arXiv:2611.33006v1 [math.FA] 24 Nov 2026

Hardy 空间上的有界 Nörlund 算子

GEORGIOS STYLOGIANNIS

摘要。我们刻画了能够诱导 Hardy 空间上有界算子的非负诺尔伦德矩阵。对于 $a_n \geq 0$ 和 $a_0 > 0$，在一个 H^p 上的有界性，等价于在每个此类空间上的有界性，也等价于一个涉及部分和 $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ 之比的二次检验条件。检验常数与H^2 算子范数的平方可比，比较常数为绝对常数。权重不需要满足倍增条件或单调性假设。证明结合了精确的向量值Hankel表示、平方函数估计，以及一个几何论证，该论证表明倍增时间端点具有有限疏散阶。等价地，有界性可由 $G_a(z) = \sum_n (a_n/A_n) z^n$ 的系数满足截断二次块条件来刻画。在有界族中， G_a属于 Bloch空间当且仅当它属于 BMOA，而这恰好发生在 (A_n) 满足倍增条件时。

1. 引言

Cesàro 算子对解析函数的泰勒系数取平均。Nörlund算子允许在这种平均中使用任意非负权。哪些权重会使其在 H^p 上成为有界算子？答案如何取决于 p？我们证明，在整个 $1 < p < \infty$ 范围内，同一族多项式测试可以同时回答这两个问题。

设 $a = (a_n)_{n\geq 0}$，其中 $a_n \geq 0$ 且 $a_0 > 0$，并令 $A_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$。Nörlund矩阵作用于序列 $s = (s_k)_{k\geq 0}$ 的方式为

$$(N_a s)_n = \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} s_k. \tag{1}$$

取 $s_k = f(k)$ 可得解析诺尔伦德算子

$$\widehat{N_a f}(n) = \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \widehat{f}(k). \tag{2}$$

每一行都是一个凸平均。因此，对于解析 f 以及任意 $0 < r < 1$，Cauchy估计给出 $|N_a f(n)| \leq r^{-n} \max_{|z|=r} |f(z)|$，所以所得级数在 $\mathbb{D}$ 上定义了一个解析函数。在 $H^p = H^p(\mathbb{D})$ 上，我们使用范数

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p \, dm(\zeta) \right)^{1/p}, \qquad 1 < p < \infty,$$

其中 dm 是归一化弧长。对于 $a_n = 1$，(1) 取 s_0、……、 s_n的算术平均，和 (2) 给出了经典的 Cesàro 算子

$$Cf(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{1-\zeta} \, d\zeta, \qquad Cf(0) = f(0).$$

它在 H^p 上对 $1 < p < \infty$ 有界，其 Hardy空间理论与复合半群 [24] 有关。更一般地，$a_n = \binom{n+\alpha-1}{n}$ 在 $\alpha > 0$ 条件下给出了 α 阶的 Cesàro方法。

在经典求和理论中， s_k 是级数的第 k个部分和。这些方法可追溯至 Voronoi 和 Nörlund [19]。Hardy [15, 第四章]给出了经典论述，而 Hille

日期：2026年11月14日。2020 数学学科分类。 主要分类号 47B38、40G05；次要分类号 30H10、30H35、42A45、47B35。
关键词和短语。Nörlund算子，Hardy空间，Hankel 算子，检验条件，Littlewood–Paley理论，BMOA。

和 Tamarkin [17] 以及 Sahney [23] 研究傅里叶级数的可和性。在这一背景下，首先要考虑的是正则性，或对收敛序列的极限保持。对于非负权，正则性等价于 $a_n/A_n \to 0$ [15, §4.2, 定理 16]。有界性则是另一项要求。权重 $a_n = e^{\sqrt{n}}$ 给出了一种正则方法，其矩阵在每个 ℓ^p 上都无界，$1 < p < \infty$ [6, 定理 2 和 3]。

Borwein 和 Cass [6] 给出了若干关于 ℓ^p 有界性的充分条件，包括

$$\sup_{n\geq 1} \frac{na_n}{A_n} < \infty. \tag{3}$$

Cass 和 Kratz [7] 针对由对数指数函数生成的权重，给出了充要条件。Borwein [5, 定理 1(i)]证明了，若 na_n/A_n 在 $[0,\infty]$中有极限 ℓ^p，则有界性等价于该极限有限。他还给出了有界的例子，其中（3）不成立。由帕塞瓦尔恒等式，取泰勒系数可将H^2 等距地对应到 ℓ^2。在此对应下，N_a 在 H^2 上的作用对应于其在 ℓ^2 上的矩阵作用，且算子范数相同。对于其他哈代指数，必须控制边界 L^p 范数。下述定理给出了一个仅依赖于(A_n)的判据，并表明它同时支配这两个问题。

1.1. 刻画。 在 $D_J(z)$ 上检验 $N_a = 1 + z + \cdots + z^{J-1}$，其中 $J \geq 1$。由于$\|D_J\|^2_{H^2} = J$，平方范数比为

$$\frac{\|N_a D_J\|^2_{H^2}}{\|D_J\|^2_{H^2}} = \frac{\|N_a D_J\|^2_{H^2}}{J}.$$

对于 $A_j = 0$，当 $j < 0$ 时，$N_a D_J$ 的泰勒系数为

$$\widehat{N_a D_J}(n) = R_J(n) := 1 - \frac{A_{n-J}}{A_n}. \tag{4}$$

对于 $n \geq J$，$R_J(n)$ 是 A_n 的质量中由最后 J 个权重贡献的部分。对于 $0 \leq n < J$，它等于 1。对这些比值取上确界得到

$$\tau(a) = \sup_{J\geq 1} \frac{\|N_a D_J\|^2_{H^2}}{J} = \sup_{J\geq 1} \left[1 + \frac{1}{J}\sum_{n\geq J} \left(1 - \frac{A_{n-J}}{A_n}\right)^2\right], \tag{5}$$

其中任一表达式都允许为无穷大。

定理 1.1。 设 $a_n \geq 0$ 且 $a_0 > 0$。以下条件等价：

(i) N_a 在 H^p 上有界，且至少对一个 $p \in (1, \infty)$ 成立；*(ii)* N_a 在 H^2 上有界；*(iii)* $\tau(a) < \infty$；*(iv)* 对每个 $p \in (1, \infty)$，N_a 在 H^p 上有界。

此外，

$$\tau(a) \leq \|N_a\|^2_{H^2\to H^2} \leq C\tau(a) \tag{6}$$

其中 C 为绝对常数。对于每个 $1 < p < \infty$，H^p 范数由 p 和 $\tau(a)$ 的某个有限函数控制；反过来，$\tau(a)$ 由 p 和 H^p 范数的某个有限函数控制。

因此，在 H^2 上的有界性决定了整个哈代尺度 $1 < p < \infty$ 上的有界性。对于一般权重，$\|N_a\|_{H^p\to H^p} \asymp_p \|N_a\|_{H^2\to H^2}$ 是否成立仍是一个未解问题。

1.2. 标量符号。 同样的检验可以从单个解析函数的系数中读出。令

$$c_n = \frac{a_n}{A_n}, \qquad G_a(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n. \tag{7}$$

这里，对于 $n \geq 1$，有 $c_0 = 1$ 和 $0 \leq c_n < 1$，因此 G_a 在 $\mathbb{D}$ 中是解析的。定义

$$\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a) = \sup_{J \geq 1} \sum_{k \geq 1} \min \left\{ 1, \sum_{j=kJ+1}^{(k+1)J} c_j \right\}^2 . \tag{8}$$

定理 5.1给出了 $\tau(a) \asymp 1 + \mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a)$，其中常数均为绝对常数。结合定理 1.1，这使得 $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a) < \infty$ 成为每个 H^p 在范围 $1 < p < \infty$内的符号判据。截断反映了 $0 \leq R_J(n) \leq 1$。对于满足倍增条件的部分和，块条件可化为熟知的BMOA 条件。

推论 1.2。 假设对于某个 $K < \infty$,

$$A_{2n+1} \leq K A_n \qquad (n \geq 0). \tag{D}$$

那么 N_a 在一个（等价地，在每个） H^p、 $1 < p < \infty$上有界，当且仅当 $G_a \in \mathrm{BMOA}$。此外，无需假设 (D)，

$$G_a \in \mathrm{BMOA} \quad \Longleftrightarrow \quad (A_n) \text{ satisfies (D) and } \tau(a) < \infty.$$

在有界族中，推论 5.4 将 G_a 属于 Bloch空间这一条件加入这些等价条件中。 N_a 在 BMOA上的有界性本身是一个独立的端点问题。

1.3. **证明策略与记号**。 在第 2 节中，阿贝尔恒等式将 $\|N_a f\|_{H^2}^2$ 表示为向量值汉克尔算子作用于 f所得向量的范数平方；当权重可求和时，还需乘以一个额外的乘子范数平方。随后，对该汉克尔算子进行再生核检验即可得到（6）。

要从 H^2 过渡到 H^p，我们需要对 (A_n)进行适配的频率分解。检验与频率几何之间的联系来自（4）。如果 $A_n \geq 2A_{n-J}$，那么 $R_J(n) \geq 1/2$。因此，在固定尺度 J下，此类指标至多有 $4J\tau(a)$个 $n \geq J$。第 3节表明，由此得到的计数条件迫使倍增时间端点具有有限疏散阶。Sjögren 和 Sjölin 的后继定理 [25, 定理1。2] 以及 de Leeuw限制定理 [8, 推论2。5] 将这一几何结构转化为周期性的 Littlewood–Paley估计。特别地，证明所需的分解可由检验得到。

第 4 节利用输入上的平方函数证明充分性，并利用 N_a 上的平方函数证明必要性。Rubio de Francia 不等式处理$p \leq 2$ 的充分性以及 $p \geq 2$的必要性。经过调整的 Littlewood–Paley估计处理剩下的两个范围。第 5 节证明符号判据，并将其与 BMOA 的 Fefferman正系数判据进行比较。

我们采用将 H^p 与其在 $L^p(\mathbb{T})$ 中的边界函数作标准对应的方式。算子 S_m 是投影到次数 0, ..., m 的 Taylor投影，而 P_I 是投影到区间 $I \subset \mathbb{Z}$ 上的 傅里叶投影。由 M. Riesz定理 [12, 第 III 章，第 §2] 节， $B_p := \sup_m \|S_m\|_{H^p \to H^p} < \infty$，其中 $1 < p < \infty$。令 $\Lambda_b f = \sum_n b_n f(n) z^n$，并令 $\varphi = \sum_n a_n z^n$。因子分解 $N_a = \Lambda_{1/A} M_\varphi$ 按系数理解，其中 $1/A = (1/A_n)_{n \geq 0}$。 $M_\varphi f$ 的每个系数都是有限和，因此该公式适用于形式级数 φ。我们用 dA 表示归一化面积测度，用 $X \lesssim_p Y$ 表示 $X \leq C_p Y$，对于其他依赖关系也采用类似记号。我们的核约定为 $k_w(z) = (1 - wz)^{-1}$，因此 $\|k_w\|_2 = (1 - |w|^2)^{-1/2}$。

2. 希尔伯特空间测试定理

定理 2.1（希尔伯特空间刻画）。 令 $a_n \geq 0$、 $a_0 > 0$。以下各项等价，并且 $\|N_a\|_{H^2 \to H^2}^2 \asymp \tau$（$a$） 其中的常数为绝对常数。

(i) N_a 在 H^2 上有界。*(ii)* $\tau(a) < \infty$。

(iii) 上确界 $\frac{1}{J} \sum_{n \geq J}$ 最小值 $\left\{ 1, \text{对数} \right.$

$\left. \frac{A_n}{A_{n-J}} \right\}^2 < \infty$。*(iv)* 上确界 $\overline{0 < r < 1} (1 - r)$

$\|N_a k_r\|_{H^2}^2 < \infty$。

证明使用了一个精确的阿贝尔恒等式以及针对向量值汉克尔算子的核检验。同一表示给出了 H^p 第4节中的平方函数。

我们用 $H^p(\mathcal{E})$ 表示希尔伯特空间值解析函数的 Hardy空间，其范数由逐点 $\mathcal{E}$ 范数的 L^p 范数得到。边界值描述与傅里叶描述一致；向量值框架参见 Blasco [2, 3] 。特别地，对于$F(z)=\sum_{i\geq 0} v_i z^i$，帕塞瓦尔恒等式给出

$$\|F\|^2_{H^2(\mathcal{E})}=\sum_{i\geq 0}\|v_i\|^2_{\mathcal{E}}.$$

因此，平方可和的 $\mathcal{E}$值系数序列与其在 $H^2(\mathcal{E})$ 中的解析函数等距对应。这里，向量值 Hankel 算子通过矩阵 $(\mathbf{h}_{i+k})_{i,\ k\geq 0}$ 作用于标量多项式，其矩阵元素为 $\mathbf{h}_j\in\mathcal{E}$ 值，并将结果映入 $H^2(\mathcal{E})$。以下所有估计均与$\mathcal{E}$的维数无关。

引理 2.2 (阿贝尔恒等式与向量值Hankel表示)。 设 $a=(a_n)_{n\geq 0}$ 是一个复数序列，并设 $A_n=\sum_{j=0}^{n} a_j$。假设 $A_0\neq 0$ 且$(|A_n|)_{n\geq 0}$ 单调不减；特别地，对每个 n，都有 $A_n\neq 0$ 。令

$$\delta_m=|A_m|^{-2}-|A_{m+1}|^{-2},\qquad b=\lim_{n\to\infty}|A_n|^{-2}\geq 0.$$

因此 $\delta_m\geq 0$。记 $c=(c_n)_{n\geq 0}$，其中 $c_n=a_n/A_n$，并先将 $\varphi(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ 视为形式幂级数。

对于标量多项式 f，令

$$y_n=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\widehat{f}(k),\qquad \widehat{N_a f}(n)=\frac{y_n}{A_n}\quad (n\geq 0).$$

形式乘积 φf 的系数为 y_n，且

$$S_m(\varphi f)(z):=\sum_{n=0}^{m} y_n z^n$$

是普通多项式。若 $b>0$，则 (A_n) 和 (a_n) 有界，因此 φ 在 $\mathbb{D}$上解析，且 φf 是实际的解析乘积。当 $b=0$时省略最后一项，我们有

$$\|N_a f\|^2_{H^2}=\sum_{m\geq 0}\delta_m\|S_m(\varphi f)\|^2_{H^2}+b\|\varphi f\|^2_{H^2}. \tag{9}$$

此恒等式中的所有范数和非负和都允许取无穷大。

如果还满足 $c\in\ell^2$，则向量

$$\mathbf{h}_j=(\sqrt{\delta_m}\,a_{m-j})_{m\geq 0}\in\ell^2,\qquad a_n=0\quad (n<0),$$

通过下式在标量多项式上定义一个向量值汉克尔算子

$$(\Gamma_{\mathbf{h}} f)(z)=\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0}\mathbf{h}_{i+k}\widehat{f}(k)\right)z^i\in H^2(\ell^2).$$

此外，

$$\|\Gamma_{\mathbf{h}} f\|^2_{H^2(\ell^2)}=\sum_{m\geq 0}\delta_m\|S_m(\varphi f)\|^2_{H^2}, \tag{10}$$

$$\sum_{j\geq 0}\|\mathbf{h}_j\|^2_{\ell^2}=\sum_{n\geq 0}|a_n|^2(|A_n|^{-2}-b)\leq\|c\|^2_{\ell^2}. \tag{11}$$

因此，阿贝尔恒等式具有如下范数分解形式

$$\|N_a f\|^2_{H^2}=\|\Gamma_{\mathbf{h}} f\|^2_{H^2(\ell^2)}+b\|\varphi f\|^2_{H^2}, \tag{12}$$

再次省略最后一项，当 $b=0$ 时。特别地，如果 $|A_n|\to\infty$，那么 $\|N_a f\|_{H^2}=\|\Gamma_{\mathbf{h}} f\|_{H^2(\ell^2)}$。

证明。对于多项式 f，$N_a f$ 的系数是有界的：事实上，当 $0 \le k \le n$ 时，$|a_{n-k}|/|A_n| \le 2$，因此 $|y_n/A_n| \le 2\sum_k |\widehat{f}(k)|$。于是，$N_a f$ 在 $\mathbb{D}$ 上是解析的，尽管其 H^2 范数可能是无穷的。

对于 $M \ge n$，裂项求和得

$$\sum_{m=n}^{M} \delta_m = |A_n|^{-2} - |A_{M+1}|^{-2}.$$

令 $M \to \infty$，得到 $|A_n|^{-2} = b + \sum_{m\ge n} \delta_m$。因此，由帕塞瓦尔恒等式可得

$$\begin{aligned} \|N_a f\|_{H^2}^2 &= \sum_{n\ge 0} \frac{|y_n|^2}{|A_n|^2} \\ &= b\sum_{n\ge 0} |y_n|^2 + \sum_{n\ge 0}\sum_{m\ge n} \delta_m |y_n|^2 \\ &= b\sum_{n\ge 0} |y_n|^2 + \sum_{m\ge 0} \delta_m \sum_{n=0}^{m} |y_n|^2. \end{aligned}$$

此处及下文中，当 $b = 0$ 时，省略涉及 b 的项。最后一个等式中的交换，是将托内利定理应用于非负双重级数 $\sum_{n\ge 0}\sum_{m\ge n} \delta_m |y_n|^2$。由于

$$\sum_{n=0}^{m} |y_n|^2 = \|S_m(\varphi f)\|_{H^2}^2, \qquad \sum_{n\ge 0} |y_n|^2 = \|\varphi f\|_{H^2}^2 \quad (b > 0),$$

这就证明了（9），包括其值为无穷大的情形。

现在假设 $c \in \ell^2$。为证明（11），将托内利定理应用于非负双重级数 $\sum_{j\ge 0}\sum_{m\ge j} \delta_m |a_{m-j}|^2$。交换求和次序，将有限内和按 $n = m - j$ 重新编号，再次交换求和次序，得到

$$\begin{aligned} \sum_{j\ge 0} \|\mathbf{h}_j\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{j\ge 0}\sum_{m\ge j} \delta_m |a_{m-j}|^2 \\ &= \sum_{m\ge 0} \delta_m \sum_{j=0}^{m} |a_{m-j}|^2 = \sum_{m\ge 0} \delta_m \sum_{n=0}^{m} |a_n|^2 \\ &= \sum_{n\ge 0} |a_n|^2 \sum_{m\ge n} \delta_m \\ &= \sum_{n\ge 0} |a_n|^2 (|A_n|^{-2} - b) \le \sum_{n\ge 0} \left|\frac{a_n}{A_n}\right|^2 = \|c\|_{\ell^2}^2 < \infty. \end{aligned}$$

因此，每个 $\mathbf{h}_j$ 都属于 ℓ^2。对于每个 k，系数序列 $(\mathbf{h}_{i+k})_{i\ge 0}$ 是 $(\mathbf{h}_j)_{j\ge 0}$ 的平方可和尾序列，因此定义了 $H^2(\ell^2)$ 中的一个函数。对于任意标量多项式 f，这些函数的有限线性组合定义了 $\Gamma_{\mathbf{h}} f$。

为验证 (10)，将 y_n 在 $n < 0$ 处扩展为零。m 第 i 个泰勒系数的 $\Gamma_{\mathbf{h}} f$ 的标量坐标是

$$\big[\widehat{\Gamma_{\mathbf{h}} f}(i)\big]_m = \sqrt{\delta_m} \sum_{k\ge 0} a_{m-i-k}\widehat{f}(k) = \sqrt{\delta_m}\, y_{m-i}.$$

I当 $m < i$ 时 t 消失。$H^2(\ell^2)$ 中的帕塞瓦尔恒等式和 Tonelli 定理现在给出 e

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{\mathbf{h}} f\|_{H^2(\ell^2)}^2 &= \sum_{i\ge 0}\sum_{m\ge i} \delta_m |y_{m-i}|^2 \\ &= \sum_{m\ge 0} \delta_m \sum_{i=0}^{m} |y_{m-i}|^2 \\ &= \sum_{m\ge 0} \delta_m \sum_{n=0}^{m} |y_n|^2 = \sum_{m\ge 0} \delta_m \|S_m(\varphi f)\|_{H^2}^2. \end{aligned}$$

结合 将其与 (9) 结合即可证明 (12)。如果 $|A_n| \to \infty$，那么 $b = 0$，从而得到最终结论。 □

注 2.3。 假设 $c \in \ell^2$ 在希尔伯特空间表述中不可省略。对于 $a_n = 2^n$，有 $\delta_m |a_m|^2 \to 3/16$，因此 $\mathbf{h}_0 \notin \ell^2$。扩展求和恒等式（9）仍然成立。

下一个引理是 Bonsall 的标量汉克尔核检验 [4] 的向量值版本。其证明使用了 BMOA 的 Littlewood–Paley 和卡尔лесон测度刻画；标量表述和希尔伯特值表述分别参见 [12,第六章, 第 3] 节以及 [3, 第 1–2] 节。我们给出证明，以说明与维数无关的约化。

引理 2.4（向量值汉克尔算子的核检验）。 设 E 是一个复希尔伯特空间，且 $(\mathbf{h}_j)_{j\geq 0}$ 是 E 中的一个序列，满足 $\sum_{j\geq 0} \|\mathbf{h}_j\|_{\mathcal{E}}^2 < \infty$。对于标量多项式$f$，定义向量值汉克尔算子如下：

$$(\Gamma_{\mathbf{h}} f)(z) = \sum_{i\geq 0} \left(\sum_{k\geq 0} \mathbf{h}_{i+k} \widehat{f}(k) \right) z^i.$$

这是一个取值于 $H^2(E)$ 的函数。对于 $w \in \mathbb{D}$，其在核 $k_w(z) = (1 - wz)^{-1}$ 上的值由按范数收敛的级数定义为

$$\Gamma_{\mathbf{h}} k_w := \sum_{k\geq 0} w^k \left(\sum_{i\geq 0} \mathbf{h}_{i+k} z^i \right) \quad \text{in } H^2(\mathcal{E}).$$

Put

$$K = \sup_{w\in\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^{1/2} \|\Gamma_{\mathbf{h}} k_w\|_{H^2(\mathcal{E})}.$$

当且仅当 $K < \infty$ 时， $\Gamma_{\mathbf{h}}$ 可延拓为从 H^2 到 $H^2(E)$ 的有界算子。在此情况下，

$$K \leq \|\Gamma_{\mathbf{h}}\|_{H^2 \to H^2(\mathcal{E})} \leq CK,$$

其中 C 是一个与 E 无关的绝对常数。
证明。 写作 $H = (\sum_{j\geq 0} \|\mathbf{h}_j\|_{\mathcal{E}}^2)^{1/2}$。对于每个 $k \geq 0$，将单项式 z^k 的像记为

$$\mathcal{C}_k(z) = \sum_{i\geq 0} \mathbf{h}_{i+k} z^i, \qquad \|\mathcal{C}_k\|_{H^2(\mathcal{E})}^2 = \sum_{i\geq 0} \|\mathbf{h}_{i+k}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq H^2.$$

^因此，对于每个标量多项式 f， $\Gamma_{\mathbf{h}} f = \sum_k f(k) \mathcal{C}_k$ 都有定义，并且

$$\sum_{k\geq 0} |w|^k \|\mathcal{C}_k\|_{H^2(\mathcal{E})} \leq \frac{H}{1 - |w|} < \infty.$$

这证明了定义 $\Gamma_{\mathbf{h}} k_w$ 的级数按范数收敛，而无需假设 $\Gamma_{\mathbf{h}}$有界。若存在有界延拓，则该级数在 k_w 上的值与其一致，因为 k_w 的泰勒多项式在 H^2 中收敛。由于 $\|k_w\|_{H^2} = (1 - |w|^2)^{-1/2}$，在归一化核上进行检验可得 $K \leq \|\Gamma_{\mathbf{h}}\|$。

泊松振荡。 假设 $K < \infty$。所有输出都属于向量$\mathbf{h}_j$的可分闭线性包，因此我们可以用该线性包替换$\mathcal{E}$。定义

$$G(z) = \sum_{j\geq 0} \mathbf{h}_j z^{j+1}.$$

于是 $G \in H^2(\mathcal{E})$， $G(0) = 0$，且 $\|G\|_{H^2(\mathcal{E})} = H$。初等恒等式

$$\frac{z^{j+1} - w^{j+1}}{z - w} = \sum_{i=0}^{j} z^i w^{j-i}$$

给出，对于 $z,\ w\in\mathbb{D}$ （在 $z=w$ 处取可去值），

$$\frac{G(z)-G(w)}{z-w}=\sum_{i\ge 0}\left(\sum_{k\ge 0}\mathbf{h}_{i+k}w^k\right)z^i.$$

右侧的函数恰好是 $\Gamma_{\mathbf{h}}k_w$。因此，帕塞瓦尔恒等式和 $|\zeta-w|=|1-\bar{w}\zeta|$ for$\zeta\in\mathbb{T}$ 得出

$$(1-|w|^2)\|\Gamma_{\mathbf{h}}k_w\|^2_{H^2(\mathcal{E})}=\int_{\mathbb{T}}\|G(\zeta)-G(w)\|^2_{\mathcal{E}}P_w(\zeta)\,dm(\zeta), \tag{13}$$

其中 $P_w(\zeta)=(1-|w|^2)/|1-\bar{w}\zeta|^2$ 是 Poisson 核。特别地，式（13）中的积分至多为 K^2。

*Carleson*嵌入。 标量 Littlewood–Paley 恒等式 [12, 第 VI 章，引理 3.1] 表述为

$$\|F\|^2_{H^2}-|F(0)|^2=\int_{\mathbb{D}}|F'(z)|^2\log\frac{1}{|z|^2}\,dA(z).$$

对于一个取值于 $\mathcal{E}$ 的函数 F，将此恒等式应用于它在正交规范基下的标量坐标 F_ℓ。托内利定理给出

$$\sum_{\ell}\int_{\mathbb{D}}|F_\ell'(z)|^2\log\frac{1}{|z|^2}\,dA(z)=\int_{\mathbb{D}}\|F'(z)\|^2_{\mathcal{E}}\log\frac{1}{|z|^2}\,dA(z).$$

Su将各标量恒等式左侧相加，同样得到$\|F\|^2_{H^2(\mathcal{E})}-\|F(0)\|^2_{\mathcal{E}}$。因此 e

$$\|F\|^2_{H^2(\mathcal{E})}-\|F(0)\|^2_{\mathcal{E}}=\int_{\mathbb{D}}\|F'(z)\|^2_{\mathcal{E}}\log\frac{1}{|z|^2}\,dA(z), \tag{14}$$

与标量情形中的常数相同。

令 $\sigma_w(z)=(w-z)/(1-\bar{w}z)$。在 σ_w 下的边界变量替换，将 (13) 中的积分转化为 $\|G\circ\sigma_w-G(w)\|^2_{H^2(\mathcal{E})}$。将 (14) 应用于 $G\circ\sigma_w$，然后利用 $\sigma_w^{-1}=\sigma_w$进行变量替换。导数因子与面积Jacobian相消，从而得到

$$J(w):=\int_{\mathbb{D}}\|G'(z)\|^2_{\mathcal{E}}\log\frac{1}{|\sigma_w(z)|^2}\,dA(z)\le K^2. \tag{15}$$

定义正标量测度

$$d\nu(z)=\|G'(z)\|^2_{\mathcal{E}}L(z)\,dA(z),\qquad L(z)=\log\frac{1}{|z|^2}.$$

式 ($w=0$ 中的情形给出 (15) $\nu(\mathbb{D})\le K^2$。我们断言， ν 是一个Carleson测度，其常数至多为 CK^2。对于一段弧 $I\subset\mathbb{T}$，令 $|I|=m(I)$ 并定义

$$S(I)=\{r\zeta:\zeta\in I,\ 1-|I|\le r<1\}.$$

首先假设 $0<|I|\le 1/2$，并选取 $w=(1-|I|)\zeta_I$，其中 ζ_I 是 I的中点。对于 $z\in S(I)$，由初等几何可得

$$|1-\bar{w}z|\le C|I|,\qquad 1-|w|^2\ge|I|.$$

利用 $\log(1/t)\ge 1-t$ for $0<t\le 1$ 以及自同构恒等式，我们得到

$$\log\frac{1}{|\sigma_w(z)|^2}\ge 1-|\sigma_w(z)|^2=\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{w}z|^2}\ge c\,\frac{1-|z|^2}{|I|}.$$

在 $S(I)$ 上，我们有 $|z|\ge 1/2$，因此 $L(z)\asymp 1-|z|^2$。对 $S(I)$ 上述不等式进行积分，并利用 (15) 得到

$$\nu(S(I))\le C|I|J(w)\le CK^2|I|.$$

对于 $|I|>1/2$，由 $\nu(\mathbb{D})\le K^2$ 可得相同的界。这就证明了该结论。

标量 Carleson 嵌入定理 [9, 定理 9.3] 现在可以推出

$$\int_{\mathbb{D}}|q(z)|^2\,d\nu(z)\le CK^2\|q\|^2_{H^2}\qquad(q\in H^2). \tag{16}$$

其希尔伯特值版本可直接通过将此标量估计应用于$Y=\sum_\ell Y_\ell e_\ell$的各个坐标得出：

$$\int_{\mathbb{D}} \|Y(z)\|_{\mathcal{E}}^2\,d\nu(z)=\sum_\ell \int_{\mathbb{D}} |Y_\ell(z)|^2\,d\nu(z)\le CK^2\sum_\ell \|Y_\ell\|_{H^2}^2=CK^2\|Y\|_{H^2(\mathcal{E})}^2.$$

这里，托内利定理保证了等式成立，且常数与坐标的数量无关。汉克尔配对。取一个标量多项式 $f(z)=\sum_k x_k z^k$ 以及一个$\mathcal{E}$值多项式$Y(z)=\sum_i \mathbf{y}_i z^i$，并令

$$q(z)=\sum_k \overline{x_k} z^k,\qquad \Phi(z)=zq(z)Y(z).$$

因此，x_k 和$\mathbf{y}_i$ 分别是函数 f 和 Y的泰勒系数，且 $\|q\|_{H^2}=\|f\|_{H^2}$。约定内积对第一个变量线性。Φ 中 z^{j+1} 的系数为$\sum_{i+k=j} x_k\mathbf{y}_i$，所以

$$\langle \Gamma_{\mathbf{h}} f, Y\rangle_{H^2(\mathcal{E})}=\sum_{i,k} x_k\langle \mathbf{h}_{i+k},\mathbf{y}_i\rangle_{\mathcal{E}}=\langle G,\Phi\rangle_{H^2(\mathcal{E})}.$$

将（14）极化，并利用 $\Phi(0)=0$，得到

$$\langle G,\Phi\rangle_{H^2(\mathcal{E})}=\int_{\mathbb{D}}\langle G'(z),\Phi'(z)\rangle_{\mathcal{E}} L(z)\,dA(z).$$

由于 $\Phi'=(zq)'Y+zqY'$，分别对这两项应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned}|\langle \Gamma_{\mathbf{h}} f,Y\rangle| &\le \left(\int_{\mathbb{D}}\|Y\|_{\mathcal{E}}^2\,d\nu\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{D}}|(zq)'|^2 L\,dA\right)^{1/2}\\ &\quad+\left(\int_{\mathbb{D}}|zq|^2\,d\nu\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{D}}\|Y'\|_{\mathcal{E}}^2 L\,dA\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

标量和希尔伯特值Carleson嵌入控制每个乘积中的第一因子。标量Littlewood–Paley恒等式和（14）控制第二因子：

$$\int_{\mathbb{D}}|(zq)'|^2 L\,dA=\|zq\|_{H^2}^2=\|q\|_{H^2}^2,\qquad \int_{\mathbb{D}}\|Y'\|_{\mathcal{E}}^2 L\,dA\le\|Y\|_{H^2(\mathcal{E})}^2.$$

因此，

$$|\langle \Gamma_{\mathbf{h}} f,Y\rangle|\le CK\|q\|_{H^2}\|Y\|_{H^2(\mathcal{E})}=CK\|f\|_{H^2}\|Y\|_{H^2(\mathcal{E})}.$$

对$\mathcal{E}$值多项式 Y 取上确界，其中 $H^2(\mathcal{E})$ 的范数至多为一，得到$\|\Gamma_{\mathbf{h}} f\|_{H^2(\mathcal{E})}\le CK\|f\|_{H^2}$。标量多项式的稠密性随后给出从 H^2 到 $H^2(\mathcal{E})$ 的唯一有界延拓。□

定理 *2.1* 的证明。在 D_J 上检验，由于 $\|D_J\|_{H^2}^2=J$，可得 (i)⇒(ii)，其中 $\tau(a)\le\|N_a\|_{H^2\to H^2}^2$。对于 (ii)⇔ (iii)，使用

$$(1-e^{-1})\min(1,t)\le 1-e^{-t}\le\min(1,t),\qquad t=\log(A_n/A_{n-J}).$$

记

$$\tau'=\sup_{0<r<1}(1-r)\|N_a k_r\|_{H^2}^2.$$

我们证明定量比较

$$\tau'\le\tau(a)\le e^2\tau',$$

这给出 (ii)⇔(iv)。

首先假设 $\tau(a)<\infty$，并固定 $0<r<1$。D_J 中 z^n 的系数在 $J\ge n+1$ 时为 1，否则为 0。由于 $(1-r)\sum_{J\ge n+1} r^{J-1}=r^n$，我们得到展开式

$$k_r(z)=\frac{1}{1-rz}=(1-r)\sum_{J\ge1} r^{J-1}D_J(z).$$

权重 $(1-r)\,r^{J-1}$ 之和为一。由于（2）中的每个输出系数只使用有限个输入系数，$N_a k_r(n)$ 是 $N_a D_J(n)$ 的相同加权平均。应用詹森不等式

将平方模的詹森不等式应用于该平均值，并对 n求和。根据Tonelli 定理交换关于n 和 J 的求和，得到

$$\|N_a k_r\|_{H^2}^2 \le (1-r)\sum_{J\ge 1} r^{J-1}\|N_a D_J\|_{H^2}^2$$

$$\le \tau(a)(1-r)\sum_{J\ge 1} J r^{J-1} = \frac{\tau(a)}{1-r}.$$

对 r 取上确界可得 $\tau' \le \tau(a)$。

反过来，假设 $\tau\prime < \infty$。固定 $J \ge 2$ 并令 $r_J = 1 - 1/J$。对于 $0 \le n < J$，

$$r_J^n \ge r_J^{J-1} = \left(1 + \frac{1}{J-1}\right)^{-(J-1)} \ge e^{-1},$$

其中最后一个不等式由 $\log(1+t) \le t$ 得出。因此，D_J 的每个泰勒系数都不超过 k_{r_J} 中对应系数的 e 倍。N_a 的正性保持这一逐系数不等式，因此

$$\frac{\|N_a D_J\|_{H^2}^2}{J} \le \frac{e^2}{J}\|N_a k_{r_J}\|_{H^2}^2 = e^2(1-r_J)\|N_a k_{r_J}\|_{H^2}^2 \le e^2\tau'.$$

对于 $J = 1$，任意 $0 < r < 1$ 下，$D_1 = 1$ 的系数都被 k_r 的系数所界定。正性再次给出 $\|N_a D_1\|_{H^2}^2 \le \tau'/(1-r)$。令 $r \downarrow 0$，得到 $\|N_a D_1\|_{H^2}^2 \le \tau'$，进而有 $\tau(a) \le e^2\tau\prime$。

剩下需要证明由 (iv) 可推出有界性。由于 $N_a D_1(n) = c_n$，对 $J = 1$ 的估计也表明 $c = (c_n)_{n\ge 0} \in \ell^2$。对于任意 $w \in \mathbb{D}$ 和任意 $n \ge 0$，正性给出

$$|\widehat{N_a k_w}(n)| \le \widehat{N_a k_{|w|}}(n).$$

因此，

$$\sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|^2)\|N_a k_w\|_{H^2}^2 \le 2\tau'.$$

引理 2.2中的系数计算同样适用于 k_w：每个卷积系数都是有限和，随后由托内利定理得到范数恒等式。因此

$$\|\Gamma_{\mathbf{h}} k_w\|_{H^2(\ell^2)} \le \|N_a k_w\|_{H^2}.$$

引理 2.4，其中 $\mathcal{E} = \ell^2$，于是给出

$$\|\Gamma_{\mathbf{h}}\|_{H^2\to H^2(\ell^2)}^2 \le 2C^2\tau'.$$

现在使用范数分解（12）。若 $A_n \to \infty$，则 $b = 0$，并且对于任意标量多项式 f，

$$\|N_a f\|_{H^2}^2 = \|\Gamma_{\mathbf{h}} f\|_{H^2(\ell^2)}^2 \le 2C^2\tau'\|f\|_{H^2}^2.$$

若 $A_n \to A_\infty < \infty$，则权重的非负性给出 $\varphi \in H^\infty$ 和 $\|\varphi\|_\infty = A_\infty$。事实上，$|\varphi(z)| \le \sum_n a_n = A_\infty$，而当 $r \uparrow 1$ 时，$\varphi(r) \uparrow A_\infty$。乘法算子

$$(M_{\varphi/A_\infty} f)(z) = \frac{\varphi(z)}{A_\infty} f(z)$$

因此是 H^2上的压缩算子。由于 $b = A_\infty^{-2}$，（12）变为

$$\|N_a f\|_{H^2}^2 = \|\Gamma_{\mathbf{h}} f\|_{H^2(\ell^2)}^2 + \|M_{\varphi/A_\infty} f\|_{H^2}^2 \le (2C^2\tau' + 1)\|f\|_{H^2}^2.$$

无论哪种情况，多项式的稠密性都保证了 N_a 在 H^2 上是有界算子。由于 $\tau\prime \le \tau(a)$ 和 $\tau(a) \ge 1$，这些估计也证明了其范数所需的绝对上界。□

注 2.5（与离散魏斯猜想的关系）。核检验还有一种容许性解释。加权移位 $V_a e_n = (A_n/A_{n+1})e_{n+1}$ 是一个压缩算子，并且 $N_a e_k = V_a^k c$，其中当检验有限时，$c = (a_n/A_n)_{n\ge 0} \in \ell^2$。因此，$N_a$ 的有界性等价于

$$\sum_{k\ge 0} |\langle V_a^{*k} y, c\rangle|^2 \lesssim \|y\|_2^2.$$

此外 $N_a k_w = (I - wV_a)^{-1}c$。因此，归一化核界与有界性之间的等价性，是带有标量输出的压缩算子所对应的离散魏斯猜想的一个实例；参见 Harper [16, 定理 4。4]。正性将检验归结为实数 w。前面的证明还给出了下文所使用的显式向量值Hankel表示。

3. 倍增时间划分的几何

在本节中，始终假设 $A_n \to \infty$。定义倍增时刻及其对应的频率块如下：

$$n_0 = 0, \qquad n_{j+1} = \min\{n : A_n \geq 2A_{n_j}\}, \qquad W_j = [n_j, n_{j+1}) \cap \mathbb{Z}.$$

每个块都是有限的，但其长度可能任意大。对于 $1 < q < \infty$，下面所需的性质是

$$\left\| \left(\sum_j |P_{W_j} g|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq L \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \tag{LP$_q$}$$

对每个三角多项式 g 都成立。我们通过利用 N_a 有界性的一个必要计数条件，来控制端点 $\{n_j\}$ 的稀疏阶，从而导出此不等式。

3.1. **一个必要的计数条件**。回顾 R_J (4) 中的内容，并令

$$\kappa_0(a) = \sup_{J \geq 1} \frac{1}{J} \#\{n \geq J : A_n \geq 2A_{n-J}\}. \tag{17}$$

命题 3.1. 有 $\kappa_0(a) \leq 4\tau(a)$。若对某个 $1 < p \leq 2$，N_a 在 H^p 上有界，则

$$\sup_{J \geq 1} \frac{1}{J} \sum_{n \geq J} R_J(n)^{p'} \leq C_p \|N_a\|^{p'}_{H^p \to H^p}, \qquad \kappa_0(a) \leq C'_p \|N_a\|^{p'}_{H^p \to H^p},$$

其中 $p' = p/(p-1)$。

证明。在 (17) 所计数的集合上，$R_J(n) \geq 1/2$；这就证明了第一个断言。对于第二个断言，令 $F = N_a D_J$。标准的狄利克雷核估计 $\|D_J\|_p \asymp_p J^{1/p'}$和豪斯多夫–杨不等式（见 [13,第 3]章）给出

$$\sum_{n \geq 0} |\widehat{F}(n)|^{p'} \leq \|F\|_p^{p'} \leq C_p \|N_a\|^{p'}_{H^p} J.$$

应用 (4)，并再次在所计数的集合上使用 $R_J \geq 1/2$。 □

3.2. **聚类与有限疏散阶**。令 $\mathcal{W} = \{W_j\}$ 为 $\mathbb{N}_0$ 的一个划分，该划分由连续区间组成，其左端点为 $Z = \{n_j\}$，长度为 ℓ_j。最后一个块的长度可以是无限的。对于一个整数 $J \geq 1$，若 $\ell_j \leq J$，则一个块是 J-短的 。一个 J-连通分量 是极大连续段中的连续 J-短块之并。我们考虑性质（P$_M$）

在每个 整数尺度 $J \geq 1$至多有 M J 个连通分量，每个长度至多为 MJ .

引理 3.2（聚类）。如果 $\kappa_0(a) < \infty$，则倍增时间划分满足 (P$_M$)，其中$M = \lceil 2\kappa_0(a) + 2 \rceil$。

证明。固定 $J \geq 1$。如果 W_i 是 J-短的且 $n_i \geq J$，那么每个满足$n \geq 2J$、 $n \geq n_{i+1}$和 $n - 2J \leq n_i$的整数 $n \in [n_i + J, n_i + 2J)$。因此

$$A_n \geq A_{n_{i+1}} \geq 2A_{n_i} \geq 2A_{n-2J}.$$

由 (17)，这些区间的并至多包含 $2J\kappa_0(a)$ 个整数。

每个平移块 $W_i + J$都包含于其对应的区间 $[n_i + J, n_i + 2J)$ 中。这些平移块两两不相交，因此从 $n_i \geq J$开始的 J-短块的总长度至多为 $2J\kappa_0(a)$。

从每个至少包含一个块的 J-连通分量中各选取一个块。任意两个选出的块之间都隔着一个长度大于 J 的块。因此，它们的起点相差大于 J，

所以它们的区间 $[n_i + J, n_i + 2J)$ 两两不相交，且各自贡献 J 个整数。这就将这些连通分量的数量限制在 $2\kappa_0(a)$ 以内。

在 J 之前开始的 J-短块都位于 $[0, 2J)$ 中，并且至多属于一个连通分量，因为不同连通分量中的起点相距超过 J。因此，至多有 $2\kappa_0(a)$ 个 $+1$ 连通分量，每个连通分量的长度至多为 $(2\kappa_0(a) + 2)J$。□

命题 3.3 (有限疏散阶)。 设 $M \geq 1$ 为一个整数。若 W 满足 (P_M)，则存在集合 $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_M = Z$，其中 E_0 为单点，使得对于 $1 \leq i \leq M$

$$|x - y| \geq \frac{1}{M} \operatorname{dist}(x, E_{i-1}) \qquad \textit{for all } x, y \in E_i,\ x \neq y. \tag{18}$$

按照 *Sjögren* 和 *Sjölin* 的术语， [25], 每个 E_i 都是 E_{i-1} 的后继（常数为$1/2M$），且 Z是一个阶数至多为 M的疏散集。

证明。 若 Z 是单点集，则对每个 i取 $E_i = Z$。否则，在各连通分量合并时，为端点指定父节点。端点的所有严格祖先都将在该端点首次属于非平凡连通分量的尺度上计数。

对于 $x \in Z$，设

$$s(x) = \operatorname{dist}(x, Z \setminus \{x\}).$$

这是一个正整数。按照 $(s(x)\ x)$ 的字典序排列 Z；这是一个良序，记作 $\prec$，并将其最小元记为 x_*。

对于一个整数 $J \geq 1$，若相邻端点之间的块长度不超过 J，就将它们连接起来。令 $C_J(x)$ 由沿这些边从 x 可到达的所有端点组成，并包括 x 本身。将其代表元定义为

$$r_J(x) = \min\nolimits_{\prec} C_J(x).$$

每个非平凡的 $C_J(x)$ 都是 $\mathcal{W}$ 的一个 J-连通分量的端点集，其直径等于该 J-连通分量的长度。由 (P_M) 可知，在每个尺度上，非平凡端点分量至多有 M 个，并且

$$\operatorname{diam} C_J(x) \leq MJ.$$

对于 $J < s(x)$，连通分量 $C_J(x)$ 是单点集；对于 $J \geq s(x)$，它是非平凡的。

对于 $x \neq x_*$，定义其变化尺度及其父节点如下

$$d(x) = \min\{J \geq s(x) : r_J(x) \neq x\}, \qquad p(x) = r_{d(x)}(x),$$

并令 $d(x_*) = \infty$。尺度 $d(x)$ 是有限的，因为对于所有充分大的 J， x 和 x_* 都属于同一个连通分量。由于连通分量随 J 增大而扩大，一个不再是其最小元素的点不会再次成为其最小元素。因此

$$p(x) \prec x, \qquad s(p(x)) \leq s(x), \qquad d(p(x)) > d(x).$$

前两个断言由 $\prec$ 的定义直接得到。对于第三个断言，在尺度 $d(x)$ 下， $p(x)$ 仍是其连通分量的代表元。沿父链接追踪会得到一个严格递减的 $\prec$ 链，该链必然在 x_* 处终止。令 $h(x)$ 表示其长度，则 $h(x_*) = 0$ 且 $h(p(x)) = h\,x - 1$。

为界定 $h(x)$，取 $J = s(x)$ 作为 $x \neq x_*$。由于 s 沿父链接非递增，而 d 沿父链接严格递增，每个 x 的严格祖先 v 都满足

$$s(v) \leq J = s(x) \leq d(x) < d(v).$$

第一个不等式表明 v 在尺度 J 下属于一个非平凡连通分量。最后一个不等式确保 v 仍代表该连通分量。因此，不同的祖先代表同一尺度下不同的非平凡连通分量。这样的连通分量至多有 M 个，所以 $h(x) \leq M$。

我们还记录代表元与父节点之间的相容性：对于 $J \geq s(y)$，点 $r_J(y)$ 是 y 的祖先，也可能就是 y 本身。事实上，只要 $d(y) \leq J$，点 y 和 $p(y)$ 就属于同一个 J-连通分量。沿着父节点逐步前进，直到到达满足$d(v) > J$ 的点 v，因此始终留在该连通分量内，并最终到达其代表元。

现在令

$$E_i = \{x \in Z : h(x) \leq i\}, \qquad 0 \leq i \leq M.$$

于是 $E_0 = \{x_*\}$，这些集合递增，且 $E_M = Z$。为证明 (18)，只需考虑$x \in E_i \setminus E_{i-1}$ 和 $y \in E_i \setminus \{x\}$。由于 $p(x) \in E_{i-1}$，

$$\operatorname{dist}(x, E_{i-1}) \le |x - p(x)| \le \operatorname{diam} C_{d(x)}(x) \le M d(x).$$

我们证明 $|x - y| \ge d(x)$。否则，整数 $\rho = |x - y|$ 满足

$$\max\{s(x), s(y)\} \le \rho < d(x).$$

x 与 y 之间的所有间隙长度至多为 ρ，因此 $C_\rho(x) = C_\rho(y)$。由于 $\rho < d(x)$，它们的代表元为 x:

$$r_\rho(y) = r_\rho(x) = x.$$

相容性观察表明，x 是 y 的严格祖先，从而 $h(y) > h(x) = i$，这就导致矛盾。因此，

$$\operatorname{dist}(x, E_{i-1}) \le M d(x) \le M|x - y|,$$

这正是所需的。取较小的常数 $1/(2M)$，便得到 [25] 术语中的严格后继不等式。□

3.3. **Littlewood–Paley估计**。

定理3.4 （Littlewood–Paley性质）。 假设 $A_n \to \infty$ 且 $\kappa_0(a) < \infty$。那么倍增时间划分$\{W_j\}$对每个 $1 < q < \infty$都满足（LP$_q$），其中常数为$L = L(q, \kappa_0(a))$。

证明。 固定 $1 < q < \infty$ 并令 $M = \lceil 2\kappa_0(a) + 2 \rceil$。引理 3.2 和命题 3.3 给出一条以后继 Z 结尾的后继链，长度至多为 M，后继常数为 $1/(2M)$。链中的每个集合都是闭且零测的，因为它是整数的子集。将这条链平移$-1/2$ 后，这些性质和常数保持不变。因此 [25, 定理1。2] 给出了

$$E = Z - \tfrac{1}{2}.$$

E 的互补区间为

$$I_- = (-\infty, -\tfrac{1}{2}), \qquad I_j = (n_j - \tfrac{1}{2}, n_{j+1} - \tfrac{1}{2}) \quad (j \ge 0).$$

记 $\mathcal{I} = \{I_-, I_0, I_1, \ldots\}$，并令 S_I 表示符号为 $\mathbf{1}_I$的实线上傅里叶投影。前述Littlewood–Paley性质意味着，存在某个 $B = B(q, M) \ge 1$，使得

$$B^{-1}\|F\|_{L^q(\mathbb{R})} \le \|Q_{\mathbb{R}}F\|_{L^q(\mathbb{R})} \le B\|F\|_{L^q(\mathbb{R})}, \qquad Q_{\mathbb{R}}F := \left(\sum_{I \in \mathcal{I}} |S_I F|^2\right)^{1/2}.$$

我们首先推导投影带符号和的一个一致估计。对于有限的块指标集 $\mathcal{J}$ 以及符号 $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$，令

$$T_\epsilon F = \sum_{j \in \mathcal{J}} \epsilon_j S_{I_j} F.$$

这是有限个有界区间投影的和。由于这些区间互不相交，

$$Q_{\mathbb{R}}(T_\epsilon F) = \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} |S_{I_j} F|^2\right)^{1/2} \le Q_{\mathbb{R}}F.$$

因此，利用实线估计的两边可得

$$\|T_\epsilon F\|_{L^q(\mathbb{R})} \le B\|Q_{\mathbb{R}}(T_\epsilon F)\|_{L^q(\mathbb{R})} \le B^2\|F\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

该界与 $\mathcal{J}$ 及符号无关。

现在我们将这一估计转移到 $\mathbb{T}$。 T_ϵ 的符号为

$$m_\epsilon(\xi) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \epsilon_j \mathbf{1}_{I_j}(\xi).$$

其可能性 跳跃只发生在半整数处，因此它在每个整数处都是连续的。此外，

$$I_j \cap \mathbb{Z} = [n_j, n_{j+1}) \cap \mathbb{Z} = W_j, \qquad m_\epsilon(n) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \epsilon_j \mathbf{1}_{W_j}(n).$$

在每个跳跃点处，赋予 m_ϵ 其两个单侧极限的平均值。这样既保留了实线算子和所有整数点的取值，也使符号在 de Leeuw 的意义下具有调节性：其对称区间平均值在每一点都收敛到该点的函数值。根据 de Leeuw限制定理 [8, 推论 2.5，第 372]，同一符号在 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }L^q(\mathbb{R}_d)$上定义了一个范数相同的乘子，其中 $\mathbb{R}_d$ 是带离散拓扑的加法群 $\mathbb{R}$ ，而 $\mathbb{R}_d$ 是其紧对偶群。对于具有整数频率的三角多项式，模的 q次方的 Bohr 均值就是一个周期上的归一化平均值。因此，将符号限制在 $\mathbb{Z}$ 上可得

$$\left\| \sum_{j\in\mathcal{J}} \epsilon_j P_{W_j} g \right\|_{L^q(\mathbb{T})} \le B^2 \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$$

对于每个三角多项式 g。

最后，令这些符号为相互独立的 Rademacher 随机变量。应用 Khintchine 不等式 [13,附录 C，第 C.2]，节，再对 $\mathbb{T}$ 积分，得到

$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_{j\in\mathcal{J}} |P_{W_j} g|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^q(\mathbb{T})}^q &\lesssim_q \mathbb{E} \left\| \sum_{j\in\mathcal{J}} \epsilon_j P_{W_j} g \right\|_{L^q(\mathbb{T})}^q \\ &\le B^{2q} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^q.\end{aligned}$$

只有有限多个块与 g 的傅里叶支撑相交。选取包含这些块的 $\mathcal{J}$，即可证明 (LP^q)，其中 $L \le C_q B(q, M)^2$，仅依赖于 q 和 $\kappa_0(a)$。□

如果 $A_\infty < \infty$，则只有有限多个倍增时刻，记为 $Z = \{n_0, \ldots\ldots, n_N\}$。按照约定 $n_{N+1} = +\infty$，相同的区间公式给出最后一个块 $W_N = [n_N, \infty) \cap \mathbb{Z}$ 以及最后一个补区间 $I_N = (n_N - \frac{1}{2}, \infty)$，因此 $I_N \cap \mathbb{Z} = W_N$。定理 1.1 的证明通过正则化处理有限总质量的情形。

4. 平方函数与哈代空间刻画

除最后的正则化论证外，假设 $A_n \to \infty$。对于解析多项式f，定义平方函数

$$\mathcal{S}f := \left(\sum_{m\ge 0} \delta_m |S_m(\varphi f)|^2 \right)^{1/2}, \qquad \delta_m = \frac{1}{A_m^2} - \frac{1}{A_{m+1}^2}.$$

我们证明， N_a 在 H^2 上的有界性等价于其在 H^p 上对 $1 < p < \infty$ 的有界性。Hankel 表示将 $\mathcal{S}$ 与 H^2 有界性联系起来。充分性估计 $N_a f$ ，并用 $\mathcal{S}f$ 表示；必要性则用 $N_a f$ 估计 $\mathcal{S}f$。

记作 $p' = p/(p-1)$ ，表示 p 的 Hölder 共轭指数，因此 $1/p + 1/p' = 1$。在 $p = 2$，(9) 给出$\|\mathcal{S}f\|_2 = \|N_a f\|_2$。定理 3.4 在证明的完成部分，根据计数条件给出划分估计。

4.1. 傅里叶估计。 我们汇总以下标准傅里叶估计，并采用下文所需的形式。它们由 M. Riesz定理、Rubio de Francia 不等式和向量值 Carleson 定理推出；证明中将说明相关的化归步骤并给出参考文献。所有常数均与区间的数量和位置无关。

引理 4.1 (傅里叶估计)。 设 $1 < q < \infty$。以下所有标量函数都是定义在 $\mathbb{T}$ 上的复值函数，且 $\|\cdot\|_q$ 表示 $L^q(\mathbb{T})$ 范数。由 j 索引的族可以是有限的，也可以是

可数的。我们写作 $(h_j) \in L^q(\mathbb{T};\ell^2)$ 当

$$\|(h_j)\|_{L^q(\mathbb{T};\ell^2)} := \left\| \left(\sum_j |h_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_q < \infty.$$

对于区间 $I \subset \mathbb{Z}$，算子 P_I 是作用于 $L^q(\mathbb{T})$ 上的有界傅里叶投影，其特征为

$$\widehat{P_I h}(n) = \mathbf{1}_I(n)\widehat{h}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

以下估计成立，其中常数仅依赖于 q。

(i) 设 (I_j) 是 $\mathbb{Z}$ 中任意一族区间，并设 $(h_j) \in L^q(\mathbb{T};\ell^2)$。则

$$\left\| \left(\sum_j |P_{I_j} h_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_q \left\| \left(\sum_j |h_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_q.$$

(ii) 设 (I_j) 是 $\mathbb{Z}$ 中两两不相交的区间。若 $2 \le q < \infty$ 且 $h \in L^q(\mathbb{T})$，则 ***Rubio de Francia*** 不等式给出

$$\left\| \left(\sum_j |P_{I_j} h|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_q \|h\|_q.$$

在对偶范围 $1 < q \le 2$ 内，设 $(u_j) \in L^q(\mathbb{T};\ell^2)$，并且每个 u_j 的傅里叶系数都支撑在 I_j 中，即

$$\widehat{u_j}(n) = 0 \qquad (n \notin I_j).$$

Then

$$\left\| \sum_j u_j \right\|_q \le C_q \left\| \left(\sum_j |u_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_q.$$

对于可数族，左侧级数无条件收敛 于 $L^q(\mathbb{T})$。

(iii) 对于 $h \in L^q(\mathbb{T})$，定义单边 ***Carleson*** 极大算子如下：

$$(\mathcal{C}h)(e^{i\theta}) := \sup_{N\in\mathbb{Z}} |(P_{(-\infty,N]}h)(e^{i\theta})|.$$

对于三角多项式 h，这就是 $\sup_{N\in\mathbb{Z}} |\sum_{n\le N} \widehat{h}(n)e^{in\theta}|$；投影定义规定了它对一般 $h \in L^q(\mathbb{T})$ 的含义。对于每个 $(h_j) \in L^q(\mathbb{T};\ell^2)$，有

$$\left\| \left(\sum_j |\mathcal{C}h_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_q \left\| \left(\sum_j |h_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_q.$$

证明。 我们先考虑有限个三角多项式组成的族。

(i) 区间投影。设 P_+ 为投影到非负频率上的 Riesz 投影。标量 M. Riesz定理 [12, 第三章, §2] 通过随机化给出了其 ℓ^2值界。事实上，对于相互独立的 Rademacher符号(ϵ_j), Khintchine 不等式 [13, 附录 C，§C.2]给出

$$\begin{aligned} \|(P_+h_j)_j\|_{L^q(\mathbb{T};\ell^2)}^q &\asymp_q \mathbb{E} \left\| P_+\Big(\sum_j \epsilon_j h_j \Big) \right\|_q^q \\ &\lesssim_q \mathbb{E} \left\| \sum_j \epsilon_j h_j \right\|_q^q \asymp_q \|(h_j)_j\|_{L^q(\mathbb{T};\ell^2)}^q. \end{aligned}$$

记 $(M_k h)(e^{i\theta}) = e^{ik\theta}h(e^{i\theta})$。对于 $I=[a,b]\cap\mathbb{Z}$，有

$$P_I = M_a P_+ M_{-a} - M_{b+1}P_+M_{-(b+1)},$$

半轴投影的处理方式相同，可使用 P_+ or Id $-P_+$。由于逐坐标调制保持逐点 ℓ^2 范数不变，结合前述界与三角不等式即可证明 (i)。

(ii) 不相交区间与对偶性。分析估计是 Rubio de Francia定理的周期形式 [22, 定理1。2]；下文将回顾如何转到圆上。为得到合成估计，令 $1<q\le 2$ 并令 $q'=q/(q-1)\ge 2$。由于 $P_{I_j}u_j=u_j$，对于 $g\in L^{q'}(\mathbb{T})$，设 dm 表示归一化弧长测度，

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}}\Big(\sum_j u_j\Big)\overline{g}\,dm\right| &= \left|\sum_j\int_{\mathbb{T}} u_j\,\overline{P_{I_j}g}\,dm\right| \\ &\le \left\|\Big(\sum_j|u_j|^2\Big)^{1/2}\right\|_q \left\|\Big(\sum_j|P_{I_j}g|^2\Big)^{1/2}\right\|_{q'} \\ &\le C_{q'}\left\|\Big(\sum_j|u_j|^2\Big)^{1/2}\right\|_q \|g\|_{q'}.\end{aligned}$$

对 $\|g\|_{q'}\le 1$ 取上确界即可证明该结论。

(iii) 极大估计。取 $1<r<\min(q,\,2)$。对于实直线上的 Carleson 算子$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$,[14, 推论 1.3 和 §2] 给出

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}F_j)_j\|_{L^q(\mathbb{R};\ell^2)} &\lesssim_{q,r} \|(M_rF_j)_j\|_{L^q(\mathbb{R};\ell^2)} \\ &\lesssim_{q,r} \|(F_j)_j\|_{L^q(\mathbb{R};\ell^2)}.\end{aligned}$$

这里 $M_rF=(M(|F|^r))^{1/r}$，且 M 是 Hardy–Littlewood极大算子。第二个不等式是将 Fefferman–Stein [10], 应用于空间指数 $q/r>1$ 和序列指数$2/r>1$得到的。单侧傅里叶极大算子满足相同的界，因为半轴投影是恒等算子与调制Hilbert变换的线性组合。

为将 (ii) 和 (iii) 中的实直线情形转到圆上，使用 de Leeuw限制原理 [8, 推论 2.5]所依据的局部化论证。选取实区间，使其端点位于半整数处，并取一个傅里叶变换紧支撑的非零 Schwartz函数 ψ。当 $\varepsilon>0$足够小时，$\psi(\varepsilon t)h(e^{it})$的每个投影都等于 $\psi(\varepsilon t)(P_Ih)(e^{it})$，因为乘子在整数周围的每个频率包上都是常数。将实线估计应用于这些局部化多项式，把结果的 q 次幂乘以 ε，再令 $\varepsilon\downarrow 0$。周期平均消去公共因子 $\int_{\mathbb{R}}|\psi|^q$，从而得到常数相同的圆上估计。在 (iii) 中，先选取有限多个位于半整数处的极大截断，再使用单调收敛。

最后，利用稠密性可将估计推广到 $L^q(\mathbb{T};\ell^2)$ 中的有限族；对于合成估计，可以使用 Fejér平均，它们保持指定的傅里叶支撑。单调收敛给出可数情形下的平方函数估计。对于可数合成，将有限族估计应用于尾项：它们的 $L^q(\mathbb{T};\ell^2)$ 范数趋于零，因此该级数在$L^q(\mathbb{T})$ 中无条件收敛。□

我们还将使用 Rosenthal不等式 [18, 等式 (1) 和定理 1]的非负形式：对于相互独立的非负 X_j 和 $r>1$,

$$\mathbb{E}\left(\sum_j X_j\right)^r \le C_r\left[\left(\sum_j\mathbb{E}X_j\right)^r + \sum_j\mathbb{E}X_j^r\right]. \tag{19}$$

4.2. **平方函数与 Hankel 表示。**

定理 4.2（平方函数）。如果 N_a 在 H^2上有界，那么对于任意 $1 < p < \infty$ 和任意多项式 f，

$$\|\mathcal{S}f\|_{L^p(\mathbb{T})} \le C_p \, \|N_a\|_{H^2\to H^2} \, \|f\|_{H^p}. \tag{20}$$

定理 4.2 的证明。令 $\Gamma_{\mathbf{h}}$ 为系数为 $\mathbf{h}_j = (\delta_m^{1/2} a_{m-j})_{m\ge 0}$的向量值汉克尔算子，其中 $a_l = 0$ 对于 $l < 0$。引理 2.2 给出

$$\|\Gamma_{\mathbf{h}}\|_{H^2\to H^2(\ell^2)} = \|N_a\|_{H^2\to H^2}.$$

此外，$\sum_j \|\mathbf{h}_j\|_{\ell^2}^2 = \|N_a 1\|_{H^2}^2 < \infty$，因此 $\mathbf{h}(\zeta) = \sum_{j\ge 0} \mathbf{h}_j \zeta^j$ 属于 $H^2(\ell^2)$。

对于多项式 f，令 $\check{f}(\zeta) = f(\bar{\zeta})$ 在 $\mathbb{T}$ 上。那么 $\Gamma_{\mathbf{h}} f = P_+(\mathbf{h}\check{f})$，其第 m 个坐标为

$$\begin{aligned}(\Gamma_{\mathbf{h}} f)_m(\zeta) &= \delta_m^{1/2} \sum_{i=0}^{m} \widehat{(\varphi f)}(m-i)\zeta^i \\ &= \delta_m^{1/2} \zeta^m [S_m(\varphi f)](\bar{\zeta}).\end{aligned}$$

由于 $|\zeta^m| = 1$，这逐点确定了平方函数：

$$\|(\Gamma_{\mathbf{h}} f)(\zeta)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{m\ge 0} \delta_m |S_m(\varphi f)(\bar{\zeta})|^2 = (\mathcal{S}f(\bar{\zeta}))^2.$$

为应用 Page 定理，令 $\mathcal{K} = \mathbb{C} \oplus \ell^2$ 并定义 $\widetilde{\Gamma}(f, F) = (0, \Gamma_{\mathbf{h}} f)$ 于 $H^2(\mathcal{K})$ 上。Hankel 矩阵元素对 $i + k$ 的依赖给出 $S_{\mathcal{K}}^* \Gamma = \Gamma S_{\mathcal{K}}$，其中 $S_{\mathcal{K}}$ 表示乘以 z 的算子。Page 表示定理 [20, 定理 5，第 534] 页（另见 [21, 第 2 章，第 §2] 节）给出了一个本质有界的 $\mathcal{B}(\mathcal{K})$-值符号 Ψ，使得

$$\widetilde{\Gamma} u = P_+(\Psi \check{u}), \qquad \|\Psi\|_{L^\infty} = \|\widetilde{\Gamma}\| = \|\Gamma_{\mathbf{h}}\|,$$

其中 $\check{u}(\zeta) = u(\bar{\zeta})$。令 $\mathbf{g}(\zeta)$ 为 $\Psi(\zeta)(1,0)$ 的 ℓ^2 坐标。将表示应用于 $(f,0)$，并取其 ℓ^2 坐标，得到

$$\Gamma_{\mathbf{h}} f = P_+(\mathbf{g}\,\check{f}).$$

我们有 $\|\mathbf{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T};\ell^2)} \le \|\Psi\|_{L^\infty}$。反向的界 $\|\Gamma_{\mathbf{h}}\| \le \|\mathbf{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T};\ell^2)}$ 由上一个表示得到，因为 P_+ 在 $L^2(\mathbb{T};\ell^2)$ 上是压缩的，且反射保持 L^2 范数。取 $f = 1$ 也得到 $P_+\mathbf{g} = \Gamma_{\mathbf{h}} 1 = \mathbf{h}$。因此

$$\widehat{\mathbf{g}}(j) = \mathbf{h}_j \quad (j \ge 0), \qquad \|\mathbf{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T};\ell^2)} = \|\Gamma_{\mathbf{h}}\|.$$

系数恒等式仅规定了$\mathbf{g}$的非负傅里叶系数。Page 定理给出了负频部分，从而使整个符号有界。由于 f 仅含非正频率，$(\mathbf{g} - \mathbf{h})f$ 只含严格负频率，因此会被 P_+消去。这使我们能够利用有界符号$\mathbf{g}$ 来估计同一个 Hankel 算子。

引理给出的希尔伯特空间值 Riesz 界 4.1(i)，结合弧长测度的不变性在 $\zeta \mapsto \bar{\zeta}$下，现在可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}f\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \|\Gamma_{\mathbf{h}} f\|_{L^p(\mathbb{T};\ell^2)} = \|P_+(\mathbf{g}\check{f})\|_{L^p(\mathbb{T};\ell^2)} \\ &\le C_p \|\mathbf{g}\check{f}\|_{L^p(\mathbb{T};\ell^2)} \le C_p \|\mathbf{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T};\ell^2)} \|f\|_{H^p} \\ &= C_p \|N_a\|_{H^2\to H^2} \|f\|_{H^p}.\end{aligned}$$

□

定理 4.3 (平方函数与指数无关)。 设 $1 < p < \infty$ 并设$K_p \in [0,\infty]$ 为满足下式的最佳常数

$$\|\mathcal{S}f\|_{L^p} \le K_p \|f\|_{H^p} \qquad \textit{for every analytic polynomial } f.$$

Then

$$\|N_a\|_{H^2\to H^2} \le K_p \le C_p \,\|N_a\|_{H^2\to H^2}.$$

因此，对于某个 p，S 是从 H^p 到 L^p 的有界算子，当且仅当对于所有 p，当且仅当 $\tau(a) < \infty$。

定理 *4.3* 的证明。上界由定理 4.2给出。对于下界，假设 $K = K_p < \infty$。给定 $F \in H^p$，取解析多项式 $f_j \to F$ 属于 H^p。对每个固定的 m，由泰勒系数的收敛性可得 $S_m(\varphi f_j) \to S_m(\varphi F)$ 在 $\mathbb{T}$上一致收敛。先对 m 求和，再对 $\mathbb{T}$上的积分应用法图引理，得到

$$\|\mathcal{S}F\|_{L^p}^p \le \liminf_{j\to\infty} \|\mathcal{S}f_j\|_{L^p}^p \le K^p \|F\|_{H^p}^p.$$

因此，对于每个 $F \in H^p$，同一个平方函数公式都定义了$\mathcal{S}F \in L^p$，且具有相同的界 K。

我们使用与上文相同的向量值汉克尔算子 $\Gamma_{\mathbf{h}}$，现在按坐标定义 e 在一个 y H^2 有界性已知。对于 $F \in H^p$，其坐标为

$$\begin{aligned}(\Gamma_{\mathbf{h}}F)_m(\zeta) &= \delta_m^{1/2}\zeta^m [S_m(\varphi F)](\bar{\zeta}) \\ &= \delta_m^{1/2} \sum_{i=0}^{m} \widehat{(\varphi F)}(m-i)\zeta^i.\end{aligned}$$

因此 $\|\Gamma_{\mathbf{h}}F(\zeta)\|_{\ell^2} = \mathcal{S}F(\zeta)$。

对于仅有有限个非零坐标的 $G = (G_m)$ $G_m \in H^{p'}$，记作 $G_m^\sharp(z) = G_m(\bar{z})$。比较傅里叶系数可得

$$\begin{aligned}\sum_m \int_{\mathbb{T}} (\Gamma_{\mathbf{h}}F)_m \,\overline{G_m}\, dm &= \sum_m \delta_m^{1/2} \sum_{s=0}^{m} a_{m-s}\, \widehat{(FG_m^\sharp)}(s) \\ &=: \mathcal{L}(FG^\sharp).\end{aligned} \tag{21}$$

双 线性型因此仅取决于乘积 $FG^\sharp$ （Hankel性质），并且

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(FG^\sharp)| &\le \|\mathcal{S}F\|_p \,\|G\|_{L^{p'}(\ell^2)} \\ &\le K\|F\|_p \,\|G\|_{L^{p'}(\ell^2)}.\end{aligned} \tag{22}$$

现在令 f 和 $G = (G_m)_{m=0}^M$ 为解析多项式，其中 $\Phi = fG^\sharp \neq 0$，并在 $\mathbb{T}$上定义 $w = \|\Phi\|_{\ell^2}$。于是 $\log w \in L^1$：一个非零坐标给出一个可积下界，而 w 有界。取满足 $|F| = w^{1/p}$ （在 $\mathbb{T}$上）的外函数 F，并令 $\Psi = \Phi/F$。此处用到的外函数构造和标量因子分解事实见第 [12, II]章和第 [9, 2]章。

每个 Ψ_m 都属于 Smirnov类，且其边界值属于 $L^{p'}$，因此 Smirnov定理 [9,定理 2.11] 给出 $\Psi_m \in H^{p'}$。此外，

$$\|F\|_p^p = \|\Psi\|_{L^{p'}(\ell^2)}^{p'} = \|\Phi\|_{L^1(\ell^2)}.$$

应用（22）于 $(F, \Psi^\sharp)$ 得到

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(\Phi)| &= |\mathcal{L}(F\Psi)| \\ &\le K\|\Phi\|_{L^1(\ell^2)} \le K\|f\|_2 \,\|G\|_{L^2(\ell^2)}.\end{aligned}$$

由21，结合 $F = f$，左侧为$\sum_{m=0}^M |\langle (\Gamma_{\mathbf{h}}f)_m,\ G_m\rangle|$。由于这些坐标都是解析多项式，对 G 取上确界可得

$$\sum_{m=0}^{M} \delta_m \|S_m(\varphi f)\|_2^2 = \sum_{m=0}^{M} \|(\Gamma_{\mathbf{h}}f)_m\|_2^2 \le K^2\|f\|_2^2.$$

令 $M \to \infty$ 并应用引理2.2:

$$\|N_a f\|_2^2 = \sum_{m\geq 0} \delta_m \|S_m(\varphi f)\|_2^2 \leq K^2 \|f\|_2^2.$$

这就证明了 $\|N_a\|_{H^2\to H^2} \leq K$。 □

前面的论证就是这里所需因子分解 $H^1(\ell^2) = H^p \cdot H^{p'}(\ell^2)$ 的标量外函数证明。它逐坐标运用标量 Smirnov 理论，因此其常数不依赖于坐标的数量。

4.3. 充分性。 现在我们证明， N_a 在 H^2 上的有界性蕴含其在 H^p上的有界性。下面的块恒等式和随机切分点仅用于本小节。回忆一下， $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ，且倍增时间划分定义为

$$n_0 = 0, \qquad n_{j+1} = \min\{n : A_n \geq 2A_{n_j}\}, \qquad W_j = [n_j, n_{j+1}) \cap \mathbb{Z}.$$

引理 4.4 (块)。 设 f 为一个多项式，并记

$$\varepsilon_m = \frac{1}{A_m} - \frac{1}{A_{m+1}} \quad (m \geq 0).$$

令 $S_{-1}(\varphi f) = 0$。对于整数 $-1 \leq m' < m$，有

$$P_{(m',m]} N_a f = \sum_{k=m'+1}^{m} \varepsilon_k S_k(\varphi f) + \frac{S_m(\varphi f)}{A_{m+1}} - \frac{S_{m'}(\varphi f)}{A_{m'+1}}. \tag{23}$$

这里 $P_{(m',m]}$ 恰好保留次数为 $m'+1, \ldots, m$ 的系数。

若对于某个 $j \geq 1$， $m' \in W_{j-1}$ 且 $m \in W_j$ ，则在 $\mathbb{T}$ 上逐点有

$$|P_{(m',m]} N_a f|^2 \leq 12 \sum_{k=m'+1}^{m} \delta_k |S_k(\varphi f)|^2 + 3\frac{|S_m(\varphi f)|^2}{A_m^2} + 3\frac{|S_{m'}(\varphi f)|^2}{A_{m'}^2}. \tag{24}$$

对于初始块 $m' = -1$ 和 $m \in W_0$，相应的界为

$$|S_m(N_a f)|^2 \leq 12 \sum_{k=0}^{m} \delta_k |S_k(\varphi f)|^2 + 3\frac{|S_m(\varphi f)|^2}{A_m^2}.$$

最后，对于每个 $m \geq 0$,

$$\frac{|S_m(\varphi f)|}{A_m} \leq 2 \max_{0\leq k\leq m} |S_k(N_a f)| \qquad on\ \mathbb{T}.$$

证明。 对于 $m' < n \leq m$，通过裂项求和可得

$$\frac{1}{A_n} = \frac{1}{A_{m+1}} + \sum_{k=n}^{m} \varepsilon_k.$$

乘以 $(\varphi f)(n) z^n$ 并对 n 求和。交换有限求和的顺序可得

$$P_{(m',m]} N_a f = \frac{S_m(\varphi f) - S_{m'}(\varphi f)}{A_{m+1}} + \sum_{k=m'+1}^{m} \varepsilon_k (S_k(\varphi f) - S_{m'}(\varphi f)),$$

化简为（23）。

由于 $\varepsilon_k / A_k \leq \delta_k$，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\left| \sum_{k=m'+1}^{m} \varepsilon_k S_k(\varphi f) \right|^2 \leq \left(\sum_{k=m'+1}^{m} \varepsilon_k A_k \right) \sum_{k=m'+1}^{m} \delta_k |S_k(\varphi f)|^2.$$

现在 $\varepsilon_k A_k = 1 - A_k/A_{k+1} \leq \log(A_{k+1}/A_k)$。一个块中包含 $k, k+1$ 的项之和至多为 $\log 2$。对于两个相邻的块，至多还会有两项，每项至多为 1，因此

$$\sum_{k=m'+1}^{m} \varepsilon_k A_k \leq 2\log 2 + 2 \leq 4.$$

将 $|u+v+w|^2 \le 3(|u|^2+|v|^2+|w|^2)$ 应用于 (23)，再利用 $A_{m+1} \ge A_m$ 和 $A_{m'+1} \ge A_{m'}$，得到 (24)。对于 $m' = -1$，(23) 中最后一项为零，同样的论证可得初始块的界。

最后，通过分部求和得到显式恒等式

$$\frac{S_m(\varphi f)}{A_m} = S_m(N_a f) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_{k+1}-A_k}{A_m} S_k(N_a f).$$

求和中的非负系数总和为 $(A_m - A_0)/A_m \le 1$，这就证明了最后一个断言。□

随机切分点。固定一个多项式 f。选取一个整数 $J \ge 1$，并令 $M = n_{J+1} - 1$。对于 $0 \le j < J$，定义正质量

$$\delta(W_j) := \sum_{m \in W_j} \delta_m = A_{n_j}^{-2} - A_{n_{j+1}}^{-2} \ge \frac{3}{4} A_{n_j}^{-2}.$$

选取相互独立的随机整数 $m_j \in W_j$，其分布为

$$\mathbb{P}(m_j = m) = \frac{\delta_m}{\delta(W_j)} \qquad (m \in W_j,\ 0 \le j < J).$$

令 $m_{-1} = -1$ 和 $m_J = M$，并置

$$I_j = (m_{j-1}, m_j] \cap \mathbb{Z} \qquad (0 \le j \le J).$$

这些区间划分了 $[0, M] \cap \mathbb{Z}$，因此 $S_M(N_a f) = \sum_{j=0}^{J} P_{I_j} N_a f$。

对于 $0 \le j < J$，令 $\beta_j = |S_{m_j}(\varphi f)|/A_{m_j}$，视为定义在 $\mathbb{T}$上的逐点对象。引理 4.4 以及上述分布给出

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j} N_a f|^2 \le 12(\mathcal{S}f)^2 + 6\sum_{j=0}^{J-1} \beta_j^2 + 3\frac{|S_M(\varphi f)|^2}{A_M^2}, \\ &\mathbb{E}\,\beta_j^2 = \frac{1}{\delta(W_j)} \sum_{m \in W_j} \delta_m \frac{|S_m(\varphi f)|^2}{A_m^2} \le \frac{4}{3} \sum_{m \in W_j} \delta_m |S_m(\varphi f)|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

第二个界使用 $A_m \ge A_{n_j}$ 对 $m \in W_j$。对于$1 < p < \infty$，确定性端点由下式控制：

$$\|S_M(\varphi f)\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|S_M((S_M\varphi)f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \le B_p A_M \|f\|_{H^p},$$

其中 $B_p = $上确界$_{\nu \ge 0} \|S_\nu\|_{H^p \to H^p}$；此处 $\|S_M\varphi\|_\infty \le A_M$。

下面的两个估计说明了 $p = 2$ 两侧各自的作用。对于 $p \le 2$，无需对频率划分作任何条件限制。对于 $p > 2$，定理 3.4 将在 $\tau(a) < \infty$时给出所述假设。

定理 4.5 (H^p，$1 < p \le 2$，无倍增条件)。如果 N_a 在 H^2 上有界（等价地，$\tau(a) < \infty$），那么 N_a 对于任意 $1 < p \le 2$都在 H^p 上有界，并且 $\|N_a\|_{H^p \to H^p} \le C_p \|N_a\|_{H^2 \to H^2}$。

定理 4.5 的证明。固定 $1 < p \le 2$ 和一个多项式 f，并使用上文引入的随机切分点。投影 $P_{I_j} N_a f$ 具有不相交的傅里叶支撑，因此引理 4.1（ii）给出

$$\|S_M(N_a f)\|_p \le C_p \left\| \left(\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j} N_a f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

由于 $t \mapsto t^{p/2}$ 是凹函数，詹森不等式和（25）得到

$$\mathbb{E}\left\| \left(\sum_{j=0}^{J-1} \beta_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \leq \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{j=0}^{J-1} \mathbb{E}\, \beta_j^2 \right)^{p/2} dm \leq C_p \|\mathcal{S}f\|_p^p.$$

因此，某种切点的选择满足 $\|(\sum_{j=0}^{J-1} \beta_j^2)^{1/2}\|_p \leq C_p \|\mathcal{S}f\|_p$。对于这一选择，(25) 以及确定性端点界给出

$$\begin{aligned} \|S_M(N_a f)\|_p &\leq C_p(\|\mathcal{S}f\|_p + \|f\|_{H^p}) \\ &\leq C_p \|N_a\|_{H^2 \to H^2} \|f\|_{H^p}, \end{aligned}$$

其中最后一步使用了定理 4.2 和 $\|N_a\|_{H^2 \to H^2} \geq 1$。

该界与 J 无关。由于 $J \to \infty$， H^p 的自反性意味着这些泰勒截断存在弱收敛子序列。它们的系数将极限确定为 $N_a f$。多项式的稠密性完成证明。□

定理 4.6 (H^p， $p > 2$)。设 $2 < p < \infty$。如果 N_a 在 H^2 上有界，且划分 $\{W_j\}$ 满足 $(\mathrm{LP}^{p'})$，那么 N_a 在 H^p 上有界，其范数为 $\leq C(p, L)\, \|N_a\|_{H^2 \to H^2}$。

定理 *4.6* 的证明。固定一个多项式 f，令 $p > 2$ 并令 $q = p'$，设

$$X = \|S_M(N_a f)\|_p, \qquad Y = \|\mathcal{S}f\|_p + \|f\|_{H^p}.$$

以下所有常数均与 J 及切点无关。

固定一组切点和一个三角多项式 g，满足 $\|g\|_q = 1$。对于 $j \geq 1$， $I_j \subset W_{j-1} \cup W_j$，而 $I_0 \subset W_0$。因此

$$P_{I_0} g = P_{I_0} P_{W_0} g, \qquad P_{I_j} g = P_{I_j}(P_{W_{j-1}} g + P_{W_j} g) \quad (1 \leq j \leq J).$$

引理4.1(i) 和 (LP^q) 给出

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j} g|^2 \right)^{1/2} \right\|_q &\leq C_q \left\| \left(|P_{W_0} g|^2 + \sum_{j=1}^{J} |P_{W_{j-1}} g + P_{W_j} g|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \\ &\leq 2C_q \left\| \left(\sum_{j=0}^{J} |P_{W_j} g|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \\ &\leq 2C_q L \|g\|_q = 2C_q L. \end{aligned}$$

$P_{I_j} N_a f$的傅里叶支撑位于 I_j，因此它与 g的配对等于它与 $P_{I_j} g$的配对。在 j中使用柯西-施瓦茨不等式、结合 $1/p + 1/q = 1$应用Hölder不等式，并利用前面的估计，

我们得到

$$\begin{aligned}
\big|\langle S_M(N_a f), g\rangle\big| &= \left|\sum_{j=0}^{J}\langle P_{I_j}N_a f, P_{I_j} g\rangle\right| \\
&\le \int_{\mathbb{T}} \sum_{j=0}^{J} |P_{I_j}N_a f|\,|P_{I_j} g|\,dm \\
&\le \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j}N_a f|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j} g|^2\right)^{1/2} dm \\
&\le \left\|\left(\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j}N_a f|^2\right)^{1/2}\right\|_p \left\|\left(\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j} g|^2\right)^{1/2}\right\|_q \\
&\le 2C_q L \left\|\left(\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j}N_a f|^2\right)^{1/2}\right\|_p .
\end{aligned}$$

左侧与切点无关。对切点取平均并对 g 取上确界后，由 L^p 对偶性可得，

$$X \le 2C_q L\,\mathbb{E}\left\|\left(\sum_{j=0}^{J} |P_{I_j}N_a f|^2\right)^{1/2}\right\|_p .$$

To 估计该期望时，逐点应用 Rosenthal不等式（19），其中 $r = p/2$ ：

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{J-1}\beta_j^2\right)^r \le C_r\left[\left(\sum_{j=0}^{J-1}\mathbb{E}\,\beta_j^2\right)^r + \sum_{j=0}^{J-1}\mathbb{E}\,\beta_j^{2r}\right].$$

引理 4.4给出 $\beta_j \le 2\mathcal{C}(S_M(N_a f))$ 对每个切点均成立。因此，式（25）中的二阶矩界给出

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{J-1}\mathbb{E}\,\beta_j^p &\le \big[2\mathcal{C}(S_M(N_a f))\big]^{p-2}\sum_{j=0}^{J-1}\mathbb{E}\,\beta_j^2 \\
&\le C_p\big[\mathcal{C}(S_M(N_a f))\big]^{p-2}(\mathcal{S}f)^2.
\end{aligned}$$

Hölder不等式和标量Carleson–Hunt估计（引理4.1(iii) 及 [14, §2]）给出

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}}\sum_{j=0}^{J-1}\mathbb{E}\,\beta_j^p\,dm &\le C_p\|\mathcal{C}(S_M(N_a f))\|_p^{p-2}\|\mathcal{S}f\|_p^2 \\
&\le C_p X^{p-2}\|\mathcal{S}f\|_p^2.
\end{aligned}$$

将这些界与式（25）及确定性端点估计结合，并对期望应用詹森不等式，我们得到

$$X \le C(p,L)\big(Y + X^{1-2/p}Y^{2/p}\big).$$

Young不等式吸收了混合项：

$$C(p,L)X^{1-2/p}Y^{2/p} \le \frac{X}{2} + C'(p,L)Y.$$

因此，定理4.2 和 $\|N_a\|_{H^2\to H^2}\geq 1$ 给出

$$\begin{aligned}\|S_M(N_af)\|_p &\leq C(p,L)(\|\mathcal{S}f\|_p+\|f\|_{H^p})\\ &\leq C(p,L)\|N_a\|_{H^2\to H^2}\|f\|_{H^p}.\end{aligned}$$

该界关于 J 是一致的。自反性给出了泰勒截断的弱收敛子序列，其系数将极限确定为 N_af。由多项式在H^p中的稠密性延拓。□

4.4. **必要性**。 现在证明必要性： N_a 在 H^p 上的有界性蕴含其在H^2上的有界性。根据定理 4.3，只需证明

$$\|\mathcal{S}f\|_{L^p}\leq C\,\|N_af\|_{H^p}$$

对多项式 f 成立。当 $1<p<2$ 时，下面的估计使用 (LP$_p$)；这一假设将在证明的完成部分得到满足。

为了用 N_af 表示$\mathcal{S}f$ ，再定义一个平方函数：

$$\mathcal{Q}h:=\left(\sum_{m\geq 0}\delta_m\left|\sum_{n=0}^{m}A_n\widehat{h}(n)z^n\right|^2\right)^{1/2},\tag{26}$$

$$\mathcal{S}f=\mathcal{Q}(N_af).$$

$\widehat{\varphi f}(n)=A_n\widehat{(N_af)}(n)$ 该恒等式由 得出。因此， $\mathcal{Q}$ 仅依赖于 (A_n)。特别地，$\|\mathcal{Q}h\|_2=\|h\|_2$，因为 $\sum_{m\geq n}\delta_m=A_n^{-2}$。

定理 4.7 （值域平方函数）。 设(A_n) 为正且非递减，并满足$A_n\to\infty$ 和倍增时间划分 $\{W_j\}$。

(i) 若 $2\leq p<\infty$，则对所有 $h\in H^p$， $\|\mathcal{Q}h\|_{L^p}\leq C_p\|h\|_{H^p}$。 *(ii)* 若 $1<p<2$ 且 $\{W_j\}$ 满足(LP$_p$)，常数为 L，则 $\|\mathcal{Q}h\|_{L^p}\leq C_pL\|h\|_{H^p}$。

定理 4.7 的证明。 我们先考虑多项式和块和的有限截断。所有估计都对截断一致。在此证明中，通过如下定义对加权泰勒截面进行归一化：

$$U_mh:=\frac{1}{A_m}\sum_{n=0}^{m}A_n\widehat{h}(n)z^n,\qquad \omega_m:=\delta_mA_m^2=1-\frac{A_m^2}{A_{m+1}^2}.$$

于是 $(\mathcal{Q}h)^2=\sum_{m\geq 0}\omega_m|U_mh|^2$。

对于区间 $[\alpha,\beta]$，对 A_n 的增量求和可得

$$\sum_{n=\alpha}^{\beta}A_n\widehat{h}(n)z^n=A_\alpha P_{[\alpha,\beta]}h+\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}(A_k-A_{k-1})P_{[k,\beta]}h.\tag{27}$$

除以 A_β后，右侧是区间投影的凸组合。对于当前块及其端点，记

$$V_{j,m}:=\frac{1}{A_m}\sum_{n=n_j}^{m}A_n\widehat{h}(n)z^n\quad(m\in W_j),\qquad Y_j:=V_{j,n_{j+1}-1}.$$

因此，詹森不等式给出

$$\begin{aligned}|V_{j,m}|^2&\leq\frac{A_{n_j}}{A_m}|P_{[n_j,m]}h|^2\\ &\quad+\sum_{k=n_j+1}^{m}\frac{A_k-A_{k-1}}{A_m}|P_{[k,m]}h|^2.\end{aligned}\tag{28}$$

这些系数之和为一。取 $m=n_{j+1}-1$ 后，同一界适用于 Y_j。

对于 $m \in W_j$，分解

$$U_m h = V_{j,m} + \sum_{i<j} \frac{A_{n_{i+1}-1}}{A_m} Y_i.$$

倍增时间构造给出

$$\frac{A_{n_{i+1}-1}}{A_m} < \frac{2A_{n_i}}{A_{n_j}} \le 2^{1-(j-i)}, \qquad \sum_{m\in W_j} \omega_m \le 4A_{n_j}^2 \sum_{m\in W_j} \delta_m \le 4.$$

柯西-施瓦茨不等式给出

$$\left(\sum_{i<j} 2^{1-(j-i)} |Y_i| \right)^2 \le 2 \sum_{i<j} 2^{1-(j-i)} |Y_i|^2.$$

对 m 求和，再对 j 求和，得到通常的逐点界

$$(\mathcal{Q}h)^2 \le 2 \sum_j \sum_{m\in W_j} \omega_m |V_{j,m}|^2 + 32 \sum_i |Y_i|^2. \tag{29}$$

对于固定的块 W_j，（29）中的两个和贡献为 $2\sum_{m\in W_j} \omega_m |V_{j,\ m}|^2 + 32|Y_j|^2$。为用概率表示这些权重，以概率 $2\omega_m/40$ 选择右端点 $m \in W_j$，并将 $32/40$ 加到选择 $m = n_{j+1}-1$ 的概率上，以计入 Y_j。选择某个端点的总概率至多为 $(2\cdot 4 + 32)/40 = 1$。以剩余概率取 $K_j = \varnothing$，并令 $P_\varnothing = 0$。

给定所选端点 m，以概率 A_{n_j}/A_m 取 $K_j = [n_j, m]$，或对于 $n_j < k \le m$，以概率 $(A_k - A_{k-1})/A_m$ 取 $K_j = [k, m]$。根据（28），$|P_{K_j} h|^2$ 的这个条件平均至少为 $|V_{j,\ m}|^2$。由于 $Y_j = V_{j,\ n_{j+1}-1}$，对右端点取平均可得

$$2 \sum_{m\in W_j} \omega_m |V_{j,m}|^2 + 32|Y_j|^2 \le 40\, \mathbb{E}|P_{K_j} h|^2.$$

对 (29) 中的各块求和，得到

$$(\mathcal{Q}h)^2 \le 40\, \mathbb{E} \sum_j |P_{K_j} h|^2.$$

(i) 范围 $p \ge 2$。对任意一种选取，这些区间两两不相交。由引理 4.1(ii) 和 $L^{p/2}$ 中的闵可夫斯基不等式可得

$$\|\mathcal{Q}h\|_p^2 \le 40\, \mathbb{E} \left\| \sum_j |P_{K_j} h|^2 \right\|_{p/2} \le 40 C_p^2 \|h\|_p^2.$$

(ii) 范围 $1 < p < 2$。对每个区间 $I \subset W_j$，

$$|P_I h| \le 2\, \mathcal{C}(P_{W_j} h),$$

其中 $\mathcal{C}$ 是引理 4.1(iii) 中的极大算子。将此界应用于平均中的每个 K_j，得到

$$(\mathcal{Q}h)^2 \le 160 \sum_j |\mathcal{C}(P_{W_j} h)|^2.$$

向量值极大估计和 (LP$_p$) 给出

$$\|\mathcal{Q}h\|_p \le C_p \left\| \left(\sum_j |P_{W_j} h|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

$$\le C_p L \|h\|_p.$$

最后，F. 阿托引理消除了截断，而稠密性将两个估计推广到 $h \in H^p$。□

定理 4.8 （必要性）。设 $a_n \geq 0$。

(i) 若 N_a 在某个 H^p 上有界，则 $\tau(a) < \infty$，且 $\|N_a\|_{H^2\to H^2} \leq C_p \|N_a\|_{H^p\to H^p}$。

(ii) 若 N_a 在某个 H^p 上有界，且 $\{W_j\}$ 满足 (LP_p)，则 $\tau(a) < \infty$，且 $\|N_a\|_{H^2\to H^2} \leq C_p L \, \|N_a\|_{H^p\to H^p}$。

定理 *4.8* 的证明。对于多项式 f，恒等式 (26) 和定理 4.7 给出

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S} f\|_p &= \|\mathcal{Q}(N_a f)\|_p \\ &\leq C \|N_a f\|_{H^p} \\ &\leq C \|N_a\|_{H^p\to H^p} \|f\|_{H^p}, \end{aligned}$$

其中 $C = C_p$ 在 (i) 中，$C = C_p L$ 在 (ii) 中。由此，定理 4.3 推出

$$\|N_a\|_{H^2\to H^2} \leq K_p \leq C \|N_a\|_{H^p\to H^p},$$

尤其是 $\tau(a) < \infty$。 □

4.5. **证明的完成**。

定理 1.1 的证明。首先假设 $A_n \to \infty$。(ii)⇔(iii) 的等价性由定理 2.1 得出。若 (iii) 成立，则定理 4.5 给出 $p \leq 2$ 的有界性。对于 $p > 2$，命题 3.1 给出$\kappa_0(a) \leq 4\tau(a)$；定理 3.4 提供 $(\mathrm{LP}_{p'})$，而定理 4.6 给出 $p > 2$ 的有界性。反过来，在 H^p 上有界意味着根据定理 4.8(i)，$p \geq 2$ 满足 (iii)。对于 $p < 2$，命题 3.1 给出 $\kappa_0(a)$ 关于 p 和 $\|N_a\|_{H^p}$的界，因此定理 3.4 提供 (LP_p)，并可应用定理 4.8(ii)。此论证中的所有常数均具有定理中所述的依赖关系。

有限总质量与正则化。现在假设 $A_\infty < \infty$。那么 $\varphi \in H^\infty$ 满足 $\|\varphi\|_\infty = A_\infty$，而对递减序列 $(1/A_n)$ 应用阿贝尔求和可得

$$\|N_a\|_{H^p\to H^p} \leq B_p \frac{A_\infty}{a_0} \qquad (1 < p < \infty).$$

因此，有界性本身是自动成立的。为了得到定量界，固定 $\epsilon > 0$ 并令

$$a_n^{(\epsilon)} = a_n + \epsilon, \qquad A_n^{(\epsilon)} = A_n + \epsilon(n+1) \longrightarrow \infty.$$

因此，无穷求和情形适用于每个正则化序列。用 C 表示通常的 Cesàro 算子，逐系数恒等式为

$$\begin{aligned} N_{a^{(\epsilon)}} &= \Lambda_{m^{(\epsilon)}} N_a + \Lambda_{1-m^{(\epsilon)}} C, \\ m_n^{(\epsilon)} &= \frac{A_n}{A_n + \epsilon(n+1)}. \end{aligned}$$

这 两个乘子在 H^p 上有界，且该有界性关于 ϵ 和 a一致。事实上，$0 \leq m_n^{(\epsilon)} \leq 1$ 并且

$$(m_n^{(\epsilon)} - m_{n+1}^{(\epsilon)})_+ \leq \frac{A_n \epsilon}{(A_n + \epsilon(n+1))(A_n + \epsilon(n+2))} \leq \frac{1}{n+1}.$$

在每个二进区间上，向下增量之和都有一致的界。向上增量之和与之相差至多一，因此全变差也有一致的界。为应用实直线上的Marcinkiewicz定理，在每个 $[n, n+1]$上通过光滑单调插值将 $m^{(\epsilon)}$ 延拓为 $\mathbb{R}$ ，并使其在端点处的导数为零，同时将其在零点左侧作常值延拓。在每个端点为整数的正二进区间上，其变差恰好等于相应离散增量绝对值之和。在其他二进区间上，其变差至多为一。互补符号也满足相同的界。实直线上的Marcinkiewicz定理 [13, 定理6.2。2]以及de Leeuw限制定理 [8, 推论2。5] 给出了所需的一致 H^p 界。结合 C 在 H^p上的有界性，我们得到

$$\|N_{a^{(\epsilon)}}\|_{H^p\to H^p} \leq C_p(\|N_a\|_{H^p\to H^p} + 1). \tag{30}$$

将逐系数恒等式应用于 D_J。对于 $n \geq J$，切萨罗行和为 $J/(n+1)$，因此（4）给出

$$R_J^{(\epsilon)}(n) = m_n^{(\epsilon)} R_J(n) + (1 - m_n^{(\epsilon)}) \frac{J}{n+1}.$$

由凸性，$R_J^{(\epsilon)}(n)^2 \leq R_J(n)^2 + J^2/(n+1)^2$。由于 $J \sum_{n \geq J} (n+1)^{-2} \leq 1$，我们得到

$$\tau(a^{(\epsilon)}) \leq \tau(a) + 1.$$

无穷质量结果和 (30) 给出了 $\tau(a^{(\epsilon)})$ 关于 p 和 $\|N_a\|_{H^p \to H^p}$ 的界。当 $1 < p < 2$ 时，命题 3.1 首先利用 (30) 对 $\kappa_0(a^{(\epsilon)})$ 给出一致界，而定理3.4 则提供一个一致的 (LP$_p$) 常数。对于充分性，$\tau(a^{(\epsilon)}) \leq \tau(a) + 1$给出了 $\|N_{a^{(\epsilon)}}\|_{H^p \to H^p}$ 关于 p 和 $\tau(a)$ 的界。

对于每个 J 和 n，当 $\epsilon \downarrow 0$ 时，$R_J^{(\epsilon)}(n) \to R_J(n)$。法图引理以及对 J 取上确界，给出 $\tau(a) \leq \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \tau(a^{(\epsilon)})$。对于每个多项式 f，$N_{a^{(\epsilon)}} f$ 的泰勒系数收敛到 $N_a f$ 的对应系数 $\widehat{\ }$，并且关于 ϵ 一致地受 $\max_k |f(k)|$ 控制。因此，这些函数在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。先取半径为 $r < 1$ 的圆上的范数，再对 r 取上确界，并利用多项式稠密性，得到

$$\|N_a\|_{H^p \to H^p} \leq \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \|N_{a^{(\epsilon)}}\|_{H^p \to H^p}.$$

这两个极限估计给出了所述的 a界。 □

5. 标量符号：一般准则与 BMOA

我们完全用符号 G_a（来自（7））来表述检验条件。（8）中的截断保留了行和的饱和性 R_J（n），因此不需要倍增假设。

5.1. 一般符号准则。

对于整数 J，$k \geq 1$，记

$$b_k(J) = \sum_{j=kJ+1}^{(k+1)J} c_j$$

（8）中 G_a 在长度为 k的第 J 个块上的系数之和。

定理5.1（截断系数准则）。设 $a_n \geq 0$，$a_0 > 0$，且令$\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}$（$G_a$）由（8）定义。则

$$\tau(a) \asymp 1 + \mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a), \tag{31}$$

且比较常数为绝对比较常数。因此，对于每个 $1 < p < \infty$，

$$N_a : H^p \longrightarrow H^p \text{ is bounded} \iff \mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a) < \infty. \tag{32}$$

此外，

$$\|N_a\|_{H^2 \to H^2}^2 \asymp 1 + \mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a).$$

证明。对于 $n \geq J \geq 1$，置

$$s_J(n) = \sum_{j=n-J+1}^{n} c_j.$$

由于对于 $j \geq 1$，$1 - c_j = A_{j-1}/A_j$，我们有精确恒等式

$$R_J(n) = 1 - \frac{A_{n-J}}{A_n} = 1 - \prod_{j=n-J+1}^{n} (1 - c_j).$$

不等式 $1 - t \leq e^{-t}$ 和 $1 - \prod_j (1 - t_j) \leq \sum_j t_j$，对于 $0 \leq t_j \leq 1$，意味着

$$(1 - e^{-1}) \min\{1, s_J(n)\} \leq R_J(n) \leq \min\{1, s_J(n)\}. \tag{33}$$

因此，如果

$$T = \sup_{J\geq 1} \frac{1}{J} \sum_{n\geq J} \min\{1, s_J(n)\}^2,$$

then

$$1 + (1 - e^{-1})^2 T \leq \tau(a) \leq 1 + T.$$

接下来需要比较滑动窗口与不相交块。对于 $(k+1)J < n \leq (k+2)J$，我们有 $s_J(n) \leq b_k(J) + b_{k+1}(J)$。应用

$$\min\{1, x+y\}^2 \leq 2\min\{1,x\}^2 + 2\min\{1,y\}^2 \qquad (x, y \geq 0)$$

并对这些窗口求和，得到

$$\frac{1}{J} \sum_{n>2J} \min\{1, s_J(n)\}^2 \leq 4 \sum_{k\geq 1} \min\{1, b_k(J)\}^2.$$

项 $J \leq n \leq 2J$ 至多贡献 $(J+1)/J \leq 2$。因此，

$$T \leq 2 + 4\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a).$$

反过来，对于每个整数 $(k+1)J < n \leq (k+2)J$，窗口 $[n-2J+1, n]$ 包含块 $[kJ+1, (k+1)J]$。因此

$$J \sum_{k\geq 1} \min\{1, b_k(J)\}^2 \leq \sum_{n>2J} \min\{1, s_{2J}(n)\}^2 \leq 2JT.$$

对 J 取上确界，得到 $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a) \leq 2T$ 并证明了（31）。其余结论由定理1.1得出。 □

5.2. 加倍部分和与 BMOA。回忆一下，BMOA 由边界值具有有界平均振荡的解析函数组成。泊松振荡刻画 [12, 第六章，第 1 节—3] 给出了等价范数

$$\|g\|_{\mathrm{BMOA}} = |g(0)| + \sup_{w\in\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{T}} |g(\zeta) - g(w)|^2 P_w(\zeta)\, dm(\zeta) \right)^{1/2}.$$

对于 $g(z) = \sum_{n\geq 0} d_n z^n$ 且满足 $d_n \geq 0$的情形，Fefferman 系数判据指出

$$g \in \mathrm{BMOA} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}(g) := \sup_{J\geq 1} \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{j=kJ+1}^{(k+1)J} d_j \right)^2 < \infty. \tag{34}$$

关于该判据，参见 García-Cuerva、Kazarian、Kolyada 和 Torrea [11, 定理 9.1、公式 (9.8) 以及推论 9.2 和其后的段落]。关于相应乘子定理的早期论述，参见 Anderson 和 Shields [1]。原文使用的块为 $[kJ,(k+1)J-1]$。(34) 中的每个块都包含在两个连续的原始块之并中。反过来，每个满足 $k \geq 2$ 的原始块都包含在 (34) 中两个连续块之并中。对于 $k = 1$，唯一额外的系数是 d_J；由 d_1结合 $J = 1$ 测试可知，它关于 J 一致有界。由正性以及 $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$，这两个条件等价。我们还使用经典的 Hankel 刻画：$\Gamma_g = (d_{j+k})_{j,\ k\geq 0}$ 在 ℓ^2 上有界，当且仅当 g 属于 BMOA；参见 [21, 第 1]章。

引理 5.2. 若 $G_a \in$BMOA，则 (A_n) 满足 (D)。

证明。设 $x = \mathbf{1}_{[0,2n+2)}$。对于 $n+1 \leq m \leq 2n+1$，至少有 $n+2$ 对 $(j,\ k) \in [0, 2n+2)^2$满足 $j + k = m$。由正性可得

$$(n+2) \sum_{m=n+1}^{2n+1} c_m \leq \langle \Gamma_{G_a} x, x\rangle \leq (2n+2)\|\Gamma_{G_a}\|.$$

由于 $G_a \in H^2$，我们有 $c_m \to 0$。选取 n_*，使得 $c_m \leq 1/2$ 对于 $m > n_*$ 成立。对于 $n \geq n_*$,

$$\log \frac{A_{2n+1}}{A_n} = \sum_{m=n+1}^{2n+1} -\log(1 - c_m) \leq 2 \sum_{m=n+1}^{2n+1} c_m \leq 4\|\Gamma_{G_a}\|.$$

其余有限多个比值都是有限的，因为 $A_n \geq a_0 > 0$。 □

命题 5.3（倍增条件下的比较）。若（D）成立且 $K \geq 2$，则

$$\tau(a) \asymp_K 1 + \mathcal{F}(G_a). \tag{35}$$

证明。对 J，$k \geq 1$，由正性和 $c_j \leq -\log(1-c_j)$ 可得

$$b_k(J) \leq \sum_{j=kJ+1}^{(k+1)J} -\log(1-c_j) = \log \frac{A_{(k+1)J}}{A_{kJ}} \leq \log K,$$

因为 $(k+1)J \leq 2kJ+1$。因此

$$\min\{1, b_k(J)\}^2 \leq b_k(J)^2 \leq \max\{1, (\log K)^2\}\, \min\{1, b_k(J)\}^2.$$

对 k 求和，对 J 取上确界，并应用定理 5.1。 □

推论 *1.2* 的证明。在倍增条件下，命题 5.3 和（34）给出 $\tau(a) < \infty$ 当且仅当$G_a \in$BMOA。应用定理 1.1。在没有预先假设倍增条件的情况下，$G_a \in$ BMOA 通过引理 5.2蕴含倍增条件，并且还蕴含有界性，因为 $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a) \leq \mathcal{F}(G_a)$。 □

5.3. 有界族中的布洛赫条件。 Bloch空间 $\mathcal{B}$ 由满足以下条件的解析函数 g 组成

$$\|g\|_{\mathcal{B},*} := \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)| < \infty.$$

对于非负系数，其相关性可直接由正性得到。

推论 5.4。假设 N_a 在 H^p 上有界，其中 $1 < p < \infty$。则

$$G_a \in \mathcal{B} \iff G_a \in \mathrm{BMOA} \iff (A_n) \text{ is doubling.} \tag{36}$$

证明。首先设 $G_a \in \mathcal{B}$，并令 $M = \|G_a\|_{\mathcal{B},*}$。对于整数 $N \geq 1$，取 $r = e^{-1/N}$。对于 $N < j \leq 2N$，我们有 $j \geq N$ 和 $r^{j-1} \geq e^{-2}$，因此

$$Ne^{-2} \sum_{j=N+1}^{2N} c_j \leq G_a'(r) \leq \frac{M}{1-e^{-2/N}}.$$

由于 $N(1-e^{-2/N}) \geq 1-e^{-2}$，这些块和关于 N一致地被 CM所界。令$N = kJ$可得，对于每个 k，$J \geq 1$，$b_k(J) \leq CM$。因此

$$\mathcal{F}(G_a) \leq \max\{1, C^2M^2\}\, \mathcal{F}_{\mathrm{tr}}(G_a) < \infty,$$

其中，最后一个不等式由 N_a 的有界性以及5.1定理得到。由（34），$G_a \in$BMOA。

蕴含关系 $G_a \in$ BMOA $\Rightarrow$ (A_n)倍增条件由引理 5.2给出。最后，倍增条件直接给出$G_a \in \mathcal{B}$：对于 $m \geq 0$，

$$\sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} c_j \leq \log \frac{A_{2^{m+1}}}{A_{2^m}} \leq \log K.$$

对所得几何界求和，得到 $\sum_{j=1}^{N} jc_j \leq C_K N$，对每个 $N \geq 1$ 均成立。若$U_N = \sum_{j=1}^{N} jc_j$，则分部求和给出

$$G_a'(r) = (1-r)\sum_{N\geq 1} U_N r^{N-1} \leq \frac{C_K}{1-r} \qquad (0 \leq r < 1).$$

正性意味着 $|G_a'(z)| \leq G_a'(|z|)$，从而证明了 Bloch估计。 □

因此，截断判据刻画了完整的有界族。在这个族中，Bloch条件和BMOA条件都恰好选出具有加倍部分和的算子。

方法论

在撰写和准备本文的过程中，作者使用了大型语言模型ChatGPT和Claude，包括用于校对、文献研究以及探索和检验论证。作者对论文内容负全部责任，并遵循《莱顿人工智能与数学宣言》的原则。

参考文献

[1] J. M. Anderson 和 A. L. Shields，《布洛赫函数的系数乘子》，Trans. Amer. Math. Soc. 224（1976），255–265。[2] O. Blasco，《向量值函数的 Hardy 空间：对偶性》，Trans. Amer. Math. Soc. 308（1988），495–507。doi:10.1090/S0002-9947-1988-0951618-8。[3] O. Blasco，《有界平均振荡向量值解析函数与巴拿赫空间的几何》，Illinois J. Math. 41（1997），532–557。doi:10.1215/ijm/1256068979。[4] F. F. Bonsall，《汉克尔矩阵的有界性》，J. London Math. Soc.（2）29（1984），289–300。doi:10.1112/jlms/s2-29.2.289。[5] D. Borwein，《Hardy空间上的 Nörlund 算子》，Canad. Math. Bull. 36（1993），8–14。doi:10.4153/CMB-1993-002-x。[6] D. Borwein 和 F. P. Cass，《作为 Hardy 空间有界算子的 Nörlund 矩阵》，Arch. Math. 42（1984），464–469。doi:10.1007/BF01190697。[7] F. P. Cass 和 W. Kratz，《作为 Hardy 空间上算子的 Nörlund 矩阵与加权平均矩阵》，Rocky Mountain J. Math. 20（1990），第1期，59–74。doi:10.1216/rmjm/1181073159。[8] K. de Leeuw，《关于傅里叶乘子》，Ann. of Math.（2）81（1965），364–379。doi:10.2307/1970621。[9] P. L. Duren，《Hardy 空间理论》，学术出版社，纽约，1970。[10] C. Fefferman 和 E. M. Stein，《一些极大不等式》，Amer. J. Math. 93（1971），107–115。doi:10.2307/2373450。[11] J. García-Cuerva、K. S. Kazarian、V. I. Kolyada 和 J. L. Torrea，《向量值豪斯多夫–杨不等式及其应用》，Russian Math. Surveys 53（1998），第3期，435–513。doi:10.1070/rm1998v053n03ABEH000018。[12] J. B. Garnett，《有界解析函数》，修订第1版，数学研究生教材，第236卷，施普林格，纽约，2007。doi:10.1007/0-387-49763-3。[13] L. Grafakos，《经典傅里叶分析》，第3版，施普林格，纽约，2014。[14] L. Grafakos、J. M. Martell 和 F. Soria，《极大调制奇异积分算子的加权范数不等式》，Math. Ann. 331（2005），359–394。[15] G. H. Hardy，《发散级数》，克拉伦登出版社，牛津，1949。[16] Z. Harper，《离散魏斯猜想在算子理论中的应用》，Integral Equations Operator Theory 54（2006），69–88。doi:10.1007/s00020-004-1336-2。[17] E. Hille 和 J. D. Tamarkin，《关于傅里叶级数的可和性。I》，Trans. Amer. Math. Soc. 34（1932），757–783。doi:10.1090/S0002-9947-1932-1501662-X。[18] R. Ibragimov 和 Sh. Sharakhmetov，《非负随机变量的罗森塔尔不等式中的最佳常数》，Statist. Probab. Lett. 55（2001），367–376。doi:10.1016/S0167-7152(01)00134-1。[19] N. E. Nörlund，《可交换函数的一种应用》，Lunds Universitets Årsskrift，N.F.，Avd. 2，16（1920）3，1–10。[20] L. B. Page，《有界紧向量汉克尔算子》，Trans. Amer. Math. Soc. 150（1970），529–539。doi:10.1090/S0002-9947-1970-0273449-3。[21] V. V. Peller，《汉克尔算子及其应用》，施普林格，纽约，2003。[22] J. L. Rubio de Francia，《任意区间上的利特尔伍德–佩利不等式》，Rev. Mat. Iberoam. 1（1985），第2期，1–14。[23] B. N. Sahney，《傅里叶级数的诺尔隆德可和性》，Pacific J. Math. 13（1963），251–262。[24] A. G. Siskakis，《Hardy空间上的复合半群与 Cesàro 算子》，J. London Math. Soc.（2）36（1987），153–164。doi:10.1112/jlms/s2-36.1.153。[25] P. Sjögren 和 P. Sjölin，《利特尔伍德–佩利分解及在某些集合上具有奇点的傅里叶乘子》，Ann. Inst. Fourier（Grenoble）31（1981），第1期，157–175。doi:10.5802/aif.821。