;z)=(z-t)J_a(t,z)$$

（参见 [8, 引理 3.2] ，关于相位 π）。由于 $J_a(t,\ t)>0$，我们有 $c\neq 0$ ，因此$\partial_z W(a,\ \theta;\ t)\neq 0$。

在这个谱上定义加权离散测度如下：

$$\mu_{a,\theta}:=\sum_{\gamma\in\Gamma_{a,\theta}}\frac{\delta_\gamma}{J_a(\gamma,\gamma)}. \tag{2.4}$$

命题 2.2。设 $\lambda_a>0$。对于每个 $\theta\in[0,2\pi)$，我们有

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_{a,\theta}}\frac{\widehat{u}(\gamma)\overline{\widehat{f}(\gamma)}}{J_a(\gamma,\gamma)}=Q_W^a(u,f)=W(u*\widetilde{f}) \tag{2.5}$$

对每个 u、$f\in\mathcal{H}(A_a)$ 都成立。这里，右侧的 W 表示由引理 *2.1* 给出的延拓。此外，$\mathscr{D}_a$、θ 具有紧预解算子，$\{u_{\gamma,a}/\sqrt{J_a(\gamma,\gamma)}\}_{\gamma\in\Gamma_a,\ \theta}$ 是 $\mathcal{H}(A_a)$ 的标准正交基，而 $u\mapsto(\widehat{u}(\gamma))_\gamma$ 是到 $L^2(\mu_a,\theta)$ 上的等距同构。在黎曼假设下，该$\widehat{\ }$相同的值等于 $\sum_{\gamma\in\Gamma}m_\gamma\widehat{u}(\gamma)f(\gamma)$。

证明。对于测试函数 $u\in C_c^\infty(-a,\ a)$，将二次型的下界应用于 u，iu'可得 $\lambda_a(\|u\|_{L^2}^2+\|u'\|_{L^2}^2)\leq Q_W^a(u,\ u)+Q_W^a(iu',\ iu')$。因此，$\mathscr{D}_a$ 的定义域配备图范数后，连续嵌入 $H_0^1(-a,\ a)$ 中。嵌入 $H_0^1(-a,\ a)\hookrightarrow H^{\log}(-a,\ a)$ 是紧的。事实上，这是将 Rellich 定理给出的 L^2 收敛性与由 $|t|>M$ 所蕴含的频率贡献的一致估计结合起来得到的

$$\sup_{|t|>M}\frac{\log(2+|t|)}{1+t^2}\longrightarrow 0\qquad(M\to\infty).$$

在每个自伴扩张的定义域中，赋予图范数后，$\mathfrak{D}(\mathscr{D}_a)$ 是闭的，且余维为一。因此，每个自伴扩张的定义域也紧嵌入到 $H^{\log}(-a,\ a)$ 中。由此，每个延拓都有紧预解算子。此外，根据 [7, 定理 1.5，§6], 对于每个 $\gamma\in\Gamma_{a,\ \theta}$，函数 $u_{\gamma,\ a}$ 是 $\mathscr{D}_{a,\ \theta}$ 的特征函数，对应特征值 γ。因此，谱定理表明

$$\left\{\frac{u_{\gamma,a}}{\sqrt{J_a(\gamma,\gamma)}}:\gamma\in\Gamma_{a,\theta}\right\}$$

是 $\mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$ 的一组标准正交基。根据（2.2），每个 $u\in\mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$ 关于该基的傅里叶系数为

$$\left\langle u,\frac{u_{\gamma,a}}{\sqrt{J_a(\gamma,\gamma)}}\right\rangle_{\mathsf{A}_a}=\frac{\widehat{u}(\gamma)}{\sqrt{J_a(\gamma,\gamma)}}.$$

Parseval恒等式给出了（2.5）中的第一个等式。特征函数的完备性还表明， $u \mapsto (\widehat{u}(\gamma))_{\gamma}$ 是到 $L^2(\mu_{a,\theta})$ 上的等距同构。引理 2.1 完成了（2.5）的证明。

$\widehat{\ }$在黎曼假设下，魏尔显式公式给出 $Q_W(u,\ f) = \sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma \widehat{u}(\gamma)\overline{f(\gamma)}$，其中 $u,\ f \in C_c^\infty(-a,\ a)$。特别地， $Q_W(u) = \sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma |\widehat{u}(\gamma)|^2$，因此 $u \mapsto (\widehat{u}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ 关于由 Q_W^a 定义的范数是等距变换。对于任意 $u \in \mathcal{H}(\mathrm{A}_a)$，取 $u_n \in C_c^\infty(-a,\ a)$，使得 $u_n \to u$ 在由 Q_W^a 定义的范数下成立。由前述等距变换可得

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma |\widehat{u}_n(\gamma) - \widehat{u}_m(\gamma)|^2 = Q_W^a(u_n - u_m) \ \to\ 0.$$

另一方面，傅里叶变换在每一点的取值在$\mathcal{H}(\mathrm{A}_a)$上都是连续的，因此 $\widehat{u}_n(\gamma) \to \widehat{u}(\gamma)$。由此可得 $Q_W^a(u,\ u) = \sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma |\widehat{u}(\gamma)|^2$。于是，对于所有 $u,\ f \in \mathcal{H}(\mathrm{A}_a)$，都有$\frown Q_W^a(u,\ f) = \sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma \widehat{u}(\gamma)\overline{f(\gamma)}$。根据柯西–施瓦茨不等式，右侧的和绝对收敛。□

2.2. **定理 1.1 的证明**。 由命题 2.2,

$$W(u * \widetilde{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(t)\overline{\widehat{f}(t)}\, d\mu_{a,\theta}(t) \qquad (u, f \in C_c^\infty(-a,a)). \tag{2.6}$$

现在我们推广 (2.6)，从而得到对每个 $u \in C_c^\infty(-2a,2a)$ 都成立的局部魏尔显式公式。为此，我们首先为$\mu_{a,\theta}$ 建立一个增长估计。

取一个非负偶函数 $\psi \in C_c^\infty(-1/4,1/4)$，使得 $\int \psi = 1$，并且对$T \geq \max(1, a^{-1})$，令 $u_T(x) = T^{1/2}\psi(Tx)$。对于 $|t| \leq T$， $|\widehat{u}_T(t)|^2 \geq T^{-1}\cos^2(1/4)$。另一方面，型范数与 $H^{\log}$ 范数等价，因此有

$$Q_W^a(u_T, u_T) \ll_a \int_{-\infty}^{\infty} \log(2+|t|)|\widehat{u}_T(t)|^2\, dt \ll \log(2+T).$$

因此 (2.6) 给出 $\mu_{a,\theta}([-T,T]) \ll_a T\log(2+T)$。由单调性，对于所有 $T \geq 0$，都有 $\mu_{a,\theta}([-T,T]) \ll_a (1+T)\log(2+T)$。该估计关于 θ 一致。

对于每个 $u \in C_c^\infty(-2a,\ 2a)$， $\widehat{u}$ 的快速衰减因此给出 $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}|\, d\mu_{a,\ \theta} < \infty$，并且

$$u \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(t)\, d\mu_{a,\theta}(t)$$

在 $C_c^\infty(-2a,\ 2a)$ 上定义了一个连续线性泛函。由 (1.2)， W 在此空间上也连续$\widetilde{\ }$。为了证明该定理，因此只需证明 $\mathrm{span}\{u*f\colon\ u,\ f \in C_c^\infty(-a,\ a)\}$ 在 $C_c^\infty(-2a,\ 2a)$ 中关于其通常拓扑稠密。

任取 $u \in C_c^\infty(-2a,\ 2a)$。单位分解将 u 表示为有限个光滑函数之和，每个函数的支集都包含在区间 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 内，其中 $|c|/2 + \delta < a$。因此，只需考虑 u的支集包含在此类区间内的情形。

取 $s = c/2$ 和 $u_s(x) = u(x+s)$。对于实值偶近似单位 η_ε，令$f_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x+s)$。当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们有 $u_s,\ f_\varepsilon \in C_c^\infty(-a,\ a)$，且$\sim$ $u_s * f_\varepsilon = u * \eta_\varepsilon \to u$连同所有阶导数一致收敛，其支集包含于同一个紧集中。这就证明了所需的稠密性。因此，在 (2.6) 中相等的两个连续线性泛函，在整个 $C_c^\infty(-2a,\ 2a)$ 上也相等。由此可知 (1.4) 成立，且其右端绝对收敛。□

2.3. **局部特征值处对角值的收敛**。

命题 2.3。 假设黎曼假设成立。令 $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots$为 Γ中的互异正零点，并将$\Gamma_{a,\ \pi}$ 的正元素依次记为 $0 < \gamma_{a,\ 1} < \gamma_{a,\ 2} < \cdots$。那么，对于每个固定的 $n \geq 1$,

$$\gamma_{a,n} \searrow \gamma_n, \qquad J_a(\gamma_{a,n}, \gamma_{a,n}) \longrightarrow \frac{1}{m_{\gamma_n}} \quad (a \to \infty). \tag{2.7}$$

这里 $\searrow$ 表示单调不增收敛。对于负特征值，$-\gamma_{a,\ n} \nearrow -\gamma_n$，对角值具有相同的极限。

证明。特征值 $\gamma_{a、\ n}$ 的单调收敛性已在 [8, 定理 1.1] 中得到证明。现在我们确定对角值的极限。在 RH 下，记 $\mathcal{H}_W$ 为关于 Q_W 的 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的完备化。在 [8, §2.3]，中构造了作用于 $\mathcal{H}_W$ 上的自伴算子 $\mathsf{D}_{\pi/2}$；其特征值恰好是 Γ 中的点，且全部为单特征值。根据 [8,定理 3.3, (4.1)]，，若将局部空间 $\mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$ 等距嵌入 $\mathcal{H}_W$，通过该嵌入传递 $(\mathscr{D}_{a,\pi})^{-\top}$，并在正交补上将其延拓为零，则所得算子在希尔伯特–施密特范数下收敛于 $\mathsf{D}_{\pi/2}^{-1}$。后一个算子的特征值 $1/\gamma_n$ 是孤立的且为单特征值。令 P_n 为全局算子对应于 $1/\gamma_n$ 的特征子空间上的正交投影，并令 $P_{a、\ n}$ 为局部算子对应于 $1/\gamma_{a、\ n}$ 的特征子空间上的正交投影。预解算子的收敛性以及黎斯投影公式随后给出 $\|P_{a、\ n} - \curlywedge P_n\| \to 0$ $(a \to \infty)$。固定 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，使得 $f(\gamma_n) \neq 0$。当 a 充分大时，有 $f \in C_c^\infty(-a, a)$，因此由 (2.2) 和命题 2.2 得到

$$\|P_{a,n} f\|_{\mathcal{H}_W}^2 = \frac{|\widehat{f}(\gamma_{a,n})|^2}{J_a(\gamma_{a,n}, \gamma_{a,n})}.$$

另一方面，如 [8, §2.3] 所述，P_n 是与 γ_n 相关的 $1/\gamma_n$ 的特征子空间上的正交投影。因此

$$\|P_n f\|_{\mathcal{H}_W}^2 = m_{\gamma_n} |\widehat{f}(\gamma_n)|^2.$$

由此可得

$$\frac{|\widehat{f}(\gamma_{a,n})|^2}{J_a(\gamma_{a,n}, \gamma_{a,n})} \longrightarrow m_{\gamma_n} |\widehat{f}(\gamma_n)|^2.$$

$\widehat{\ }$由于 $\gamma_{a,n} \to \gamma_n$ 且 $f(\gamma_n) \neq 0$，我们得到 (2.7) 中的第二个极限。由反射对称性 $J_a(-w, -z) = J_a(w, z)$ 以及 (2.3)，可得 $W(a, \pi;\ -z) = W(a, \pi;\ z)$。负特征值的情形现由 $J_a(-t, -t) = J_a(t, t)$ 和 $m_{-\gamma} = m_\gamma$ 得出。□

3. RH and uniform bounds for reproducing kernels

本节中，我们使用第 2 节中的点求值以及算子 A_a 的最低特征值 λ_a 随 a 变化时的行为。

定理 1.3 的证明。 在黎曼假设下，Q_W^R 非退化；参见 Yoshida [12, 定理 2]，以及 [7] 中定理 1.3 后的讨论。此外，A_R 非负且具有紧预解算子，因此对每个 $R > 0$ 都有 $\lambda_R > 0$。对于 $0 < a < R$，由第 2 节中确立的单调性可得 $\lambda_a \geq \lambda_R > 0$。因此，由柯西–施瓦茨不等式，

$$|\widehat{u}(t)|^2 \leq 2a \|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{2R}{\lambda_R} Q_W^a(u, u)$$

对每个 $u \in C_c^\infty(-a, a)$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 都成立。由于 $C_c^\infty(-a, a)$ 是 Q_W^a 的核，这个估计可推广到每个 $u \in \mathcal{H}(\mathsf{A}_a)$。根据 J_a 的再生性质和柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$J_a(t, t) = \sup_{0 \neq u \in \mathcal{H}(\mathsf{A}_a)} \frac{|\widehat{u}(t)|^2}{Q_W^a(u, u)} \leq \frac{2R}{\lambda_R},$$

其中等式是通过取 $\widehat{u} = J_a(t, \cdot)$ 得到的。

反之，假设一致有界性成立而黎曼假设不成立。根据 [7, 定理 1.3 和 1.4]，λ_a 对于 $a > 0$ 是连续的，并且当 $a > 0$充分小时为正。由于黎曼假设不成立，对于某个有限的 $b > 0$，$\lambda_b < 0$ 成立；参见 [7]中定理 1.3 后的讨论。由于 λ_a 通过零延拓是单调的，

$$a_* := \inf\{a > 0 : \lambda_a \leq 0\}$$

满足 $0 < a_* < \infty$、 $\lambda_a > 0$ $(0 < a < a_*)$ 和 $\lambda_{a_*} = 0$。正如第 2 节所观察到的，A_{a_*}具有紧预解算子，因此存在非零的 $u_* \in \ker \mathrm{A}_{a_*}$。特别地， $Q_W^{a_*}(u_*,\ u_*) = 0$。

由于 $C_c^\infty(-a_*,\ a_*)$ 是 $Q_W^{a_*}$ 的核，我们可以选择 $u_n \in C_c^\infty(-a_*,\ a_*)$，使其在由 $Q_W^{a_*}(u,\ u) + \|u\|_{L^2}^2$ 的平方根给出的型范数下收敛于 u_*。由于 $Q_W^{a_*}$ 非负且 $Q_W^{a_*}(u_*,\ u_*) = 0$，我们有 $\|u_n - u_*\|_{L^2}^2 \to 0$，并且 $Q_W^{a_*}(u_n,\ u_n) \to 0.$。对于每个 u_n，选择 $0 < a_n < a_*$，使其支集包含于相应的区间内。在零延拓下这些型一致，因此 $Q_W^{a_n}(u_n,\ u_n) = Q_W^{a_*}(u_n,\ u_n)$。应用一致有界性，并取 $R = a_*$，我们得到，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，

$$|\widehat{u}_n(t)|^2 \le J_{a_n}(t,t) Q_W^{a_n}(u_n,u_n) \le C_{a_*} Q_W^{a_*}(u_n,u_n) \ \to\ 0.$$

另一方面，将两个函数都以零延拓，可得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{u}_n(t) - \widehat{u}_*(t)| \le \|u_n - u_*\|_{L^1} \le \sqrt{2a_*}\,\|u_n - u_*\|_{L^2} \ \to\ 0.$$

因此，对每个 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\widehat{u}_*(t) = 0$，而傅里叶变换的单射性推出 $u_* = 0$，这就产生了矛盾。□

推论 3.1。设 $R > 0$，并假设对每个 $0 < a < R$都有 $\lambda_a > 0$。那么，(t,t)在$(a,t) \in (0,R) \times \mathbb{R}$ 上一致有界，当且仅当 $\lambda_R > 0$。

证明。若 $\lambda_R > 0$，则定理 1.3 的证明中关于点求值的界给出$J_a(t,t) \le 2R/\lambda_R$。反过来， λ_a 的连续性意味着 $\lambda_R \ge 0$。若 $\lambda_R = 0$，取 A_R 的一个对应于特征值零的非零特征函数，并用 $a_* = R$重复上述论证，同时利用型核逼近和点求值。这与一致有界性矛盾。□

4. de Branges spaces and canonical systems

在下一节中，我们将一条 de Branges 空间链与一个典范系统联系起来。为此，我们简要回顾 de Branges 空间的序关系定理、典范系统的 Weyl 函数相关结果，以及克雷因–朗格关于螺旋函数延拓的定理。

4.1. de Branges 空间。本小节的记号和基本事实依据 de Branges [1]。对于整函数 F，记 $F^\sharp(z) = \overline{F(\bar z)}$。若整函数 E在上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$内满足 $|E^\sharp(z)| < |E(z)|$，则称其为 Hermite–Biehler 函数。由 E 生成的 de Branges 空间 $\mathcal{H}(E)$由满足以下条件的整函数 F构成： $\int_{\mathbb{R}} |F(t)/E(t)|^2\,dt < \infty$，且 F/E和 $F^\sharp/E$在 $\mathbb{C}_+$内均为有界型，平均型非正。这里，若一个函数可表示为两个有界全纯函数之商，则称其为有界型；非零函数 f 的平均型为 $\limsup_{y\to\infty} y^{-1}\log|f(iy)|$。上面的积分给出 $\|F\|_{\mathcal{H}(E)}^2$ [1, §19]。

对于 Hermite–Biehler 函数 E，函数 $A = (E + E^\sharp)/2$和 $B = i(E - E^\sharp)/2$均为实整函数，且 $E = A - iB$。de Branges 空间 $\mathcal{H}(E)$ 是一个再生核希尔伯特空间。取内积对第一个变量线性，其再生核满足 $F(w) = \langle F,\ K_E(w,\ \cdot)\rangle$，其表达式为

$$K_E(w,z) = \frac{\overline{A(w)}B(z) - \overline{B(w)}A(z)}{\pi(z - \bar w)} = \frac{\overline{E(w)}E(z) - \overline{E^\sharp(w)}E^\sharp(z)}{2\pi i(\bar w - z)} \tag{4.1}$$

[1, 定理 19]。固定点 i，我们可以从再生核中选取一个生成函数。事实上，令 $F(z) = (z + i)K_E(i,\ z)\sqrt{\pi}/K_E(i,\ i)$，并将其写作$cE + dE^\sharp$。由 (4.1)，有 $|E(i)|^2 - |E^\sharp(i)|^2 = 4\pi K_E(i,\ i)$，因此 $|c|^2 - |d|^2 = 1$。于是$|F(z)|^2 - |F^\sharp(z)|^2 = |E(z)|^2 - |E^\sharp(z)|^2$，且由于 E是一个 Hermite–Biehler 函数， F也是如此。将此关系代入 (4.1) 的分子，得到 $K_F = K_E$。因此， F以等距方式生成同一个 de Branges 空间。

de Branges 子空间是一个闭的希尔伯特子空间，它本身也是一个 de Branges 空间，且范数为诱导范数。下面的序关系定理描述 de Branges 空间之间的包含关系： [1,定理 35]。

定理 4.1 (de Branges 序定理)。 假设两个 ***de Branges*** 空间$\mathcal{H}(E_1)$ $\mathcal{H}(E_2)$ 通过限制到实轴，等距嵌入同一个关于某个正测度的 L^2空间中。若 E_2/E_1 在上半平面内为有界型，且在实轴上既无零点也无极点，则这两个空间必有一个包含于另一个。

4.2. **典范系统**。 本小节中的记号和基本事实遵循克雷因–朗格 [2] 和 Winkler [11]。哈密顿量 H 是一个局部可积、实对称、非负的 2×2 矩阵值函数，并且在任何开区间上都不恒等于 0。令 J 为式 (1.5) 中定义的矩阵。一阶线性常微分方程系统

$$JY' = -zHY$$

以 $z\in\mathbb{C}$为参数的系统称为哈密顿量为 H的典范系统。定义基本矩阵 $U(x,z)$如下：

$$\partial_x U(x,z)J = zU(x,z)H(x), \qquad U(0,z)=I_2. \tag{4.2}$$

每一行的转置都满足典范系统。 $U(x,\ z)$ 的各项都是关于 z 的实整函数，且 $\det U(x,\ z)=1$。在 $[x,y]$上，以左端点处的单位矩阵 I_2为归一化条件的基本矩阵为 $U(x,\ z)^{-1}U(y,\ z)$。将基本矩阵的第二行写作 $(-B_x(z)\ A_x(z))$，由 (4.2) 可得

$$\frac{\overline{A_x(w)}B_x(z)-\overline{B_x(w)}A_x(z)}{z-\bar w} = \int_0^x (-B_t(z),A_t(z))H(t)\begin{pmatrix}-\overline{B_t(w)}\\ \overline{A_t(w)}\end{pmatrix}dt.$$

若 $\int_0^x h_{22}(t)\ dt>0$，则 A_x-iB_x是一个 Hermite–Biehler 函数。按照 (4.1) 中的约定，上述表达式是由 $\sqrt{\pi}(A_x-iB_x)$ [11, (22.9)、(22.25)–(22.30)] 生成的 de Branges 空间的再生核。若 $\operatorname{tr}H(x)=1$ 几乎处处成立，我们称 H 为迹归一化哈密顿量。

4.3. **右端点处的 Weyl 函数与边界条件**。本小节的记号和基本事实沿用 Winkler [10, 11]。Nevanlinna 函数在上半平面内是全纯的，虚部非负，并通过共轭反射延拓到下半平面。每个 Nevanlinna 函数 $q\neq\infty$ 都有唯一表示

$$q(z)=c+dz+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\nu(\lambda),\quad c\in\mathbb{R},\quad d\geq 0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu(\lambda)}{1+\lambda^2}<\infty.$$

这里 ν 是一个非负博雷尔测度，称为 q [11, 的谱测度 (22.14)、(22.15)]。我们将矩阵 $U=(U_{jk})$的作用写成线性分式变换的形式：

$$U\cdot\Omega=\frac{U_{11}\Omega+U_{12}}{U_{21}\Omega+U_{22}}.$$

对于 $\Omega=\infty$，这意味着 U_{11}/U_{21}；如果分母为零，则该值为 ∞。

如果对于每个 $z\in\mathbb{C}_+$，极限均满足下式，则称半直线上的典范系统在无穷远处处于 极限点情形：

$$\lim_{x\to\infty}U(x,z)\cdot\Omega(z)$$

存在且与所选 Nevanlinna 函数 Ω 或 $\Omega=\infty$ 无关。由此极限定义的函数q 称为 ***Weyl***函数。它要么是 Nevanlinna 函数，要么是∞。

命题 4.2。 半直线 $[0,\infty)$ 上的每个与迹归一化 *Hamilton- ian* H 相关的典范系统，在无穷远处都属于极限点情形。反之，每个 *Nevanlinna* 函数 q以及 $q=\infty$，都是半直线上的某个迹归一化 *Hamil- tonian* H 的 *Weyl*函数，且除去几乎处处相等外是唯一的。函数 $q=\infty$ 对应于 $H=\operatorname{diag}(1、0)$。

第一个断言由 [10, 定理 2.1], 得出，第二个则由 [10, 定理 1]得出。根据逆问题的唯一性，若其 Weyl函数q 满足 $q(-z)=-q(z)$，则 H 为对角矩阵。事实上，用 $\operatorname{diag}(1,-1)$ 共轭 H ，所得基本矩阵与用 $\operatorname{diag}(1,-1)$ 共轭 $U(x,-z)$ 得到的基本矩阵相同，其 Weyl函数为$-q(-z)$。因此，再根据唯一性， H 在此共轭变换下保持不变，所以其非对角元素几乎处处为零。

考虑将哈密顿量 H 从有限区间 $[0,x]$ 延拓到 $[0,\infty)$。令 Ω 为新增区间 $[x,\infty)$上典范系统的 Weyl函数，其基本矩阵在左端点 x处归一化为 I_2 。

命题 4.3。 通过此延拓得到的半直线上典范系统的 *Weyl*函数为 $U(x,z)\cdot\Omega(z)$。

这由 [10, 引理 2.2]得出。半直线上的典范系统的谱测度就是其 Weyl 函数的谱测度。有限区间上的典范系统的谱测度 $[0,L]$ 是 $U(L,\ z)\cdot\Omega(z)$的谱测度，其中 Ω 遍历所有 Nevanlinna 函数，且 $\Omega=\infty$，但不包括 $U(L,\ z)\cdot\Omega(z)\equiv\infty$的情形。

4.4. 螺旋函数与延拓参数。本小节遵循 Krein–Langer [2, §5]。设 $0<a\le\infty$。若连续函数 g 在$(-2a,\ 2a)$上满足 $g(-t)=g(t)$，且其核 ___

$$G_g(s,t)=g(t-s)-g(t)-g(-s)+g(0),\qquad |s|,|t|<a$$

是半正定的 [2, (5.1)]。这里，半正定是指对于任意有限点集，矩阵$(G_g(t_j,\ t_k))_{j,\ k}$ 均为半正定。若 $0<a<\infty$，则 g 可延拓为整个实直线上的螺旋函数 [2, 推论 5.2]。令 $C_0($ $-a,\ a)$表示$(-a,\ a)$上具有紧支集的连续函数空间，并设

$$L(G_g):=\left\{\varphi\in C_0(-a,a):\int_{-a}^{a}\varphi(t)\,dt=0\right\}.$$

在此空间上赋予半正定内积

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{G_g}:=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}G_g(s,t)\varphi(t)\overline{\psi(s)}\,dt\,ds.$$

令 $\mathcal{H}(G_g)$ 为将范数为零的函数所成子空间取商并完备化后得到的希尔伯特空间。

根据 [2, 定理 5.1], ，有限区间 $(-2a,\ 2a)$ 上的螺旋函数 g 的每个延拓 $\widetilde{g}$ ，若将其延拓为整条实直线上的螺旋函数，则都有如下表示:

$$\widetilde{g}(t)=\widetilde{g}(0)+i\gamma t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{it\lambda}-1-\frac{it\lambda}{1+\lambda^2}\right)\frac{d\nu(\lambda)}{\lambda^2},\qquad \gamma\in\mathbb{R},$$

其中 ν 是满足 $\int_{-\infty}^{\infty}(1+\lambda^2)^{-1}d\nu(\lambda)<\infty$ 的非负博雷尔测度，而在 $\lambda=0$ 处的被积函数定义为 $-t^2/2$。测度 ν 称为 $\widetilde{g}$ 的 谱测度。由 [2, (5.16)、(5.17)]，变换

$$\Phi_1(\varphi;\lambda)=\int_{-a}^{a}\frac{e^{it\lambda}-1}{\lambda}\varphi(t)\,dt,\qquad \left.\frac{e^{it\lambda}-1}{\lambda}\right|_{\lambda=0}=it \tag{4.3}$$

满足

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{G_g}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(\varphi;\lambda)\overline{\Phi_1(\psi;\lambda)}\,d\nu(\lambda).$$

因此， Φ_1 可延拓为从 $\mathcal{H}(G_g)$ 到 $L^2(\mathbb{R},\ d\nu)$ 的等距变换。

从现在起，假设 $g(0) = 0$。对于将 g 延拓为整个实线上的螺旋函数的延拓 $\widetilde{g}$，设

$$q_{\widetilde{g}}(z) = -iz^2 \int_0^\infty e^{-izt}\widetilde{g}(t)\,dt, \qquad \Im z < 0.$$

通过共轭反射得到的 Nevanlinna 函数具有如下表示：

$$q_{\widetilde{g}}(z) = c + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\nu(\lambda), \quad c \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty$$

[2, (5.5)–(5.7)]。特别地，如果 $\widetilde{g}$ 为实函数且为偶函数，则 $c = 0$，测度 ν 是对称的，并且

$$q_{\widetilde{g}}(z) = z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(\lambda)}{\lambda^2 - z^2}.$$

我们有如下克雷因和朗格的结果。

定理 4.4。 设 $0 < a < \infty$ 和 $g(0) = 0$，并假设定义在$(-2a, 2a)$ 上的螺旋函数 g 至少有两个不同的延拓，使其成为整个实线上的螺旋函数。则存在唯一的迹范数化哈密顿量 $H = (h_{jk})$，定义在有限区间 $[0, L]$ 上，使得对于其基本矩阵 $U(x, z)$，公式

$$q_{\widetilde{g}}(z) = U(L, z) \cdot \Omega(z)$$

给出了所有延拓 $\widetilde{g}$ 与所有*Nevanlinna* 函数Ω 以及Ω $= \infty$之间的一一对应。该典范系统的谱测度恰好是 g的延拓的谱测度。此外，

$$\int_0^x h_{22}(t)\,dt > 0 \quad (0 < x \le L), \qquad \int_x^L \sqrt{\det H(t)}\,dt > 0 \quad (0 \le x < L),$$

$$a = \int_0^L \sqrt{\det H(t)}\,dt.$$

这由 $[2,$ 定理5.4–5.6$]$得出。定理中的矩阵 $U(x, z)$遵循(4.2)中的约定，其中 $U(0, z)$ $= I_2$。它在右端点处的值 $U(L, z)$是一个由整函数构成的2×2 矩阵，该矩阵通过线性分式变换表示与延拓相对应的Nevanlinna 函数。它称为 g[2,定理5.4]的预解矩阵 。

接下来我们定义正交谱测度。 $L(G_g)$上的算子 $\varphi \mapsto i\varphi'$ （其中$\varphi, \varphi' \in L(G_g)$）诱导出 $\mathcal{H}(G_g)$上一个稠定的对称算子。当自伴扩张在 $\mathcal{H}(G_g)$本身中实现时，相应的延拓 $\widetilde{g}$ 与谱测度 ν 称为正交 $[2,$ §5.3$]$。正交谱测度具有如下刻画 $[2,$ §5.3, (5.16)–(5.18)$]$。

命题 4.5。 在定理 *4.4* 的假设下，以下各项等价：延拓 $\widetilde{g}$ （或其谱测度 ν）是正交的；等距变换 $\mathcal{H}(G_g) \to L^2(\mathbb{R}, d\nu)$ 在 (4.3) 中是满射的；以及定理 *4.4* 中的参数 Ω 是实常数或 ∞。

5. Chains of de Branges subspaces and a canonical system

在本节中，固定 $R > 0$ 并假设 $\lambda_R > 0$。零延拓保持局部韦伊二次型的值，因此对于 $0 < a \le R$，有 $\lambda_a \ge \lambda_R > 0$。我们将 ⁀ 第 4 节的结果应用于 $\mathcal{B}_a = \mathcal{H}$（A$_a$），构造出实现该链的典范系统，并确定与每个 $\mathcal{B}_a$ 对应的点。

5.1. **de Branges 空间链与生成函数**。对于每个 $0 < a \le R$，我们可以像 [7, §79] 中那样论证，以证明 $\mathcal{B}_a$ 是一个 de Branges 空间。事实上，在黎曼假设下那里所使用的范数等式，在此由（2.5）推出，而（2.5）在 $\lambda_a > 0$ 下成立。此外，$J_a(z,\ z) > 0$ 蕴含该空间没有公共零点。

命题5.1. 设 $\mathcal{B}_0 = \{0\}$。对于 $0 \le a < b \le R$，空间 $\mathcal{B}_a$ 是 $\mathcal{B}_b$的真闭子空间，且范数相同。此外，在 $\mathcal{B}_R$的范数下，

$$\overline{\bigcup_{b<a} \mathcal{B}_b} = \mathcal{B}_a \quad (0 < a \le R), \qquad \bigcap_{a<b\le R} \mathcal{B}_b = \mathcal{B}_a \quad (0 \le a < R). \tag{5.1}$$

此外，$\mathcal{B}_R$ 中每个没有公共实零点的非零 *de Branges* 子空间，都等于$\mathcal{B}_a$，其中 $a \in (0, R]$ 唯一。

证明. 我们先证明 $0 \le a < b \le R$的严格包含关系。由于 $C_c^\infty(-a, a) \subset C_c^\infty(-b, b)$，且较小空间上的韦伊二次型相同，因此 $\mathcal{B}_a$ 是 $\mathcal{B}_b$ 的闭子空间，且范数相同。该包含关系是严格的：支集位于 (a, b)中的非零测试函数的傅里叶变换属于 $\mathcal{B}_b$，但不属于 $\mathcal{B}_a$，因为 $\mathcal{B}_a$ 中每个元素的傅里叶逆变换都支集于 $[-a, a]$。

接下来证明 (5.1)。第一个等式直接由$\mathcal{B}_a$的定义得出，因为 $C_c^\infty(-a, a)$中的每个元素都属于某个 $b < a$对应的 $C_c^\infty(-b, b)$中。对于第二个等式，由刚刚证明的包含关系可知，右边包含于左边。反过来，左边元素的傅里叶逆变换对每个 $b > a$都支集于 $[-b, b]$，因而支集于 $[-a, a]$。根据 (2.1)，这个傅里叶逆变换 u 还满足 $\int_{-\infty}^{\infty} \log(2 + |t|)|\widehat{u}(t)|^2\, dt < \infty$。若 $a > 0$，满足此条件且支集于 $[-a, a]$ 的函数可以通过略微收缩区间再进行平滑，逼近$C_c^\infty(-a, a)$中的元素。这些操作在 $H^{\log}$ 范数下是连续的。由于此范数等价于由Q_W^a诱导的范数，我们得到 $\widehat{u} \in \mathcal{B}_a$。当 $a = 0$时，傅里叶逆变换支集于单点 0，因此作为 L^2 函数必为零。因此交集为 $\{0\} = \mathcal{B}_0$。这就证明了 (5.1)。递增或递减的闭子空间族上的正交投影强收敛。因此，从 $\mathcal{B}_R$到 $\mathcal{B}_a$ 的正交投影关于 $0 \le a \le R$强连续。

最后，设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{B}_R$ 的一个非零 de Branges 子空间，且二者没有公共实零点。我们证明，$\mathcal{X}$ 与任意 $\mathcal{B}_b$ 都存在包含关系。若 E 生成 $\mathcal{B}_R$，则这两个空间都等距嵌入 $L^2(\mathbb{R},\ |E(t)|^{-2}\, dt)$。在（4.1）中令 $w = i$，我们可以为每个空间选取一个生成函数，使其为 $(z + i)K(i,\ z)$的常数倍，其中K 是其再生核（参见第 4.1 节）。函数 $K(i,\ \cdot) \in \mathcal{B}_R$ 是一个 L^2 函数的傅里叶变换，该函数的支集位于 $[-R, R]$，因此 $e^{iRz}K(i,\ z)$在上半平面内有界。由此，这些生成函数在上半平面内均为有界型。它们在实轴上没有零点，所以它们的商也为有界型，且在实轴上既无零点也无极点。因此，由定理 4.1 可知，这两个 de Branges 空间存在包含关系。

Set

$$a = \sup\big(\{0\} \cup \{b \in (0, R] : \mathcal{B}_b \subset \mathcal{X}\}\big).$$

根据 a 的定义以及 (5.1) 中的第一个恒等式，我们有 $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{X}$。若 $a < b \le R$，则 $\mathcal{B}_b \subset \mathcal{X}$ 会与 a 的定义矛盾。由于 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{B}_b$ 按包含关系可比较，因此必有 $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}_b$。对于 $a < R$，(5.1) 中的第二个恒等式给出 $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}_a$。对于 $a = R$，我们也有 $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}_R = \mathcal{B}_a$。因此 $\mathcal{X} = \mathcal{B}_a$。由于 $\mathcal{X}$ 非零，$a > 0$。开头证明的严格包含关系表明，这个 a 是唯一的。□

命题 5.2。令 $0 < a \le R$ 并定义

$$E_a(z) := \sqrt{\frac{\pi}{J_a(i, i)}}\,(z + i)J_a(i, z).$$

那么 E_a 是一个生成 $\mathcal{B}_a$ 的 *Hermite–Biehler* 函数。利用 (2.3)，定义

$$A_a(z) := \frac{W(a,\pi;z)}{W(a,\pi;0)}, \qquad B_a(z) := zJ_a(0,z). \tag{5.2}$$

它们分别是偶实整函数和奇实整函数，满足 $A_a(0)=1$ 且 $B_a(0)=0$。此外，

$$\mathcal{E}_a := \sqrt{\pi}(A_a - iB_a)$$

也生成 $\mathcal{B}_a$，其再生核为

$$J_a(w,z) = \frac{\overline{A_a(w)}B_a(z) - \overline{B_a(w)}A_a(z)}{z-\bar{w}}. \tag{5.3}$$

满足(5.3) 的实整函数对(A_a, B_a) 由以下要求唯一确定： A_a 为偶函数， B_a 为奇函数，且 $A_a(0)=1$, $B_a(0)=0$。

证明。将 $w=i$ 和 $K_E = J_a$ 代入 (4.1) 可得 E_a 生成 $\mathcal{B}_a$。由于 $\mathcal{B}_a$没有公共实零点， E_a没有实零点。反射 $F(z) \mapsto F(-z)$ 根据 (1.2) 的对称性是等距变换。结合等距变换 $F \mapsto F^\sharp$，得到$J_a(i,-z) = J_a(-i,z) = J_a(i,\bar{z})$，从而 $E_a(-z) = -E_a^\sharp(z)$。特别地，对于实数 y， $E_a(iy)$ 是纯虚数。由于 E_a 是一个没有实零点的 Hermite–Biehler 函数，对于 $y \geq 0$，有 $E_a(iy) \neq 0$ 。由连续性以及等式 $E_a(i) = -2i\sqrt{\pi}J_a(i,i)$， $E_a(0)$ 的虚部也为正。因此 $J_a(i,0) > 0$。设

$$\alpha_a = J_a(i,0), \qquad \beta_a = \frac{J_a(i,i)}{J_a(i,0)}.$$

将 $\theta=\pi$ 代入 (2.3)，并对 $E=E_a$ 和 $w=0$应用 (4.1)，得到

$$W(a,\pi;0) = -2i\alpha_a, \qquad \sqrt{\frac{J_a(i,i)}{\pi}}\,\frac{E_a - E_a^\sharp}{2i} = \alpha_a A_a, \qquad \sqrt{\frac{J_a(i,i)}{\pi}}\,\frac{E_a + E_a^\sharp}{2} = \beta_a B_a.$$

因此， A_a， B_a 具有所断言的奇偶性以及在原点处的值，并且

$$E_a = \sqrt{\frac{\pi}{J_a(i,i)}}\,(i\alpha_a A_a + \beta_a B_a).$$

特别地， $B_a(i) = i\alpha_a$ 且 $A_a(i) = \beta_a$。由于 $\alpha_a\beta_a = J_a(i,i)$，将此公式代入再生核的表达式可得 (5.3)。由于 $J_a(w,w) > 0$于上半平面中， $\mathcal{E}_a = \sqrt{\pi}(A_a - iB_a)$ 也是一个 Hermite–Biehler 函数，并生成同一个空间。

关于唯一性，在 $w=0$ 处对 (5.3) 求值即可确定 B_a。同一个等式表明， A_a 的任意两个候选者相差 B_a的常数倍。由于 A_a 为偶函数而 B_a 为奇函数，该差异为零。□

5.2. **螺旋函数和局部扩张**。除非另有说明， g 表示实轴上与黎曼ζ函数在 [5,(1.8)]中相关联的实偶函数。根据 $[5, §3.4]$,，如果 $u_t = 2^{-1/2}\mathbf{1}_{[-|t|/2,\,|t|/2]}$，那么 $g(t) = -W(u_t * \widetilde{u}_t)$。特别地，$g(0)=0$。下面的结果将 g 的局部限制与第4.4节中的扩张理论联系起来。

命题 5.3。 假设 $\lambda_R > 0$ ，并令 $0 < a \leq R$。那么 $g|_{(-2a,2a)}$ 是一个螺旋函数。此外，对于每个 $\theta \in [0,2\pi)$，

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t\lambda)-1}{\lambda^2}\,d\mu_{a,\theta}(\lambda) \qquad (|t| \leq 2a). \tag{5.4}$$

这里$\mu_{a,\,\theta}$ 是*(2.4)*中定义的谱测度，并且 $\lambda=0$ 处的被积函数定义为 $-t^2/2$。此外，相位0 和 π 对应的测度给出了 $g|_{(-2a,2a)}$ 在整个实直线上的两个不同延拓，成为螺旋函数。

证明。对定义进行傅里叶变换得到 $\widehat{u_t}(\lambda)=\sqrt{2}\sin(|t|\lambda/2)/\lambda$。根据(2.1)，当 $|t|\le 2a$时，有 $u_t\in H^{\log}(-a,\ a)$。现在由引理 2.1和局部 Parseval 恒等式(2.5)可得(5.4)。

由 (2.3) 和命题 5.2，$W(a,0;\,z)=2\beta_a B_a(z)$，且 $W(a,\pi;\,z)=-2i\alpha_a A_a(z)$。$A_a$、$B_a$ 的奇偶性以及恒等式 $J_a(-t,-t)=J_a(t,t)$ 表明，$\mu_{a,0}$ 和 $\mu_{a,\pi}$ 都是对称测度。将定理 1.1 证明中关于测度增长的估计应用于每个区间 $2^n<|\lambda|\le 2^{n+1}$，得到 $\int_{-\infty}^{\infty}(1+\lambda^2)^{-1}\,d\mu_{a,\theta}(\lambda)<\infty$。因此，我们可以用 $\mu_{a,\theta}$ 通过 (5.4) 右端的表达式，在整个实直线上定义函数 $g_\theta(t)$。对于两种 $\theta=0,\pi$，积分在 t 的紧集上一致绝对收敛，因此 g_θ 连续。由测度的对称性，

$$g_\theta(t-u)-g_\theta(t)-g_\theta(-u)+g_\theta(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{it\lambda}-1)(e^{-iu\lambda}-1)}{\lambda^2}\,d\mu_{a,\theta}(\lambda).$$

右端是在 $L^2(\mu_{a,\theta})$ 中，函数 $\lambda\mapsto(e^{it\lambda}-1)/\lambda$和 $\lambda\mapsto(e^{iu\lambda}-1)/\lambda$ 的内积，其中它们在原点处的取值分别为 it 和 iu。因此，该核是半正定的。于是，g_0 和 g_π 都是整个实直线上的螺旋函数，并且 (5.4) 表明它们在 $(-2a,2a)$ 上与 g 一致。特别地，$g|_{(-2a,2a)}$ 是螺旋函数。

最后，在这两个测度中，只有 $\mu_{a,0}$ 在原点处具有正质量。该质量对 $g_0(t)$ 的贡献为 $-t^2/(2J_a(0,0))$。由于谱是离散的且没有有限聚点，远离原点的贡献一致有界于 $2\int_{\lambda\neq0}\lambda^{-2}\,d\mu_{a,\theta}$。因此，$g_\pi$ 有界，而 g_0 无界，所以这两个延拓彼此不同。□

5.3. 一个共同的典范系统与点 L_a。 由命题 5.3 可知，对于每个$0<a\le R$，函数 $g|_{(-2a,2a)}$ 是一个螺旋函数，满足 $g(0)=0$，并且有两个不同的延拓到整个实直线。因此定理 4.4 适用。将有限区间 $[0,L_a]$ 上的相应迹归一化哈密顿量记为

$$H_{\mathrm{tr}}=(h_{jk})_{j,k=1}^{2},$$

并将其基本矩阵在 $x=L_a$ 处的值记为

$$U_a(z)=(U_{a,jk}(z))_{j,k=1}^{2}.$$

在此阶段，哈密顿量是针对每个 a分别定义的。由定理 4.4 可知，

$$\int_0^x h_{22}(y)\,dy>0\quad(0<x\le L_a),\qquad\int_0^{L_a}\sqrt{\det H_{\mathrm{tr}}(x)}\,dx=a,$$

而 L_a 是后一个积分首次达到 a的点。此外，$g|_{(-2a,2a)}$ 到整个实直线上的螺旋函数的所有延拓，都由 Nevanlinna 函数 Ω 和 Ω $=\infty$参数化。相应的 Weyl 函数为

$$q_\Omega(z)=\frac{U_{a,11}(z)\Omega(z)+U_{a,12}(z)}{U_{a,21}(z)\Omega(z)+U_{a,22}(z)},\qquad q_\infty(z)=\frac{U_{a,11}(z)}{U_{a,21}(z)}.\tag{5.5}$$

命题 5.4。 假设 $\lambda_R>0$。采用上述记号，对于$0<a\le R$，所有矩阵 U_a 都可写成 $U_a(z)=U(L_a,z)$，其中 $U(x,z)$ 是某个具有对角迹归一化哈密顿量的单一典范系统的基本矩阵。该系统在 $[0,L_R]$ 上的限制在上述归一化条件下是唯一的，并且 L_a 关于 a严格递增。在黎曼假设下，同一系统可用于所有 $a>0$。

证明。我们首先证明 $\mathcal{H}(G_g)$ 与 $\mathcal{H}(\mathrm{A}_a)$ 同构。对于 $u\in C_c^\infty(-a,a)$，有 $iu'\in L(G_g)$。对 (4.3) 分部积分可得

$$\Phi_1(iu';\lambda)=\int_{-a}^{a}\frac{e^{it\lambda}-1}{\lambda}iu'(t)\,dt=\widehat{u}(\lambda).$$

两边在 $\lambda = 0$ 处连续，因此该恒等式在此处也成立。对于 $u, f \in C_c^\infty(-a, a)$，由命题 5.3 和 (4.3) 可得

$$\langle iu', if' \rangle_{G_g} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\lambda)\overline{\widehat{f}(\lambda)}\, d\mu_{a,\pi}(\lambda) = Q_W^a(u, f),$$

其中最后一个等式由 (2.5) 得出。因此，$u \mapsto iu'$ 是等距变换。每个积分为零的光滑紧支集函数都可以写成 iu'。此外，每个积分为零的连续紧支撑函数都可以在保持积分为零的同时，用光滑紧支集函数逼近。由于核在某个共同紧集上有界，这种逼近在$\mathcal{H}(G_g)$的范数下也成立。因此，$u \mapsto iu'$ 可延拓为从 $\mathcal{H}(\mathrm{A}_a)$到 $\mathcal{H}(G_g)$上的等距同构。

对于每个 θ，(2.5) 给出了 (4.3) 中变换 Φ_1 的 Parseval 恒等式。根据 [2,§5.3], ，该恒等式表明 $\mu_{a,\theta}$ 是 $g|_{(-2a,2a)}$的某个延拓的谱测度。此外，命题 2.2 表明，$u \mapsto \widehat{u}$是从 $\mathcal{H}(\mathrm{A}_a)$到$L^2(\mu_{a,\theta})$上的满射等距映射。通过上述建立的等距同构，$\Phi_1$ 也具有满射性。因此，命题 4.5 推出$\mu_{a,\theta}$ 是正交谱测度，并且相应的 Ω 是一个实常数或 ∞。

接下来我们证明，对每个 a 得到的典范系统都是同一个典范系统的限制。根据命题 5.3，$\mu_{R,\,\pi}$ 给出了将 $g|_{(-2R,2R)}$ 延拓为定义在整个实直线上的螺旋函数的一种方式。对于所有$0 < a \le R$，这都是 $g|_{(-2a,2a)}$ 的一个共同延拓。它是实偶函数；将其 Weyl 函数记为 q。对于每个 $a \in (0,\ R]$，选取与此延拓相对应的参数 Ω（见 (5.5)）。根据命题 4.2，存在一个定义在半直线上的迹范数化哈密顿量，其 Weyl 函数为 Ω。对于 $\Omega = \infty$，取 $H = \mathrm{diag}(1,\ 0)$。将此系统接到 $[0, L_a]$上的典范系统右侧，根据命题 4.3，得到一个 Weyl 函数为 q的系统。根据命题 4.2，与 q 相对应的半直线上的迹范数化哈密顿量是唯一的。因此，对每个 a，在 $[0, L_a]$ 上得到的典范系统都是半直线上同一个典范系统的限制。下文中，用 H_{tr} 表示这个共同的哈密顿量，并将其基本矩阵记为 $U(x,\ z)$。于是

$$U_a(z) = U(L_a, z).$$

对于这个哈密顿量 H_{tr}，我们有

$$\int_0^{L_a} \sqrt{\det H_{\mathrm{tr}}(x)}\, dx = a,$$

so $a < b$推出 $L_a < L_b$。此外，由于 $\mu_{R,\,\pi}$ 是对称的，谱表示在 S
第 4.4 节中给出

$$q(z) = z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_{R,\pi}(\lambda)}{\lambda^2 - z^2}.$$

因此 q 是奇函数。根据紧接在命题 4.2之后的论证，哈密顿量H_{tr} 是对角的。

如果改变 R，由于定理 4.4中的哈密顿量对于相同的 $g|_{(-2a,2a)}$是唯一的，这些系统在其公共区间上一致。在黎曼假设下，对于每个$R > 0$，我们都有 $\lambda_R > 0$。由于哈密顿量是对角的且为迹归一化的，$\sqrt{\det} H_{\mathrm{tr}} \le 1/2$，从而 $L_a \ge 2a$。因此 $L_a \to \infty$ 作为 $a \to \infty$，我们在整个半直线上得到一个单一系统。□

我们已经证明，为每个 a 构造的典范系统都是同一个典范系统的限制。接下来，我们确定与 $\mu_{a,\,0}$ 和 $\mu_{a,\,\pi}$ 对应的边界条件，并证明其基本矩阵的第二行可用命题 5.2 中的 A_a，B_a 表示。

命题5.5。 对于命题 *5.4* 中得到的公共典范系统，对每个 $0 < a \le R$，我们有，

$$(U_{a,21}(z), U_{a,22}(z)) = (-B_a(z), A_a(z)).$$

此外，在定理 *4.4* 的左端点条件下，完整的基本矩阵 U_a 是唯一确定的。

证明。 在整个证明中，记 $U_{jk} = U_{a,\,jk}(z)$。根据命题 5.4，共同的哈密顿量 H_{tr} 是对角的，且基本矩阵满足 $U(0,\ z) = I_2$。由 (4.2) 可知， U_{11}，U_{22} 是偶函数，而 U_{12}，U_{21} 是奇函数。对于 $\Omega = r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，(5.5) 给出 $-q_r(-z) = q_{-r}(z)$，其中 $-\infty = \infty$。若 q_r 对应于一个实且偶的正交延拓，则 q_r 是奇函数。由于线性分式变换是单射， $r = -r$，因此 $r = 0$ 或 $r = \infty$。我们有 $U_a(0) = I_2$，而与 (4.2) 相关的积分方程给出

$$\partial_z U_{a,21}(0) = -\int_0^{L_a} h_{22}(x)\,dx < 0.$$

因此， $q_\infty = U_{11}/U_{21}$ 在原点有一个极点，而 $q_0 = U_{12}/U_{22}$ 在该处全纯。在命题 5.3 中的两个对称测度里，只有$\mu_{a,\,0}$ 在原点具有正质量。因此，相位 0 对应于 $r = \infty$，而相位 π 对应于 $r = 0$。

由于 $\det U_a = 1$， q_∞ 和 q_0 各自的分子与分母都没有公共零点。这些 Nevanlinna 函数的极点恰好出现在相应谱测度具有正质量的点上。它们全都是简单极点，留数等于相应质量的负值。因此， U_{21}和 U_{22} 的零点分别为$\Gamma_{a,\,0}$ 和$\Gamma_{a,\,\pi}$，且全都是简单零点。另一方面，由 (2.3) 和命题 5.2 可知， B_a， A_a 的零点也分别为$\Gamma_{a,\,0}$，$\Gamma_{a,\,\pi}$。根据 (5.3) 和 $J_a(t,\ t) > 0$，这些零点也都是简单零点。

对基本矩阵的积分方程逐次代入，可将U_{jk} 界定为某个常数倍的

$$\exp\left(|z| \int_0^{L_a} \|H_{\mathrm{tr}}(x)\|\,dx\right).$$

因此， U_{21}，U_{22} 是有限指数型整函数。根据它们关于紧支撑函数的傅里叶变换的表示，函数 A_a， B_a 也具有有限指数型。因此，由阿达马分解可知，每对对应函数之比都是次数至多为一的多项式的指数。由于 U_{21} 和 B_a 是奇函数，而 U_{22} 和 A_a 是偶函数，所以两个比值都是偶函数，因而为常数。

由于$U_{a,\,22}(0) = A_a(0) = 1$，我们有$U_{a,\,22} = A_a$。比较 q_∞ 在原点处的留数，得到

$$-\frac{1}{\partial_z U_{a,21}(0)} = \mu_{a,0}(\{0\}) = \frac{1}{J_a(0,0)} = \frac{1}{B_a'(0)}.$$

由于 U_{21} 和 B_a 都是奇函数，我们得到$U_{a,\,21} = -B_a$。

最后，我们验证第一行的唯一性。根据 [2, 引理 1.2], ，在具有指定第二行的归一化预解矩阵中，存在唯一一个不含形如 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ dz & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 且满足 $d > 0$的左因子的矩阵。这样的左因子对应于在左端点处添加一个哈密顿量为 diag(1，0) 的区间 [2, 推论 3.3]。定理 4.4 中左端点处的条件$\int_0^x h_{22}(t)\,dt > 0$ $(x > 0)$排除了这样的区间。因此， U_a 的第一行也被唯一确定。□

因此，在 $x = L_a$ 处由基本矩阵第二行得到的 Hermite–Biehler 函数为 $\mathcal{E}_a = \sqrt{\pi}(A_a - iB_a)$。根据命题 5.2，它所生成的 de Branges 空间恰为 $\mathcal{B}_a$。

最后，我们证明 L_a 关于 a 连续。令

$$\ell_a := \int_0^{L_a} h_{11}(x)\,dx, \qquad m_a := \int_0^{L_a} h_{22}(x)\,dx, \qquad L_a = \ell_a + m_a.$$

稍后， ℓ_a 和 m_a 将分别解释为弦的长度和质量。

引理 5.6。 假设 $\lambda_R > 0$ 并令 $L_0 = 0$。命题 *5.4* 中的映射 $a \mapsto L_a$ 是从 $[0, R]$ 到 $[0, L_R]$的连续严格递增双射，且其逆映射连续。以下等式作为变量 a的 ***Stieltjes*** 测度恒等式成立：

$$da = \sqrt{\frac{d\ell_a}{dL_a}\frac{dm_a}{dL_a}}\,dL_a, \qquad a = \int_0^{L_a} \sqrt{\det H_{\mathrm{tr}}(x)}\,dx, \tag{5.6}$$

$$dB_a(z) = zA_a(z)\,dm_a, \qquad dA_a(z) = -zB_a(z)\,d\ell_a. \tag{5.7}$$

此外，$(A_0, B_0) = (1, 0)$。

证明。 令 $U(x, z) = (U_{jk}(x, z))_{j,k=1}^2$ 为命题5.4中的公共基本矩阵。根据命题5.5，$(U_{21}(L_a, z)\ U_{22}(L_a, z)) = (-B_a(z)\ A_a(z))$。令 $\alpha(x) = iU_{21}(x, i)$且 $\beta(x) = U_{22}(x, i)$。由于哈密顿量是对角的，(4.2)给出

$$\alpha' = h_{22}\beta, \qquad \beta' = h_{11}\alpha, \qquad (\alpha(0), \beta(0)) = (0, 1),$$

其中导数是关于 x求的。这些微分方程以及 h_{11}， $h_{22} \geq 0$推出 $\alpha \geq 0$、 $\beta \geq 1$，并且

$$\alpha(x) \geq \int_0^x h_{22}(y)\,dy > 0 \qquad (x > 0).$$

α 和 β 均为非减函数。命题5.2和5.5给出 $\alpha(L_a) = \alpha_a$ 以及 $\beta(L_a) = \beta_a$。令 Π_a 表示从 $\mathcal{B}_R$ 到 $\mathcal{B}_a$的正交投影。根据再生性质， $J_a(w, \cdot) = \Pi_a J_R(w, \cdot)$。因此，命题5.1中 Π_a 的强连续性意味着 $J_a(i, 0)$、 $J_a(i, i)$以及 $J_a(0, 0)$关于 a连续。由于 $\alpha_a > 0$，和 $\alpha_a + \beta_a$ 关于 $a > 0$连续。

令 $0 < \varepsilon < R$。对于 $L_\varepsilon \leq x \leq L_R$，我们有

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)'(x) &= h_{22}(x)\beta(x) + h_{11}(x)\alpha(x) \\ &\geq \min(1, \alpha(L_\varepsilon))(h_{11}(x) + h_{22}(x)) \\ &= \min(1, \alpha(L_\varepsilon)) > 0\end{aligned}$$

几乎处处成立。因此， $\alpha + \beta$ 在此区间上连续且严格递增，其反函数是 Lipschitz 连续的。由此可得

$$L_a = (\alpha + \beta)^{-1}(\alpha_a + \beta_a)$$

在 $[\varepsilon, R]$ 上连续。

另一方面，命题5.5和基本矩阵的积分方程给出

$$\int_0^{L_a} h_{22}(x)\,dx = B_a'(0) = J_a(0, 0) \to 0 \quad (a \downarrow 0).$$

最后一个极限由命题5.1中正交投影强收敛到投影到零空间的投影这一事实得到。由于对于每个 $x > 0$， $\int_0^x h_{22}(y)\,dy > 0$，我们得到 $L_a \to 0$。因此， $a \mapsto L_a$ 在 $[0, R]$ 上连续。根据命题 5.4，映射$a \mapsto L_a$严格递增，因此它是从 $[0, R]$ 到 $[0, L_R]$的双射，且逆映射连续。

接下来我们证明测度的恒等式。由于 $a \mapsto L_a$ 连续且严格递增，变量替换给出

$$\ell_b - \ell_a = \int_{L_a}^{L_b} h_{11}(x)\,dx = \int_{(a,b]} h_{11}(L_t)\,dL_t$$

对 $0 \le a < b \le R$ 成立。同样的论证也适用于 m_a，因此我们得到

$$d\ell_a = h_{11}(L_a)\,dL_a, \qquad dm_a = h_{22}(L_a)\,dL_a$$

作为 Stieltjes 测度的恒等式。根据定理 4.4，

$$a = \int_0^{L_a} \sqrt{h_{11}(x)h_{22}(x)}\,dx.$$

应用相同的变量替换可得

$$da = \sqrt{h_{11}(L_a)h_{22}(L_a)}\,dL_a = \sqrt{\frac{d\ell_a}{dL_a}\frac{dm_a}{dL_a}}\,dL_a.$$

这就证明了 (5.6)。

对于对角 Hamiltonian，与 (4.2) 相关的积分方程也给出

$$U_{21}(x,z) = -z\int_0^x U_{22}(y,z)h_{22}(y)\,dy, \qquad U_{22}(x,z) = 1 + z\int_0^x U_{21}(y,z)h_{11}(y)\,dy.$$

限制到 $x = L_a$ 并使用 $(U_{21}(L_a,\ z)\ U_{22}(L_a,\ z)) = (-B_a(z)\ A_a(z))$ 得到 (5.7)。最后，$U(0,\ z) = I_2$ 给出 $(A_0,\ B_0) = (1,\ 0)$。□

6. Explicit recovery of the Hamiltonian

在第 5 节中，我们从一个具有迹范数化哈密顿量的单个典范系统在 L_a 处的基本矩阵，得到了各个 $\mathcal{B}_a$ 的生成函数。在本节中，我们证明 α_a 和 β_a 具有局部 Lipschitz 连续性，并利用这一点证明引理 5.6 中的 Stieltjes 测度 $d\ell_a$ 和 dm_a 相对于 Lebesgue 测度 da 绝对连续。随后，我们以 a 为自变量，显式恢复哈密顿量，并证明定理 1.2。

6.1. **Hamiltonian 的显式恢复**。由命题 5.2 中的公式以及 $J_a(0,i) = J_a(i,0) = \alpha_a > 0$，可得

$$A_a(i) = \beta_a, \qquad B_a(i) = i\alpha_a. \tag{6.1}$$

我们将在本节后半部分证明以下结果。

命题 6.1。若 $\lambda_R > 0$，则 α_a 和 β_a 在每个 $[r,R]\ (0 < r < R)$ 上都是 *Lipschitz* 连续的。

我们使用引理 5.6 中的以下等式：

$$dA_a(z) = -zB_a(z)\,d\ell_a, \qquad dB_a(z) = zA_a(z)\,dm_a, \qquad (A_0,B_0) = (1,0), \tag{6.2}$$

$$da = \sqrt{\frac{d\ell_a}{dL_a}\frac{dm_a}{dL_a}}\,dL_a. \tag{6.3}$$

这里，(6.3) 将 $a = \int_0^{L_a} \sqrt{\det H_{\mathrm{tr}}(x)}\,dx$ 表示为一个测度之间的等式。在此阶段，我们只知道 $da \ll dL_a$。

定理 6.2。假设 $R > 0$ 和 $\lambda_R > 0$，并令 $U_a(z) = U(L_a, z)$ 为命题 *5.4* 中的基本矩阵。那么，对每个 $z \in \mathbb{C}$，映射 $a \mapsto U_a(z)$ 在 $[0,R]$ 上绝对连续，并且满足

$$\partial_a U_a(z) J = zU_a(z)H(a) \tag{6.4}$$

对 da-几乎处处的 a。哈密顿量 $H(a)$ 在相差一个 da-几乎处处的集合的意义下唯一，并由下式给出

$$H(a) = \begin{pmatrix} \gamma(a)^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma(a) \end{pmatrix}, \quad \gamma(a) = \frac{\alpha_a'}{\beta_a} > 0, \quad \gamma(a)^{-1} = \frac{\beta_a'}{\alpha_a}. \tag{6.5}$$

这里的微分是相对于 a 进行的。函数 γ 和 γ^{-1} 在 $[0,R]$ 上可积，并且在每个 $[r,R]$ $(0 < r < R)$ 上本质有界。此外，

$$\partial_a A_a(z) = -z\gamma(a)^{-1}B_a(z), \qquad \partial_a B_a(z) = z\gamma(a)A_a(z) \tag{6.6}$$

几乎处处成立（ da）。特别地，$\det H(a) = 1$ 几乎处处成立（ da）。

证明。 根据命题 5.4 和 5.5，我们有 $U_a(z) = U(L_a, z)$ 且 $(U_{a,21}, U_{a,22}) = (-B_a, A_a)$。在 $z = i$ 处计算 (6.2)，并使用 (6.1)，得到

$$d\alpha_a = \beta_a\, dm_a, \qquad d\beta_a = \alpha_a\, d\ell_a, \qquad \alpha_{0+} = 0, \quad \beta_{0+} = 1. \tag{6.7}$$

特别地， α_a 和 β_a 均为非递减函数，且 $\beta_a \geq 1$。对于每个 $0 < r < R$， α_a 和 β_a 在 $[r, R]$ 上均由正数下界，并且根据命题 6.1，它们在此处 Lipschitz 连续。因此

$$d\ell_a = \frac{\beta_a'}{\alpha_a}\, da, \qquad dm_a = \frac{\alpha_a'}{\beta_a}\, da \tag{6.8}$$

在 $(0, R]$ 上成立。两个测度在 $[0, R]$ 上均有限，且在原点处的质量为零，因此 (6.8) 在 $[0, R]$ 上也成立。记 ℓ' 和 m' 为 (6.8) 中的密度，则有$dL_a = (\ell'(a) + m'(a))\, da$。由于 (6.3) 给出 $da \ll dL_a$，可知对于 da-几乎处处的 a，有 $\ell'(a) + m'(a) > 0$。因此，

$$\frac{d\ell_a}{dL_a} = \frac{\ell'(a)}{\ell'(a) + m'(a)}, \qquad \frac{dm_a}{dL_a} = \frac{m'(a)}{\ell'(a) + m'(a)}$$

几乎处处成立。将这些恒等式代入 (6.3)，得到

$$da = \frac{\sqrt{\ell'(a)m'(a)}}{\ell'(a) + m'(a)}\, dL_a = \sqrt{\ell'(a)m'(a)}\, da.$$

He因此 $\ell'(a)m'(a) = 1$ 对 da-几乎每个 a都成立。特别地，两个密度均为正 da-几乎处处成立。现在令

$$\gamma(a) := m'(a) = \frac{\alpha_a'}{\beta_a}$$

从而得到 $\gamma(a)^{-1} = \ell'(a) = \beta_a'/\alpha_a$ ，进而得到 (6.5)。此外，

$$\int_0^R \big(\gamma(a)^{-1} + \gamma(a)\big)\, da = \ell_R + m_R = L_R < \infty$$

表明 γ 和 γ^{-1} 在 $[0, R]$上可积。根据命题 6.1 以及 α_a， β_a的正下界，它们在每个$[r, R]$ 上本质有界。

接下来，我们在由命题 5.4 构造的迹范数化哈密顿量 H_{tr} 所对应的典范系统基本矩阵的积分方程中，作变量替换 $x = L_a$ 。根据引理 5.6，与 $h_{11}(x)\, dx$和 $h_{22}(x)\, dx$ 分别对应的测度为 $d\ell_a$ 和 dm_a。因此

$$\begin{aligned} U_a(z) &= I_2 - z \int_0^{L_a} U(x, z) H_{\mathrm{tr}}(x) J\, dx \\ &= I_2 - z \int_{(0,a]} U_b(z) \begin{pmatrix} d\ell_b & 0 \\ 0 & dm_b \end{pmatrix} J \\ &= I_2 - z \int_0^a U_b(z) H(b) J\, db, \end{aligned}$$

其中最后一个等式由 (6.5) 和 (6.8) 得出。由于 H 在 $[0, R]$ 上可积，对于每个 $z \in \mathbb{C}$ ，映射 $a \mapsto U_a(z)$ 在 $[0, R]$ 上是绝对连续的，并满足 (6.4)。将 (6.8) 代入 (5.7) 还可得到 (6.6)。由于 $\gamma(a)^{-1}\gamma(a) = 1$，因此对于 da-几乎处处的 a，我们也有 $\det H(a) = 1$ 。

最后，我们证明本矩阵量是唯一满足 (6.4)，那么在哈密顿量 H，我们让基本矩阵 $U_a(z)$ 满足 (6.4)，那么在哈密顿量将两个微分方程 $\widetilde{\ }$ 相减，得到 $U_a(i)(H(a) - H(a)) = 0$ 对 da-几乎处处的 a成立。由典范系统基本矩阵的一般性质，$\det U_a(i) = 1$ ，因此 $U_a(i)$可逆。$\widetilde{\ }$所以 $H = H$ da几乎处处成立。□

6.2. **定理 1.2 的证明**。假设对每个 $0<a<R$，都有$Q_W^a>0$。对于任意$0<b<R$，我们有 $\lambda_b>0$，因此定理 6.2 适用于 $R=b$。由于 $JH(a)^tJ$ =diag($\gamma(a)$ $\gamma(a)^{-1}$)，方程 (6.6) 与 (1.5) 一致。将 $\alpha_a=J_a(i,\ 0)$ 和 $\beta_a=J_a(i,\ i)/J_a(i,\ 0)$ 代入 (6.5)，得到 (1.6)。□

6.3. **再生核之差**。 上文恢复的哈密顿量给出了 $\mathcal{B}_{a_1}$ 与 $\mathcal{B}_{a_2}$ 的再生核之差的积分表达式。

推论 6.3。 设 $0\le a_1<a_2\le R$ 与 $\lambda_R>0$。当 $a_1=0$ 时，令 $\mathcal{B}_0=\{0\}$，并将其再生核取为零。对于任意 w、$z\in\mathbb{C}$，有

$$J_{a_2}(w,z)-J_{a_1}(w,z)=\int_{a_1}^{a_2}\Big\{\gamma(b)\overline{A_b(w)}A_b(z)+\gamma(b)^{-1}\overline{B_b(w)}B_b(z)\Big\}\,db. \tag{6.9}$$

此差即为 $\mathcal{B}_{a_2}\ominus\mathcal{B}_{a_1}$ 的再生核。特别地，

$$J_a(0,0)=\int_0^a\gamma(b)\,db,\qquad \gamma(a)=\frac{d}{da}\langle \mathsf{A}_a^{-1}1,1\rangle_{L^2(-a,a)}\quad a.e. \tag{6.10}$$

证明。 对 (5.3) 的分子关于 a 求导，并代入 (6.6)，得到

$$\frac{\partial}{\partial a}\big(\overline{A_a(w)}B_a(z)-\overline{B_a(w)}A_a(z)\big)=(z-\bar w)\big(\gamma(a)\overline{A_a(w)}A_a(z)+\gamma(a)^{-1}\overline{B_a(w)}B_a(z)\big)$$

对于 da-几乎处处的 a。对于 $z\neq\bar w$，因此利用 (5.3) 并从 a_1 积分至 a_2，即可得到 (6.9)。情形 $a_1=0$ 可由 (A_0，B_0) =(1，0) 和 $J_0=0$ 以同样方式推出。由于两边关于 w 和 z 连续，该恒等式在 $z=\bar w$ 时也成立。空间 $\mathcal{B}_{a_1}$ 是 $\mathcal{B}_{a_2}$ 的闭子空间，且到该空间的正交投影将 $J_{a_2}(w,\ \cdot)$ 映射为 $J_{a_1}(w,\ \cdot)$。因此，两个核之差是 $\mathcal{B}_{a_2}\ominus\mathcal{B}_{a_1}$ 的再生核。最后，在 (6.9) 中令 $a_1=0$、$a_2=a$ 和 $w=z=0$，并利用 $A_b(0)=1$、$B_b(0)=0$ 以及 (2.2)，得到 (6.10)。□

6.4. **命题 6.1 的证明预备知识**。 局部韦伊二次型（(1.2) 和引理 2.1）中涉及素数幂的项可以用平移算子表示。我们将区间 $(-a,a)$ 重缩放为 $(-1,1)$，并用 a 估计平移参数变化的影响。这不仅需要对诸如 $u_{\pm i,a}$ 这样的函数的 L^2 范数给出一致有界性，还需要对它们的零延拓的全变差给出一致有界性。本节余下部分中，固定 $0<r<R$ 并令 $a\in[r,R]$。定义 $V_a\colon L^2(-a,a)\to L^2(-1,1)$，使得 $(V_au)(t)=\sqrt{a}\,u(at)$。令

$$\mathcal{T}_a=V_a\mathsf{A}_aV_a^{-1}.$$

令 P 表示乘以 $\mathbf{1}_{(-1,1)}$ 的乘法算子，并令 $\tau_su(t)=u(t-s)$。下文中，区间 $(-1,1)$ 上的函数均作零延拓，$\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(-1,1)$ $(p=1,2)$ 的范数，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ 表示 $L^2(-1,1)$ 的内积。我们用 Var 表示 $\mathbb{R}$ 上的全变差。

我们首先将 $\mathcal{T}_a$ 表示为一个与 a 无关的非负自伴算子和一个有界自伴算子之和。对于 $0<\eta<\varepsilon<1$，令

$$j_{\eta,\varepsilon}(s):=\frac{\mathbf{1}_{\{\eta<|s|<\varepsilon\}}}{2|s|},\qquad S_{\eta,\varepsilon}u:=\log(\varepsilon/\eta)u-P(j_{\eta,\varepsilon}*u).$$

与 $S_{\eta,\varepsilon}$ 相关联的二次型随着 $\eta\downarrow0$单调递增。令 S_ε 为与其极限相关联的自伴算子。我们还设

$$\mathcal{P}_a:=\sum_{2\le n\le e^{2R}}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}P\big(\tau_{(\log n)/a}+\tau_{-(\log n)/a}\big),\qquad \mathcal{K}_au:=P(k_a*u),$$

其中

$$k_a(s) = \frac{\mathbf{1}_{\{\varepsilon\le|s|\le 2\}}}{2|s|} + \mathbf{1}_{\{|s|\le 2\}} a\, r''(as),$$

$$r''(s) = -2\cosh(s/2) + \frac{e^{-s/2}}{1-e^{-2s}} - \frac{1}{2s} \quad (s>0), \qquad r''(-s) = r''(s),$$

且 r'' 是 [7,§2.2、§2.4] 中余项的二阶导数。

引理 6.4. S_ε 是非负自伴算子，其型域为 $H^{\log}(-1,\ 1)$。对于$r \le a \le R$，恒等式

$$\mathcal{T}_a = S_\varepsilon + c_a \mathrm{Id} - \mathcal{P}_a - \mathcal{K}_a, \qquad c_a = -\log(a\varepsilon) - \log(2\pi) - C_0 \tag{6.11}$$

在公共算子定义域 $\mathfrak{D}(S_\varepsilon)$ 上成立。此外，对于所有 a、$b \in [r,R]$，有

$$\sup_{r\le a\le R} \operatorname{Var} k_a < \infty, \qquad \|k_a - k_b\|_{L^1(\mathbb{R})} \ll_{r,R,\varepsilon} |a-b|. \tag{6.12}$$

证明。我们首先证明 S_ε 的性质。将 $u \in L^2(-1,\ 1)$ 在区间外延拓为零，得到

$$\langle S_{\eta,\varepsilon} u, u\rangle_2 = \frac{1}{4}\int_{\eta<|s|<\varepsilon} \|\tau_s u - u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \frac{ds}{|s|}.$$

因此，随着 $\eta \downarrow 0$，二次型单调递增。其极限是非负闭型，且其关联算子 S_ε 非负自伴。根据普朗歇尔恒等式，极限型等于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^\varepsilon \frac{1-\cos(ts)}{s}\, ds\right)|\widehat{u}(t)|^2\, dt.$$

内层积分为 $\log|t| + O_\varepsilon(1)$，当 $|t| \to \infty$ 时，因此型域为 $H^{\log}(-1,\ 1)$。此外，若将 $u \in C_c^\infty(-1,\ 1)$ 在区间外延拓为零，则

$$\|\tau_s u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \le |s|\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

因此 $S_{\eta,\ \varepsilon}u$ 在 $\eta \downarrow 0$ 时于 $L^2(-1,\ 1)$ 中收敛。记其极限为 h，极限型为 q_ε，则对于 $f \in H^{\log}(-1,\ 1)$，有 $q_\varepsilon(u,\ f) = \langle h,\ f\rangle_2$。根据与闭型相关联的算子的定义，可得 $u \in \mathfrak{D}(S_\varepsilon)$ 且 $S_\varepsilon u = h$。

接下来，我们推导 $\mathcal{T}_a$ 的公式。设 $u \in C_c^\infty(-1,\ 1)$，并令 $v = V_a^{-1}u$。若定义

$$F(s) := (v * \widetilde{v})(as) = \langle \tau_{-s}u, u\rangle_2,$$

则 $F(0) = \|u\|_2^2$，且 F 的支集包含于 $[-2,2]$。式 (1.2) 中积分内的函数可写为

$$\frac{e^{x/2}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{-x/2}}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{2x} + r''(x) + 2\cosh(x/2) \qquad (x>0).$$

此外，当积分在原点处截断时，我们有

$$2\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}}\, dx = \log\coth\frac{\delta}{2} = -\log\delta + \log 2 + o(1) \qquad (\delta \downarrow 0).$$

将这些恒等式代入 (1.2)，并令 $\delta = a\eta$，我们得到

$$\begin{aligned} Q_W^a(v,v) = \lim_{\eta\downarrow 0}\Bigg\{ &-\log(a\eta)\|u\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_{\eta<|s|\le 2}\frac{F(s)}{|s|}\, ds\Bigg\} \\ &- \sum_{n\le e^{2a}} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\left\langle (\tau_{(\log n)/a} + \tau_{-(\log n)/a})u, u\right\rangle_2 \\ &- \big(\log(2\pi) + C_0\big)\|u\|_2^2 - a\int_{-2}^2 F(s) r''(as)\, ds. \end{aligned}$$

根据 $S_{\eta,\ \varepsilon}$ 的定义，

$$
\begin{aligned}
&-\log(a\eta)\|u\|_2^2-\frac{1}{2}\int_{\eta<|s|\le 2}\frac{F(s)}{|s|}\,ds\\
&\qquad=\langle S_{\eta,\varepsilon}u,u\rangle_2-\log(a\varepsilon)\|u\|_2^2-\frac{1}{2}\int_{\varepsilon\le|s|\le 2}\frac{F(s)}{|s|}\,ds.
\end{aligned}
$$

令 $\eta\downarrow 0$，并利用 k_a 的定义，我们因此得到

$$
Q_W^a(V_a^{-1}u,V_a^{-1}u)=\langle S_\varepsilon u,u\rangle_2+c_a\|u\|_2^2-\langle\mathcal{P}_a u,u\rangle_2-\langle\mathcal{K}_a u,u\rangle_2.
$$

算子 $\mathcal{P}_a$ 和 $\mathcal{K}_a$ 在 $L^2(-1,\ 1)$ 上有界且自伴。由于 $C_c^\infty(-1,\ 1)$ 是 $H^{\log}(-1,\ 1)$ 的型核，正如第 2 节中所回顾的那样，前述恒等式可延拓到整个型域。因此，$\mathcal{T}_a$ 的闭二次型与 $S_\varepsilon+c_a\mathrm{Id}\ -\mathcal{P}_a-\mathcal{K}_a$ 的闭二次型一致。根据与闭二次型相关联的自伴算子的唯一性，这两个算子相同。由于其余各项都是有界自伴算子，它们不会改变算子定义域。因此，(6.11) 在公共定义域 $\mathfrak{D}(S_\varepsilon)$ 上成立。

最后，我们估计 k_a。r'' 的公式给出

$$
r''(s)=-\frac{7}{4}-\frac{s}{48}+O(s^2)\qquad(s\downarrow 0).
$$

因此，若令 $r''(0)=-7/4$，则 r'' 在 $\mathbb{R}$ 上连续，并且在每个有界区间上 Lipschitz 连续。令 M 控制 r'' 在 $[-2R,2R]$ 上的绝对值，并令 K 为该区间上的 Lipschitz 常数。对于 $r\le a$，$b\le R$ 和 $|s|\le 2$，我们有

$$
\begin{aligned}
|ar''(as)-br''(bs)|&\le|a-b|\,|r''(as)|+b\,|r''(as)-r''(bs)|\\
&\le(M+2RK)|a-b|,
\end{aligned}
$$

从而

$$
\|ar''(a\cdot)-br''(b\cdot)\|_{L^1(-2,2)}\le 4(M+2RK)|a-b|.
$$

函数 $s\mapsto ar''(as)$ 在 $[-2,2]$ 上也是 Lipschitz 连续的，其 Lipschitz 常数至多为 R^2K。事实上，对于 $s,\ t\in[-2,2]$，有 $|ar''(as)\ -ar''(at)|\ \le\ a^2K|s-t|\ \le R^2K|s-t|$。在零延拓后计入两个端点处的跳跃，我们得到

$$
\mathrm{Var}\big(\mathbf{1}_{\{|s|\le 2\}}ar''(as)\big)\le 4R^2K+2RM.
$$

k_a 中的第一项与 a 无关，并且由于 $\varepsilon>0$ 而具有有限的全变差。这就证明了（6.12）。□

在下一个引理中，$BV_0(-1,\ 1)$ 表示定义在 $(-1,1)$ 上的函数空间，其零延拓属于 $BV(\mathbb{R})$，范数由该延拓的全变差给出。我们不要求它们在端点处的迹为零。

引理 6.5。假设 $\lambda_R>0$。对于 $f_a=V_a1$ 或 $f_a=V_ae_{-i}$，有

$$
\sup_{r\le a\le R}\mathrm{Var}(\mathcal{T}_a^{-1}f_a)<\infty.
$$

证明。对于一个可积的有界变差函数 u，我们有 $\mathrm{Var}(Pu)\ \le\mathrm{Var}(u)$。事实上，任一端点处跳跃的大小，都受到从该端点向区间外无穷远延伸的变差所界定，因为在那里 u 趋于 0。因此，$\mathcal{P}_a$ 在 $BV_0(-1,\ 1)$ 和 $L^2(-1,\ 1)$ 上的算子范数都被以下内容所界定：

$$
M_R=2\sum_{2\le n\le e^{2R}}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}.
$$

此外，由于 $\mathrm{Var}(k_a*u)\ \le\mathrm{Var}(k_a)\|u\|_1$，算子 $\mathcal{K}_a\colon\ L^2(-1,1)\ \to BV_0(-1,1)$ 一致有界。对于任意 $c>0$，$P(j_{\eta,\varepsilon}*\cdot)$ 在 $BV_0(-1,1)$ 上的算子范数至多为 $\log(\varepsilon/\eta)$。因此，纽曼级数给出 $\|(S_{\eta,\varepsilon}+c\mathrm{Id})^{-1}\|_{BV_0\to BV_0}\le 1/c$。根据闭二次型的单调收敛定理，$(S_{\eta,\varepsilon}+c\mathrm{Id})^{-1}f$ 收敛

到 $L^2(-1,1)$ 中的 $(S_\varepsilon + c\mathrm{Id})^{-1} f$，当 $\eta \downarrow 0$ 时成立。由于区间有界，该收敛在 $L^1(-1,1)$ 中也成立。因此，对于 $f \in BV_0(-1,1)$，全变差的下半连续性给出

$$\operatorname{Var}\big((S_\varepsilon + c\mathrm{Id})^{-1} f\big) \le \liminf_{\eta \downarrow 0} \operatorname{Var}\big((S_{\eta,\varepsilon} + c\mathrm{Id})^{-1} f\big) \le c^{-1} \operatorname{Var}(f).$$

因此，$(S_\varepsilon + c\mathrm{Id})^{-1}$ 在 $BV_0(-1,1)$ 上有界，范数至多为 $1/c$。由于 $S_\varepsilon \ge 0$，$L^2(-1,1)$ 上的算子范数也至多为 $1/c$。

取 ε 充分小，使得 $c_* := \min_{r \le a \le R} c_a > M_R$。由于 $\lambda_a \ge \lambda_R$，函数 $w_a = \mathcal{T}_a^{-1} f_a$ 满足 $\|w_a\|_2 \le \|f_a\|_2 / \lambda_R$。重新整理 (6.11) 得

$$(S_\varepsilon + c_a \mathrm{Id} - \mathcal{P}_a) w_a = f_a + \mathcal{K}_a w_a.$$

在这两个空间上，$(S_\varepsilon + c_a\mathrm{Id})^{-1}\mathcal{P}_a$ 的范数均有界于 $M_R/c_* < 1$。因此，左侧的算子由纽曼级数可逆，且其逆的范数在 $BV_0(-1,1)$ 上至多为 $(c_* - M_R)^{-1}$。在嵌入 $BV_0(-1,1) \hookrightarrow L^2(-1,1)$ 下，这个逆与 L^2 上的逆一致。函数 f_a 要么是 $\sqrt{a}$，要么是 $\sqrt{a}e^{-at}$，其零延拓的全变差一致有界。L^2 估计也一致控制了 $\mathcal{K}_a w_a$ 的全变差，从而证明了该引理。□

在算子分解中，只有有界余项和有限个平移会发生变化。引理 6.5 还使我们能够估计当算子作用于 $\mathcal{T}_a^{-1} f_a$ 时，平移参数变化所产生的影响。

6.5. **命题 6.1 的证明**。令 f_a, g_a 各自为 $V_a 1$ 或 $V_a e_{-i}$。这些族关于 a 平滑依赖，取值于 $L^2(-1,1)$，且 $\|\mathcal{T}_a^{-1}\| \le 1/\lambda_R$。因此

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{T}_a^{-1} f_a, g_a\rangle_2 - \langle \mathcal{T}_b^{-1} f_b, g_b\rangle_2 &= \langle \mathcal{T}_a^{-1} f_a, g_a - g_b\rangle_2 + \langle (\mathcal{T}_a^{-1} - \mathcal{T}_b^{-1}) f_a, g_b\rangle_2 \\
&\quad + \langle \mathcal{T}_b^{-1}(f_a - f_b), g_b\rangle_2 \\
&= \langle (\mathcal{T}_a^{-1} - \mathcal{T}_b^{-1}) f_a, g_b\rangle_2 + O_{r,R}(|a-b|) \\
&= \big\langle (\mathcal{T}_b - \mathcal{T}_a)\mathcal{T}_a^{-1} f_a, \mathcal{T}_b^{-1} g_b\big\rangle_2 + O_{r,R}(|a-b|).
\end{aligned}$$

这里，根据引理 6.4，算子 $\mathcal{T}_a$ 和 $\mathcal{T}_b$ 具有相同的算子定义域。因此，预解式恒等式

$$\mathcal{T}_a^{-1} - \mathcal{T}_b^{-1} = \mathcal{T}_b^{-1}(\mathcal{T}_b - \mathcal{T}_a)\mathcal{T}_a^{-1}$$

在 $L^2(-1,1)$ 上成立。上面的最后一个等号还用到了 $\mathcal{T}_b^{-1}$ 的自伴性。

令 $w_a = \mathcal{T}_a^{-1} f_a$ 和 $v_b = \mathcal{T}_b^{-1} g_b$。由 (6.11)，我们有

$$\mathcal{T}_b - \mathcal{T}_a = (c_b - c_a)\mathrm{Id} - (\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_a) - (\mathcal{K}_b - \mathcal{K}_a).$$

我们估计这三项对 $\langle (\mathcal{T}_b - \mathcal{T}_a) w_a, v_b\rangle_2$ 的贡献。首先，逆算子的一致有界性给出 $\|w_a\|_2 + \|v_b\|_2 \ll_{r,R} 1$。由于

$$|c_b - c_a| + \|k_b - k_a\|_{L^1(\mathbb{R})} \ll_{r,R} |a-b|$$

由 (6.11) 和 (6.12)，根据杨氏不等式可得

$$|\langle (c_b - c_a) w_a, v_b\rangle_2| + |\langle (\mathcal{K}_b - \mathcal{K}_a) w_a, v_b\rangle_2| \ll_{r,R} |a-b|.$$

还需估计 $\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_a$ 的贡献。根据其定义，

$$(\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_a) w_a = \sum_{2 \le n \le e^{2R}} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} P\left(\tau_{(\log n)/b} - \tau_{(\log n)/a} + \tau_{-(\log n)/b} - \tau_{-(\log n)/a}\right) w_a.$$

对于在 $(-1,1)$ 之外延拓为零的函数，有界变差函数的标准不等式给出

$$\|\tau_s w - \tau_t w\|_{L^1(\mathbb{R})} \le |s-t| \operatorname{Var}(w), \qquad \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \operatorname{Var}(w).$$

因此，

$$\begin{aligned}|\langle P(\tau_s-\tau_t)w_a,v_b\rangle_2| &\le \|\tau_s w_a-\tau_t w_a\|_{L^1(\mathbb{R})}\|v_b\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\ &\le |s-t|\operatorname{Var}(w_a)\operatorname{Var}(v_b).\end{aligned}$$

引理 6.5 对 $a,b\in[r,R]$ 的两个变分给出了统一的界。此外，对有限和中的每个 n，

$$\left|\frac{\log n}{a}-\frac{\log n}{b}\right|\le\frac{\log n}{r^2}|a-b|.$$

将前述估计分别应用于正向平移和负向平移，我们得到

$$|\langle(\mathcal{P}_b-\mathcal{P}_a)w_a,v_b\rangle_2|\ll_{r,R}|a-b|.$$

该估计也涵盖 a 和 b 位于 $(\log n)/2$ 两侧的情形。事实上，定义 $\mathcal{P}_a$ 的和的取值范围固定为 $2\le n\le e^{2R}$，并且当 w 支集包含于 $[-1,1]$ 时，$P\tau_s w=0$ 对 $|s|\ge 2$ 成立。因此，相应的平移项在进入该区间之前便自动消失。结合这些估计，我们得出

$$\langle\mathcal{T}_a^{-1}f_a,g_a\rangle_2-\langle\mathcal{T}_b^{-1}f_b,g_b\rangle_2=O_{r,R}(|a-b|).$$

由 (2.2) 以及 V_a 是酉的可知，我们有

$$J_a(i,0)=\langle\mathcal{T}_a^{-1}V_a e_{-i},V_a 1\rangle_2,\quad J_a(i,i)=\langle\mathcal{T}_a^{-1}V_a e_{-i},V_a e_{-i}\rangle_2.$$

前述估计表明，α_a 和 $J_a(i,i)$ 在 $[r,R]$ 上是 Lipschitz 连续的。由于 α_a 在 $[r,R]$ 上有正的下界，函数 $\beta_a=J_a(i,i)/\alpha_a$ 也是 Lipschitz 连续的。□

7. 应用

7.1. 局部谱测度与 ζ 函数的零点。 设 $0<a<\infty$ and$\lambda_a>0$。下文中，局部谱测度指 $g|_{(-2a,2a)}$的谱测度。由命题 5.4 的证明可知，这些恰好是满足 $F\mapsto F|_{\mathbb{R}}$ 为从 $\mathcal{B}_a$ 到 $L^2(\nu)$的等距变换的测度 ν，且每个 $\mu_{a,\,\theta}$ 都是正交谱测度。在黎曼假设下，全局函数 g 的谱测度是

$$\mu_\xi=\sum_{\gamma\in\Gamma}m_\gamma\delta_\gamma$$

[5, 定理 1.1、(1.7)、(1.8)]。对每个 $0<a<\infty$，这是 $g|_{(-2a,2a)}$的非正交谱测度。事实上，对每个 $b>a$，由命题5.1可得 $\mathcal{B}_a\subsetneq\mathcal{B}_b$；并且在黎曼假设下，命题 2.2 表明 $F\mapsto F|_{\mathbb{R}}$ 是从 $\mathcal{B}_b$ 到 $L^2(\mu_\xi)$的等距变换。它在 $\mathcal{B}_a$ 上的限制是同一个映射，因此 $\mathcal{B}_a$ 的像是$L^2(\mu_\xi)$的真闭子空间。因此μ_ξ 是非正交谱测度。

命题 *7.1.* 对于不同的相位 $\theta,\theta'\in[0,2\pi)$，集合 $\Gamma_{a,\theta}$和 $\Gamma_{a,\theta'}$ 交错：任一集合中任意两个相邻点之间，恰有一个另一集合中的点。对于每个局部谱测度 ν 和每个 $t\in\mathbb{R}$，我们有 $\nu(\{t\})J_a(t,t)\le 1$，且等号仅在唯一的正交谱测度下成立，其谱包含 t。若$r_1<r_2$ 是 $\Gamma_{a,\pi}$中的相邻点，则只要 $\nu\ne\mu_{a,\pi}$，就有 $\nu((r_1,r_2))>0$。特别地，在黎曼假设下，每个开区间 (r_1,r_2) 都包含至少一个 Γ中的点，并且对于每个 $\gamma\in\Gamma$，都有$m_\gamma J_a(\gamma,\gamma)<1$。

证明。 由 (2.3) 和命题 5.2，

$$W(a,\theta;z)=i\alpha_a(e^{i\theta}-1)A_a(z)+\beta_a(1+e^{i\theta})B_a(z).$$

因此，$0<\theta<2\pi$ 的谱是 A_a-rB_a的零点集，其中 $r=(\beta_a/\alpha_a)\cot(\theta/2)$。对于 $\theta=0$，它是 B_a的零点集。函数 A_a，B_a 没有共同的实零点，并且

$\arg(A_a(t) + iB_a(t))$的连续选支导数为

$$\frac{A_a(t)B_a'(t) - A_a'(t)B_a(t)}{A_a(t)^2 + B_a(t)^2} = \frac{J_a(t,t)}{A_a(t)^2 + B_a(t)^2} > 0.$$

每个谱由辐角模 π取某个指定值的点组成。因此，两个不同的谱没有公共点，并且在任一谱的任意两个相邻点之间，恰有另一个谱的一个点。每个 $t \in \mathbb{R}$ 恰好属于一个$\Gamma_{a,\theta}$。

计算 $L^2(\nu)$ 中再生核 $J_a(t,\cdot)$ 的范数，得到

$$J_a(t,t) = \int_{-\infty}^{\infty} |J_a(t,x)|^2 \, d\nu(x) \geq J_a(t,t)^2 \nu(\{t\}).$$

若等号成立，则 ν 集中在 t 以及 $J_a(t,\cdot)$ 的实零点上。由 (5.3)，这些点构成集合 $\Gamma_{a,\theta}$，其中包含 t。计算该集合中每个点 x 处 $J_a(x,\cdot)$ 的范数，并利用不同点处核的正交性，可得$\nu(\{x\}) = 1/J_a(x,x)$。反之，这些等式对 $\mu_{a,\theta}$成立。

最后，对于 A_a 的相邻零点 r_1, r_2，核 $J_a(r_1,\cdot)$ 和 $J_a(r_2,\cdot)$ 正交，并且在实轴上有

$$J_a(r_1,x)J_a(r_2,x) = \frac{B_a(r_1)B_a(r_2)A_a(x)^2}{(x-r_1)(x-r_2)} \qquad (x \neq r_1, r_2).$$

该乘积在端点 r_1, r_2 处为零，而在区间之外，只要 $A_a(x) \neq 0$，它就具有固定的严格符号。如果 $\nu((r_1,r_2)) = 0$，那么，由于该乘积关于 ν 的积分为零，测度 ν 必定集中在 A_a的零点上。按照上述方法对核范数进行相同的计算，可得 $\nu = \mu_{a,\pi}$。在黎曼假设下，将这些结果应用于 $\nu = \mu_\xi$，并利用该测度非正交这一事实，即可证明这两个结论。□

7.2. 全局螺旋函数的延拓参数。 与黎曼ζ函数相关联、在第 5.2 节中定义的函数 g，当且仅当黎曼假设成立时，才是定义在整个实轴上的螺旋函数 [5, 定理 1.2]。在黎曼假设下，从再生核恢复出的哈密顿量确定了在命题 5.3 中局部螺旋函数的各种延拓中选取 g 的参数。

命题 7.2。 假设 *RH*，并令 $a > 0$。令 $\widetilde{g}$ 为 $g|_{(-2a,2a)}$的延拓，并令Ω 为其在(5.5)中的参数。那么，当且仅当 $\widetilde{g}$ 在整个实轴上与 g 一致时，

$$\Omega(z) = \lim_{b\to\infty} \frac{(U_a(z)^{-1}U_b(z))_{12}}{(U_a(z)^{-1}U_b(z))_{22}} \quad (\Im z > 0),$$

分子和分母分别是矩阵$U_a(z)^{-1}U_b(z)$的$(1,2)$ 项和$(2,2)$ 项。该极限在上半平面内局部一致。它是通过将(6.5)中的哈密顿量限制在(a,∞) 上，并将基本矩阵在左端点 a处归一化为 I_2 而得到的典范系统的*Weyl*函数。

证明。 在黎曼假设下，函数 g 对所有 $a > 0$延拓了局部螺旋函数，其 Weyl 函数为 $Q_\xi(z) = i(\xi'/\xi)(1/2 - iz)$ [5, (1.7)、(1.8)]。根据命题 5.4 的证明，与该 Weyl 函数对应的半直线上的典范系统的基本矩阵在每个 $b > 0$处都与 U_b 一致。由 (6.4)，矩阵 $U_a(z)^{-1}U_b(z)$ 是典范系统基本矩阵在右端点 b 处的取值，该系统定义在 $[a,b]$上，并在左端点 a处归一化为 I_2。因此，命题中的商是右端点 b处边界参数为 0 的典范系统的 Weyl 函数。由于 $\det H = 1$，我们有 $\int_a^b \operatorname{tr} H(c)\,dc \geq 2(b-a)$。因此，$[a,\infty)$上的典范系统属于极限点情形。变量替换 $x = \int_a^b \operatorname{tr} H(c)\,dc$将哈密顿量归一化为 $\operatorname{tr} H = 1$。根据命题 4.2，命题中的商在每个 $z \in \mathbb{C}_+$ 处都收敛于该典范系统的 Weyl 函数。由于

H 几乎处处正定，极限在 $\mathbb{C}_+$上有限。这些商的凯莱变换是取值于单位圆盘的全纯函数。根据蒙泰尔定理以及上述逐点收敛结果，它们局部一致收敛。应用逆凯莱变换后，原商也有相同的结论。根据命题 4.3，将该 Weyl 函数代入 (5.5) 得到 Q_ξ。归一化扩张与其 Weyl 函数一一对应，并且由于 $\det U_a = 1$，相应的线性分式变换是单射。因此，命题中的条件既是必要的，也是充分的。□

7.3. 弦的长度和质量的谱公式。具有对角 Hamiltonian 的典范系统对应于克莱因弦的谱问题（[2,§8.4], [6, §2.4]）。克莱因弦由其长度 $\ell > 0$ 以及一个非递减的右连续函数 $M(y)$ 描述，该函数给出弦上位置 y 之前的累积质量。将张力归一化为 1 后，其运动方程为

$$du'(y) + s u(y)\, dM(y) = 0.$$

这里， s 是谱变量， $'$ 表示对 y求导。一般而言，质量分布 M 可能包含点质量。

在对角 Hamiltonian 与克莱因弦的对应关系中，我们令 $s = z^2$，其中 z 是典范系统的谱变量。假设 $\lambda_a > 0$ ，并将这一对应关系应用于命题 5.4 中的对角 Hamiltonian。令 x 为满足 $\operatorname{tr} H = 1$ 归一化的典范系统坐标，并定义弦上的位置 y 及其质量分布 M 如下

$$y(x) = \int_0^x h_{11}(v)\, dv, \qquad M(y(x)) = \int_0^x h_{22}(v)\, dv \qquad (0 \le x \le L_a).$$

归一化 $H = 1$ 给出 $y(x) + M(y(x)) = x$。对于每个 $0 \le x_1 < x_2 \le L_a$，我们有 $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\det H_{\mathrm{tr}}(x)}\, dx > 0$，因此 y严格递增。将 $x \mapsto \int_0^x h_{22}(v)\, dv$与 y 的连续逆函数复合，可知 M 连续，且 $M(0) = 0$。因此，两个端点处都没有点质量。弦的长度和总质量分别为$y(L_a) = \ell_a$和 $M(\ell_a) = m_a$。根据定理 6.2，我们有 $d\ell_b = \gamma(b)^{-1}\, db$和 $dm_b = \gamma(b)\, db$ $(0 < b \le a)$。现在，我们用由局部韦伊二次型得到的再生核，以及由里斯表示定理给出的函数 $u_{z,\,a}$来表示该长度和质量。

$\varphi(y,\ s)$ $\psi(y,\ s)$ 是由以下条件确定的弦方程的基本解：$\varphi(0,\ s) = 1$， $\varphi'(0,\ s) = 0$， $\psi(0,\ s) = 0$， $\psi'(0,\ s) = 1$。这里， $'$ 表示对 y 求导。根据 [2,(8.9) 、 (8.10)]，典范系统的基本矩阵为

$$U(x,z) = \begin{pmatrix} \psi'(y,s) & z\psi(y,s) \\ \varphi'(y,s)/z & \varphi(y,s) \end{pmatrix} \qquad (y = y(x),\ s = z^2).$$

由于其第二行为 $(-B_a(z)\ \ A_a(z))$，谱$\Gamma_{a,\ \pi}$ 对应于自由左端点和固定右端点，边界条件为 $\varphi(\ell_a,\ s) = 0$；而$\Gamma_{a,\ 0}$ 对应于两个自由端点，边界条件为 $\varphi'(\ell_a,\ s) = 0$。后一种情况下， $s = 0$ 处的特征函数为常数。

为了直接用$u_{\pm i,\ a}$表示长度 ℓ_a ，我们定义

$$f(t) = u_{i,a}(t) - u_{-i,a}(t) - \int_{-a}^{t} (u_{i,a} + u_{-i,a})(y)\, dy + 2\alpha_a \mathbf{1}_{(0,a)}(t)$$

对于 $-a < t < a$，并将 f 延拓为实轴上的零函数。

命题 7.3。若 $\lambda_a > 0$，则 $f \in H^{\log}(-a,\ a)$ 且

$$\ell_a = \sum_{\gamma \in \Gamma_{a,\pi}} \frac{1}{\gamma^2 J_a(\gamma,\gamma)} = \frac{Q_W^a(f,f)}{|W(a,\pi;0)|^2}, \qquad m_a = J_a(0,0) = \langle \mathsf{A}_a^{-1} 1, 1 \rangle_{L^2(-a,a)}. \tag{7.1}$$

证明。令 $s = z^2 < 0$。对于固定右端点的弦的 Weyl函数，令 $\Omega = 0$ 代入 (5.5)，并使用命题5.5的证明中所确定的相位 π 对应的对称谱测度，得到

$$\frac{\psi(\ell_a, s)}{\varphi(\ell_a, s)} = \frac{U_{a,12}(z)}{zU_{a,22}(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_{a,\pi}(\lambda)}{\lambda^2 - s}.$$

因此，弦的谱测度是 $\mu_{a,\pi}$ 在 $\lambda \mapsto \lambda^2$ 下的推前测度。由于 $\mu_{a,\pi}$ 是对称的，且 $\mu_{a,\pi}(\{0\}) = 0$，对应于 $\gamma \in \Gamma_{a,\pi}, \gamma > 0$ 的 γ^2 处的质量为 $2/J_a(\gamma, \gamma)$。

在 $s = 0$ 处，我们有 $\varphi(y, 0) = 1$ 且 $\psi(y,0) = y$，因此 $\psi(\ell_a, s)/\varphi(\ell_a, s) \to \ell_a (s \uparrow 0)$。对右侧的 Stieltjes积分应用单调收敛定理，得到

$$\ell_a = 2 \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_{a,\pi} \\ \gamma > 0}} \frac{1}{\gamma^2 J_a(\gamma, \gamma)} = \sum_{\gamma \in \Gamma_{a,\pi}} \frac{1}{\gamma^2 J_a(\gamma, \gamma)}.$$

另一方面，在 (5.7) 中对 $dB_b(z) = zA_b(z)\, dm_b$ 关于 $z = 0$ 求导，并利用 $A_b(0) = 1, B_0(z) = 0$，可得 $m_a = \partial_z B_a(0) = J_a(0,0)$。此外，由 (2.2) 得

$$J_a(0, 0) = \widehat{u_{0,a}}(0) = \langle \mathsf{A}_a^{-1} 1, 1 \rangle_{L^2(-a,a)}.$$

当两个端点都自由时，我们有

$$\frac{\psi'(\ell_a, s)}{\varphi'(\ell_a, s)} = \frac{U_{a,11}(z)}{zU_{a,21}(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_{a,0}(\lambda)}{\lambda^2 - s}.$$

由于 $\varphi'(\ell_a, s) = -sm_a + O(s^2)$ 且 $\psi'(\ell_a, s) = 1 + O(s)$，谱测度在原点处赋予质量 $\mu_{a,0}(\{0\}) = 1/m_a$。

最后，我们证明涉及 f 的公式。反射对称性给出 $\widehat{u_{\pm i\, a}}(0) = \alpha_a$。因此，$f$ 定义中的最后两项之和在两个端点处均为零，其分布导数为 $-(u_{i,\ a} + u_{-i,\ a}) + 2\alpha_a \delta_0$。该和是一个具有紧支集的有界变差函数，因此其傅里叶变换在实轴上为 $O((1+|z|)^{-1})$。由于 $u_{\pm i,\ a} \in H^{\log}(-a,\ a)$，可推出 $f \in H^{\log}(-a,\ a)$。对两边作傅里叶变换并使用 (2.3)，得到

$$z\widehat{f}(z) = (z - i)\widehat{u_{i,a}}(z) - (z + i)\widehat{u_{-i,a}}(z) + 2i\alpha_a = W(a, \pi; z) - W(a, \pi; 0).$$

因此 $\widehat{f}(\gamma) = -W(a, \pi; 0)/\gamma$ 对于 $\gamma \in \Gamma_{a,\pi}$。局部 Parseval 恒等式 (2.5) 以及上文得到的 ℓ_a 级数给出了 (7.1) 中剩下的等式。□

8. Asymptotic behavior of the fundamental matrix under RH

本节全程假设黎曼假设成立。于是，根据命题 5.4 和定理 6.2，典范系统在变量 a 的整个正半直线上延拓。我们确定其基本矩阵和再生核在 $a \to \infty$ 时的渐近行为。沿用命题 2.3 中的记号，记 $\Gamma \cap (0, \infty) = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots\}$ 以及 $\Gamma_{a,\pi} \cap (0, \infty) = \{\gamma_{a,1} < \gamma_{a,2} < \cdots\}$。根据 [8, 定理 1.1],

$$\gamma_{a,n} \geq \gamma_n, \qquad \gamma_{a,n} \searrow \gamma_n \quad (a \to \infty). \tag{8.1}$$

定义实整函数

$$A_\infty(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\gamma_n^2}\right).$$

该乘积在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛，因为 $\sum_{n \geq 1} \gamma_n^{-2} < \infty$。每个不同的正零点只计入一次。特别地，$A_\infty(z) = \xi(1/2 - iz)/\xi(1/2)$ 当且仅当 ξ 的所有零点都是单零点。由 (5.2) 以及 [8,定理 1.2 和 (5.1)]，我们有

$$A_a(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\gamma_{a,n}^2}\right) \to A_\infty(z) \tag{8.2}$$

当 $a \to \infty$ 时在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛。令

$$q_a(z) := \frac{U_{a,12}(z)}{A_a(z)}, \qquad Q_\xi(z) := i\frac{\xi'}{\xi}(1/2 - iz).$$

Pr命题 8.1. 假设黎曼假设成立。第 *7.3* 节中弦的长度和质量满足

$$\ell_a \nearrow \ell_\infty := \frac{\xi''(1/2)}{\xi(1/2)} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{m_\gamma}{\gamma^2} < \infty, \qquad m_a = J_a(0,0) \geq \frac{a^2}{\ell_\infty} \ \to \ \infty \tag{8.3}$$

当 $a \to \infty$ 时。特别地，对应于半直线上系统的弦具有有限长度和无限质量。

证明。 如命题 7.2 的证明所示， Q_ξ 是半直线上共同典范系统的 Weyl函数。由于 $L_a \geq 2a$，由边界参数 $\Omega = 0$ 的命题 4.2 可得 $q_a(z) \to Q_\xi(z)$，其中 $z \in \mathbb{C}_{+}$。此处的收敛是局部一致的，因为 Nevanlinna 函数 q_a 的凯莱变换的模不超过 1，且根据蒙泰尔定理（如命题 7.2 的证明中所示）， Q_ξ 在 $\mathbb{C}_+$ 上有限。

第 7.3 节命题证明中使用的积分表示给出

$$\frac{q_a(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_a(\gamma_{a,n},\gamma_{a,n})(\gamma_{a,n}^2 - z^2)}. \tag{8.4}$$

最初，此恒等式对 $z = iy$、 $y > 0$ 成立。由 (7.1) 可知，该级数在其极点之外局部一致收敛，因此等式通过解析延拓在该处延拓成立，左侧在 $z = 0$ 处有一个可去奇点。该表示在 $q_a(z)/z$ 中不含额外常数，或者等价地，在 q_a 中不含线性项，这也可由第 4.4 节中 $q_{\widetilde{g}}$ 的表示得出。由 (8.1)，对所有 n，我们有 $\gamma_{a,\,n} \geq \gamma_1$ ，因此

$$\frac{1}{\gamma_{a,n}^2 + y^2} \leq \frac{1}{\gamma_{a,n}^2} \leq \left(1 + \frac{y^2}{\gamma_1^2}\right) \frac{1}{\gamma_{a,n}^2 + y^2} \qquad (y > 0).$$

因此，逐项比较 (7.1) 和 (8.4) 中的级数，我们得到

$$\frac{q_a(iy)}{iy} \leq \ell_a \leq \left(1 + \frac{y^2}{\gamma_1^2}\right) \frac{q_a(iy)}{iy} \qquad (y > 0).$$

由定理 6.2， $\ell_a = \int_0^a \gamma(b)^{-1}\, db$ 是递增的。令 $a \to \infty$ 趋于极限，同时固定 $y > 0$，由这些不等式可知 ℓ_∞ 是有限的。然后，令 $y \downarrow 0$趋于极限，我们得到 $\ell_\infty = Q_\xi'(0)$，因为 $Q_\xi(0) = 0$。函数方程给出 $\xi'(1/2) = 0$，因此 $Q_\xi'(0) = \xi''(1/2)/\xi(1/2)$。对于用零点表示的表达式，阶为一的偶整函数 $\xi(1/2 - iz)$的阿达马分解给出

$$\frac{\xi(1/2 - iz)}{\xi(1/2)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\gamma_n^2}\right)^{m_{\gamma_n}}.$$

级数 $\sum_n m_{\gamma_n}/\gamma_n^2$ 根据 ξ的零点通常的计数估计收敛。因此，对数微分给出

$$Q_\xi(z) = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{\gamma_n}}{\gamma_n^2 - z^2} \qquad (z \notin \Gamma),$$

其中，该级数在远离极点处局部一致收敛。特别地， $\ell_\infty = Q_\xi'(0) = 2\sum_n m_{\gamma_n}/\gamma_n^2 > 0$。最后，由于 $m_a = \int_0^a \gamma(b)\, db$ 根据定理 6.2，柯西–施瓦茨不等式给出 $a^2 \leq \ell_a m_a \leq \ell_\infty m_a$。因此，我们得到（8.3）。□

根据命题 8.1，迹范数化哈密顿量的平均值趋于一个秩一矩阵。事实上，我们有

$$\frac{1}{L_a}\int_0^{L_a} H_{\mathrm{tr}}(x)\, dx = \frac{1}{\ell_a + m_a}\begin{pmatrix} \ell_a & 0 \\ 0 & m_a \end{pmatrix} \ \to \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a \to \infty),$$

因为 $L_a = \ell_a + m_a$。接下来，我们将描述基本矩阵 $U_a(z)$ 和再生核 $J_a(w,\ z)$ 在 $a \to \infty$ 时的渐近行为。

定理 8.2。假设黎曼假设成立。令 A_∞ 和 Q_ξ 如上，则有

$$U_a(z)\begin{pmatrix} m_a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -zQ_\xi(z)A_\infty(z) & Q_\xi(z)A_\infty(z) \\ -zA_\infty(z) & A_\infty(z) \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

当 $\mathbb{C}$ 趋于 $a \to \infty$时局部一致收敛。这里，涉及 Q_ξ 的乘积均理解为移除 Γ各点处的奇点后所得的乘积。极限矩阵在每个$z \in \mathbb{C}$处均为秩一。此外，有

$$\frac{J_a(w,z)}{J_a(0,0)} \to \overline{A_\infty(w)}A_\infty(z) \tag{8.6}$$

在 $(w, z) \in \mathbb{C}^2$ 上局部一致收敛。

证明。将 $F(z)$ 写成 $= \xi(1/2 - iz)$。由于 $Q_\xi = -F'/F$，其在 $\gamma \in \Gamma$ 各点处的极点均为一阶极点，且留数为 $-m_\gamma$。A_∞ 的零点恰好是 Γ中的各点，并且都是单零点。因此，$Q_\xi A_\infty$ 可延拓为整函数，且满足

$$(Q_\xi A_\infty)(\gamma) = -m_\gamma A'_\infty(\gamma) \neq 0 \qquad (\gamma \in \Gamma). \tag{8.7}$$

我们首先证明

$$U_{a,12}(z) \to Q_\xi(z)A_\infty(z) \tag{8.8}$$

关于 $\mathbb{C}$ 局部一致地成立。将 (8.4) 乘以 $zA_a(z)$，并利用 (8.2) 中的乘积，我们得到

$$U_{a,12}(z) = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_{a,n}^2 J_a(\gamma_{a,n},\gamma_{a,n})} \prod_{k\neq n}\left(1 - \frac{z^2}{\gamma_{a,k}^2}\right).$$

对于 $|z| \le r\ (r > 0)$，根据 (8.1)，每个乘积均被 $\prod_{k\ge1}(1 + r^2/\gamma_k^2)$ 所界定。因此 (7.1) 给出了该级数的局部一致绝对收敛性，这在 A_a 的零点处同样成立。此外，命题 8.1 给出了界

$$|U_{a,12}(z)| \le r\ell_\infty \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r^2}{\gamma_k^2}\right) \qquad (|z| \le r),$$

关于 $a > 0$一致地成立。在 $\mathbb{C}_+$ 上，根据 (8.2) 以及在命题 8.1 的证明中建立的 Weyl 函数的收敛性，有 $U_{a,\ 12} = q_a A_a \to Q_\xi A_\infty$。局部一致有界性、蒙泰尔定理以及恒等定理共同推出 (8.8) 在整个复平面上成立。

由于 U_a 的第二行为 $(-B_a,\ A_a)$，矩阵方程 (6.4) 及初始条件 $U_0 = I_2$ 给出

$$B_a(z) = z\int_0^a A_b(z)\gamma(b)\,db, \qquad U_{a,11}(z) = 1 - z\int_0^a U_{b,12}(z)\gamma(b)\,db.$$

我们除以 $m_a = \int_0^a \gamma(b)\,db$ 并使用加权平均。对于 $V_b = A_b$ 或 $V_b = U_{b,\ 12}$，令 V_∞ 分别表示其在（8.2）或（8.8）中的极限。在紧集 $K \subset \mathbb{C}$上，根据 H 的局部可积性以及关于 U_b的积分方程，$|V_b(z) - V_\infty(z)|\gamma(b)$在固定初始区间 $[0, b_0]$ 上的积分关于 $z \in K$ 一致有界。由于 $m_a \to \infty$，该区间对加权平均的贡献趋于零。剩余部分可由 $\sup_{b\ge b_0,\ z\in K}|V_b(z) - V_\infty(z)|$界定，并且当 $b_0 \to \infty$时趋于零。因此，

$$\frac{B_a(z)}{m_a} \to zA_\infty(z), \qquad \frac{U_{a,11}(z)}{m_a} \to -zQ_\xi(z)A_\infty(z)$$

在 $\mathbb{C}$ 中局部一致地成立。结合 (8.2) 和 (8.8)，这些极限证明了 (8.5)。其右端是列 ${}^t(Q_\xi A_\infty, A_\infty)$ 与行 $(-z,1)$ 的乘积。根据 (8.7)，该列的两个元素没有公共零点。因此，在每一点处秩均为一。

最后，将 A_a 和 B_a/m_a 的极限代入 (5.3)，即可得到 $z \neq \bar{w}$ 的 (8.6)。为纳入对角线 $z = \bar{w}$，令 $v = \bar{w}$ 和 $C_a = B_a/m_a$。实整函数 A_a, C_a 满足

$$\frac{J_a(w,z)}{m_a} = A_a(v)\frac{C_a(z) - C_a(v)}{z - v} - C_a(v)\frac{A_a(z) - A_a(v)}{z - v}.$$

对于任意整函数 G，商空间 $(G(z) - G(v))/(z - v)$ 可写成 $\int_0^1 G'(v + s(z - v))\, ds$，包括 $z = v$ 的情形（由连续性可得）。函数的局部一致收敛意味着其导数也局部一致收敛。因此，最后一个公式给出了对紧集上的点对 $(w,\ z)$ 的一致收敛，其极限为 $A_\infty(w)A_\infty(z)$，如所述。□

由 (8.5)，对于每个固定的 $z \neq 0$，当 $a \to \infty$ 时，$U_a(z)$ 的第一列的范数趋于无穷远。此外，对于固定的 $z \notin \Gamma$，(8.6) 给出 $J_a(z,\ z) \sim m_a|A_\infty(z)|^2 \to \infty$；而根据命题 7.1，对于每个 $\gamma \in \Gamma$，$J_a(\gamma,\ \gamma)$ 保持有界。最后，对于来自命题 5.2 的生成元 $\mathcal{E}_a = \sqrt{\pi}(A_a - iB_a)$，我们得到

$$\frac{\mathcal{E}_a(z)}{m_a} \to -i\sqrt{\pi}\, z A_\infty(z)$$

在 $\mathbb{C}$中局部一致地。

致谢。本研究得到日本学术振兴会科研费 JP23K03050 号资助。

References

[1] L. de Branges, 《整函数希尔伯特空间》, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ*, 1968。[2] M. G. Krein、H. Langer, 《厄米正定函数的解析延拓及相关问题》, *Integral Equations Operator Theory* **78** (2014), 第1期, 1–69。[3] H. L. Montgomery、R. C. Vaughan, 《乘法数论：第一卷，经典理论》, 剑桥高等数学研究丛书, **97**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 2007。[4] M. Suzuki, 《模型空间中函数范数形式的李系数》, *J. Number Theory* **252** (2023), 177–194。[5] M. Suzuki, 《与黎曼ζ函数对应的螺旋函数的若干方面》, *J. Lond.* ( ), 第 – 期。[6] *Math. Soc.* **108** 2023 4, 1448 1487
M. Suzuki, 《由模为一的函数生成的再生核希尔伯特空间链》, *Ann.* ( ), 第 – 期。[7] *Inst. Fourier* **75** 2025 4, 1463 1508
M. Suzuki, 《通过螺旋函数研究韦伊二次型》, https://arxiv.org/abs/2606.09096。[8] M. Suzuki, 《与韦伊二次型相关的谱收敛》, https://arxiv.org/abs/2610.32704。[9] A. Weil, 《关于素数理论的“显式公式”》, *Comm. Sém. Math. Univ.*, 专题卷（ ）, – *Lund* 1952 252 265
。[10] H. Winkler, 《典范系统的逆谱问题》, *Integral Equations Operator Theory* **22** 1995 360 374 ( ), – 。[11] H. Winkler, 《二维哈密顿系统》, 载于 *Operator Theory*, D. Alpay（编）, 施普林格, 巴塞尔, 2015, 第525–547页。[12] H. Yoshida, 《关于与ζ函数相关的厄米形式》, *Zeta functions in geometry (Tokyo, 1990)* 281 325, 21 *Kinokuniya Tokyo* 1992 , – 纯数学进阶研究丛书, , , , 。

东京科学大学理学院数学系，日本东京都目黑区大冈山2-12-1，邮编 152-8551 电子邮箱：msuzuki@math.sci.isct.ac.jp