arXiv:2611.33007v1 [cond-mat.soft] 24 Nov 2026

群集中的主动凝聚所产生的极性流

Lauritz Hahn，[1,2]Xinyu Dou，[3,4]Ziqi Zhou，[3,4]Jie Zhang，[3,4]Marin Bukov，[1]，*和 Ricard Alert[1,2,5,6,7,*]

[1]马克斯·普朗克复杂系统物理研究所，*Nöthnitzer Str. 38*，*01187* 德累斯顿，德国[2]德累斯顿系统生物学中心，*Pfotenhauerstr. 108*，*01307* 德累斯顿，德国[3]中国科学技术大学（*USTC*）高分子科学与工程系，中国安徽省合肥市，邮编 *230026*[4]中国科学技术大学（*USTC*）精准与智能化学重点实验室，中国安徽省合肥市，邮编 *230026*[5]巴塞罗那大学凝聚态物理系，西班牙巴塞罗那[6]巴塞罗那大学复杂系统研究所（*UBICS*），西班牙巴塞罗那[7]加泰罗尼亚高等研究与研究院（*ICREA*），西班牙巴塞罗那

活性物质中最具范式性的两种现象是集群运动和运动性诱导相分离：前者指粒子通过排列取向实现集体运动，后者指自推进使粒子即使在不存在吸引性相互作用的情况下也会发生凝聚。在这里，我们通过对自驱动Janus胶体二聚体开展实验，表明群集能够发生相分离并形成极性流。这些结构是由粒子组成的细长致密团簇，粒子沿着流的长轴进行集群运动；这不同于众所周知的、在接近群集转变时形成的横向条带。我们结合基于粒子的模拟和通过粗粒化获得的流体动力学理论，确定了其潜在机制，并将其称为活性向列凝聚：群集中的高密度区域会形成更强的极性序，因而也形成更强的向列序，从而导致更多粒子通量进入该致密区域。这些结果揭示了一种普适机制，即群集能够凝聚成流。我们的研究发现，群集可以受到向列序的塑造，而标准Toner-Tu方程通常并未对此加以考虑。更广泛地说，我们的工作表明，在活性物质中，集体运动与相分离不仅能够共存，还能够相互协作。

I. 引言

活性物质表现出许多引人注目的非平衡集体现象，例如集群运动 [1, 2] 和运动性诱导相分离（MIPS） [3], ；二者均源于自推进与活性粒子之间相互作用的共同影响。集群运动——活性粒子自组织形成的集体运动——存在于各种尺度的许多系统中，从鸟群 [4] 和细胞层 [5–9]，到类似 Quincke滚子 [10] 和细胞骨架丝地毯[11]的合成活性系统。集群运动通常由粒子之间的极性排列相互作用引起，如 Vicsek模型 [12], 所示；但也可能由其他效应造成，例如转离力矩 [13]和极性-速度自对齐 [5, 14–16]。相应地，活性相分离可能由群体感应 [17]或排斥相互作用 [18], 引起：这些机制会使活性个体在高密度区域的运动能力下降；但它也可能由其他效应造成，例如转向力矩 [19]或主动向列流 [20]。

尽管人们常通过简单模型单独研究这些现象，但实验发现它们会彼此竞争 [21, 22]。一方面，运动诱导相分离可导致群集发生拥堵并失去极性有序 [21]。另一方面，研究表明，极性排列会中断运动性诱导相分离 [22]。因此，集群运动与运动诱导相分离在多大程度上能够共存，仍不清楚 [23]。

在此，我们展示群集可以发生活性相分离，形成极性流，即由致密团簇组成的细长结构，其中粒子沿团簇的长轴集体运动。我们首先在Janus胶体二聚体实验中观察到极性流。为解释这一行为，我们建立并模拟了一个活性粒子微观模型，该模型能够捕捉流通过群集转变的形成过程，随后在稀疏群集相内发生相分离，形成致密流。为理解这些转变，我们对模型进行粗粒化，推导出一个流体动力学理论，用以解释观测结果，并帮助我们确定流形成的机制。我们证明，流是由伸展型向列通量引起的相分离所产生的；这些通量使集群沿垂直于其运动方向的方向凝聚——我们将这一机制称为活性向列凝聚。我们的结果揭示了塑造集群的物理机制：我们阐明了群集运动和相分离如何依次发生，从而协同地将集群组织成致密相和稀相。

* E共同贡献；mgbukov@pks.mpg.de, ricard.alert@ub。edu

II. 金属-介电Janus胶体流

我们通过在直径为 3-μm 的二氧化硅球的一个半球上镀覆 6 nm 钛和 5 nm 氧化硅，制备金属-介电Janus胶体 [13, 19, 22, 24–26] （方法）。胶体悬浮于去离子水中，并置于两片导电盖玻片之间，两片盖玻片由 120 μm 间隔垫片隔开（图 1a）；胶体随后沉降，在底部盖玻片上形成单层，覆盖的面积分数约为$\phi_0 \approx 0.17 - 0.22$。随后，我们施加振幅为 10 V、频率为 30 kHz 的垂直交流电压来驱动粒子。

由此产生的电场使粒子转动，使其赤道面平行于电场；由于胶体两半球的介电性质不同，电场对它们的极化程度也不同 [27]。感应偶极矩之间的静电相互作用使胶体自发二聚化（图 1b 和 1c）。二聚体由一个单体移出平面并位于另一个单体上方形成，使得两个

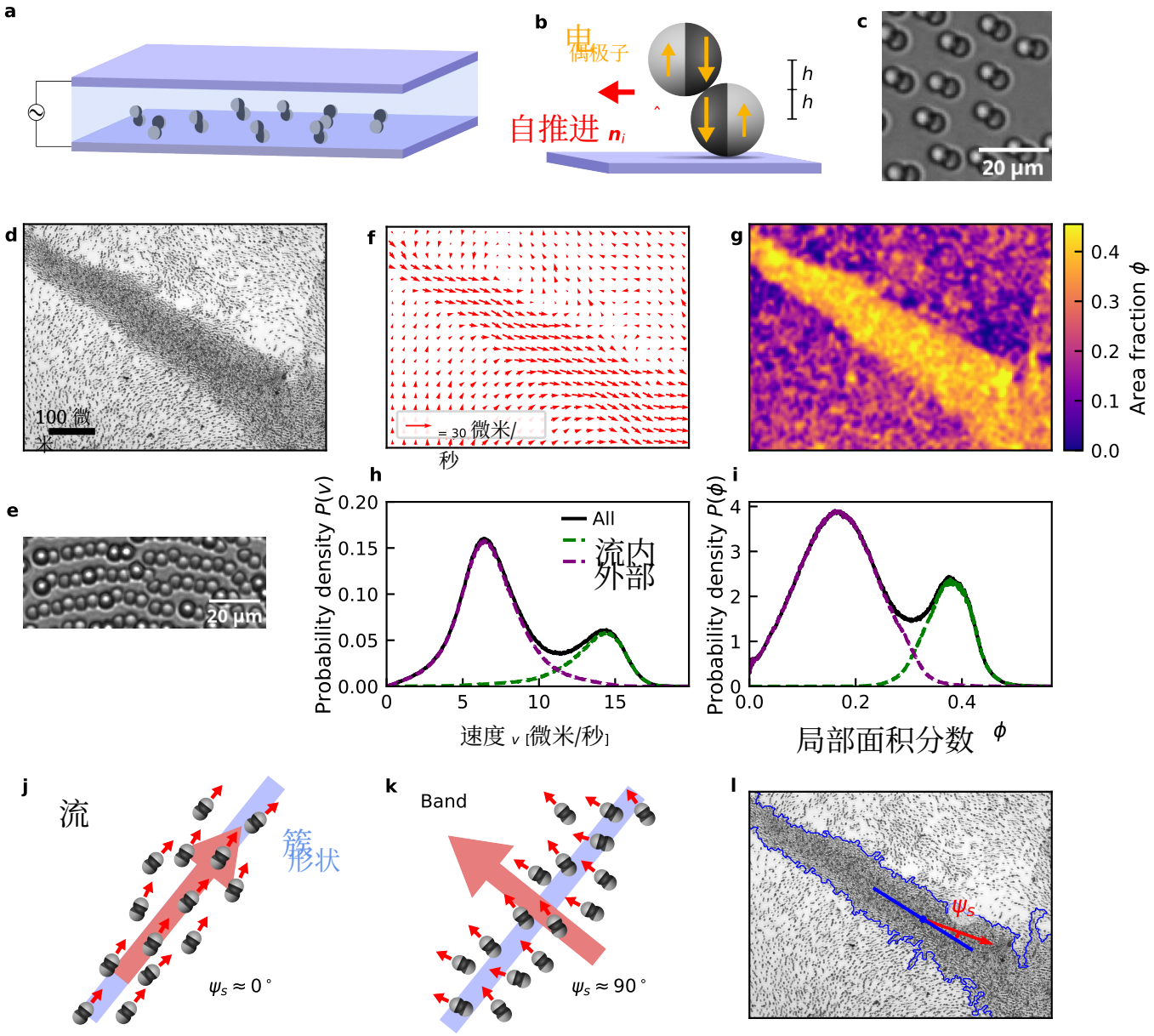


图 1 活性金属-介电质Janus胶体发生二聚化并形成极性流。(a) 实验装置示意图。Janus胶体在样品池中的去离子水里沉降，样品池两端施加垂直的交流电场。(b) 二聚体侧视示意图。外部电场在每个单体的两个半球内诱导出取向相反、大小不同的电偶极子（橙色箭头）。金属半球（黑色）内偶极子之间的静电相互作用使胶体发生二聚化。二聚体自驱动（红色箭头），上方单体位于前方。(c) 群集二聚体的高倍俯视图。上方（下方）单体看起来更亮（更暗）。(d) 实验中二聚体流的显微镜图像（影片 1）。(e) 二聚体链的高倍俯视图。(f,g) (d) 中流的速度场 (f) 和面积分数场 (g)。(h,i) 流内外二聚体速度 (h) 和局部面积分数 (i) 的分布。(j,k) 俯视示意图，说明流与带的区别：在流 (j) 中，粒子沿着密集簇（蓝色）的长轴集体运动（红色）；在带 (k) 中，粒子沿垂直于带长轴的方向运动。这一区别可通过流角 ψ_s量化：流的流角接近 $0°$，而带的流角接近 $90°$。(l) 我们在实验中测量流角 ψ_s，即流的形状轴（蓝色）与其净速度方向（红色）之间的夹角。

金属半球的偶极子彼此对齐 [28]。极少数胶体仍保持单体状态。如图 1b所示，二聚体能够自推进，并通过静电相互作用彼此作用。自推进是由电双层中的电流体动力流引起的将盖玻片四舍五入 [29, 30]。

我们的实验表明，胶体二聚体会组织成极性流：细长的高密度簇，其中二聚体沿流的长轴集体运动（图 1d，扩展数据图1和影片1）。一条致密的流

周围环绕着稀疏群集相，二者之间会交换粒子。在我们的实验中，流可持续数分钟，长度可达 ∼1 毫米，宽度可达100 μ米。它们通常流入密度均匀且较高的群集区域，并且常常伴有涡旋（影片2）。

在流中，Janus二聚体经常形成单列链，长度可达数十个二聚体（图1e）。流内的链经常发生重组，在不同位置断裂并重新形成。在稀疏群集相中也能观察到由3–5个二聚体组成的小链，但它们存在时间很短，几秒后便会消失。

为了量化流的行为，我们采用粒子图像测速法测量流场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t)$ 并评估 $\phi(\boldsymbol{r},\ t)$ 4个 流（图1f和1g 以及方法）。与稀相相比，胶体在流内的运动速度提高了 1.95 ± 0.07倍（图1h），尽管流内的面积分数平均比外部高 2.33 ± 0.06 倍（图1i），这与通常观察到的不对齐活性粒子的密度诱导的减速相反 [3, 17, 18, 31]。高密度下仍能保持较高速度，是因为流中粒子的强对齐促进了快速且平稳的流动。在单列链中运动时，会导致速度降低的碰撞较少发生。

我们观察到的流不同于自驱动粒子系统中接近群集转变时通常观察到的行进带 [10, 21, 32, 33]。二者都由一簇沿长轴方向伸展的高密度粒子组成，并表现出集体运动。然而，在流中，集体运动沿簇的长轴方向进行（图1j），而带则沿垂直于簇延展方向的方向行进（图 1k）。为了证明我们观察到的确实是流而不是带，我们对实验中的簇进行分割，并计算 ψ_{s} 其长轴与簇内平均流动方向之间的角度（图 1l 和方法）。对于流而言，该流角应当较小，而对于行进带则应当接近 $90°$。我们发现 $\psi_{\mathrm{s}} = 6.7° \pm 1.1°$，这表明我们的实验中出现的是流——一种不同于行进带的现象。

III. 自驱动 Janus二聚体的微观模型

为研究流的形成，我们建立了一个具有静电偶极-偶极相互作用的自驱动Janus二聚体微观模型（图2a）。每个二聚体 i 被视为位于二聚体质心 $\boldsymbol{r}_i$ 处的点粒子，它沿着$\hat{\boldsymbol{n}}_i(\theta_i) = (\cos\ \theta_i,\ \sin\ \theta_i)^T$以速度 v_0 推进，其中 θ_i 是粒子取向。粒子之间通过两两作用力$\boldsymbol{F}_{ji}$ 和力矩 Γ_{ji} 相互作用，并受到旋转扩散系数为 D_{r}的取向噪声影响。实验中平移噪声可以忽略，因此我们的模型不包含平移噪声。在

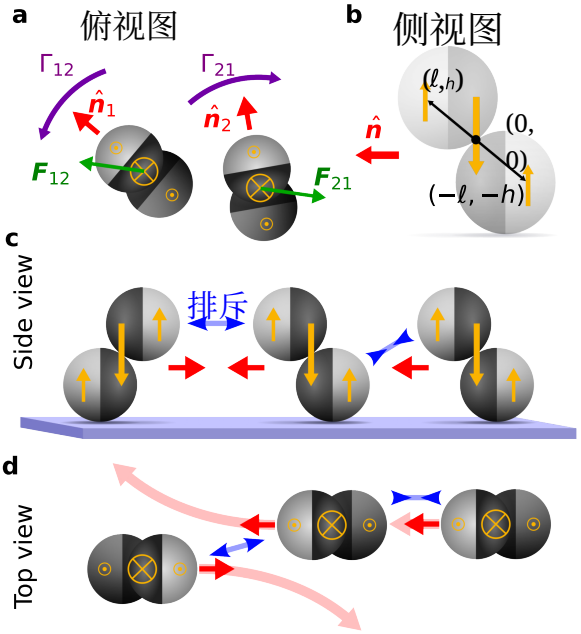


图 2 Janus二聚体模型。(a) 在我们的模型中，Janus二聚体沿其取向（$\hat{\boldsymbol{n}}_i$）自驱动。电偶极子（橙色）会产生两两作用力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 和力矩 Γ_{ij}。**(b)** 我们用三个电偶极子（橙色箭头）来模拟一个Janus二聚体，其中两个电偶极子相对于质心（黑点）分别沿水平方向（ℓ）和竖直方向（h）偏移。**(c)** 两个二聚体的头部和尾部偶极子不在同一竖直平面内，因此会彼此微弱吸引；而平面内相互作用则是纯排斥的。**(d)** 这种排列使 Janus二聚体之间的相互作用具有极性，并有利于形成链状构型，因为单列中取向一致的粒子会彼此跟随，而取向相反的粒子则会相互散开。

总之，我们的模型由以下朗之万方程描述

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = v_0\hat{\boldsymbol{n}}_i(\theta_i) + \frac{1}{\xi_{\mathrm{t}}}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ji}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\xi_{\mathrm{r}}}\sum_{j\neq i}\Gamma_{ji} + \sqrt{2D_{\mathrm{r}}}\eta_i(t), \tag{2}$$

其中，我们还引入了平移和旋转摩擦系数 ξ_{t} 和 ξ_{r}，以及高斯白噪声 $\eta_i(t)$，其满足 $\langle\eta_i(t)\eta_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$。

与先前的研究一样 [13, 19, 24], ，我们假设相互作用纯粹是静电作用。数量级估算表明，与 [34]相比，流体动力学相互作用可以忽略不计。二聚体中的每个单体在 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{d}}$介电半球内有一个电偶极子，在 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{m}}$ 金属半球内也有一个偶极子。由于二聚体中的两个金属半球偶极子上下重叠（图2b），为简便起见，我们将它们替换为一个强度为 $2\boldsymbol{d}_{\mathrm{m}}$ 的有效偶极子。同样，头部的介电半球偶极子位置高于尾部的偶极子（图2b），这打破了二聚体相互作用中的头尾对称性，使其具有极性（图2c 和 2d）。不同参数的估算见S1节，相互作用的详细说明见S2节。

为了研究模型涌现出的集体动力学，我们对 $N = 10^4$ 个粒子在边长为 L 的方形盒子中进行布朗动力学模拟，并采用周期性边界条件（见方法）。通过改变自推进速度 v_0 和全局面积分数 $\phi_0 = NA/L^2$，我们绘制了相图（图3a），其中 A 为一个二聚体所占据的面积。

在低面积分数和低自推进速度下，我们发现系统处于各向同性态（图3b 和 影片3）。随着面积分数或自推进速度增加，全局极性有序随之出现，呈现出群集转变的典型特征：在极性有序刚出现时，我们观察到行进带的形成（图3c和 影片4），这是群集的一种众所周知的特征 [10, 21, 32, 33]。远离转变线后，系统达到均匀的群集态（图3d 和 影片5）。群集运动的出现源于粒子间的极性排列，而介电质半球偶极子之间不同的垂直偏移量 $\pm h$ 使这种排列得以实现（图1b），如上文所述。如果在模拟中将垂直偏移量 $h = 0$ 设为零，相互作用便具有向列对称性，系统既不会形成群集，也不会形成流（扩展数据图2）。

随着面积分数从群聚相进一步增加，系统会形成流（图3e）。这些流由数条长长的单列粒子链组成，彼此平行地运动（图3e，插图）。尽管流具有较高的局部极性有序，但由于流常常弯曲，流相中的全局极性有序低于群聚相。在中等面积分数下（$\phi_0 \approx 0.1 - 0.14$），流周围的稀相呈现集群运动（影片6）；而在较高面积分数下（$\phi_0 \approx 0.17 - 0.21$），稀相的密度极低，因而变为各向同性，大多数粒子都被吸收到流中（影片7）。

类似流的行为通常被称为极性带或通道，先前已在自驱动杆的模拟中观察到，这些模拟大多采用软体积排斥相互作用[35–41]。我们的模型不包含这类相互作用；在我们的模拟中，静电排斥强到足以阻止粒子重叠，这表明其中存在另一种作用机制。此外，在我们的实验和模拟中，流均由群集形成，而自驱动杆系统并非如此。

最后，我们注意到，在高面积分数和低自推进速度下，系统密度均匀且不存在全局有序性。粒子形成较短的链，并聚合成具有局部极性有序的区域（图3f和扩展数据图3）。

对于实验数据，我们计算流角 ψ_s，以识别模拟中的流和带。我们使用聚类算法识别粒子的高密度簇，确定其长轴，并计算流角 ψ_s，即该轴与簇的极性矢量之间的夹角（见 方法）。在 图3g中，我们绘制了 $\Sigma = \cos(2\psi_s)$的时间平均值，称之为流动参数，其取值范围为 -1 （带）至 $+1$ （流）。结合流角的分布 ψ_s (图3h)，流动参数揭示了群集转变附近存在行进带，同时也显示在高自推进力和面积分数下存在流（图3g）。

IV. 活性粒子的自组织：形成介观链

接下来，我们研究链的形成。在实验和模拟中，我们都观察到流中存在链（图1e和 图3e）。链的形成是因为排列方向一致的二聚体之间的排斥作用弱于排列方向相反的二聚体之间的排斥作用（图2d）。这是由于不同二聚体的头部和尾部单体处于不同的垂直位置，从而使二聚体的头部与其他二聚体的尾部之间产生微弱的吸引相互作用。

我们的模拟中，均匀群集态（图3d）已经包含由粒子组成的小链。这些链通常只有几个粒子长，且寿命很短：它们很容易被其他粒子从侧面碰撞而破坏。这与链中的粒子并未形成束缚态相符：两个排列对齐的二聚体之间的相互作用能没有局部极小值，因而无法形成束缚态（扩展数据图4）。然而，在由平行移动的链组成的流中，各链会彼此遮挡侧翼，避免其他粒子从侧面碰撞并将其打散，从而使链得以进一步增长。这一观察表明，我们系统中的链形成是一种真正的多体非平衡效应。事实上，我们发现，在流相中，链长分布遵循幂律（图3i），这表明链并非由平衡聚合动力学形成；平衡聚合动力学会导致指数分布 [42]。

由于活性粒子自组织形成大尺度组装体仍是一个持续研究的课题 [43]，，进一步研究我们系统中的单列链等介观结构，将是对本研究的有趣拓展。

V. 群集与流的流体动力学理论

为了理解我们系统中集群运动和极性流的起源，我们使用 BBGKY层级技术将模型粗粒化为流体动力学理论（S3节） [13, 19,31, 39, 44, 45]。由此，我们得到密度场的流体动力学方程 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$、极化密度 $p_\alpha(\boldsymbol{r};\ t)$ 以及向列序密度 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r};\ t)$。我们在S3节中详细介绍推导过程和完整方程。这里，我们给出简化后的方程，并忽略与群集和流形成无关的项。

由于粒子数守恒，密度方程具有连续性方程的形式，

$$\partial_t \rho = -\partial_\alpha J_\alpha, \quad J_\alpha = v_{\alpha\beta}[\rho, Q]p_\beta - D_{\alpha\beta}[\rho, Q]\partial_\beta \rho + ..., \tag{3}$$

其中，流 J_α 包含自推进（$v_{\alpha\beta}$、式（S.50a））和扩散（$D_{\alpha\beta}$、式（S.51a））的贡献；这两者都会被相互作用重整化，因此可能依赖于密度并呈各向异性。例如，已知排斥相互作用会使有效自推进速度 $v_{\alpha\beta}$ 随密度增加而降低，从而诱发运动诱导相分离 [3]。

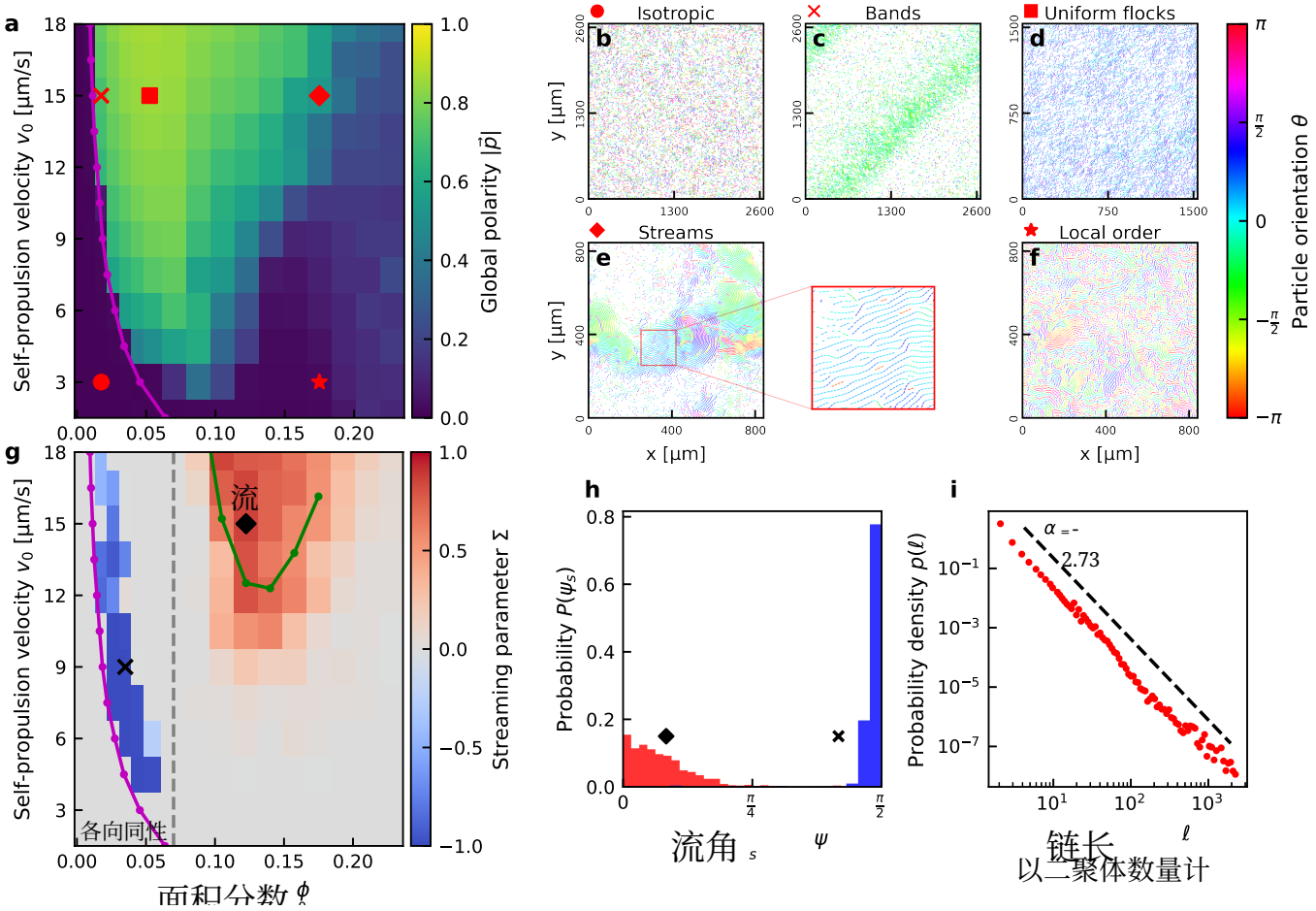


图3 模拟中Janus粒子二聚体的集群运动相和流相。(a) 展示全局极性的相图，揭示了随着面积分数或自推进增加，体系从各向同性态转变为极性有序态的集群转变。品红色曲线表示利用模拟测得的对分布函数，通过流体动力学理论预测的集群转变。在不同面积分数 ϕ_0和自推进速度 v_0下，我们观察到（**b**）无序各向同性态、（**c**）行进带、（**d**）均匀群集、（**e**）由单列二聚体链构成的流，以及（**f**）具有局部极性有序的均匀态。（**g**）展示时间平均流动参数的相图$\Sigma = \langle \cos(2\psi_s) \rangle_t$，该参数可区分流相（$\Sigma \approx +1$，红色）与集群转变附近出现的行进带（$\Sigma \approx -1$，蓝色）。绿色曲线表示流体动力学理论预测的流转变。为便于比较，再次标出了图3a中的品红色曲线。灰色虚线表示面积分数的取值；在该处，我们将聚集距离从高值切换为低值，以分别识别带和流，详见方法。（**h**）流的流角 ψ_s 分布（流为红色，带为蓝色）。（**i**）流相中的链长（以构成链的二聚体数量计）服从幂律分布。

极化动力学具有 Toner-Tu 方程的形式 [2, 46, 47],

$$\begin{aligned}\partial_t p_\alpha + &\lambda_1 p_\beta \partial_\beta p_\alpha + \lambda_2 (\partial_\beta p_\beta) p_\alpha + \lambda_3 \partial_\alpha (p^2) \\ &= (a[\rho] - b|p^2|) p_\alpha - \partial_\alpha P[\rho] \\ &\quad - \partial_\beta (w[\rho] Q_{\alpha\beta}) - \nu Q_{\alpha\beta} \partial_\beta \rho - \gamma Q_{\alpha\beta} p_\beta + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

系数的表达式见公式 (S.54a)至(S.59b)。在超越标准 Toner-Tu方程的基础上，我们纳入了向列序场的动力学 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}; t)$，从而引入了新的耦合项。特别是，项 $-\partial_\beta(w[\rho]Q_{\alpha\beta})$ 刻画了向列序中的不均匀性所诱导的极性。通过公式 (3)中的自推进流，这一极性贡献产生了所谓的活性向列通量，从而导致巨大数目涨落 [48] 和缺陷自推进[49]干燥活性向列相中。对于 $w[\rho] > 0$，活性通量源于伸展型活性向列应力。

最后，对于 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}; t)$ 的动力学，我们得到

$$\partial_t Q_{\alpha\beta} = -4D_r Q_{\alpha\beta} + \gamma\left(p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} p^2\right), \quad (5)$$

其中，第一项和第二项分别描述取向噪声导致的向列序衰减，以及极性有序存在时向列序的生成。我们的粗粒化计算（S3节）根据微观参数以及对分布函数的积分，确定了上述方程中的所有流体动力学系数。对分布函数编码了相对于参考粒子，在位置 $g(\boldsymbol{r},\ \theta)$和取向 $\boldsymbol{r}$ 处找到一个粒子的概率 θ。为计算这些积分，我们使用模拟对对分布函数进行数值采样

（参见方法和扩展数据图5）。因此，连同系数的表达式，方程（3）至（5）共同表征了我们系统的流体动力学行为。

VI. 群集转变

现在，我们对流体动力学方程进行线性稳定性分析，以预测各向同性气体向集群的转变（补充材料 S4 节）。均匀密度下的各向同性态 ρ_0 在极性涨落的作用下变得不稳定，只要极性增长率 $a[\rho_0]$ 变为正值即可；当粒子的扭矩驱动排列超过旋转扩散时，就会发生这种情况 [13]。通过确定 $a[\rho_0]$ 变号的位置，我们确定集群起始（图4a）；由此得到图3a中的洋红色相边界，它与模拟结果吻合良好。

VII. 主动凝聚驱动的流转变

现在，我们来考察均匀集群运动态的线性稳定性。此时，密度仍然均匀，$\rho(\boldsymbol{r};t)=\rho_0$，但系统会自发打破旋转对称性，选择一个轴 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 作为集群运动方向，而极化则趋于其稳态值

$$p_\alpha(\boldsymbol{r};t)=\sqrt{a[\rho_0]/(b+\gamma^2/8D_\mathrm{r})}e_\alpha\equiv p_0 e_\alpha, \qquad (6)$$

其中 $e_x=1$ 和 $e_y=0$。具有极性有序的系统也具有向列序；在我们的情形下，在稳态时，它由下式给出

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r};t)=\frac{\gamma p_0^2}{4D_\mathrm{r}}(e_\alpha e_\beta-\delta_{\alpha\beta}/2). \qquad (7)$$

考虑围绕该稳态的扰动时，我们注意到只有两个慢模：密度扰动 $\delta\rho$，因为它们与一个守恒量相关；以及全局极性矢量的取向扰动 δp_y，因为它们是戈德斯通模。其他涨落，即 δp_x和 $\delta Q_{\alpha\beta}$，是快模；它们会衰减，并在大于 $1/D_\mathrm{r}$ 的时间尺度上受慢模支配。消去这些快模后，我们评估集群对横向于集群方向的扰动（$\delta\rho$、δp_y）的稳定性（由方程 (S.70a) 和 (S.70b) 给出），即具有波矢 $\boldsymbol{k}\perp\hat{\boldsymbol{x}}$的扰动；这种扰动可能导致集群发生横向凝聚，形成一条流。这类扰动的增长率具有 $\lambda_\pm=\pm ic_0|\boldsymbol{k}|$（方程 (S.73)）的形式，描述了声模以速度 $c_0=\sqrt{AB}$ 在集群[47, 50–52]中的传播。这里，A是由流体动力学系数（方程 (S.71b)）决定的正常数，而 B 是集群的有效逆压缩率（方程 (S.71c)），其表达式为

$$B=P'-\frac{\gamma p_0^2(w'+\nu)}{8D_\mathrm{r}}+\frac{a'p_0^2(2\lambda_3-\gamma w/4D_\mathrm{r})}{2a-\gamma^2p_0^2/4D_\mathrm{r}}, \qquad (8)$$

其中撇号表示对密度求导，即 $a'=\mathrm{d}a/\mathrm{d}\rho|_{\rho_0}$ 等。有趣的是，B 可能变为负值，导致 c_0 变为虚数。这会使其中一种模式变得不稳定，从而形成流。

可以与被动流体进行有益的比较：当逆压缩率$P'=\mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho=\rho f''(\rho)$ 为负时，会发生旋节线分解 [53]。在这些区域，自由能密度 $f(\rho)$ 局部呈凹形，因此均匀态不稳定。各向同性活性气体的运动诱导相分离（MIPS）同样由活性压力导出的负逆压缩率引起 [54–56]（见方程（S.64）和（S.65））。近期研究表明，集群运动粒子之间的趋化相互作用可能导致逆压缩率为负 P'，并引发流的形成 [57, 58]。然而，我们的分析表明，即使 P' 保持为正，仍可形成流。相反，不稳定性是由方程（8）中的其他项引起的，原因可能是两种效应之一，我们分别称之为活性向列凝聚和极性凝聚。

活性向列凝聚由活性向列应力 $w[\rho]Q_{\alpha\beta}$驱动；在我们的系统中，这些应力是伸展型的，因为$w[\rho_0]>0$ (方程（S.58）)，且其散度出现在方程（4）中。这些应力（图4b中的绿色箭头）在密度较高的区域更强，因为密度越高，极性越强（方程（6））， 从而向列序也越强（方程（7））。由此产生的活性应力梯度会导致粒子通量沿密度梯度方向、垂直于集群方向，如图4b所示。因此，这种机制会促进集群凝聚成密集的流。类似的机制虽然不涉及极性有序，却能驱动活性向列相中的相分离 [20]。

分别而言，活性极性凝聚基于极性与密度之间通过 $\lambda_3\partial_\alpha(p^2)$在方程 (4)中所体现的相互作用，可将其解释为极性依赖压强 [46]。在我们研究的参数范围内，我们发现 $\lambda_3<0$ (方程 (S.54c))。因此，项 $\lambda_3\partial_\alpha(p^2)$ 会产生粒子通量，使粒子从极性较低的区域流向极性较高的区域，也就是流向更高密度区域，因为这些区域会形成更强的极性（方程 (6)）。如图4c所示，这个密度更高、排列更整齐的区域会有少量粒子流出，流向邻近的排列较不整齐区域。相反，稀疏、排列较不整齐的区域会有更多粒子流出至密集区域，这又会促成不稳定性，导致流的形成。

由于这两种主动凝聚机制均由流体动力学方程所描述，因此它们具有普遍性，应存在于任何干燥集群中。如果这些凝聚效应足够强，能够胜过高密度区域中的压强积累，就会形成流。有趣的是，虽然 $\lambda_3\partial_\alpha(p^2)$ 项出现在标准 Toner-Tu方程 [2, 46], 中，但活性向列项 $-\partial_\beta(w[\rho]Q_{\alpha\beta})$ 并未出现。该项与 $\rho p_\alpha p_\beta$ 成正比，因此在密度和极性场中属于三阶项，而标准 Toner-Tu方程中只包含场的二阶及以下项。

为检验这些机制中哪一种导致了我们在系统中观察到的流，我们评估逆压 P' 缩率以及有效逆压缩率B；我们使用粗粒化推导出的表达式，以及在模拟中测得的对分布函数。我们发现，在我们的系统中，P' 始终为正（图4d）。然而，活性向列凝聚足够强，能够

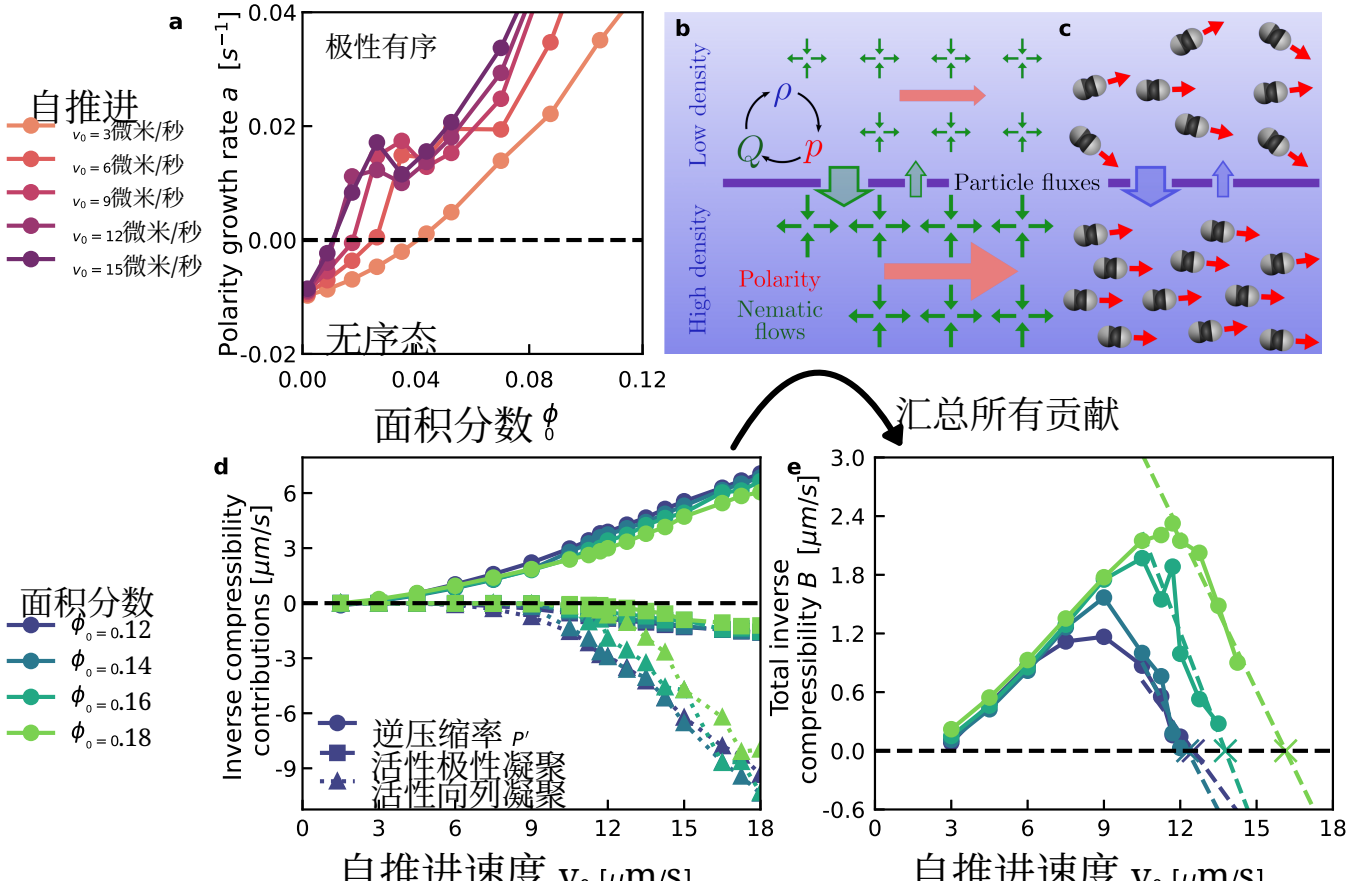


图4 流形成由活性向列凝聚驱动。(a) 不同自推进速度 v_0下，极性增长率 a 随面积分数 ϕ_0 的变化。当 a 变为正值时，群集转变发生。在群聚相中， a 随面积分数继续增加，因为更高的密度意味着更强的取向相互作用。(b-c) 从宏观视角 (b) 和微观视角 (c) 展示集群中的流形成机制。密度、极性和向列序场之间的反馈循环会产生不稳定性，进而导致流形成。从宏观上看，密度较高的区域极性更强，因而向列序也更高，从而驱动粒子通量，进一步提高局部密度。从微观上看，密度较高区域的极性更强，意味着粒子向低密度区域的横向流出通量更低，从而进一步提高局部密度。(d) 不同面积分数 ϕ_0下，有效逆压缩率 B （方程 (8)）的各项贡献随自推进速度 v_0 的变化。系统的基础逆压缩率 P' 始终为正。然而，活性极性凝聚和活性向列凝聚的贡献（分别为方程 (8) 中与 λ_3 和 γ 成正比的项）会降低 B，最终使其变为负值。(e) 不同面积分数 ϕ_0下，有效逆压缩率 B 随自推进速度 v_0 的变化。当 B 变为负值时，均匀集群态变得不稳定。我们通过将群聚相中的 B 外推至 $B = 0$ （叉号），确定相边界（图3g中的绿线）；该处标志着流动不稳定性的起始。

克服压力并使 B 变为负值，从而导致流的形成（图4e）。活性极性凝聚也会发生，但其强度不足以单独形成流（图4d）。因此，我们得出结论：在Janus胶体二聚体实验中观察到的流，是由活性向列凝聚形成的。我们通过确定 B变号的位置来预测流动的起始（图4e）；由此得到图3g中的绿色相边界，它反映了模拟中观察到的行为。

VIII. 讨论与展望

总而言之，通过对二聚化 Janus 胶体的实验，我们展示了群集可以凝聚成极性流——即沿其长轴方向进行集体运动的细长致密团簇。我们为 Janus 二聚体开发并模拟了一种微观活性粒子模型，该模型产生了多种状态，包括均匀群集、众所周知的横向条带以及极性流。模拟还再现了我们在实验中观察到的介观单列粒子链。随后，我们对该模型进行了系统的粗粒化，推导出流体动力学方程；由此揭示了形成极性流的两种普遍机制，我们将其称为活性向列相机制和极性凝聚。

近期有理论预测，在粒子通过自身产生的化学场相互作用的集群中，会出现极性流 [57, 58]。在此，我们通过实验展示了极性流，并确定了另外两种使其产生的机制。这些机制不依赖介导作用的化学场，而且应当适用于任何粒子之间相互排斥的集群

。因此，我们的发现揭示了塑造集群的普遍方式。在我们的系统中，我们发现流主要通过活性向列凝聚机制产生。这一发现凸显了向列序在塑造集群中的重要性，尽管在集群运动理论中，向列序常常遭到忽视，包括标准的Toner-Tu方程 [2, 46]。

在多种活性粒子模型的模拟中，均观察到了类似极性流的现象，包括具有软排斥作用的自驱动杆 [35–39, 41], 同时具有转向趋近和排列力矩的粒子 [59]，或具有接触跟随相互作用的粒子 [60], ，以及活性波茨模型 [61]。在具有排斥作用和极性排列的自驱动粒子系统中，也发现了极性团簇，尽管它们不像流那样细长 [62]。在这些情况下，其背后的流体动力学机制仍不清楚。我们的研究为探究这类极性团簇是否源于本文报告的主动凝聚效应打开了大门。其他机制也并非不可能：值得注意的是，极性团簇或许会通过各向同性态的运动诱导相分离（MIPS）形成。随后，在致密相中，对齐相互作用可能足够强，从而产生极性有序。这种先相分离、后集群运动的情形，与我们的发现恰好相反；在我们的系统中，先形成集群运动，随后发生相分离。

此前在Quincke滚子中发现，群集内部会发生相分离；MIPS的起始导致极性有序丧失 [21]。我们的研究揭示了群集发生的另一种相分离，其中集体运动不仅得以维持，甚至还得到增强：流的形成及其中的介观粒子链减少了会减缓粒子运动的粒子间碰撞。因此，致密流中的粒子比其周围较为稀疏的群集中的粒子移动得更快（图1h）。

因此，我们推测，极性流可能是一种集体状态，使运动和运输变得有序且高效。这一观点或许与生物系统中发现的类似流的行为有关，例如胚胎神经嵴细胞 [63, 64], 蚂蚁队列 [65], 和角马群 [66]。此外，集体细胞迁移中的接触跟随相互作用 [67–69] 与我们系统中导致链形成的相互作用相似。有趣的是，包含此类相互作用的自驱动粒子模拟显示出类似流的状态[60]。研究生物活性物质中的流和链形成，仍是未来工作中一项令人振奋的挑战。

致谢。我们感谢 Saraswat Bhattacharyya、Matteo Ciarchi、Suchismita Das、Sagnik Garai、Frank Jülicher、Roderich Moessner、Ignacio Pagonabarraga 和 JohnToner 提供的启发性讨论。我们感谢 Steve Granick 同意分享实验数据。我们感谢 MPI-PKS 计算设施提供的计算支持。

资助声明。X.D.、Z.Z.和J.Z.感谢国家自然科学基金委员会（NSFC）提供的资金支持（资助编号：T2522036、22273099）、中国科学院（KJ2060007008）以及中国科学技术大学（KY2060000273和KY2060000211）的资助。X.D.、Z.Z.和J.Z.感谢中国科学技术大学（USTC）超级计算中心提供计算资源。实验工作部分在中国科学技术大学微纳研究与制造中心和物理科学仪器中心完成。R.A.感谢欧盟通过欧洲研究委员会启动基金“Liv-_Fluctuations”（编号：101114584）提供的资助。M.B.获得了欧盟的支持（ERC、QuSimCtrl，101113633）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行局的观点和意见。欧盟及资助机构均不对这些观点和意见承担责任。

作者贡献。 Z.Z. 和 J.Z. 进行了实验。L.H.、X.D. 和 J.Z. 分析了实验结果。L.H.、M.B. 和 R.A. 构建了模型。L.H. 进行了模拟和理论计算，并对其进行了分析。M.B. 和 R.A. 负责监督研究工作。L.H.、M.B. 和 R.A. 撰写了论文，所有作者均审阅了论文。

作者在准备本手稿期间使用了 Claude Opus5.5 和 GPT-5.3-Codex，以协助进行代码优化以及绘图和文档编写。作者对本文的科学内容、准确性和完整性承担全部责任。

数据可用性声明。 与本文稿相关的数据和代码可通过数字对象唯一标识符：10.5281/zenodo.23953164获取。

[1] T. Vicsek 和 A. Zafeiris，《集体运动》，Phys. Rep. **517**，71 2012年( )。[2] M. C. Marchetti、J. F. Joanny、S. Ramaswamy、T. B. Liverpool、J. Prost、M. Rao 和 R. A. Simha，《软活性物质流体动力学》，Rev. Mod. Phys. **85**，1143 (2013年)。[3] M. E. Cates 和 J. Tailleur，《运动性诱导相分离》，凝聚态物理年度评论 **6**，219 (2015年)。[4] A. Cavagna 和 I. Giardina，《鸟群作为凝聚态物质》，凝聚态物理年度评论 **5**，183 (2014年)。[5] B. Szabó、G. J. Szöllösi、B. Gönci、Zs. Jurányi、D. Selmeczi 和 T. Vicsek，《组织的集体迁移中的相变》细胞：实验与模型，《物理评论 E》**74**，061908（2006）。[6] C. Malinverno、S. Corallino、F. Giavazzi、M. Bergert、Q. Li、M. Leoni、A. Disanza、E. Frittoli、A. Oldani、E. Mar- tini、T. Lendenmann、G. Deflorian、G. V. Beznoussenko、D. Poulikakos、K. H. Ong、M. Uroz、X. Trepat、D. Parazzoli、P. Maiuri、W. Yu、A. Ferrari、R. Cerbino 和 G. Scita，《拥挤上皮中运动性的内吞再激活》，《自然·材料》**16**，587（2017）。[7] T. Brandstätter、D. B. Brückner、Y. L. Han、R. Alert、M. Guo 和 C. P. Broedersz，《曲率在旋转球形组织中诱导主动速度波》，《自然·通讯》**14**，1643（2023年）。

[8] Y. Shen、J. O'Byrne、A. Schoenit、A. Maitra、R.-M. Mège、R. Voituriez 和 B. Ladoux，《上皮活性固体中的集群运动与巨涨落》，美国国家科学院院刊 122，e2421327122（2025年）。[9] S. Schwabach、S. Santhosh、A. M. Williams、M. Cetera、M. Serra 和 S. Horne-Badovinac，《通过组织几何结构和力化学反馈启动果蝇中的旋转集体迁移》，美国国家科学院院刊 123，e2528342123（2026年）。[10] A. Bricard、J.-B. Caussin、N. Desreumaux、O. Dauchot 和 D. Bartolo，《运动胶体群体中宏观定向运动的涌现》，《自然》503，95（2013年）。[11] V. Schaller、C. Weber、C. Semmrich、E. Frey 和 A. R. Bausch，《驱动丝状体的极性图样》，《自然》467，73（2010年）。[12] T. Vicsek、A. Czirók、E. Ben-Jacob、I. Cohen 和 O. Shochet，《自驱动粒子系统中的新型相变》，《物理评论快报》75，1226（1995年）。[13] S. Das、M. Ciarchi、Z. Zhou、J. Yan、J. Zhang 和 R. Alert，《通过转向远离实现集群运动》，《物理评论 X 》 14，031008（2024年）。[14] C. A. Weber、T. Hanke、J. Deseigne、S. Léonard、O. Dauchot、E. Frey 和 H. Chaté，《振动极性圆盘的长程有序》，《物理评论快报》110，208001（2013年）。[15] K.-D. N. T. Lam、M. Schindler 和 O. Dauchot，《自推进硬圆盘：隐式对齐与集体运动转变》，《新物理学杂志》17，113056（2015年）。[16] P. Baconnier、O. Dauchot、V. Démery、G. Düring、S. Henkes、C. Huepe 和 A. Shee，《自对齐极性活性物质》，《现代物理评论》97，015007（2025年）。[17] J. Tailleur 和 M. E. Cates，《相互作用的跑动-翻滚细菌的统计力学》，《物理评论快报》100，218103（2008年）。[18] Y. Fily 和 M. C. Marchetti，《无对齐自推进粒子的非热相分离》，《物理评论快报》108，235702（2012年）。[19] J. Zhang、R. Alert、J. Yan、N. S. Wingreen 和 S. Granick，《通过转向更高密度区域实现活性相分离》，《自然·物理》17，961（2021年）。[20] S. Bhattacharyya 和 J. M. Yeomans，《由活性流驱动的相分离》，《物理评论快报》130，238201（2023年）。[21] D. Geyer、D. Martin、J. Tailleur 和 D. Bartolo，《冻结群集：极性活性液体中的运动性诱导相分离》，《物理评论X》9，031043（2019年）。[22] M. N. Van Der Linden、L. C. Alexander、D. G. A. L. Aarts 和 O. Dauchot，《对齐型活性胶体中被中断的运动性诱导相分离》，《物理评论快报》123，098001（2019年）。[23] N. Luo、L. Li、M. Yang 和 Y. Peng，《惯性活性物质中的集群相分离》，《物理评论快报》135，178301（2025年）。[24] J. Yan、M. Han、J. Zhang、C. Xu、E. Luijten 和 S. Granick，《通过静电失衡重构活性粒子》，《自然·材料》15，1095（2016年）。[25] J. Iwasawa 、 D. Nishiguchi 和 M. Sano，《交流电场驱动的Janus粒子有序群集中的代数关联与反常涨落》，《物理评论研究》3，043104（2021年）。[26] L. Alvarez、E. Sesé-Sansa、D. Levis、I. Pagonabarraga 和 L. Isa，《活性胶体二元混合物中的协同作用》，美国国家科学院院刊 123，e2609894123（2026年）。[27] S. Gangwal、O. J. Cayre、M. Z. Bazant 和 O. D. Velev，《金属介电粒子的感应电荷电泳》，《物理评论快报》100，058302（2008年）。[28] X. Chao、K. Skipper、C. P. Royall、S. Henkes 和 T. B. Liverpool，《活性偶极胶体的行进链串》，《物理评论快报》134，018302（2025年）。[29] W. D. Ristenpart、I. A. Aksay 和 D. A. Saville，《振荡电势下电极附近胶体粒子周围的电流体动力学流》，《流体力学杂志》575，83（2007年）。

[30] S. Wang、F. Ma、H. Zhao 和 N. Wu，金属—有机杂化二聚体的批量合成及其在电场中的推进，《ACS 应用材料与界面》6，4560（2014）。[31] J. Bialké、H. Löwen 和 T. Speck，自驱动排斥圆盘相分离的微观理论，EPL《欧洲物理快报》103，30008（2013）。[32] H. Chaté、F. Ginelli、G. Grégoire 和 F. Raynaud，无内聚力相互作用的自驱动粒子的集体运动，《物理评论 E》77，046113（2008）。[33] H. Chaté，干燥定向稀薄活性物质，《凝聚态物理年度评论》11，189（2020）。[34] J. Zhang、J. Yan 和 S. Granick，活性胶体簇的定向自组装路径，《德国应用化学》128，5252（2016）。[35] H. H. Wensink、J. Dunkel、S. Heidenreich、K. Drescher、R. E. Goldstein、H. Löwen 和 J. M. Yeomans，生命流体中的介观湍流，美国国家科学院院刊 109，14308（2012）。[36] M. Abkenar、K. Marx、T. Auth 和 G. Gompper，二维中可穿透自驱动杆的集体行为，《物理评论 E》88，062314（2013）。[37] S. Weitz、A. Deutsch 和 F. Peruani，自驱动杆呈现一种相分离态，其特征是存在活性应力并会喷射出极性团簇，《物理评论 E》92，012322（2015）。[38] X.-q. Shi 和 H. Chaté，自推进杆：连接对齐主导与排斥主导的活性物质（2018），arXiv:1807.00294 [cond-mat.soft]。[39] R. Großmann、I. S. Aranson 和 F. Peruani，粒子—场方法将活性物质中的相分离与集体运动联系起来，《自然·通讯》11，5365（2020）。[40] S. Tanida、K. Furuta、K. Nishikawa、T. Hiraiwa、H. Kojima、K. Oiwa 和 M. Sano，一种兼具全局取向有序和集体运动中簇形成的滑行丝状体系统，《物理评论 E》101，032607（2020）。[41] M. Bär、R. Großmann、S. Heidenreich 和 F. Peruani，自推进杆：活性物质的见解与展望，《凝聚态物理年度评论》11，441（2020）。[42] R. Phillips、J. Kondev、J. Theriot 和 H. Garcia，《细胞的物理生物学》，第二版（Garland Science，纽约，2013）。[43] Y. Huang、C. Wu、J. Chen 和 J. Tang，胶体自组装：从被动系统到活性系统，《德国应用化学》136，e202313885（2024）。[44] T. Speck、A. M. Menzel、J. Bialké 和 H. Löwen，活性布朗粒子相分离的动力学平均场理论与弱非线性分析，《化学物理杂志》142，224109（2015）。[45] T. Speck，标量活性物质中的集体力，《软物质》16，2652（2020）。[46] J. Toner 和 Y. Tu，二维动力学 XY 模型中的长程有序：鸟类如何协同飞行，《物理评论快报》75，4326（1995）。[47] J. Toner，流体极性有序群集流体动力学理论的重新分析，《物理评论 E》86，031918（2012）。[48] S. Ramaswamy、R. A. Simha 和 J. Toner，基底上的活性向列相：巨大数目涨落与长时尾，《欧洲物理快报》EPL 62，196（2003）。[49] V. Narayan、S. Ramaswamy 和 N. Menon，群集颗粒向列相中的长寿命巨大数目涨落，Science 317，105（2007）。[50] Y. Tu、J. Toner 和 M. Ulm，群集中的声波与伽利略不变性的缺失，《物理评论快报》80，4819（1998）。[51] S. Ramaswamy，活性物质的力学与统计学，《凝聚态物理年度评论》1

, 323 (2010年)。

[52] D. Geyer、A. Morin 和 D. Bartolo，《极性活性流体的声音与流体动力学》，《自然·材料》17，789（2018年）。[53] P. Chaikin 和 T. Lubensky，《凝聚态物理学原理》（剑桥大学出版社，1995年）。[54] S. C. Takatori、W. Yan 和 J. F. Brady，《游动压力：活性物质中的应力生成》，《物理评论快报》113，028103（2014年）。[55] A. P. Solon、J. Stenhammar、R. Wittkowski、M. Kardar、Y. Kafri、M. E. Cates 和 J. Tailleur，《相互作用活性布朗球体中的压力与相平衡》，《物理评论快报》114，198301（2015年）。[56] J. O'Byrne、A. Solon、J. Tailleur 和 Y. Zhao，《运动性诱导相分离简介》，载于《非平衡软物质》，C. Kurzthaler、L. Gentile 和 H. A. Stone 编（英国皇家化学会，2023年），第107–150页。[57] M. Miller 和 J. Toner，《跟着你的鼻子走：自趋化性及群集中旋节线分解的其他机制》，《物理评论快报》132，128301（2024年）。[58] M. Miller 和 J. Toner，《极性活性物质中的旋节线分解与相分离》，《物理评论 E》109，034606（2024年）。[59] J. Shea 和 H. Stark，《内聚性定向粒子的涌现集体行为》，《欧洲物理杂志 E》48，22（2025年）。[60] T. Hiraiwa，《接触通信驱动理想化迁移细胞的动态自组织》，《物理评论快报》125，268104（2020年）。[61] M. Mangeat、S. Chatterjee、R. Paul 和 H. Rieger，《具有 q 重离散对称性的集群运动：活性波茨模型中的带状到车道状转变》，《物理评论 E》102，042601（2020年）。[62] A. Martín-Gómez、D. Levis、A. Díaz-Guilera 和 I. Pagonabar-raga，《具有极性排列的活性布朗粒子的集体运动》，《软物质》14，2610（2018年）。[63] A. Szabó、E. Theveneau、M. Turan 和 R. Mayor，《形态发生过程中组织相互作用产生的神经嵴流动》，《PLOS计算生物学》15，e1007002（2019年）。[64] K. Weißenbruch 和 R. Mayor，《分子与机械信号协同调控的神经嵴迁移》，《细胞与发育生物学年度评论》41，159（2025年）。[65] I. D. Couzin 和 N. R. Franks，《自组织车道形成》

以及行军蚁的优化交通流，《英国皇家学会会刊B辑：生物科学》270，139（2003）。[66] Z. Wu、C. Zhang、X. Gu、I. Duporge、L. F. Hughey、J. A. Stabach、A. K. Skidmore、J. G. C. Hopcraft、S. J. Lee、P. M. Atkinson、D. J. McCauley、R. Lamprey、S. Ngene 和 T. Wang，深度学习使得能够基于卫星监测异质景观中大规模陆生哺乳动物种群，《自然·通讯》14，3072（2023）。[67] D. Li 和 Y.-l. Wang，位点依赖性细胞间接触介导的细胞迁移协调，美国国家科学院院刊115，10678（2018）。[68] T. Fujimori、A. Nakajima、N. Shimada 和 S. Sawai，通过接触激活运动和趋化性实现集体细胞迁移驱动的组织自组织，美国国家科学院院刊116，4291（2019）。[69] R. Alert 和 X. Trepat，集体细胞迁移的物理模型，《凝聚态物理年度评论》11，77（2020）。[70] T. B. Jones，《颗粒电力学》（剑桥大学出版社，英国剑桥，1995年）。[71] V. Shilov、A. Delgado、F. Gonzalez-Caballero 和 C. Grosse，基于薄双电层理论，研究包括滞留层表面电导率在内的非导电球形颗粒悬浮液宽频介电弛豫，《胶体与表面：物理化学与工程方面》192，253（2001）。[72] P. García-Sánchez、Y. Ren、J. J. Arcenegui、H. Morgan 和 A. Ramos，金包覆微球的交流电动性质，《朗缪尔》28，13861（2012）。[73] A. J. Pascall 和 T. M. Squires，可控受污染电极上的诱导电荷电渗，《物理评论快报》104，088301（2010）。[74] J. Yan、S. C. Bae 和 S. Granick，编程于磁性Janus粒子中的胶体超结构，《先进材料》27，874（2015）。[75] S. Kim 和 S. J. Karrila，《微流体动力学：原理与精选应用》（巴特沃思-海涅曼，波士顿，1991年）。

附录 A：方法

1. 实验

a. 粒子合成

按照参考文献中所述的方案 [24], 在标准μ载玻片上制备直径为3微米的二氧化硅颗粒（Tokuyama）亚单层。随后，使用电子束蒸发器，先在载玻片上垂直沉积6纳米钛，再沉积5纳米氧化硅（SiO_2）。之后用异丙醇和去离子水清洗样品，最后将其在去离子水中超声处理，以收集Janus粒子单体。

b. 实验装置

两片盖玻片（SPI Supplies）均涂覆氧化铟锡以使其导电，随后涂覆 25 nm 厚的氧化硅，以防止粒子黏附在其表面。两片盖玻片中央均有一个直径为 9 mm 的孔，由厚度为 120-μm 的间隔垫片（GraceBio SecureSeal）隔开，我们将 Janus 粒子悬浮液置于其中。

使用函数发生器（Agilent 33522A）在两片盖玻片之间施加交流电压。使用 CMOS 相机（Edmund Optics 5012M GigE）以 20 ms 的时间分辨率拍摄显微图像和视频。使用 10× 和 20× 空气物镜在倒置显微镜（Axiovert 200）上对样品池进行成像。观测区域分别为 768 μm × 576 μm 和 384 μm × 288 μm。

c. 图像分析

图像处理使用 MATLAB 和自行编写的代码完成。

d. 实验数据分析

由于尺寸较大，我们只能以低倍率（10×）对流进行成像。在此倍率下，我们无法分辨单个粒子的位置和取向，尤其是在非常密集的流内部。因此，我们使用粒子图像测速来获取流场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t)$；此前的类似实验发现，流场是粒子取向的良好替代指标 [13]。我们还通过对图像进行二值化，将其划分为大小为 159×119 的网格，并用每个网格单元中的占用像素数除以一个孤立二聚体的像素数，来估算局部面积分数 $\phi(\boldsymbol{r},\ t)$。

我们通过将面积分数场阈值设为其时间平均值的 1.5× 倍，识别每个视场中的高密度簇。在得到的二值化数据中，我们确定连通分量并填补小孔洞。随后将其作为高密度簇的分割掩膜。

随后，我们对每个簇的掩膜拟合椭圆，以获得其长轴的取向。我们还将掩膜应用于流场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t)$，提取簇内的流场，并以其平均取向作为团簇极性的近似指标。然后，我们将流角定义为拟合椭圆长轴与平均速度矢量之间的夹角。

2. 模拟

a. 模拟方案

我们对方程（1）和（2）进行布朗动力学模拟，以模拟 $N = 10^4$ 方形盒子中的 Janus胶体二聚体的集体行为，盒子边长为 L ，并采用周期性边界条件。我们使用补充材料中表 I所列的模拟单位和参数值。我们采用显式Euler-Maruyama方法，以时间步长$\Delta t = 10^{-5}$ 进行时间演化，每次模拟的总时长为 $T = 150$ 个模拟时间单位，相当于 4 小时 10 分钟。

为提高性能，我们将相互作用截断于距离 $r_{\mathrm{cut}} = 8$。我们使用细胞列表算法追踪粒子邻居。在模拟中，我们通过调整模拟盒子的尺寸 L来改变总面积分数$\phi_0 = NA/L^2$，同时保持N和粒子面积 A不变。我们在 $\phi_0 \in [0.002, 0.23]$和 $v_0 \in [0, 18]$ μm/s 的范围内改变面积分数 ϕ_0和自推进速度 v_0。我们使用这些文章中的模型，并依据 [13, 19]中的结果对代码进行基准测试。

b. 对分布函数

我们利用模拟数值计算对分布函数 $g(r,\ \varphi,\ \theta)$，它是极坐标下相对粒子位置（$r,\ \varphi$）以及相对粒子取向 θ 的函数。含有 $N = 10000$个粒子的模拟达到稳态后，我们使用箱宽为 $\Delta r = 0.1$ 和 $\Delta\varphi = \Delta\theta = \pi/180$ 的分箱构建直方图 $\mathcal{N}(r,\ \varphi,\ \theta)$，并对 $t_{\mathrm{run}} = 50$ 个快照取平均。随后，我们按照参考文献 [13],中的方法计算对分布函数，使用

$$g(r,\varphi,\theta) = \frac{2\pi\mathcal{N}(r,\varphi,\theta)}{A(r)Nt_{\mathrm{run}}\rho\Delta\theta}, \tag{A1}$$

其中，$A(r) = r\Delta r\Delta\varphi$ 是径向宽度为 Δr 、角开度为 $\Delta\varphi$ 且径向距离为 r处的环形扇区面积。

c. 确定粒子簇的几何形状

在我们的模拟中，我们通过识别高密度粒子簇，并比较簇的形状与其净极性，来量化活性粒子形成流的倾向。如果两个粒子之间的距离小于某个截断距离 r_{cl}，我们就将它们判定为属于同一个簇。

我们根据 r_{cl} 对分布函数的形状 g（$r,\ \varphi,\ \theta$）来选择，如扩展数据图6所示。在

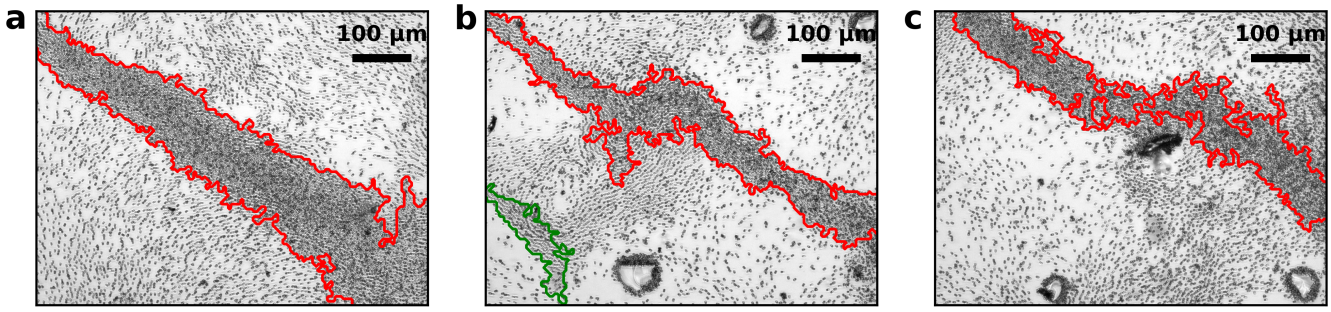
流相中，g 沿参考粒子轴（$y = 0$）以及垂直于该轴的方向（$x = 0$）均显示出清晰的峰值，这分别反映了链中粒子之间以及构成一条流的链之间的典型距离（见扩展数据图6c）。通过选择略高于这些数值的截断距离，聚类算法可以识别出属于同一条链或同一条流的粒子群。

然而，在集群转变附近观察到的行进带中，由于转变发生在较低的面积分数下，粒子间距要大得多。因此，使用流相中由粒子对分布函数得到的截断距离进行聚类，将无法识别出任何带。因此，对于低面积分数（r_{cl}（$\phi \leq 0.07$），我们采用更大的截断距离，其选取位置大约在成带区域径向分布函数主峰之后的极小值处（见扩展数据图6a）。在所有条件下，采用两种 r_{cl} 选择进行分析的结果见扩展数据图6b 和扩展数据图6d。

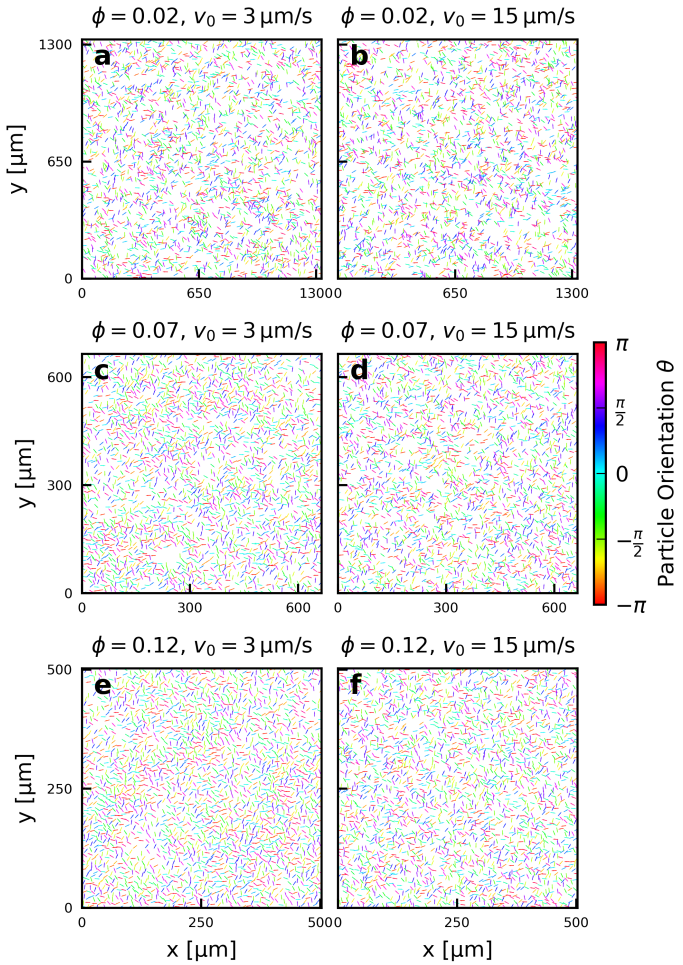
识别出簇后，我们会分析其形状。这需要谨慎处理周期性边界条件。首先，我们构建簇中各点的邻接图。然后，从一个参考粒子开始，对邻接图进行广度优先遍历，并将每个粒子的位置转换为相对于参考粒子的最小镜像。

将整个簇展开后，我们对粒子位置点云拟合一个椭圆，并确定簇的长轴。随后计算拟合椭圆的长轴与簇极性方向之间的夹角，由此得到流角 ψ_{s}。我们只统计包含至少 5% 粒子的簇（以避免将密度的短暂局部涨落计入统计），并且其平均面积分数至少比全局面积分数ϕ_0 高 20% 的簇（以避免将均匀态中的大块区域误识别为潜在的流或带）。

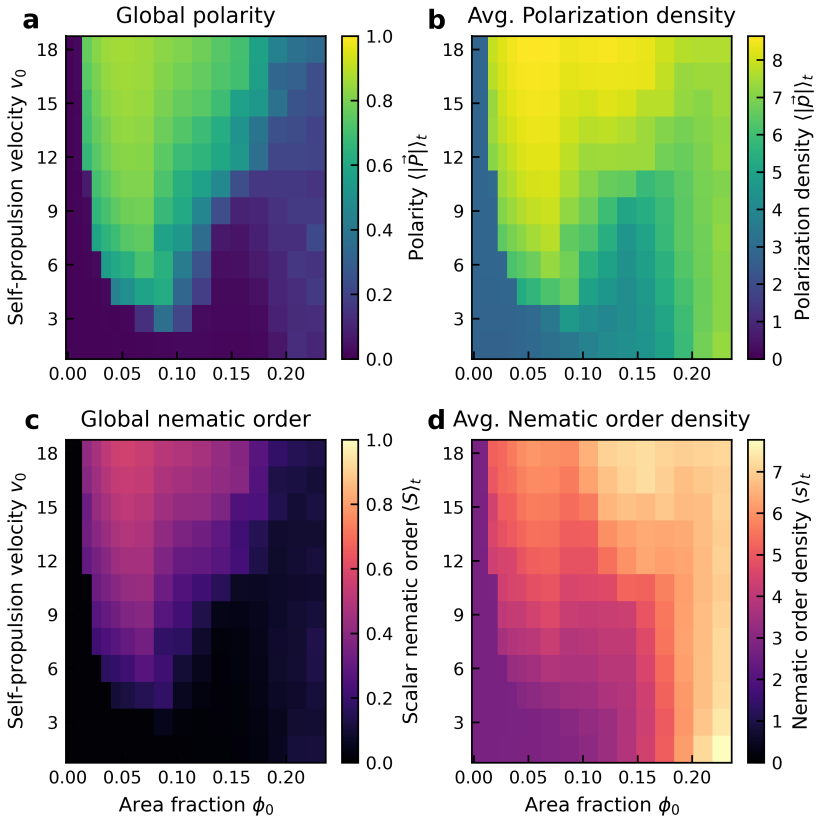
为获得绘制在图3g中的数值，我们对最大簇的$\cos(2\psi_{\mathrm{s}})$随时间取平均值；如果某个时间点不存在符合条件的簇，则将该时间点的值设为零。



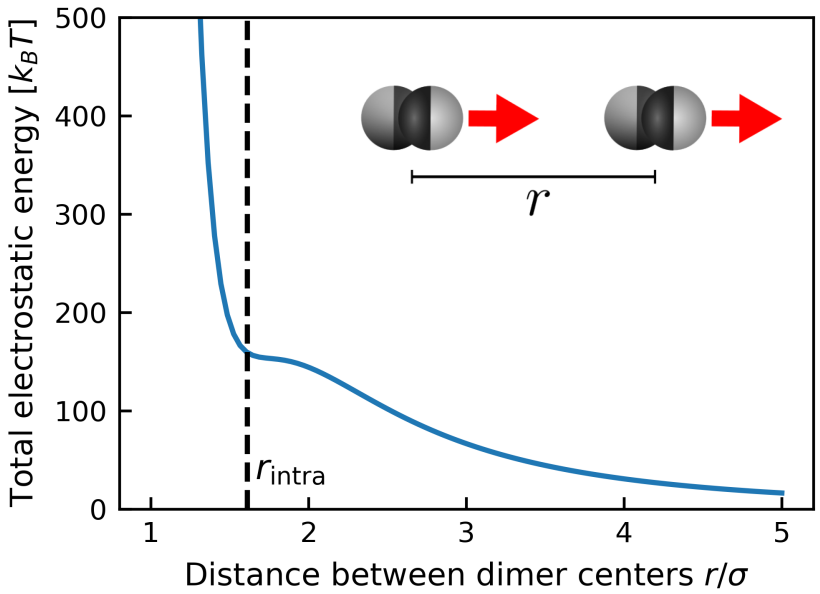
扩展数据图1 Janus胶体二聚体实验中的流实例。这里展示了二聚化Janus胶体实验中观测到的其他流实例，并使用根据面积分数场获得的分割掩膜将其标出。



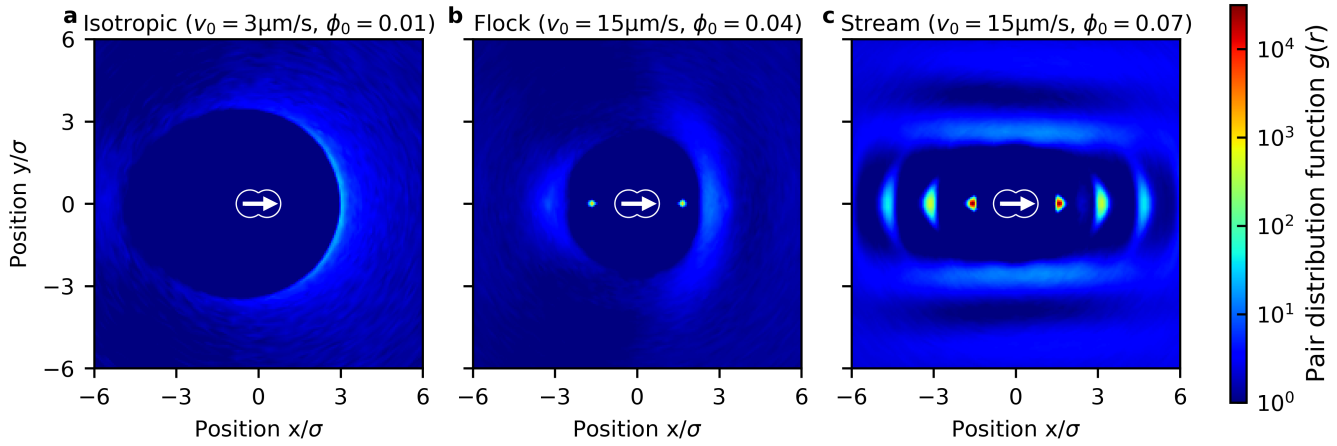
扩展数据图2 头尾不对称相互作用是集群运动的必要条件。为展示头部和尾部单体之间的垂直偏移量$2h$（图1b）的重要性，我们使用$h = 0$对微观模型进行模拟。这使相互作用变为头尾对称。在这种情况下，既未观察到群集，也未观察到流，系统保持各向同性。



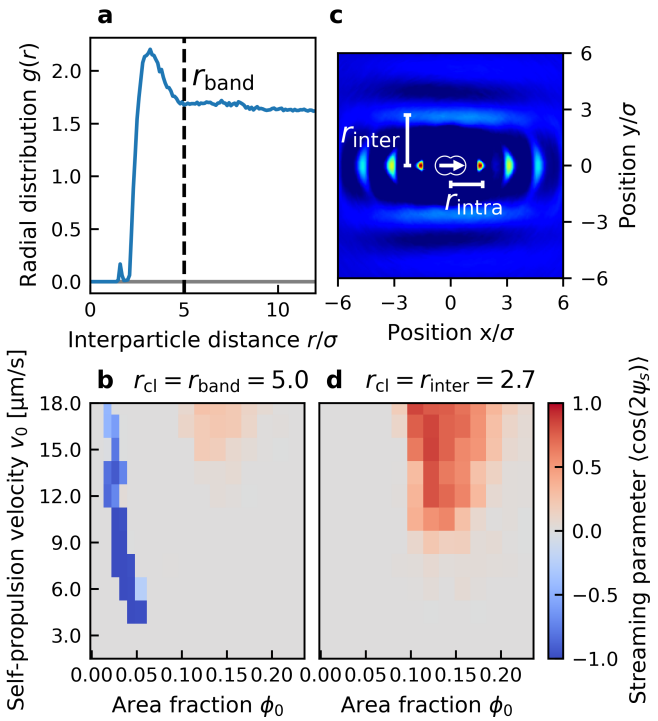
扩展数据图3 全局与局部有序性。我们通过绘制时间平均的（**a**）全局极性和（**b**）局部极化密度，以及（**c**）全局向列序和（**d**）局部向列序密度，比较系统中的全局与局部有序性。尽管在高面积分数下全局有序性会降低，尤其是在自推进速度较低时，平均局部有序性仍然较高，甚至有所增加。这是因为流具有较高的局部极化，但可能发生弯曲，从而降低全局极性。



扩展数据图4 链并非主聚体的束缚态。我们绘制了两个对齐的二聚体之间的相互作用能（由电偶极-偶极相互作用导致）随二者间距离的变化关系，如插图示意图所示。由于不存在局部极小值，因此不存在由能垒保护的束缚态。不过，相互作用能存在一个平台区，对应于链中粒子之间的典型距离（见图4和扩展数据图6）。



扩展数据图5 对分布函数。我们的流体动力学理论的系数由粒子相互作用和相关性决定。我们通过在模拟中对对分布函数 $g(\boldsymbol{r},\ \theta)$ 进行采样来获得相关性。这里，我们展示了 g 在积分掉相对取向 θ 后的结果：（**a**）各向同性相，（**b**）群聚相，以及（**c**）流相。白色箭头表示参考二聚体的取向，其形状用于标示尺度。在群聚相中，参考二聚体前后已经可以看到两个峰，表明链形成初现。在流相中，参考粒子前后出现了更多峰，表明介观多粒子链的形成。相邻链共同形成流，其表现为与参考二聚体平行的模糊条纹。



扩展数据图6 不同簇距离截断值选择下的流参数。为计算图3g中所示的流参数 $\langle\cos(2\psi_s)\rangle$，我们将模拟中的粒子分组成簇。如果两个粒子之间的距离 r，且满足 $r < r_{cl}$，则认为它们属于同一簇。对于低和高全局面积分数 ϕ_0，我们分别采用聚类截断值 r_{cl} 的两种不同取值。（a）对于低面积分数，我们通过在条带形成相的径向分布函数 $g(r)$ 的主峰之后寻找最小值，得到截断值 $r_{cl} = 5.0$（此处 $\phi_0 = 0.02$ 和 $v_0 = 15\,\mu$ m/s）。（b）使用该截断距离时，我们能够正确识别群集转变附近出现的行进带，此时 $\langle\cos(2\psi_s)\rangle \approx -1$。然而，在高面积分数下，使用较大的截断值会不加区分地将系统的大区域识别为高密度簇，因此无法正确识别流。（c）因此，我们使用流相中的对分布函数（此处 $\phi_0 = 0.12$ 和 $v_0 = 15\,\mu$ m/s）来识别流中相邻链之间的距离，并将其用作聚类截断距离，即 $r_{cl} = r_{inter} = 2.7$。我们还标示了如何利用对分布函数测量同一条链中二聚体之间的距离（$r_{intra} = 1.7$），并据此识别哪些粒子属于同一条链（图3i）。（d）这使我们能够正确识别流的形成，此时 $\langle\cos(2\psi_s)\rangle \approx +1$。然而，该截断距离过小，无法捕捉在较低密度下出现的行进带。

补充材料

目录

S1. 参数估计 16
A. Janus胶体的介电响应 16
1. 介电半球的极化率 17
2. 金属半球的极化率 17
B. 偶极子的位置与二聚体几何结构 17
1. 介电半球中偶极子的位置 17
2. 金属半球中偶极子的位置 17
C. 胶体二聚体的摩擦与扩散系数 17
1. 摩擦系数 18
2. 扩散系数 18

S2. 微观模型 18

S3. 粗粒化 19
A. Smoluchowski方程 20
B. 相互作用的梯度与傅里叶展开 21
C. 流体动力学方程的推导 22
D. 非手性系统的流体动力学 24
1. 密度 24
2. 极化 25
3. 向列序密度 26

S4. 线性稳定性分析 26
A. 均匀各向同性态的线性稳定性 26
B. 均匀集群态的线性稳定性 27

S5. 补充影片 28

S1. 参数估计

在此，我们确定了与实验相关的物理参数取值，并将其用于模拟，包括 Janus胶体中电偶极子的大小和位置，以及 Janus胶体二聚体的平移和转动摩擦系数。所有参数均汇总于 表 I，其中也包括它们以模拟单位表示的取值。

A. Janus胶体的介电响应

Janus粒子是由二氧化硅制成的球体，直径为 $2R = 3\ \mu$m。其中一个半球镀有$d_{\mathrm{Ti}} = 6$ nm钛，随后再添加一层 $d_{\mathrm{SiO_2}} = 5$ nm厚的氧化硅保护层。施加于电极上的交流电压（振幅为 $V = 10$ V，频率为 $\nu = 30$ kHz）会产生电场 $\boldsymbol{E}_0$，进而在每个半球中诱发电极化。已知电极间距为 120 μm，该电场的强度为$E_0 = 83$V/mm。

金属（介电质）半球的感应复偶极矩 $\boldsymbol{d}^c_{\mathrm{m/d}}$ 与外加电场成正比，

$$\boldsymbol{d}^c_{\mathrm{m/d}}(\nu) = \alpha_{\mathrm{m/d}}(\nu)\boldsymbol{E}_0, \tag{S.1}$$

其中，$\alpha_{\mathrm{m/d}}(\nu)$ 是相应半球随频率变化的复极化率，我们假设它等于由相同材料制成的完整球体极化率的一半 [70]:

$$\alpha_{\mathrm{m/d}}(\nu) = 2\pi\epsilon_{\mathrm{w}}K_{\mathrm{m/d}}(\nu)R^3, \tag{S.2}$$

其中，ϵ_{w} 是周围水体的介电常数。克劳修斯-莫索提函数 $K_{\mathrm{m/d}}(\nu)$ 描述了金属（介电质）半球随频率变化的响应，这种响应由材料中电子的动态响应（金属中的欧姆损耗）以及不同介电性质材料界面处的麦克斯韦-瓦格纳效应所引起。这些因素会使感应偶极矩相对于驱动场产生相位滞后。不过，我们只关注粒子之间的时间平均相互作用，因为交流频率 ν 远高于系统中的所有其他时间尺度。因此，我们可以忽略相移，并采用有效极化率

$$\alpha_{\mathrm{m/d}}(\nu) \approx 2\pi\epsilon_{\mathrm{w}}|K_{\mathrm{m/d}}(\nu)|R^3. \tag{S.3}$$

现在我们继续计算两个半球的克劳修斯-莫索蒂函数。这些函数此前也已针对我们实验中使用的 Janus粒子进行测量 [24]。

表 I 参数估计值及模拟单位，基于参考文献 [19]。

描述和符号	估计物理值	模拟单位下的值
胶体直径 $\sigma = 2R$	$3\ \mu$m	1
二聚体转动扩散系数 D_r	0.01 秒$^{-1}$	1
热能 k_BT	4.11×10^{-21} J	1
溶剂介电常数 ϵ_w	6.95×10^{-10} C^2/(N m^2)	1
二聚体平移摩擦系数	32.5 mPa·s μ米	0.71
二聚体旋转摩擦系数	330 毫帕·秒 μm^3	0.80
偶极子间距 ℓ	1.5 μm	0.5
屏蔽长度 λ	120 μm	40
垂直偶极偏移量 $2h$	2.49 μ米	0.83
介电偶极矩大小 $\lvert\boldsymbol{d}_{\rm d}\rvert$	4.64×10^{-22} 库仑·米	52.84
金属偶极矩大小 $\lvert\boldsymbol{d}_{\rm m}\rvert$	1.18×10^{-21} 库仑·米	134.36

1. 介电半球的极化率

对于介电质半球，我们使用标准的克劳修斯-莫索蒂表达式 [70, 71]

$$K_{\rm d}(\nu) = \frac{\epsilon_{\rm s}^c(\nu) - \epsilon_{\rm w}^c(\nu)}{\epsilon_{\rm s}^c(\nu) + 2\epsilon_{\rm w}^c(\nu)}, \tag{S.4}$$

其中，$\epsilon_{\rm s/w}^c$ 是二氧化硅（水）的复介电常数：

$$\epsilon_{\rm s/w}^c(\nu) = \epsilon_{\rm s/w} - i\frac{\sigma_{\rm s/w}}{2\pi\nu} \approx \epsilon_{\rm s/w}. \tag{S.5}$$

在此表达式中，$\epsilon_{\rm s/w}$ 是二氧化硅（水）的介电常数，$\sigma_{\rm s/w}$是其电导。

2. 金属半球的极化率

对于金属半球，主要的极化机制是金属-水界面处电双层的电容 $C_{\rm DL} = \epsilon_{\rm w}/\lambda_D$，其由德拜长度 λ_D决定。去离子水的德拜长度约为 $\lambda_D = 250$nm [24]。

不考虑氧化硅层时，由电双层电容引起的克劳修斯-莫索提函数可表示为 [72]

$$K_{\rm m}(\nu) = \frac{(\nu/\nu_c)^2 - 1/2}{(\nu/\nu_c)^2 + 1} + i\frac{3}{2}\frac{(\nu/\nu_c)}{(\nu/\nu_c)^2 + 1}, \tag{S.6}$$

对应临界频率 $\nu_c = \frac{2\sigma}{RC_{\rm DL}}$，其中 σ 是去离子水的电导率。

然而，氧化硅层会导致临界频率发生偏移，$\nu_c \to \tilde{\nu}_c = (1+\delta_1)\nu_c$，其中 $\delta_1 = \epsilon_w d_{\rm SiO_2}/\lambda_D\epsilon_{\rm SiO_2}$，~~˜~~，并导致重整化 $K(\nu) \to K(\nu) = K(\nu)/(1+\delta_2)$，其中 $\delta_2 = \epsilon_w d_{\rm SiO_2}/2R\epsilon_{\rm SiO_2}$ [73]。

需要强调的是，这项计算只能粗略估算金属半球偶极强度。我们的计算假设金属涂层是理想导体，但我们实验中的钛涂层非常薄（$d_{\rm Ti} = 6$ nm），以至于无法形成连续膜。因此，电荷无法在金属半球表面自由重新分布，这会影响偶极大小和位置 [74]。因此，我们并不声称这一结果在定量上准确，但它提供了合理的估算。

B. 偶极子的位置与二聚体几何结构

本节讨论 Janus胶体中电偶极子的位置。由于胶体二聚体由两个单体通过金属偶极子相互对齐而形成，因此偶极间距也决定了二聚体的整体几何形状。

1. 介电半球中偶极子的位置

我们假设二氧化硅球的电偶极子位于感应表面电荷分布的质心处。在此假设下，如文献 [34]中的计算结果所示，该偶极子的位置相对于胶体中心偏移了 $\ell_{\rm d} = 3R/8$。

2. 偶极子在金属半球中的位置

我们实验中使用的钛涂层非常薄（$d_{\rm Ti} = 6$ nm），因此金属薄膜并不连续，而是呈斑块状 [74]。因此，有效导电表面积较小，电荷无法在不相连的区域之间自由重新分布。结果是，有效偶极子相对于胶体中心的偏移量将大于介电质半球的偏移量。不过，很难得到理论估计值。

因此，我们转而对磁性Janus颗粒中的有效偶极子偏移进行实验测量（参考文献 [74]中的图1d）。通过将这些数据外推至 $d_{\rm Ti} = 6$ nm，我们得到有效偶极子偏移量为 $\ell_{\rm m} \approx 0.56R$。

因此，金属偶极子与介电质偶极子之间的总距离为 $\ell = \ell_{\rm m} + \ell_{\rm d} \approx 0.935R \approx R$。我们还可以利用金属偶极子偏移量 $\ell_{\rm m}$ 来确定$2h$ 形成偶极子的头部和尾部单体之间的垂直偏移，如图 S1a所示，其数值为$h = \sqrt{R^2 - \ell_{\rm m}^2} \approx 0.83R$。

与金属半球偶极矩大小的情况一样，我们强调，$\ell_{\rm m}$（以及由此推导出的量 ℓ和 h）只能视为近似值，因为胶体表面不规则的钛涂层使精确计算无法实现。

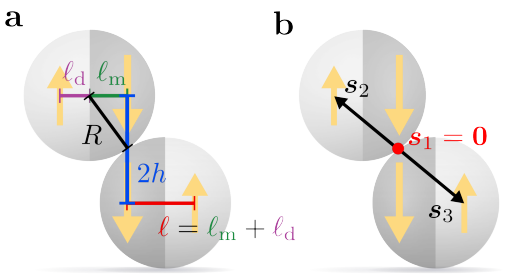


图 S1 Janus胶体二聚体的几何结构。二聚体由两个半径为 R 的单体组成，其金属半球彼此接触，使其中诱导的两个偶极子方向一致。（**a**）金属（介电质）半球的偶极子分别偏离单体质心 ℓ_m（ℓ_d），使二者之间的总距离为 $\ell = \ell_m + \ell_d$。两个单体之间的垂直偏移为 $2h$。（**b**）在我们的模型中，每个二聚体 i 包含三个电偶极子，它们分别从质心（红点）沿向量 $\boldsymbol{s}_{m_i}$、$m_i = 1$、2、3偏移。

C. 胶体二聚体的摩擦系数和扩散系数

Janus 粒子单体呈球形，因此可以使用标准的斯托克斯阻力确定其平移和旋转摩擦系数 $\xi_t^{mono} = 6\pi\eta R$ 和 $\xi_r^{mono} = 8\pi\eta R^3$。这里，$\eta = 0.89$ mPa s 是周围流体（水）的黏度，$R = 1.5$ μm 是胶体的半径。二聚体所受阻力更大，因为它们由两个单体组成，这也意味着它们的扩散常数更低。

1. 摩擦系数

为确定二聚体的平移和旋转摩擦系数，我们将二聚体的几何结构简化为两个半径为 R、位于平面内且彼此接触的球体。球心分别位于$\boldsymbol{r}_1 = R\boldsymbol{x}$和 $\boldsymbol{r}_2 = -R\boldsymbol{x}$。每个胶体都可视为一个斯托克斯点力，由此产生的速度场是各个流场的线性叠加。

因此，我们可以将作用于胶体 j 的力 $\boldsymbol{F}_j$ 与其在胶体 i上诱导的速度 $\boldsymbol{v}_i$ 联系起来，关系为 [75]

$$\boldsymbol{v}_i = \mathbf{M}_{ij}\boldsymbol{F}_j. \tag{S.7}$$

斯托克斯阻力使自迁移率张量为

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{22} = \frac{1}{6\pi\eta R}\mathbf{I}, \tag{S.8}$$

与单位张量**I**成正比；而对于一个胶体对另一个胶体的影响，则通过求解斯托克斯方程来得到迁移率张量

$$\mathbf{M}_{12} = \frac{1}{8\pi\eta}\mathbf{G}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \tag{S.9}$$

其中**G**($\boldsymbol{r}$)是奥辛张量

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}\mathbf{I} + \frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}. \tag{S.10}$$

在我们的情形中，当 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = 2R\boldsymbol{x}$时，非对角迁移率张量为

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21} = \frac{1}{16\pi\eta R}(\mathbf{I} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}). \tag{S.11}$$

现在考虑二聚体沿 $\boldsymbol{x}$方向的平移。在这种情况下，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = V\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = F\boldsymbol{x}$，总作用力为 $\boldsymbol{F}_{tot} = 2F\boldsymbol{x}$。于是，

$$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{M}_{11}\boldsymbol{F}_1 + \mathbf{M}_{12}\boldsymbol{F}_2 = \left(\frac{1}{6\pi\eta R} + \frac{1}{8\pi\eta R}\right)\boldsymbol{F}, \tag{S.12}$$

由此可得

$$\xi_t^{\parallel} = \frac{F_{tot}}{V} = \frac{2F}{V} = \frac{48\pi\eta R}{7} \approx 1.14 \cdot \xi_t^{mono}. \tag{S.13}$$

同样，我们可以考虑沿 $\boldsymbol{y}$ 方向平移，以计算 $\xi_t^{\perp} = 96\pi\eta R/11 \approx 1.45 \cdot \xi_t^{mono}$。为避免各向异性摩擦带来的复杂性，我们在模拟中采用这两个值的平均值，即 $\xi_t^{dimer} = 1.3 \cdot \xi_t^{mono}$。

在确定旋转摩擦系数时，我们需要同时考虑两个单体绕各自轴线的旋转（每个单体贡献 ξ_r^{mono}），以及单体绕质心的平移。单体以速度 $\boldsymbol{v}_1 = \Omega R\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{v}_2 = -\Omega R\boldsymbol{y}$ 运动，并受到力 $\boldsymbol{F}_1 = F\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{F}_2 = -F\boldsymbol{y}$的作用。于是，

$$\boldsymbol{v}_1 = \Omega R\boldsymbol{y} = \mathbf{M}_{11}\boldsymbol{F}_1 + \mathbf{M}_{12}\boldsymbol{F}_2 = \left(\frac{1}{6\pi\eta R} - \frac{1}{8\pi\eta R}\right)\boldsymbol{F}_1, \tag{S.14}$$

二聚体所受的力矩为 $\tau_z = R\cdot F + (-R)(-F) = 2RF$。由球体平移运动导致的绕 $\boldsymbol{z}$ 旋转的摩擦系数为

$$\xi_r^{tr,z} = \frac{\tau_z}{\Omega} = \frac{2R^2}{1/(6\pi\eta R) - 1/(8\pi\eta R)} = \frac{95\pi\eta R^3}{5}. \tag{S.15}$$

综合考虑单体自旋和平移所产生的影响，我们得到总摩擦系数:

$$\xi_r^{dimer} = 2\xi_r^{mono} + \xi_r^{tr,z} = \frac{176\pi\eta R^3}{5} \approx 4.4 \cdot \xi_r^{mono}. \tag{S.16}$$

2. 扩散系数

正如先前对这一实验系统的研究所示，单体胶体的旋转扩散主要由电极表面的不完善造成 [19]。由于旋转涨落并非源于热运动，我们无法使用旋转斯托克斯–爱因斯坦关系 $D_r^{SE} = k_BT/\xi_r$来确定旋转摩擦系数ξ_r^{dimer}增加对旋转扩散系数D_r^{dimer}的影响。不过，我们没有对单个

二聚体的实验观测，因而无法直接测量二聚体的旋转扩散。

相反，我们来考虑粒子取向 θ 的涨落，

$$\xi_{\mathrm{r}}\dot{\theta} = \tau(t), \tag{S.17}$$

其中 $\tau(t)$ 是由非均匀基底引起的随机力矩。通过求解 方程 (S.17)，我们得到 θ的方差，

$$\sigma_\theta^2 = \langle\theta^2(t)\rangle - \langle\theta(t)\rangle^2 = \frac{1}{\xi_{\mathrm{r}}^2}\int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^t \mathrm{d}t''\langle\tau(t')\tau(t'')\rangle. \tag{S.18}$$

我们假设随机力矩$\langle\tau(t')\tau(t'')\rangle$的相关性由基底性质决定，因此与 ξ_{r}无关。因此 $D_{\mathrm{r}} \sim 1/\xi_{\mathrm{r}}^2$，这意味着二聚体的旋转扩散系数比单体低 $4.4^2 \approx 20$ 倍。

对于单体 Janus 胶体 [19], , 平移扩散已经小到可以忽略；对于尺寸更大的二聚体，平移扩散则更低。因此，我们在模拟中忽略了它。

S2. 微观模型

这里，我们详细介绍模拟中使用的微观模型。如正文所述，我们将每个二聚体i 视为一个活性布朗粒子，其质心为 $\boldsymbol{r}_i$，以速度 v_0 沿着$\hat{\boldsymbol{n}}_i(\theta_i) = (\cos\ \theta_i,\ \sin\ \theta_i)^T$ 推进，其中 θ_i 为粒子取向。粒子之间通过成对的力 $\boldsymbol{F}_{ji}$ 和力矩 Γ_{ji}相互作用。我们仅考虑感应电偶极子之间的静电相互作用。具体而言，我们忽略位阻和流体动力学相互作用。此外，粒子还受到旋转噪声 D_{r}，以及平移和旋转摩擦系数 ξ_{t} 和ξ_{r}的作用。这由朗之万方程描述

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = v_0\hat{\boldsymbol{n}}_i(\theta_i) + \frac{1}{\xi_{\mathrm{t}}}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ji}, \tag{S.19a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\xi_{\mathrm{r}}}\sum_{j\neq i}\Gamma_{ji} + \sqrt{2D_{\mathrm{r}}}\eta_i(t), \tag{S.19b}$$

其中 $\eta_i(t)$是满足$\langle\eta_i(t)\eta_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$的高斯白噪声。

要计算两个粒子之间的力和力矩，我们必须将粒子电偶极子之间所有成对相互作用的贡献相加。由于每个单体有两个诱导偶极子，一个位于介电质中（大小为 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{d}}$），另一个位于金属半球中（大小为 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{m}}$），二聚体 i 包含四个偶极子，我们用索引 m_i对其进行标记。位于 $\boldsymbol{r}_i$、取向为 θ_i 的二聚体受到位于 $\boldsymbol{r}_j$、取向为 θ_j 的二聚体作用时所受的相互作用力 $\boldsymbol{F}_{ji}$ 和力矩 $\boldsymbol{\Gamma}_{ji}$ 为:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = e^{-|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|/\lambda}\sum_{m_i,m_j}\boldsymbol{F}(m_i,m_j) \tag{S.20a}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ji} = e^{-|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|/\lambda}\sum_{m_i,m_j}\boldsymbol{s}_{m_i}\times\boldsymbol{F}(m_i,m_j). \tag{S.20b}$$

这里，$\boldsymbol{F}(m_i,\ m_j) = -\boldsymbol{\nabla}U(m_i,\ m_j)$ 是偶极子 m_i 与 m_j之间的力，而 $\boldsymbol{s}_{m_i}$ 是偶极子 m_i 相对于二聚体 i 质心的偏移量（见图 S1b）。我们还考虑了电极之间的间距为 $\lambda = 120\ \mu$m 时对相互作用的屏蔽作用，因此添加了一个指数前因子。两个偶极子的能量为 U：

$$U(m_i,m_j) = \frac{\boldsymbol{d}_{m_i}\cdot\boldsymbol{d}_{m_j} - 3(\boldsymbol{d}_{m_i}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{m_i,m_j})(\boldsymbol{d}_{m_j}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{m_i,m_j})}{4\pi\epsilon_{\mathrm{w}}|\boldsymbol{r}_{m_i,m_j}|^3}, \tag{S.21}$$

其中 ϵ_{w} 是溶剂的介电常数，$\boldsymbol{r}_{m_i,\ m_j} = (\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{s}_{m_i}) - (\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{s}_{m_j})$是从一个偶极子指向另一个偶极子的向量。相应的单位向量为$\hat{\boldsymbol{r}}_{m_i,\ m_j} = \boldsymbol{r}_{m_i,\ m_j}/|\boldsymbol{r}_{m_i,\ m_j}|$。

在实验中，粒子只能绕 z轴旋转，因为电场使粒子赤道始终垂直于电场。这可能是电泳效应所致，不过感应电荷电渗也可能发挥作用 [27]。因此，我们只考虑沿 z 轴的力矩，$\Gamma_{ji} = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{ji}$。

一种简化方法很有帮助。计算 $4^2 = 16$ 成对相互作用的计算成本很高，而且我们不知道电荷如何在两个金属涂层半球之间重新分布，尤其是考虑到它们的不规则结构（见 S1 B 2 节）。因此，我们用一个大小为原来两倍的单个偶极子替代两个金属半球偶极子，$2\boldsymbol{d}_{\mathrm{m}}$，置于二聚体的质心处，从而只需计算 $3^2 = 9$相互作用。

总而言之，我们模型中的一个二聚体 i包含三个电偶极子 $m_i = 1,\ 2,\ 3$，其大小为 $\boldsymbol{d}_{m_i}$，位置为 $\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{s}_{m_i}$：第一个是大小为 $\boldsymbol{d}_1 = 2\boldsymbol{d}_{\mathrm{m}}$的中心偶极子，位于质心处，即 $\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{0}$。另外两个是大小为 $\boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{d}_3 = \boldsymbol{d}_{\mathrm{d}}$ 的外侧电偶极子，它们相对于质心偏移了 $\boldsymbol{s}_2 = -\boldsymbol{s}_3 = \ell\hat{\boldsymbol{n}}_i(\theta_i) + h\hat{\boldsymbol{z}}$。我们使用方程（S.20a）和（S.20b）计算这些粒子之间的相互作用。

S3. 粗粒化

本节中，我们基于微观运动方程方程（S.19），推导描述 Janus粒子二聚体集体行为的流体动力学理论。为此，我们扩展了参考文献 [13,19]中使用的方法：首先，我们从 Smoluchowski方程推导单粒子分布函数 $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\ \theta_1;\ t)$ 的动力学。Smoluchowski方程描述了如何利用 N粒子系统的 N粒子分布函数$\Psi_N(\boldsymbol{r}_1,\ \theta_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \theta_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{r}_N,\ \theta_N;\ t)$来描述整个系统的演化。

接着，我们利用 Bogoliubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon (BBGKY) 层级关系展开该方程，并在两体关联这一层级截断。我们通过对相互作用项作梯度和角向傅里叶模展开，使其变为局域项。随后，我们将连续场定义为单粒子分布函数 $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1;t)$ 的各阶矩，例如密度场 $\rho(\boldsymbol{r},t)$、极化密度场 $p_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 或向列序密度场 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t)$。

最后，我们运用对称性论证——尤其是系统的手性对称性——简化流体动力学方程，从而得到最终的粗粒化理论。

A. Smoluchowski方程

我们不必用 Langevin 方程来描述系统 Eq.(S.19)，也可以等价地使用相应的 Fokker-Planck方程描述完整的 N粒子分布函数 $\Psi_N(\boldsymbol{r}_1,\ \theta_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \theta_2,\ ...,\ \boldsymbol{r}_N,\ \theta_N;\ t)$，这也称为 Smoluchowski方程:

$$\partial_t \Psi_N = -\sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{\nabla}_i \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{t},i} + \hat{\boldsymbol{n}}_i \times \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}_i} \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{r},i}\right). \tag{S.22}$$

在该方程中，$\boldsymbol{\nabla}_i$ 是关于粒子 i位置的梯度算子。同理，$\boldsymbol{n}_i = (\cos\ \theta_i,\ \sin\theta_i)^T$是取向，而 $\hat{\boldsymbol{n}}_i \times \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}_i}$ 是粒子i的旋转算子。平移概率流$\boldsymbol{J}_{\mathrm{t},\ i}$ 和旋转概率流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{r},\ i}$ 表示为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{t},i} = \left(v_0\hat{\boldsymbol{n}}_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{\xi_{\mathrm{t}}}\right)\Psi_N - D_{\mathrm{t}}\boldsymbol{\nabla}_i\Psi_N, \tag{S.23a}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{r},i} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}_i}{\xi_{\mathrm{r}}}\Psi_N - D_{\mathrm{r}}\hat{\boldsymbol{n}}_i \times \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}_i}\Psi_N, \tag{S.23b}$$

其中包含由粒子自推进和相互作用引起的漂移项，以及由位置噪声和旋转噪声引起的扩散项。为求完整，我们在计算中保留空间扩散项 D_{t}，尽管在模拟中忽略了它。

通过对 $N-1$ 粒子的自由度进行积分，我们得到单粒子分布函数 $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\ \theta_1; t)$ 的演化方程，其形式为

$$\begin{aligned}\partial_t\Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1;t) =& -\boldsymbol{\nabla}_1\cdot[(v_0\hat{\boldsymbol{n}}_1 - D_{\mathrm{t}}\boldsymbol{\nabla}_1)\Psi_1] + D_{\mathrm{r}}\partial_{\theta_1}^2\Psi_1 \\ & - \boldsymbol{\nabla}_1\cdot\frac{\boldsymbol{F}^{\mathrm{int}}}{\xi_{\mathrm{t}}} - \partial_{\theta_1}\frac{\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{int}}}{\xi_{\mathrm{r}}}.\end{aligned} \tag{S.24}$$

在此表达式中，所有相互作用效应都包含在所谓的集体力和力矩中，

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{int}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\theta_2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2)\Psi_2(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2;t), \tag{S.25a}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{int}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\theta_2\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2)\Psi_2(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2;t), \tag{S.25b}$$

其中 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2)$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2)$ 分别表示位于位置 $\boldsymbol{r}_1$、取向为 θ_1 的粒子由于位于位置 $\boldsymbol{r}_2$、取向为 θ_2 的粒子而感受到的力和力矩，具体定义见S2节。

集体力和力矩还取决于两粒子分布函数 $\Psi_2(\boldsymbol{r}_1,\ \theta_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \theta_2; t)$，该函数包含粒子之间两体关联的信息。我们不通过运动方程来确定 Ψ_2（其又取决于 Ψ_3 等），而是通过以下写法闭合层级关系:

$$\begin{aligned}&\Psi_2(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2;t) \\ &\quad= \Psi_1(\boldsymbol{r}_2,\theta_2;t)g(\boldsymbol{r}_2,\theta_2|\boldsymbol{r}_1,\theta_1;t)\Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1;t),\end{aligned} \tag{S.26}$$

其中，我们引入了对分布函数$g(\boldsymbol{r}_2,\theta_2|\boldsymbol{r}_1,\theta_1;t)$，它描述了在已知另一个粒子位于 $\boldsymbol{r}_1$、取向为 θ_1的条件下，在位置 $\boldsymbol{r}_2$、取向为 θ_2处找到一个粒子的条件概率。通常会采用平均场近似 $g\approx 1$，但正如我们将要看到的，二聚体之间的两体关联在流的形成中发挥着重要作用。相反，我们按照方法中所述，通过数值方法测量对分布函数。

假设系统处于均匀稳态，由于平移不变性，对分布函数与时间无关，且仅取决于粒子的相对位置和取向。因此，我们写作

$$g(\boldsymbol{r}_2,\theta_2|\boldsymbol{r}_1,\theta_1;t) = g(|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|,\varphi,\theta_2-\theta_1), \tag{S.27}$$

其中，我们定义了粒子间距 $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$、位置角 φ（定义为 $\cos\ \varphi = \hat{\boldsymbol{n}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{r}}$，即粒子间矢量 $\boldsymbol{r}$ 与粒子 1 的取向向量 $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ 之间的夹角），以及相对取向角$\theta = \theta_2-\theta_1$（另见参考文献 [13, 19]）。

类似地，我们可以用这些坐标表示集体力和力矩中出现的两两作用力和力矩:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2) = -F(r,\varphi,\theta)\hat{\boldsymbol{r}} + F_\perp(r,\varphi,\theta)\hat{\boldsymbol{r}}_\perp, \tag{S.28a}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\boldsymbol{r}_2,\theta_2) = \Gamma(r,\varphi,\theta)\boldsymbol{z}. \tag{S.28b}$$

这里，我们将力分解为中心力 F和非中心分量 $F_\perp$。该非中心分量源于相互作用的电偶极子并未位于质心处。接下来，我们假设力为中心力，即$F_\perp\approx 0$；这一假设是合理的，因为这些力的非中心分量涉及胶体介电半球中较弱的电偶极子，而且只有在粒子间距极短时，这些效应才会显著。

综合这些步骤，我们将集体力和力矩表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{\mathrm{int}} =& -\Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1;t)\times \\ & \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\theta_2\, F(r,\varphi,\theta)\Psi_1(\boldsymbol{r}_2,\theta_2)g(r,\varphi,\theta)\hat{\boldsymbol{r}}(\varphi),\end{aligned} \tag{S.29a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{int}} =& \Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1;t)\times \\ & \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\theta_2\,\Gamma(r,\varphi,\theta)\Psi_1(\boldsymbol{r}_2,\theta_2)g(r,\varphi,\theta)\hat{\boldsymbol{z}},\end{aligned} \tag{S.29b}$$

其中我们回顾一下，$r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$, $\theta = \theta_2-\theta_1$ 而φ是 $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ 与 $\boldsymbol{r}$之间的夹角。

B. 相互作用的梯度和傅里叶展开

上述集体力和力矩的表达式对单粒子分布 Ψ_1具有非局域依赖。为了得到局域流体动力学方程，我们将 Ψ_1 同时按空间梯度和角向傅里叶模展开，

$$\Psi_1(\boldsymbol{r}_2,\theta_2) \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\theta_2}\left(\tilde{\Psi}_{1,k}(\boldsymbol{r}_1)+\boldsymbol{\nabla}_1\tilde{\Psi}_{1,k}(\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\right) + \mathcal{O}(\boldsymbol{\nabla}_1^2). \tag{S.30}$$

这里， $\boldsymbol{\nabla}_1$ 是关于粒子 1 位置的梯度算子。为简便起见，我们将展开截断于一阶梯度和 $k=\pm1$阶傅里叶模。

将此展开代入公式（S.28）后，我们将集体力和力矩改写为

$$\boldsymbol{F}^{\text{int}} \approx -\sum_{k=-1}^{1} e^{-ik\theta_1}(\boldsymbol{F}^{0,k}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)+\boldsymbol{F}^{1,k}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)), \tag{S.31a}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\text{int}} \approx \sum_{k=-1}^{1} e^{-ik\theta_1}\left(\Gamma^{0,k}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)+\Gamma^{1,k}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)\right)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{S.31b}$$

with

$$\boldsymbol{F}^{0,k}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1) = \Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)\left(\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}(\varphi)F(r,\varphi,\theta)e^{-ik\theta}g(r,\varphi,\theta)\right)\tilde{\Psi}_{1,k}(\boldsymbol{r}_1), \tag{S.32a}$$

$$\boldsymbol{F}^{1,k}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1) = \Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)\left(\int_0^\infty r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}(\varphi)F(r,\varphi,\theta)e^{-ik\theta}g(r,\varphi,\theta)(\hat{\boldsymbol{r}}(\varphi)\cdot\boldsymbol{\nabla}_1)\right)\tilde{\Psi}_{1,k}(\boldsymbol{r}_1), \tag{S.32b}$$

$$\Gamma^{0,k}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1) = \Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)\left(\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\Gamma(r,\varphi,\theta)e^{-ik\theta}g(r,\varphi,\theta)\right)\tilde{\Psi}_{1,k}(\boldsymbol{r}_1), \tag{S.32c}$$

$$\Gamma^{1,k}(\boldsymbol{r}_1,\theta_1) = \Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)\left(\int_0^\infty r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\Gamma(r,\varphi,\theta)e^{-ik\theta}g(r,\varphi,\theta)(\hat{\boldsymbol{r}}(\varphi)\cdot\boldsymbol{\nabla}_1)\right)\tilde{\Psi}_{1,k}(\boldsymbol{r}_1). \tag{S.32d}$$

这里， $\boldsymbol{F}$ 和 Γ的上标分别表示梯度展开和角度傅里叶展开的阶数。回想一下，积分坐标集合 r、φ、θ 是在相对于粒子 1 的参考系中定义的，并且上述积分中单位向量 $\hat{\boldsymbol{r}}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$的分量构成的基底由 $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{n}}_1$形成。在实验室坐标系中，我们有 $\hat{\boldsymbol{n}}_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)^T$，因此

$$\hat{\boldsymbol{r}}(\varphi) = \mathbf{R}(\varphi)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(\theta_1) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\end{pmatrix}. \tag{S.33}$$

我们可以利用这一关系，通过将上述方程中的积分识别为相互作用展开的系数，以简洁的方式写出集体力和力矩。改用爱因斯坦求和记号对重复出现的指标求和后，我们将集体力和力矩改写为

$$F_\alpha^{\text{int}} = -\Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)\times \sum_{k=-1}^{1} e^{-ik\theta_1}\left(\zeta_{\alpha\beta}^{0,k}n_\beta + \zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{1,k}n_\gamma n_\delta\partial_\beta\right)\tilde{\Psi}_{1,k}(\boldsymbol{r}_1), \tag{S.34a}$$

$$\Gamma^{\text{int}} = \Psi_1(\boldsymbol{r}_1,\theta_1)\sum_{k=-1}^{1} e^{-ik\theta_1}\left(\tau^{0,k} + \tau_{\alpha\beta}^{1,k}n_\beta\partial_\alpha\right)\tilde{\Psi}_{1,k}(\boldsymbol{r}_1), \tag{S.34b}$$

其中， n_α 是取向向量 $\hat{\boldsymbol{n}}_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)^T$的分量 $\alpha\in\{x,y\}$，展开系数为

$$\zeta_{\alpha\beta}^{0,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,F(r,\varphi,\theta)e^{-ik\theta}g(r,\varphi,\theta)R_{\alpha\beta}(\varphi), \tag{S.35a}$$

$$\zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{1,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,F(r,\varphi,\theta)e^{-ik\theta}g(r,\varphi,\theta)R_{\alpha\gamma}(\varphi)R_{\beta\delta}(\varphi), \tag{S.35b}$$

$$\tau^{0,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\Gamma(r,\varphi,\theta)e^{-ik\theta}g(r,\varphi,\theta), \tag{S.35c}$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{1,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\Gamma(r,\varphi,\theta)e^{-ik\theta}g(r,\varphi,\theta)R_{\alpha\beta}(\varphi). \tag{S.35d}$$

关于相互作用的所有信息现在都包含在这些系数中。注意，$(\zeta^{0,\ k}_{\alpha\beta})^* = \zeta^{0,\ -k}_{\alpha\beta}$，其他系数也类似。

C. 流体动力学方程的推导

通过观察可知，粒子密度 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$、极化密度 $p_\alpha(\boldsymbol{r},\ t)$ 或向列序密度 $\mathbf{Q}(\boldsymbol{r},\ t)$ 等场都是单粒子分布函数 Ψ_1 的角向矩，因此我们可以利用前几节推导出的表达式，得到这些场的流体动力学方程：

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}\theta\,\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta), \tag{S.36a}$$

$$p_\alpha(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}\theta\,n_\alpha(\theta)\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta), \tag{S.36b}$$

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}\theta\left(n_\alpha n_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\right)\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta). \tag{S.36c}$$

高阶 矩同样定义为无迹的 ：

$$T_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{r},t) = \int \mathrm{d}\theta\left(n_\alpha n_\beta n_\gamma - \frac{1}{4}(\delta_{\alpha\beta}n_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}n_\beta + \delta_{\beta\gamma}n_\alpha)\right)\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta), \tag{S.37a}$$

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta}(\boldsymbol{r},\ t) = \int \mathrm{d}\theta\left(n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta - \frac{1}{6}(\delta_{\alpha\beta}n_\gamma n_\delta + \text{permutations}) + \frac{1}{24}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\right)\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta). \tag{S.37b}$$

我们将忽略秩高于 2（向列相）的张量的矩，但这些定义仍然相关，因为将高秩张量分解为其迹和无迹部分时，会出现诸如 p 或 $\mathbf{Q}$ 这样的低阶无迹张量，并对流体动力学方程中的重要项作出贡献。

这些矩也可以用傅里叶 $\tilde{}$ 模式 $\Psi_{1,\ k}$ 表示，具体而言

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \tilde{\Psi}_{1,0}(\boldsymbol{r},t), \tag{S.38a}$$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t) = \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\tilde{\Psi}_{1,1}(\boldsymbol{r},t),\\ \mathrm{Im}\,\tilde{\Psi}_{1,1}(\boldsymbol{r},t)\end{pmatrix}, \tag{S.38b}$$

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\tilde{\Psi}_{1,2}(\boldsymbol{r},t) & \mathrm{Im}\,\tilde{\Psi}_{1,2}(\boldsymbol{r},t)\\ \mathrm{Im}\,\tilde{\Psi}_{1,2}(\boldsymbol{r},t) & -\mathrm{Re}\,\tilde{\Psi}_{1,2}(\boldsymbol{r},t)\end{pmatrix} \tag{S.38c}$$

现在，我们可以通过将方程（S.24）投影到相应的 Ψ_1矩上，得到这些场的流体动力学运动方程。下面简要回顾该方程，并用爱因斯坦求和记号重写：

$$\partial_t\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta;t) = -\partial_\alpha\left[(v_0 n_\alpha - D_\mathrm{t}\partial_\alpha)\Psi_1\right] + D_\mathrm{r}\partial_\theta^2\Psi_1 - \frac{1}{\xi_\mathrm{t}}\partial_\alpha F_\alpha^{\mathrm{int}} - \frac{1}{\xi_\mathrm{r}}\partial_\theta\Gamma^{\mathrm{int}}. \tag{S.39}$$

为了得到密度场的动力学方程，我们对 Ψ_1中的角度 θ 积分：

$$\partial_t\rho(\boldsymbol{r},t) = \partial_t\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta;t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\partial_t\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta;t) = -\partial_\alpha\left((v_0 p_\alpha - D_\mathrm{t}\partial_\alpha\rho) + \frac{1}{\xi_\mathrm{t}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,F_\alpha^{\mathrm{int}}\right), \tag{S.40}$$

其中，我们将自推进项 v_0 中的积分识别为极性，将扩散项D_t中的积分识别为密度。

接下来，我们计算集体力的积分。为简化记号，对于 θ，我们省略场和积分界限的时间依赖性，积分范围为从 0 到 2π：

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\theta\, F_\alpha^{\mathrm{int}} =& -\int \mathrm{d}\theta\, \Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)\big(\zeta^{0,0}_{\alpha\beta} n_\beta + \zeta^{1,0}_{\alpha\beta\gamma\delta} n_\gamma n_\delta \partial_\beta\big)\tilde{\Psi}_{1,0}(\boldsymbol{r}) - 2\int \mathrm{d}\theta\, \Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\big(\zeta^{0,1}_{\alpha\beta} n_\beta + \zeta^{1,1}_{\alpha\beta\gamma\delta} n_\gamma n_\delta \partial_\beta\big)\tilde{\Psi}_{1,1}(\boldsymbol{r})\right)\\ =& -\zeta^{0,0}_{\alpha\beta}\rho(\boldsymbol{r})p_\beta(\boldsymbol{r}) - \zeta^{1,0}_{\alpha\beta\gamma\delta}\big(\partial_\beta\rho(\boldsymbol{r})\big)\left(Q_{\gamma\delta}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}\delta_{\gamma\delta}\rho(\boldsymbol{r})\right)\\ &- 2\mathrm{Re}\,(\zeta^{0,1}_{\alpha\beta})\mathrm{Re}\left(\int \mathrm{d}\theta\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)e^{-i\theta}n_\beta\tilde{\Psi}_{1,1}(\boldsymbol{r})\right) + 2\mathrm{Im}\,(\zeta^{0,1}_{\alpha\beta})\mathrm{Im}\left(\int \mathrm{d}\theta\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)e^{-i\theta}n_\beta\tilde{\Psi}_{1,1}(\boldsymbol{r})\right)\\ &- 2\mathrm{Re}\,(\zeta^{1,1}_{\alpha\beta\gamma\delta})\mathrm{Re}\left(\int \mathrm{d}\theta\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)e^{-i\theta}n_\gamma n_\delta\partial_\beta\tilde{\Psi}_{1,1}(\boldsymbol{r})\right) + 2\mathrm{Im}\,(\zeta^{1,1}_{\alpha\beta\gamma\delta})\mathrm{Im}\left(\int \mathrm{d}\theta\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)e^{-i\theta}n_\gamma n_\delta\partial_\beta\tilde{\Psi}_{1,1}(\boldsymbol{r})\right).\end{aligned} \tag{S.41}$$

差异　各项现在可以利用恒等式 $\cos\theta\, p_x + \sin\theta\, p_y = n_\gamma p_\gamma$ 进行计算，例如

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left(\int \mathrm{d}\theta\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)e^{-i\theta}n_\beta\tilde{\Psi}_{1,1}(\boldsymbol{r})\right) = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{d}\theta\Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)n_\beta(p_x + ip_y)\right)\\ &= \int \mathrm{d}\theta\, \Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)n_\beta(\cos\theta p_x + \sin\theta p_y) = \left(\int \mathrm{d}\theta\, \Psi_1(\boldsymbol{r},\theta)n_\beta n_\gamma\right)p_\gamma = \left(Q_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}\delta_{\beta\gamma}\rho\right)p_\gamma.\end{aligned} \tag{S.42}$$

完成这些积分后，我们写出密度场的动力学方程。由于粒子数是守恒量，其形式为连续性方程 $\partial_t\rho = -\partial_\alpha J_\alpha$，其中 J_α 是密度流。极化和向列序密度场的计算遵循相同的原理。我们得到以下表达式:

$$\partial_t\rho = -\partial_\alpha J_\alpha, \tag{S.43a}$$

$$\begin{aligned}J_\alpha =& v_0 p_\alpha - D_{\mathrm{t}}\partial_\alpha\rho - \frac{\zeta^{0,0}_{\alpha\beta}}{\xi_{\mathrm{t}}}\rho p_\beta - \frac{\zeta^{1,0}_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\xi_{\mathrm{t}}}(\partial_\beta\rho)\left(Q_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}\delta_{\gamma\delta}\rho\right)\\ &- \frac{2\mathrm{Re}\,(\zeta^{0,1}_{\alpha\beta})}{\xi_{\mathrm{t}}}\left(Q_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}\delta_{\beta\gamma}\rho\right)p_\gamma + \frac{2\mathrm{Im}\,(\zeta^{0,1}_{\alpha\beta})}{\xi_{\mathrm{t}}}\epsilon_{\gamma\delta}\left(Q_{\beta\delta} + \frac{1}{2}\delta_{\beta\delta}\rho\right)p_\gamma\\ &- \frac{2\mathrm{Re}\,(\zeta^{1,1}_{\alpha\beta\gamma\delta})}{\xi_{\mathrm{t}}}\left(T_{\mu\gamma\delta}\partial_\beta p_\mu + \frac{1}{4}\left(p_\delta\partial_\beta p_\gamma + p_\gamma\partial_\beta p_\delta + \delta_{\gamma\delta}p_\mu\partial_\beta p_\mu\right)\right)\\ &+ \frac{2\mathrm{Im}\,(\zeta^{1,1}_{\alpha\beta\gamma\delta})\epsilon_{\mu\nu}}{\xi_{\mathrm{t}}}\left(T_{\gamma\delta\nu} + \frac{1}{4}\left(\delta_{\gamma\delta}p_\nu + \delta_{\gamma\nu}p_\delta + \delta_{\delta\nu}p_\mu\right)\right)\partial_\beta p_\mu,\end{aligned} \tag{S.43b}$$

$$\begin{aligned}\partial_t p_\alpha =& -D_{\mathrm{r}}p_\alpha - \frac{v_0}{2}\partial_\alpha\rho + D_{\mathrm{t}}\partial_\beta\partial_\beta p_\alpha + \frac{\zeta^{0,0}_{\beta\alpha}}{2\xi_{\mathrm{t}}}\partial_\beta(\rho^2) + \frac{\zeta^{1,0}_{\mu\beta\gamma\delta}}{2\xi_{\mathrm{t}}}\partial_\mu\big((\delta_{\alpha\gamma}p_\delta + \delta_{\alpha\delta}p_\gamma + \delta_{\gamma\delta}p_\alpha)\partial_\beta\rho\big)\\ &+ \frac{\mathrm{Re}\,(\zeta^{0,1}_{\mu\beta})}{\xi_{\mathrm{t}}}\partial_\mu\left(p_\alpha p_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}p^2\right) - \frac{\mathrm{Im}\,(\zeta^{0,1}_{\mu\beta})}{2\xi_{\mathrm{t}}}\partial_\mu(\epsilon_{\rho\alpha}p_\beta p_\rho + \epsilon_{\rho\beta}p_\alpha p_\rho)\\ &+ \frac{\mathrm{Re}\,(\zeta^{1,1}_{\mu\beta\gamma\delta})}{4\xi_{\mathrm{t}}}\partial_\mu\big((\delta_{\gamma\delta}\partial_\beta p_\alpha + \delta_{\alpha\delta}\partial_\beta p_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}\partial_\beta p_\delta)\rho\big) - \frac{\mathrm{Im}\,(\zeta^{1,1}_{\mu\beta\gamma\delta})}{4\xi_{\mathrm{t}}}(\delta_{\alpha\gamma}\epsilon_{\rho\delta} + \delta_{\alpha\delta}\epsilon_{\rho\gamma} + \delta_{\gamma\delta}\epsilon_{\rho\alpha})\rho\partial_\beta p_\rho\\ &+ \frac{\tau^{0,0} + \mathrm{Re}\,(\tau^{0,1})}{\xi_{\mathrm{r}}}\epsilon_{\alpha\beta}\rho p_\beta - \frac{\mathrm{Im}\,(\tau^{0,1})}{\xi_{\mathrm{r}}}\rho p_\alpha + \frac{\epsilon_{\alpha\beta}\tau^{1,0}_{\mu\beta}}{2\xi_{\mathrm{r}}}\rho\partial_\mu\rho + \frac{\epsilon_{\alpha\beta}\mathrm{Re}\,(\tau^{1,1}_{\delta\gamma})}{2\xi_{\mathrm{r}}}(\delta_{\beta\gamma}p_\mu + \delta_{\beta\mu}p_\gamma + \delta_{\gamma\mu}p_\beta)\partial_\delta p_\mu\\ &- \frac{\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu}\mathrm{Im}\,(\tau^{1,1}_{\delta\gamma})}{2\xi_{\mathrm{r}}}(\delta_{\beta\gamma}p_\nu + \delta_{\beta\nu}p_\gamma + \delta_{\gamma\nu}p_\beta)\partial_\delta p_\mu.\end{aligned} \tag{S.43c}$$

$$\begin{aligned}\partial_t Q_{\alpha\beta} =& -4D_{\mathrm{r}}Q_{\alpha\beta} + \frac{\tau^{0,0}}{\xi_{\mathrm{r}}}(\epsilon_{\alpha\gamma}Q_{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\gamma}Q_{\alpha\gamma})\\ &+ \frac{2\left(\mathrm{Re}\,(\tau^{0,1})p_\nu - \mathrm{Im}\,(\tau^{0,1})\epsilon_{\mu\nu}p_\mu\right)}{\xi_{\mathrm{r}}}(\epsilon_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta})\left(T_{\gamma\delta\nu} + \frac{1}{4}(\delta_{\gamma\delta}p_\nu + \delta_{\gamma\nu}p_\delta + \delta_{\delta\nu}p_\gamma)\right) + \mathcal{O}(\nabla)\end{aligned} \tag{S.43d}$$

在上述方程中，$\epsilon_{\mu\nu}$ 是全反对称张量

在二维空间中。我们只写出了.....的动力学

向列序张量 $Q_{\alpha\beta}$ 在梯度的最低阶（即零阶）近似下，因为表达式会变得越来越繁杂，而且高阶项与我们无关。不过，这种方法可用于确定任意阶梯度和傅里叶模下的流体动力学场方程，适用于具有中心力的任意两两相互作用。

我们观察到，矩数越高，衰减速率也越高。事实上，旋转扩散使 m 阶矩以 $m^2 D_{\mathrm{r}}$ 的速率衰减（只有 $m=0$ 矩，即密度场，不会衰减，因为粒子数守恒）。这为闭合近似提供了依据：假设 $T_{\alpha\beta\gamma}$ 及所有更高阶矩均为零。我们从现在起采用这一近似。

D. 非手性系统的流体动力学

通过对相互作用系数施加对称性约束（方程 (S.35)），我们可以大幅简化上述方程。特别是，作用于粒子的两两作用力和力矩均为非手性的，

$$F(r,\varphi,\theta) = F(r,-\varphi,-\theta), \tag{S.44a}$$
$$\Gamma(r,\varphi,\theta) = -\Gamma(r,-\varphi,-\theta). \tag{S.44b}$$

类似地，根据稳态的手性对称性，我们有$g(r,\ \varphi,\ \theta) = g(r,\ -\varphi,\ -\theta)$。例如，对 $\tau^{0,\,1}$应用这些对称性，可得

$$\begin{aligned}\tau^{0,1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\Gamma(r,\varphi,\theta)e^{-i\theta}g(r,\varphi,\theta)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\Gamma(r,\varphi,\theta)e^{+i\theta}g(r,\varphi,\theta)\\ &= 0 - i\tau_{\mathrm{I}}^{0,1}\end{aligned} \tag{S.45}$$

其中实系数为

$$\tau_{\mathrm{I}}^{0,1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\Gamma(r,\varphi,\theta)\sin(\theta)g(r,\varphi,\theta). \tag{S.46}$$

使用类似的论证，我们将其他系数表示为

$$\zeta_{\alpha\beta}^{0,0} = \zeta^{0,0}\delta_{\alpha\beta}, \tag{S.47a}$$
$$\zeta_{\alpha\beta}^{0,1} = \zeta_{\mathrm{R}}^{0,1}\delta_{\alpha\beta} - i\zeta_{\mathrm{I}}^{0,1}\epsilon_{\alpha\beta}, \tag{S.47b}$$
$$\zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{1,0} = \zeta_{\mathrm{R}1}^{1,0}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \zeta_{\mathrm{R}2}^{1,0}\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}, \tag{S.47c}$$
$$\zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{1,1} = \zeta_{\mathrm{R}1}^{1,1}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \zeta_{\mathrm{R}2}^{1,1}\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} - i\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1}(\delta_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} + \delta_{\beta\delta}\epsilon_{\alpha\gamma}) \tag{S.47d}$$
$$\tau^{0,0} = 0, \tag{S.47e}$$
$$\tau^{0,1} = -i\tau_{\mathrm{I}}^{0,1}, \tag{S.47f}$$
$$\tau_{\alpha\beta}^{1,0} = \tau^{1,0}\epsilon_{\alpha\beta}, \tag{S.47g}$$
$$\tau_{\alpha\beta}^{1,1} = \tau_{\mathrm{R}}^{1,1}\epsilon_{\alpha\beta} - i\tau_{\mathrm{I}}^{1,1}\delta_{\alpha\beta}, \tag{S.47h}$$

其中，所有新引入的系数均为实数，下标 R 和 I 分别表示原复系数的实部和虚部。

1. 密度

将这些系数代入方程（S.43），对张量进行缩并并将各项合并后，我们得到如下密度场方程：

$$\partial_t\rho = -\partial_\alpha J_\alpha, \tag{S.48}$$
$$J_\alpha = v_{\alpha\beta}[\rho,Q]p_\beta - D_{\alpha\beta}[\rho,Q]\partial_\beta\rho + \kappa_1\partial_\beta(p_\alpha p_\beta) + \kappa_2\partial_\alpha(p^2). \tag{S.49}$$

式 (S.49) 中出现的流体动力学系数，是由式 (S.47a)至 (S.47h) 中的不同系数以及系统的其他微观参数组合而成，例如自推进速度 v_0、平移和转动扩散率 D_{t} 和 D_{r}，以及平移和转动摩擦系数 ξ_{t} 和 ξ_{r}。

我们发现，密度场受到极化场的平流，其平流速度具有各向异性

$$v_{\alpha\beta}[\rho,Q] = \left(v_0 - \frac{\zeta^{0,0} + \zeta_{\mathrm{R}}^{0,1} + \zeta_I^{0,1}}{\xi_{\mathrm{t}}}\rho\right)\delta_{\alpha\beta} - \frac{2\zeta_{\mathrm{R}}^{0,1}}{\xi_{\mathrm{t}}}Q_{\alpha\beta} \tag{S.50a}$$
$$= v_{\mathrm{iso}}[\rho]\delta_{\alpha\beta} - v_{\mathrm{anis}}Q_{\alpha\beta} \tag{S.50b}$$

并按照各向异性扩散张量进行扩散

$$D_{\alpha\beta}[\rho] = \left(D_{\mathrm{t}} + \frac{\zeta_{\mathrm{R}1}^{1,0} + \zeta_{\mathrm{R}2}^{1,0}}{2\xi_{\mathrm{t}}}\rho\right)\delta_{\alpha\beta} + \frac{\zeta_{\mathrm{R}1}^{1,0} - \zeta_{\mathrm{R}2}^{1,0}}{2\xi_{\mathrm{t}}}Q_{\alpha\beta} \tag{S.51a}$$
$$= D_{\mathrm{iso}}[\rho]\delta_{\alpha\beta} + D_{\mathrm{anis}}Q_{\alpha\beta}. \tag{S.51b}$$

众所周知，排斥力（此处由系数 ζ表征）会使高密度区域中的活性粒子减速，从而可能触发运动诱导相分离（MIPS） [3, 45]。排斥力还会提高有效扩散率，因为排斥作用倾向于使粒子的空间分布均匀化。当系统存在取向有序时，由于有序状态会改变粒子间的碰撞统计，这些效应可能呈现各向异性。例如，随着系统中的极性有序增强，具有显著减速作用的正面碰撞会变得不那么常见。因此，密度场的平流速度和扩散率会呈现各向异性。

密度流中还会出现另外两个依赖极化的项，其系数为

$$\kappa_1 = \frac{\zeta_{\mathrm{R}2}^{1,1} - \zeta_{\mathrm{R}1}^{1,1} - 2\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1}}{2\xi_{\mathrm{t}}}, \tag{S.52a}$$
$$\kappa_2 = \frac{3\zeta_{\mathrm{R}2}^{1,1} - \zeta_{\mathrm{R}1}^{1,1} + 2\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1}}{4\xi_{\mathrm{t}}}. \tag{S.52b}$$

这些术语描述了由极性有序梯度引起的密度流。

2. 极化

对于具有手性对称性的系统，极化动力学可简化为

$$\begin{aligned}
&\partial_t p_\alpha + \lambda_1 p_\beta \partial_\beta p_\alpha + \lambda_2 (\partial_\beta p_\beta) p_\alpha + \lambda_3 \partial_\alpha (p^2) \\
&\quad = a[\rho] p_\alpha - b|p^2| p_\alpha - \partial_\alpha P[\rho] \\
&\qquad + \eta[\rho] \partial_\beta \partial_\beta p_\alpha + \eta_{\mathrm{B}}[\rho] \partial_\alpha (\partial_\beta p_\beta) \\
&\qquad - \partial_\beta (w[\rho] Q_{\alpha\beta}) - \nu Q_{\alpha\beta} \partial_\beta \rho - \gamma Q_{\alpha\beta} p_\beta \\
&\qquad + \mu_1 (\partial_\beta \partial_\beta \rho) p_\alpha + \mu_2 p_\beta \partial_\beta \partial_\alpha \rho \\
&\qquad + \mu_3 \big((\partial_\alpha \rho)(\partial_\beta p_\beta) + (\partial_\beta \rho)(\partial_\alpha p_\beta) \big) + \mu_4 (\partial_\beta \rho)(\partial_\beta p_\alpha) \\
&\qquad + \mu_5 \partial_\gamma \big(Q_{\gamma\beta} \partial_\beta p_\alpha + \delta_{\alpha\gamma} Q_{\beta\gamma} \partial_\beta p_\gamma + Q_{\gamma\beta} \partial_\alpha p_\beta \big) \\
&\qquad + \mu_6 \partial_\gamma \big(Q_{\alpha\beta} \partial_\gamma p_\beta \big) + \mu_7 \partial_\gamma \big(Q_{\alpha\gamma} \partial_\beta p_\beta + Q_{\alpha\beta} \partial_\beta p_\gamma \big).
\end{aligned} \tag{S.53}$$

这些术语中的许多都已在群集文献中得到广泛讨论。左侧带有系数的项

$$\lambda_1 = -\frac{\zeta_{\mathrm{R}}^{0,1} + \zeta_{\mathrm{I}}^{0,1}}{\xi_{\mathrm{t}}} - \frac{3\tau_{\mathrm{I}}^{1,1} - \tau_{\mathrm{R}}^{1,1}}{2\xi_{\mathrm{r}}}, \tag{S.54a}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\zeta_{\mathrm{R}}^{0,1} + \zeta_{\mathrm{I}}^{0,1}}{\xi_{\mathrm{t}}} - \frac{\tau_{\mathrm{I}}^{1,1} + \tau_{\mathrm{R}}^{1,1}}{2\xi_{\mathrm{r}}}, \tag{S.54b}$$

$$\lambda_3 = -\frac{\zeta_{\mathrm{R}}^{0,1} - \zeta_{\mathrm{I}}^{0,1}}{2\xi_{\mathrm{t}}} - \frac{3\tau_{\mathrm{R}}^{1,1} - \tau_{\mathrm{I}}^{1,1}}{4\xi_{\mathrm{r}}}. \tag{S.54c}$$

与纳维–斯托克斯方程中出现的对流非线性项类似。在该方程中，由于伽利略不变性，这些系数被 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 约束为相应的数值；而在这个干燥活性物质系统中，由于与基底之间存在摩擦，伽利略不变性并不成立 [2, 46]。

取向相互作用与旋转扩散导致的取向衰减相互竞争，使极性的增长率依赖于密度

$$a[\rho] = \frac{\tau_{\mathrm{I}}^{0,1}}{\xi_{\mathrm{r}}} \rho - D_{\mathrm{r}}. \tag{S.55}$$

当 a 变为正值时，系统发生群集转变；也就是说，当 τ^0、$_1$ $_{\mathrm{I}}$中的力矩所产生的对齐作用克服由 D_{r}量化的旋转噪声时，便会发生群集转变。当 $a > 0$时，极性呈指数增长。为使这种增长达到饱和，我们以唯象方式引入了非线性项 $-b|p^2|p_\alpha$；该项也出现在原始的Toner-Tu方程中 [46]，，但并非由我们的粗粒化过程导出。因此，我们无法用系统的微观参数表示参数 b 。由于我们仅考虑两两相互作用，最终方程中不会出现流体动力学场的三次项。不过，这并不构成问题，因为我们感兴趣的稳态的线性稳定性不受这一非线性项影响。

下一项是一个类似压力的项，

$$P[\rho] = \frac{1}{2} \left(v_0 - \left[\frac{\zeta^{0,0}}{\xi_{\mathrm{t}}} + \frac{\tau^{1,0}}{2\xi_{\mathrm{r}}} \right] \rho \right) \rho, \tag{S.56}$$

它源于粒子的活性。导致密度诱导减速的排斥力会降低这种活性压力，其由与 $\zeta^{0,0}$ 成正比的项描述。若力矩使粒子朝密度梯度增大的方向（减小的方向）转向，压力就会降低（升高）。这一效应由系数 $\tau^{1,0}$ 表示（参见参考文献 [19]）。

此外，我们还看到一些随密度变化的项，它们对应于纳维–斯托克斯方程中的剪切黏度和体黏度，

$$\eta[\rho] = D_{\mathrm{t}} + \frac{1}{4\xi_{\mathrm{t}}} (\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,1} + 3\zeta_{\mathrm{R2}}^{1,1} - 2\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1}) \rho, \tag{S.57a}$$

$$\eta_{\mathrm{B}}[\rho] = \frac{1}{2\xi_{\mathrm{t}}} (\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,1} - \zeta_{\mathrm{R2}}^{1,1} + 2\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1}) \rho. \tag{S.57b}$$

出现在式 (S.53) 中的其他项，在典型的 Toner-Tu 方程表述中并不存在。其中最重要的是主动向列项 $-\partial_\beta (w[\rho] Q_{\alpha\beta})$，其大小随密度变化

$$w[\rho] = v_0 - \frac{\zeta^{0,0}}{\xi_{\mathrm{t}}} \rho. \tag{S.58}$$

式 (S.53) 第三行中的其他项将向列序场与密度梯度或极性耦合，耦合强度为

$$\nu = \tau^{1,0} / \xi_{\mathrm{r}}, \tag{S.59a}$$

$$\gamma = 2\tau_{\mathrm{I}}^{0,1} / \xi_{\mathrm{r}}, \tag{S.59b}$$

分别如此。标准的 Toner-Tu 方程忽略了向列序，因此其中不会出现这些项。

其余含有系数 μ_i 的项在场和梯度方面均为二阶项，因此也不会出现在Toner-Tu方程中。因此，它们与线性稳定性也无关，接下来我们将忽略这些项。此处列出它们的系数，仅为完整起见：

$$\mu_1 = \frac{\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,0} + 3\zeta_{\mathrm{R2}}^{1,0}}{4\xi_{\mathrm{t}}}, \tag{S.60a}$$

$$\mu_2 = \frac{\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,0} - \zeta_{\mathrm{R2}}^{1,0}}{2\xi_{\mathrm{t}}}, \tag{S.60b}$$

$$\mu_3 = \frac{\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,1} - \zeta_{\mathrm{R2}}^{1,1} + 2\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1} + \zeta_{\mathrm{R1}}^{1,0} - \zeta_{\mathrm{R2}}^{1,0}}{4\xi_{\mathrm{t}}}, \tag{S.60c}$$

$$\mu_4 = \frac{\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,1} + 3\zeta_{\mathrm{R2}}^{1,1} - 2\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1} + \zeta_{\mathrm{R1}}^{1,0} + 3\zeta_{\mathrm{R2}}^{1,0}}{4\xi_{\mathrm{t}}}, \tag{S.60d}$$

$$\mu_5 = \frac{\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,1} - \zeta_{\mathrm{R2}}^{1,1} - 2\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1}}{3\xi_{\mathrm{t}}}, \tag{S.60e}$$

$$\mu_6 = \frac{\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,1} + 5\zeta_{\mathrm{R2}}^{1,1} - 2\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1}}{3\xi_{\mathrm{t}}}, \tag{S.60f}$$

$$\mu_7 = \frac{\zeta_{\mathrm{R1}}^{1,1} - \zeta_{\mathrm{R2}}^{1,1} + 4\zeta_{\mathrm{I}}^{1,1}}{3\xi_{\mathrm{t}}}. \tag{S.60g}$$

3. 向列序密度

最后，利用我们的对称性假设，向列序密度方程可化简为

$$\partial_t Q_{\alpha\beta} = -4D_r Q_{\alpha\beta} + \gamma\left(p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}p^2\right). \tag{S.61}$$

除旋转扩散导致的衰减项外，我们看到，局部极化会以速率 $\gamma = 2\tau^{0,11}/\xi_r$促使向列序增加。请注意，该系数等于极化方程中耦合极化与向列序密度的系数。

S4. 线性稳定性分析

在补充说明 第 S3 节中，我们推导了相互作用活性粒子模型的流体动力学描述，见 式 (S.19)。在此，我们利用该理论预测系统的相图（见图 3a 和3g）。为此，我们研究流体动力学理论中稳态的线性稳定性，并确定失稳阈值随流体动力学系数的变化。

A. 均匀各向同性态的线性稳定性

为了理解系统中有序态如何产生，我们首先分析系统的无序稳态。在这种情况下，密度均匀，$\rho(\boldsymbol{r},\ t) = \rho_0$，且不存在极化或向列序，$p_\alpha(\boldsymbol{r},\ t) = 0$ 和$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},\ t) = 0$。现在，我们对该解施加小扰动，$\rho(\boldsymbol{r},\ t) = \rho_0 + \delta\rho(\boldsymbol{r},\ t)$，$p_\alpha(\boldsymbol{r},\ t) = 0 + \delta p_\alpha(\boldsymbol{r},\ t)$ 和 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},\ t) = 0 + \delta Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},\ t)$。为简化记号，以下不再明确写出扰动对空间和时间的依赖关系。

现在将 式（S.48）、（S.53）和（S.61）在该稳态附近线性化，仅保留扰动的一阶线性阶贡献。由式（S.61）可立即得到$\partial_t\delta Q_{\alpha\beta} = -4D_r\delta Q_{\alpha\beta}$，这意味着向列序场的扰动衰减至零，$\delta Q_{\alpha\beta} \approx 0$。剩余的两个方程描述密度和极化扰动的演化，

$$\partial_t\delta\rho = D_{\text{iso}}[\rho_0]\partial_\alpha\partial_\alpha\delta\rho - v_{\text{iso}}[\rho_0]\partial_\alpha\delta p_\alpha, \tag{S.62a}$$

$$\partial_t\delta p_\alpha = -P'[\rho_0]\partial_\alpha\delta\rho + \left(a[\rho_0] + \eta[\rho_0]\partial_\beta\partial_\beta\right)\delta p_\alpha + \eta_B[\rho_0]\partial_\alpha\partial_\beta\delta p_\beta, \tag{S.62b}$$

其中，$P' = \delta P/\delta\rho$ 为逆压缩率。

在长波长极限下，我们可以忽略所有梯度，此时只剩下线性增长项 $\partial_t\delta p_\alpha = a[\rho_0]\delta p_\alpha$。当增长率 $a[\rho_0]$ 变为正值时，就会触发极化场的不稳定性。通过考察 $a[\rho_0]$ 关于系统微观参数的表达式 Eq. (S.55)，我们看到，当力矩导致的粒子间排列克服旋转涨落引起的极化衰减时，就会发生这一转变，使

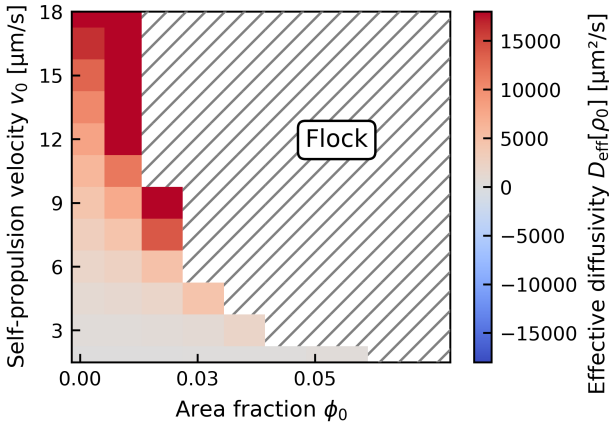


图 S2 各向同性态中不存在 MIPS。我们绘制了各向同性相中的有效扩散率 $D_{\text{eff}}[\rho_0]$ （式（S.64））， 其中极性涨落会衰减， $a[\rho_0] < 0$；具体评估方法见方法。由于扩散率始终为正，$D_{\text{eff}}[\rho_0] > 0$，因此无序态不会发生 MIPS。为清晰起见，色标上限设为 $\pm 1.8 \cdot 10^4\ \mu\text{m}^2/\text{s}$。

系统从无序态转变为集群运动相，如 图3a和3g中的洋红色相边界所示。

另一方面，如果 $a[\rho_0] < 0$，极化涨落会衰减，并受密度涨落支配，

$$\delta p_\alpha \approx \frac{P'[\rho_0]}{a[\rho_0]}\partial_\alpha\delta\rho + \mathcal{O}(\nabla^2), \tag{S.63}$$

我们将其代入 $\delta\rho$ 的动力学方程中。这得到有效扩散方程 $\partial_t\delta\rho = D_{\text{eff}}[\rho_0]\nabla^2\delta\rho$，其中

$$D_{\text{eff}}[\rho_0] = D_{\text{iso}}[\rho_0] + \frac{v_{\text{iso}}[\rho_0]P'[\rho_0]}{|a[\rho_0]|}. \tag{S.64}$$

如果 $D_{\text{eff}}[\rho_0] <0$，密度场就会发生旋节不稳定性，从而触发运动性诱导相分离。通过考察我们利用粗粒化过程得到的逆压缩率表达式，

$$P'[\rho] = \frac{v_0}{2} - \left(\frac{\zeta^{0,0}}{\xi_t} + \frac{\tau^{1,0}}{2\xi_r}\right)\rho, \tag{S.65}$$

我们发现，排斥力 [3]和使粒子转向高密度区域的力矩 [19]都能触发相分离。

我们得到了极化增长率的估计方程（S.55）和有效扩散率方程（S.64）所用的方法见正文和方法。我们发现，在该系统中，$a[\rho_0]$ 最终会随着密度和粒子自推进速度的增加而变为正值，从而触发集群化转变（图 3a和3g）。另一方面，$D_{\text{eff}}[\rho_0]$在各向同性相中仍保持为正（图 S2）。

我们推断，Janus胶体二聚体易于开始集群运动，但在各向同性态下不会发生相分离。然而，这并不能解释流的形成。流可能是由于集群对密度扰动变得不稳定而形成的。因此，我们现在研究群集态的线性稳定性。

B. 均匀集群态的线性稳定性

在本节中，我们研究沿某一轴 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的均匀密度 $\rho(\boldsymbol{r},t) = \rho_0$ 和极化密度 $p_\alpha(\boldsymbol{r},t) = p_0 e_\alpha$ 的集群稳态的线性稳定性，其中 $e_x = 1$和 $e_y = 0$。

根据方程 (S.61)，这样的稳态也具有非零的稳态向列序密度 $Q^0_{\alpha\beta}$，其表达式为

$$Q^0_{\alpha\beta} = \frac{\gamma p_0^2}{4D_\mathrm{r}}(e_\alpha e_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}) = \frac{S_0}{2}(e_\alpha e_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}), \quad \text{(S.66)}$$

其中我们引入了标量向列序密度$S_0 = \gamma p_0^2/4D_\mathrm{r}$。另一方面，极化密度的稳态方程（见方程 (S.53)）为

$$0 = \left((a[\rho_0] - b|p^2|)\delta_{\alpha\beta} - \gamma Q^0_{\alpha\beta}\right)p_\beta \quad \text{(S.67)}$$

由此我们得出 $p_0^2 = a[\rho_0]/(b + \gamma^2/8D_\mathrm{r})$。

与 S4A 节中一样，我们引入小扰动$\rho(\boldsymbol{r},t) = \rho_0 + \delta\rho(\boldsymbol{r},t)$、$p_\alpha(\boldsymbol{r},t) = p_0 e_\alpha + \delta p_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 和$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t) = Q^0_{\alpha\beta} + \delta Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t)$，并将流体动力学方程线性化。我们只保留梯度的线性阶项，因为这足以确定我们关注的不稳定性：

$$\partial_t\delta\rho = -v_{\alpha\beta}\partial_\alpha\delta p_\beta - p_0 v'_{xx}\partial_x\delta\rho + p_0 v_\mathrm{anis}\partial_\alpha\delta Q_{\alpha x}, \quad \text{(S.68a)}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\delta p_x = {}& a' p_0\delta\rho - \left(2a - \frac{\gamma^2 p_0^2}{8D_\mathrm{r}}\right)\delta p_x - \left(P' + \frac{w'+\nu}{2}S_0\right)\partial_x\delta\rho \\ & - w\partial_\alpha\delta Q_{\alpha x} - \gamma p_0\delta Q_{xx} \\ & - (\lambda_1 + 2\lambda_3)p_0\partial_x\delta p_x - \lambda_2 p_0\partial_\alpha\delta p_\alpha, \end{aligned} \quad \text{(S.68b)}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\delta p_y = {}& - \left(P' - \frac{w'+\nu}{2}S_0\right)\partial_y\delta\rho + \gamma(S_0\delta p_y - p_0\delta Q_{xy}) \\ & - w\partial_\alpha\delta Q_{\alpha y} - \lambda_1 p_0\partial_x\delta p_y - 2\lambda_3 p_0\partial_y\delta p_x, \end{aligned} \quad \text{(S.68c)}$$

$$\partial_t\delta Q_{\alpha\beta} = - 4D_\mathrm{r}\delta Q_{\alpha\beta} + \gamma p_0(e_\alpha\delta p_\beta + e_\beta\delta p_\alpha - \delta_{\alpha\beta}\delta p_x) \quad \text{(S.68d)}$$

除非另有说明，所有泛函均在稳态条件下求值，即 $v_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta}[\rho_0, S_0]$ 等。关于密度场的泛函导数用撇号表示，$v'_{\alpha\beta} = \delta v_{\alpha\beta}/\delta\rho_0$。

我们现在观察到，改变极化幅度的极化涨落 δp_x，以及向列序涨落 $\delta Q_{\alpha\beta}$，即使在可以忽略所有梯度的无限波长极限下，也具有有限的衰减率。与其他缓慢变化的涨落 $\delta\rho$ 和 δp_y相比，这些涨落衰减得更快，并受其支配。在梯度的一阶近似下，我们得到

$$\delta p_x \approx \frac{a' p_0}{2a - \gamma^2 p_0^2/4D_\mathrm{r}}\delta\rho = \alpha\delta\rho, \quad \text{(S.69a)}$$

$$\delta Q_{\alpha\beta} \approx \frac{\gamma p_0}{4D_\mathrm{r}}(e_\alpha\delta p_\beta + e_\beta\delta p_\alpha - \delta_{\alpha\beta}\delta p_x). \quad \text{(S.69b)}$$

现在可以将这些表达式代入方程（S.68a）和（S.68c）。注意，这会导致 $S_0\delta p_y - p_0\delta Q_{xy}$ 中的方程（S.68c）中的该项相互抵消，从而证明 δp_y 确实是一个慢模。随后，我们可以将慢模的方程重新写成以下形式

$$\partial_t\delta\rho = - m_{\rho\rho}\partial_x\delta\rho - A\partial_y\delta p_y, \quad \text{(S.70a)}$$

$$\partial_t\delta p_y = - B\partial_y\delta\rho - m_{pp}\partial_x\delta p_y. \quad \text{(S.70b)}$$

with

$$m_{\rho\rho} = p_0 v'_{xx} + \alpha\left(v_{xx} - \frac{\gamma v_\mathrm{anis} p_0^2}{4D_\mathrm{r}}\right), \quad \text{(S.71a)}$$

$$A = v_{yy} - \frac{\gamma v_\mathrm{anis} p_0^2}{2D_\mathrm{r}}, \quad \text{(S.71b)}$$

$$B = P' - \frac{\gamma(w'+\nu)p_0^2}{8D_\mathrm{r}} + \alpha p_0\left(2\lambda_3 - \frac{\gamma w}{4D_\mathrm{r}}\right), \quad \text{(S.71c)}$$

$$m_{pp} = \left(\lambda_1 + \frac{\gamma w}{4D_\mathrm{r}}\right)p_0 \quad \text{(S.71d)}$$

在傅里叶空间中，这些耦合方程写作

$$\partial_t\begin{pmatrix}\delta\rho \\ \delta p_\perp\end{pmatrix} = -ik\begin{pmatrix}m_{\rho\rho}\cos\psi & A\sin\psi \\ B\sin\psi & m_{pp}\cos\psi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta\rho \\ \delta p_\perp\end{pmatrix} \quad \text{(S.72)}$$

其中，ψ 是波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 x 轴之间的夹角，$\boldsymbol{k} = k(\cos\psi, \sin\psi)^T$。

集群对涨落的稳定性由稳定性矩阵的特征值决定。如果某个特征值的实部变为正值，系统便是线性不稳定的。在我们的情形中，特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_\pm = {}& - \frac{ik}{2}(m_{\rho\rho} + m_{pp})\cos\psi \\ & \pm \frac{ik}{2}\sqrt{(m_{\rho\rho} - m_{pp})^2\cos^2\psi + 4AB\sin^2\psi}. \end{aligned} \quad \text{(S.73)}$$

由此可见，当判别式变为负值时便会发生不稳定性；在以下情况下就是如此：

$$B < -\frac{(m_{\rho\rho} - m_{pp})^2}{4A\tan^2\psi}. \quad \text{(S.74)}$$

最不稳定的波矢垂直于集群运动方向$\boldsymbol{x}$，其中 $\psi = \pi/2$。当 $B < 0$时，它是不稳定的。量 B 相当于集群 [57]的有效逆压缩率。如果它变为负值，高密度区域的压力实际上会低于低密度区域，从而使更多粒子流入更密集的区域，触发不稳定性。

关于这种不稳定性的更深入分析，可参见文献 [57, 58]，其中讨论了向列序可忽略的简单情形（$\gamma = 0$）。然而，我们的结果表明，向列序会产生一种额外的不稳定机制，我们称之为活性向列凝聚。正如正文所述，这一机制是我们系统中流形成的主要驱动力；因此，在分析中不能忽略向列序。

S5. 补充影片

影片 1：Janus粒子二聚体形成的流。以 10×物镜拍摄的Janus粒子二聚体形成的流，帧每秒 17 帧。粒子面积分数为 $\phi_0 = 0.22 \pm 0.01$，自推进速度为 $v_0 = 8.44 \pm 0.02$ μm/s。

影片2：Janus二聚体流入高密度群集。Janus粒子二聚体流入具有大尺度涡旋的高密度群集，使用10×物镜以每秒17帧的速度成像。

影片3：模拟中的各向同性态。展示各向同性态的模拟，如图3b所示。该模拟包含 $N = 10000$ 个二聚体，全局面积分数为 $\phi_0 = 0.02$，自推进速度为 $v_0 = 3$ μ米/秒。

影片 4：模拟中的行进带。展示行进带的模拟，见图3c。该模拟包含 $N = 10000$ 个二聚体，全局面积分数为 ϕ_0 =0。02，自推进速度为 $v_0 = 15$ μ米/秒。

影片5：模拟中的均匀群集。展示均匀群集态的模拟，如图3d所示。该模拟包含 $N = 10000$ 个二聚体，全局面积分数为$\phi_0 = 0.07$，自推进速度为 $v_0 = 15$ μ米/秒。

影片6：模拟中被群聚相包围的流。展示被稀疏群集相包围的流的模拟。该模拟包含 $N = 10000$个二聚体，全局面积分数为 $\phi_0 = 0.12$，自推进速度为$v_0 = 15$ μ米/秒。

影片 7：模拟中被各向同性相包围的流。展示被各向同性相包围的流的模拟，见图3e。该模拟包含 $N = 10000$ 个二聚体，全局面积分数为 $\phi_0 = 0.175$，自推进速度为 $v_0 = 15$ μ米/秒。