arXiv:2611.33018v1 [hep-ph] 24 Nov 2026

# 闭式形式的相对论性 BCS–BEC 交叉：作为有效程的截断

T. G. Khunjua[1]

[1] *The University of Georgia, GE-0171 Tbilisi, Georgia*

（日期：2026年11月24日）

在零温度下，具有配对能隙的狄拉克费米子的平均场势包含一个动量积分，即其两个准粒子能级之和的积分。我们通过一种几何构造以闭式形式对其进行求值：两个能级是平面中的距离，而动量线是固定椭圆的一段有限弧；沿此弧，对各模态求和后的电荷、标量密度和配对振幅，均可表示为勒让德三种椭圆积分的组合。随着动量上限增大，该积分会产生一个四次项、一个二次项以及一个具有已知系数的对数项。这两个幂次项分别吸收到一个常数和耦合中；在对所有动量完成积分后，剩下的是勒让德积分与一个尺度的对数组成的有限组合 $\lambda$。相对论性 BCS–BEC 交叉的能隙方程和密度由此可得闭式表达。将耦合替换为散射长度后，$\lambda$ 取代了文献中作为第三个参数保留的截断。我们证明，它确定了配对通道的有效程：对于质量为 $m$ 的狄拉克费米子对，其配对顶点为$\gamma_5$，$r_e = -(4/\pi m)[\ln(2\lambda/m) - 1]$。在低密度和固定的 $k_F r_e$ 下，该交叉等同于具有相同散射长度和有效程的费什巴赫共振双通道模型。在南部–约纳-拉西尼奥模型中，π介子衰变常数确定了 $\lambda$，π介子通道的有效程为 $-8\pi f_\pi^2/(N_c M^3)$，而夸克的组分质量 $M$ 是唯一仍可自由取值的参数。

## 一、引言

弱吸引作用的费米子气体是由大而相互重叠的粒子对组成的BCS超流体。强吸引作用下，费米子结合成分子态，超流体则是这些分子的玻色–爱因斯坦凝聚体。一个平均场基态连接着这两个区域 [1–3], ，从一个区域到另一个区域的过渡是一个交叉。对于具有接触吸引相互作用的非相对论性费米子，在零温度下它只有一个参数，即以粒子间距离为单位的散射长度 [2], ；其能隙方程和密度也已得到闭式表达：分别用完全椭圆积分 [4]以及独立地用勒让德函数 [5]表示。

致密夸克物质将同样的交叉带入相对论性费米子中。夸克在色超导体中配对 [6]，而在非零同位旋化学势下，一个夸克和一个反夸克凝聚成带电π介子 [7]；在这两种情况下，配对都可以从BCS态追踪到束缚对的凝聚。相对论性交叉由Nishida和Abuki研究 [8], ，当时着眼于致密夸克物质；此后，人们又在具有接触相互作用的模型 [9–14] 以及玻色子–费米子模型 [15]中对其进行了研究。它与非相对论性交叉有两点不同。狄拉克费米子在每个动量处都有两个能级，一个属于粒子，另一个属于反粒子；平均场势对二者之和进行积分。这个积分并不是非相对论问题中的完全椭圆积分之一，因此一直通过数值方法求值。此外，耦合不再吸收关于截断的全部依赖性：将其换算为散射长度后，仍会留下一个截断的对数项 [9, 12], ，截断也作为继散射长度和密度之后的第三个参数保留在方程中 [10]。

本文从由两个能级形成的几何图形出发，推导出该积分的闭式，并确定第三个参数。我们首先保留动量的上限，以观察积分如何随其增长：其增长由四次项、二次项和对数组成，其中系数是质量、化学势和能隙的多项式。这两个幂次项分别吸收到一个常数和耦合中。将所有动量积分掉后，剩下的是勒让德三种椭圆积分与一个尺度的对数的有限组合 $\lambda$，式（30）。能隙方程和交叉区密度都是这一公式的导数，而求解交叉意味着寻找两个闭式表达式的公共根。尺度 $\lambda$ 是第三个参数，并确定一个有效程：对于质量为 $m$、配对顶点为 $\gamma_5$ 的两个狄拉克费米子，粒子对的通道为 $r_e = -\left(4/\pi m\right)\left[\ln(2\lambda/m) - 1\right]$，其关于该尺度为负且呈对数关系。在低密度下，当 $k_F r_e$ 保持不变时，相对论性交叉便是具有相同散射长度和有效程 [16]的费什巴赫共振双通道模型。这里没有引入第二个通道：在远高于质量的动量下，配对本身发挥了第二通道的作用。据我们所知，此前尚未有过对截断的这种解读。

在图中，这两个层级分别是平面内一点到另外两点的距离；它们的和是一个圆的直径，而该圆在轴上两个点处的高度遵循同一个关系，并且随着动量增加，点会运行
沿着固定椭圆的一段有限弧。在这段弧上，对各模求和后的电荷、标量密度和配对振幅，都是勒让德三类积分的组合；所有增长项都来自弧的端点。

在一维空间中，相同的两个能级属于具有 π介子凝聚的 Gross–Neveu模型。人们在那里发现，势可以化为椭圆积分 [17]。参考文献 [18] 通过另一种方法——Hermite 约化——求得了南部–约纳-拉西尼奥模型在三维、具有同位旋密度时相同积分的闭式，并据此说明正规化会改变什么。该模型中的粒子对是π介子，其所在的道正是本文的例子：π介子衰变常数确定了尺度，该道的有效程为 $-8\pi f_\pi^2/(N_c M^3)$，而真空中的夸克质量 $M$ 是真空留下的唯一自由参数。

换一种方式命名这三个参数后，同样的两个能级分别对应于带有双夸克凝聚的双颜色量子色动力学中的夸克 [19], 、双味色超导体中的成对夸克 [20] ，以及具有 $s$波配对的有质量狄拉克电子 [21]。我们研究固定质量下的交叉，并将这种对尺度的理解应用于π介子凝聚，以及南部–约纳-拉西尼奥模型中的双味色超导体（第VI节）。

本文的结构如下。第II 节绘制了两个能级的示意图。第III 节沿弧进行积分，并以主要结果式（30）作结。第IV 节给出积分掉所有动量后的交叉方程，第V节说明尺度如何确定粒子对通道的有效程，并考察低密度极限。第VI节转向南部–约纳-拉西尼奥模型中的夸克物质：π介子凝聚（其中π介子衰变常数确定尺度）、双味色超导体，以及不再适用闭式表达的多重凝聚。第VII节作总结。正文略去的推导见附录。公式通过生成这些公式的脚本在《补充材料》中进行了检验 [22] （附录F）。

## II. 两个能级、一个图

### A. 能级与积分

我们考虑质量为 $m$ 、化学势为 $\mu$的狄拉克费米子，它与一个电荷相反的伙伴配对； $\Delta$ 是能隙。在将费米子及其伙伴上下排列的基底中，其平均场哈密顿量为

$$H = \left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m - \mu\right)\tau_3 + \Delta\,\tau_1, \tag{1}$$

其中， $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\beta$ 是狄拉克矩阵，而 $\tau_1$、 $\tau_3$ 是作用于费米子及其伙伴之间的泡利矩阵。在费米子与反费米子之间，配对项的顶角为 $\gamma_5$ （第V节）。 $H$ 的能级为 $\pm E^+$ 和 $\pm E^-$，每个均为二重简并，其中

$$E^{\pm}(p) = \sqrt{(E_p \pm \mu)^2 + \Delta^2}, \qquad E_p = \sqrt{p^2 + m^2}. \tag{2}$$

这里， $E_p$ 是自由费米子的能量。化学势以 $\pm\mu$为基准计数，对粒子和反粒子分别取相反的符号，而能隙以求积方式加入： $E^-$ 是费米能级附近粒子的Bogoliubov能量， $E^+$ 是反粒子的Bogoliubov能量。文献 [18] 中的模型具有这些能级。其中费米子是夸克， $\mu$是同位旋化学势的一半，而 $\Delta$ 是带电π介子凝聚，这三个符号分别为 $M$、 $\nu$ 和 $\Delta$。

在零温度下，各能级通过其绝对值之和进入平均场热力学势；对于每个动量而言，这个和是 $E^+ + E^-$ 的倍数。因此，每个这样的势都包含以下积分，并带有用于计数颜色、味或基底加倍的因子：

$$I(\Lambda) = \int_0^{\Lambda} dp\, p^2 \left[E^+(p) + E^-(p)\right]. \tag{3}$$

我们暂时保留上限 $\Lambda$ ，以观察积分如何随其增长；最终将对所有动量进行积分。该积分不是初等积分，因为 $E_p$ 本身就是一个平方根，而每个能级又都是一个平方根的根。

### B. 两个点和一个三角形

非相对论问题只有一个能级，而该能级就是一段距离。动能为 $\varepsilon_p$、化学势为 $\mu$ 且能隙为 $\Delta$ 的费米子，其能级为 $\sqrt{(\varepsilon_p-\mu)^2+\Delta^2} = |\varepsilon_p - w|$ ，符合BCS理论，其中 $w = \mu + i\Delta$。它是复平面上的不动点 $w$ 到实轴上点 $\varepsilon_p$ 的距离；随着动量增大，该点逐渐远离原点（图 1a）。平均场势对动量积分，累加这段距离。在三维、零温度下，所得积分是第一类和第二类完全椭圆积分。Marini、Pistolesi和Strinati借此以闭式追踪了从BCS配对到玻色–爱因斯坦凝聚的交叉 [4]。

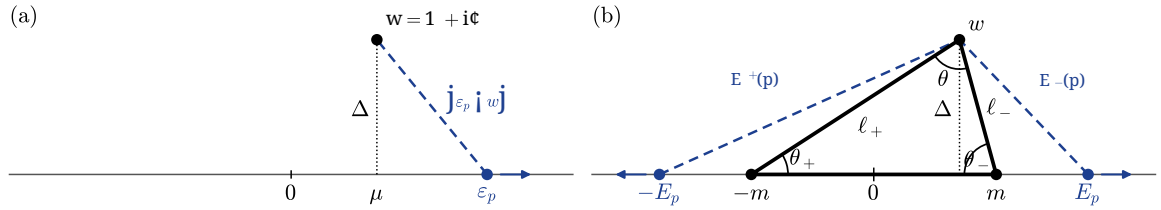



图 1. 一个点和两个点。(a) BCS理论的能级是从不动点 $w=\mu+i\Delta$ 到实轴上的点 $\varepsilon_p$ 的距离；随着动量增大，该点向右移动。(b) 狄拉克粒子有两个能级，即从 $w$ 到这些点 $\mp E_p$（虚线）的距离。在 $p=0$ 处，这些点是底边 $[-m,m]$ 的两个端点，能级是三角形的两条边 $\ell_\pm$； $\theta$ 是顶点处的角， $\theta_\pm$ 是底边与边 $\ell_\pm$之间的角。绘制参数为 $(m,\Delta,\mu)$ =(1,1.1,0.7) 和 $E_p=1.75$。

狄拉克粒子引入了第二个点。对于相同的 $w$，两个能级（2）分别为 $E^-=|E_p-w|$和 $E^+=|-E_p-w|$: 从 $w$ 到实轴上的点 $+E_p$ 和 $-E_p$ 的距离，分别对应粒子和反粒子（图 1b）。当 $p=0$ 时，这两个点分别是 $\pm m$，而两个能级就是底边为 $[-m,m]$ 、顶点为 $w$的三角形的两条边，

$$\ell_\pm \equiv E^\pm(0)=\sqrt{(m\pm\mu)^2+\Delta^2}, \qquad \cos\theta=\frac{\ell_+^2+\ell_-^2-4m^2}{2\,\ell_+\ell_-}, \qquad \cos\theta_\pm=\frac{m\pm\mu}{\ell_\pm}, \tag{4}$$

其中， $\theta$ 是顶点处的角， $\theta_\pm$ 是底边与边 $\ell_\pm$之间的角。随着动量增大，这两个点沿轴线相互远离，而顶点保持原位。

### C. 经过顶点的椭圆

势对两个能级之和 $S\equiv E^+ + E^-$ 进行积分，而不是分别对它们进行积分。两个能级的平方相差 $E_p$ 的倍数，并且其和是关于它的一个多项式，

$$(E^+)^2-(E^-)^2=4\mu E_p, \qquad (E^+)^2+(E^-)^2=2\big(E_p^2+\mu^2+\Delta^2\big). \tag{5}$$

因此， $S^2$ 和 $(E^+-E^-)^2$ 的和为 $4(E_p^2+\mu^2+\Delta^2)$，乘积为 $16\mu^2E_p^2$: 它们是下式的两个根

$$z^2-4\big(E_p^2+\mu^2+\Delta^2\big)z+16\,\mu^2E_p^2=0, \qquad \text{and} \qquad E^+E^-=\frac{S^2}{2}-E_p^2-\mu^2-\Delta^2. \tag{6}$$

根式消失了：二次方程中只通过平方出现 $E_p$ ，因此动量也只通过 $p^2$ 出现。

到两个给定点的距离之和为定值的平面上的点构成一个椭圆，这两个点是它的焦点。在给定动量下，顶点 $w$ 因此位于以 $\pm E_p$ 为焦点、以 $\frac{1}{2}S$ 为长半轴的椭圆上。设 $h_E$ 为其短半轴。焦点的位置以及椭圆经过点 $\bar{}w=(\mu,\Delta)$ 这一条件构成两个方程，

$$\frac{S^2}{4}-h_E^2=E_p^2, \qquad \frac{4\mu^2}{S^2}+\frac{\Delta^2}{h_E^2}=1. \tag{7}$$

第二个不包含动量。消去分母后，它将两个半轴相互联系起来，

$$\Big(\frac{S^2}{4}-\mu^2\Big)\big(h_E^2-\Delta^2\big)=\mu^2\Delta^2, \tag{8}$$

并且将 $h_E$ 从第一个式子中取出后，它就是 6 式中的二次方程（ $z=S^2$。随着动量增大，焦点彼此远离，顶点保持不变，椭圆变得更长、更扁（图 2a）。

### D. 双生椭圆

当交换 $E_p$ 和 $\mu$ 时， $\sqrt{(E_p\pm\mu)^2+\Delta^2}$ 的各能级不会改变。因此，同一个和 $S$ 也是第二个椭圆的长轴，该椭圆是第一个椭圆的孪生体，

$$\frac{S^2}{4}-h_\mu^2=\mu^2, \qquad \frac{4E_p^2}{S^2}+\frac{\Delta^2}{h_\mu^2}=1: \tag{9}$$

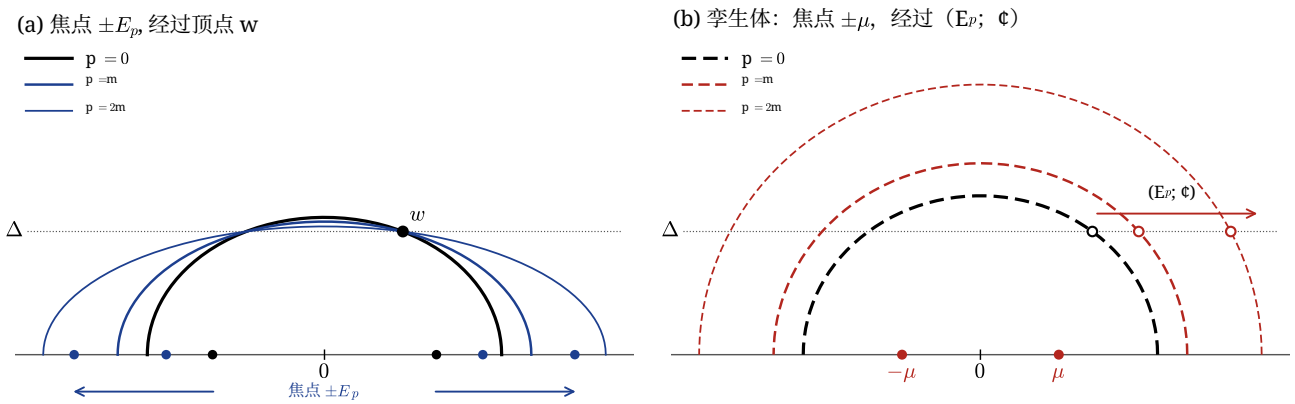



图2. 动量 $p = 0$（黑色）下的两族椭圆， $m$ 和 $2m$，对应图1b 中的三角形。（a）焦点为 $\pm E_p$ 且经过顶点 $w$的椭圆：焦点彼此远离，顶点保持不动，短半轴 $h_E$向 Δ靠近。（b）其孪生体，焦点为 $\pm\mu$ 且经过点（$E_p$， Δ）：焦点保持不动，点向右移动，短半轴 $h_\mu$ 增大。在每个动量下，两个椭圆具有相同的长半轴， $\frac{1}{2}S$。

其焦点为 $\pm\mu$，它经过点（$E_p$， Δ），且 $h_\mu$ 是其短半轴。孪生体的焦点不会移动。随着动量增大，该点向右移动，孪生体也随之变大（图 2b）。

### E. 圆及其两个高度

我们画出一个以原点为圆心、直径为 $S$ 的圆（图3）。两个椭圆都位于圆内，并在长轴的两个端点处与圆相切；在椭圆的一个焦点上方，圆的高度等于该椭圆的短半轴：在点 $E_p$ 上方，高度为 $h_E$；在点 $\mu$上方，也就是三角形的高的垂足处，高度为 $h_\mu$。圆在每个点上方的高度都以该点命名。这两个高度满足一个关系：

$$h_\mu^2 = \frac{S^2}{4} - \mu^2, \qquad h_E\, h_\mu = \tfrac{1}{2} S\, \Delta. \tag{10}$$

第二个关系又是（8），这可由图形得出。椭圆是圆沿短轴方向按两条半轴的比率压缩而成的。圆在 $\mu$上方的点，高度为 $h_\mu$；经过压缩后，该点的高度变为 $h_\mu h_E / \frac{1}{2}S$，而该点就是顶点，其高度为 Δ。这就是两高度定律。

By (6), (7) and (10),

$$E^+E^- = h_E^2 + h_\mu^2 - \Delta^2, \qquad h_E^2 - h_\mu^2 = \mu^2 - E_p^2. \tag{11}$$

当点 $E_p$ 和 $\mu$ 重合时，高度相等。对于 $\mu > m$ 即费米球 $E_p = \mu$而言：在那里，椭圆及其孪生体是同一条曲线，顶点位于其焦点上方。对于 $\mu < m$ 而言，点 $E_p$ 永远不会到达 $\mu$，并且$h_E < h_\mu$ 在每个动量处都是如此。

### F. 模态保持什么

每个动量都是一个具有两个能级的模态，图中的圆对应一个模态。它的半径和两个高度，是该模态对三个参数的响应：根据附录 A， $\partial S/\partial\mu = 4\mu\, h_E^2/(E^+E^-S)$、 $\partial S/\partial\Delta = \Delta\, S/(E^+E^-)$和 $dS/dp = 4p\, h_\mu^2/(E^+E^-S)$；对质量求导时，则以 $m$ 代替 $p$。这些响应就是模态所承载的量，我们称之为它的内容。在动量 $p$ 处，这些能级构成三角形的两条边，底边为 $[-E_p, E_p]$，顶点为 $w$；底角 cos $\theta_\pm(p)$ $= (E_p \pm \mu)/E^\pm$则是两个分支的 Bogoliubov 角。我们采用完整角度，如同安德森的赝自旋图像 [23],，因此 $u_\pm =$cos $\frac{1}{2}\theta_\pm$ 和$v_\pm =$ sin $\frac{1}{2}\theta_\pm$: $v_-^2$ 是该模态粒子态的占据数； $v_+^2$ 是反粒子态的占据数，而 $u_\pm v_\pm$ 是两个配对振幅。于是， $S$ 对 $\mu$、 $E_p$ 和 Δ 的导数的一半为

$$v_-^2 - v_+^2 = \frac{2\,\mu\, h_E^2}{E^+E^-S}, \qquad 1 - v_-^2 - v_+^2 = \frac{2\,E_p\, h_\mu^2}{E^+E^-S}, \qquad u_-v_- + u_+v_+ = \frac{2\,\Delta\,(S/2)^2}{E^+E^-S}. \tag{12}$$

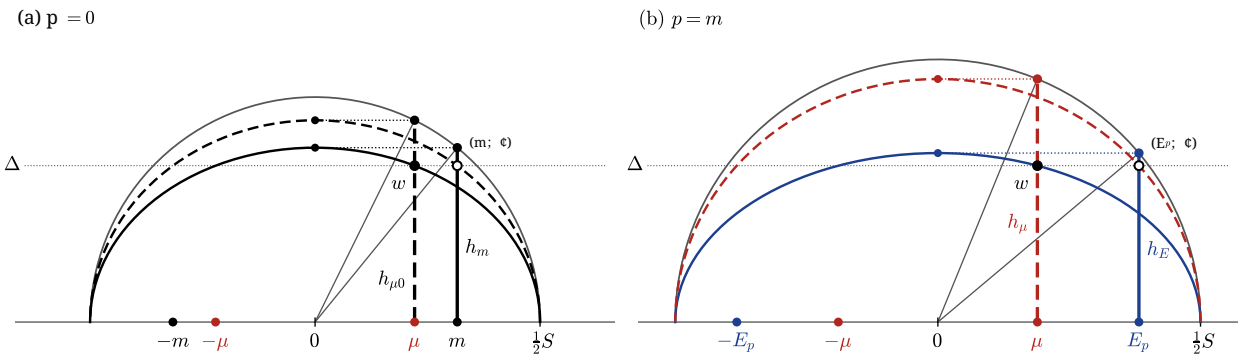



图3。对于图1b中的三角形，圆及其两个高度分别为：(a) 在 $p = 0$ 处，以及 (b) 在动量 $p = m$处。以原点为圆心的圆，其直径为 $S = E^+ + E^-$。在点 $E_p$ 上方，它的高度为 $h_E$，即焦点为 $\pm E_p$ （实线）的椭圆的短半轴，该椭圆经过顶点 $w$。在点 $\mu$ 上方，它的高度为 $h_\mu$，即焦点为 $\pm\mu$ （虚线）的孪生体的短半轴，该孪生体经过点（$E_p$，$\Delta$）。两点均位于高度 $\Delta$ （点线）处。在 $p = 0$ 处，焦点为 $\pm m$ 和 $\pm\mu$，两个高度为第三节中的 $h_m$ 和 $h_{\mu 0}$；随着 $p$ 增大，$h_E$ 从 $h_m$ 向 $\Delta$ 下降，而 $h_\mu$ 从 $h_{\mu 0}$开始增大。细线：从原点连接至两个高度顶端的半径。

第一项是该模态的电荷，即粒子数减去反粒子数。第二项乘以 $m/E_p$后就是它的标量密度：在真空中，它是狄拉克海的一项，而每个存在的粒子或反粒子都会阻塞其中一部分。第三项是它的配对振幅。因此，$E_p$ 上方高度的平方对应电荷，$\mu$ 上方高度的平方对应标量密度，而半径的平方对应粒子对。

## III. 弧上的积分

当动量从零增至无穷大时，椭圆的焦点彼此远离，圆也随之变大。两个高度中的一个随之无限增大，另一个则始终处于两个固定值之间。

### A. 路径

当 $p = 0$ 时，焦点位于底边两端，直径为 $\ell_+ + \ell_-$。于是，两个高度分别位于点 $h_m$ 上方，以及点 $m$ 上方 $h_{\mu 0}$（图 3a），其中 $h_m^2 = \frac{1}{4}(\ell_+ + \ell_-)^2 - m^2$ 且 $h_{\mu 0}^2 = \frac{1}{4}(\ell_+ + \ell_-)^2 - \mu^2$。点 $\mu$保持不动，其上方的高度随圆一起增大。当 $\rho^2 \equiv m^2 + \Delta^2$时，在椭圆方程（7）与定律（10）之间消去 $S$ 和 $h_E$，得到

$$p^2 = h_\mu^2 + \mu^2 - \rho^2 - \frac{\mu^2\Delta^2}{h_\mu^2}, \tag{13}$$

因此，在大动量下，$h_\mu$ 就是动量本身。点 $E_p$ 上方的高度则从 $h_m$ 朝 $\Delta$减小；以它为变量，动量线就是有限区间 $\Delta < h_E \le h_m$。在这个区间上，$p^2$ 是一个比值（B2），其分子包含两个因子，分别为 $h_m^2 - h_E^2$和 $h_E^2 + h_{\mu 0}^2 - \Delta^2$。第一个因子让人联想到余弦，而第二个因子便是勒让德平方根：

$$\begin{aligned} h_E = h_m\cos\varphi: \qquad & \sqrt{h_m^2 - h_E^2} = h_m\sin\varphi, \\ \sqrt{h_E^2 + h_{\mu 0}^2 - \Delta^2} = \sqrt{\ell_+\ell_-}\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}, \qquad & k^2 = \frac{h_m^2}{\ell_+\ell_-}. \end{aligned} \tag{14}$$

模数 $k$ 属于图 1b 中的三角形，

$$k^2 = \frac{(\ell_+ + \ell_-)^2 - 4m^2}{4\,\ell_+\ell_-} = \cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{15}$$

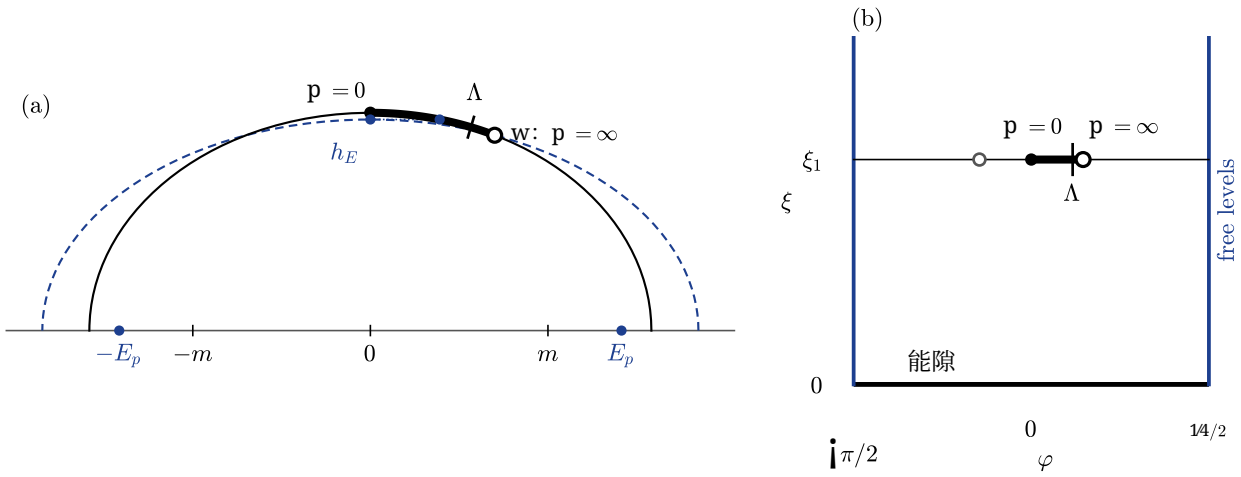



图4. 对于图1b 中的三角形，动量线是一段弧。(a) $p=0$ 所表示的椭圆（实线），焦点为 $\pm m$；动量 $p=m$ 所表示的椭圆（虚线），焦点为 $\pm E_p$；两者都经过顶点 $w$。点线将虚线椭圆顶端的高度 $h_E$ 映射到实线椭圆上。粗弧由所有动量对应的这些标记构成；它终止于顶点，横线标示出上限 $\Lambda = 2m$ 将其截断的位置。(b) 用坐标 $x+iy = m\sin(\varphi+i\xi)$ 表示同一平面。自由谱的能隙是底面，自由能级是墙壁，而弧则是一条线段。灰色圆是顶点的镜像（$-\mu,\ \Delta$）。

即顶点角的一半的余弦。勒让德振幅 $\varphi$ 在图中也有其含义：$\cos\varphi$ 是以其最大值为单位的高度 $h_E$。它从 $\varphi=0$ （位于 $p=0$ ）变化到 $\varphi_1$ （位于 $p=\infty$），其中 $h_E=\Delta$:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\Delta}{h_m}, \qquad \sin\varphi_1 = \frac{2\mu}{\ell_+ + \ell_-}. \tag{16}$$

图4绘出了这条路径。 $p=0$对应的椭圆，其焦点为 $\pm m$，半轴为 1 2（$\ell_+ + \ell_-$）和 $h_m$，且不随动量变化。我们在椭圆上标出一个点，其高度为 $h_E$，即圆上方那个点的高度 $E_p$。随着 $p$ 增大，该标记从椭圆顶端向下移动，直到在 $p=\infty$ 处到达顶点。整个半直线$p \geq 0$ 就是这段弧（图4a）。在平面的椭圆坐标 $x+iy = m\sin(\varphi+i\xi)$ 中，椭圆是直线 $\xi=\xi_1$，其中 $\cosh\xi_1 = (\ell_+ + \ell_-)/(2m)$，而弧是一条线段 $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ （图4b）。因此，经过 $p=0$ 处顶点的椭圆承载着这条路径，而其孪生体的焦点保持不动，承载着随动量增大的高度 $h_\mu$ 。有限上限会使标记停在距顶点尚有一段距离的位置，其振幅为 $\varphi_\Lambda$ ，距离为

$$\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_\Lambda = \frac{\mu^2\cos^2\varphi_1}{h_\mu^2(\Lambda)} = \frac{\mu^2\cos^2\varphi_1}{\Lambda^2} + O(\Lambda^{-4}), \tag{17}$$

因此，大动量位于弧末端附近。

### B. 阶跃与三重权重

沿弧前进时，振幅随动量按照 (B3) 和 (11) 递增，如下所示

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2\mu\sqrt{\ell_+\ell_-}\,\frac{dp}{E^+E^-S}, \qquad \text{so that} \qquad u \equiv \mathrm{F}(\varphi,k) = 2\mu\sqrt{\ell_+\ell_-}\int_0^p \frac{dp'}{E^+E^-S}. \tag{18}$$

因此，勒让德第一类积分就是带有因子 $1/(E^+E^-S)$ 的动量积分。当 $p$ 很大时，这个因子按 $1/(2p^3)$ 衰减，这就是为什么在这个坐标下，整个动量半轴具有有限长度：$u_1 = \mathrm{F}(\varphi_1,\ k)$。在坐标 $u$ 下，勒让德的三个积分彼此只相差一个权重：

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\varphi,k) &= \int_0^u du', \qquad \mathrm{E}(\varphi,k) = \int_0^u \frac{h_E^2 + h_{\mu 0}^2 - \Delta^2}{\ell_+\ell_-}\,du', \\ \Pi(\varphi;\alpha^2,k) &= \int_0^u \frac{h_\mu^2}{h_{\mu 0}^2}\,du', \qquad \alpha^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi_1}, \end{aligned} \tag{19}$$

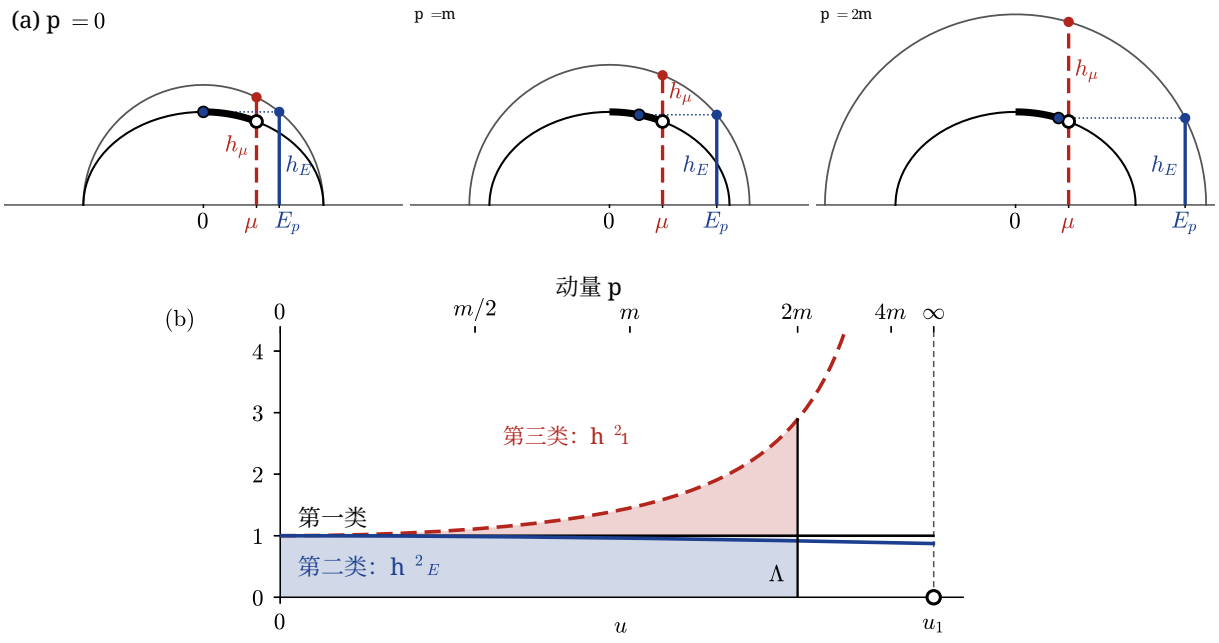



图5。对于图1b 的三角形，三个权重。（a）三个动量。图 $p = 0$ 中的椭圆和图4 中的弧保持不动；以原点为圆心、直径为 $S$的圆不断增大。它在点 $E_p$ 上方的高度为 $h_E$，即弧上标记（虚线）的高度；它在点 $\mu$ 上方的高度为 $h_\mu$。第一个下降到 $\Delta$ 顶点（空心圆）的高度，第二个则无限增大。（b）沿路径的（19）中的三个权重，在坐标 $u$ 中，步长为 $du$；上方的轴表示动量。F、E 和 Π 分别是直线下方、下方曲线下方和上方曲线下方的面积，阴影区域延伸至 $\Lambda = 2m$。路径终止于 $u_1$，上方曲线在那里有一个简单极点。

其中 $\Pi(\varphi;\alpha^2,k) = \int_0^\varphi d\vartheta (1-\alpha^2\sin^2\vartheta)^{-1}(1-k^2\sin^2\vartheta)^{-1/2}$。这些权重分别为 1、标记高度加上一个常数后的平方，以及高于 $\mu$ 部分的高度的平方；后两者在 $p = 0$ 处归一化为 1（图5）。前两个积分是有限的，因为路径长度有限。第三个积分则无界增长： $h_\mu^2$ 按 $p^2$ 增长，步长按 $dp/(2p^3)$ 衰减，两者的乘积为 $dp/(2p)$，即一个对数。

### C. 任意上限处的积分

一次分部积分会消去因子 $p^2$。我们要寻找一个边界项，消去 $p^2 S$ 中所有增长的部分，并留下三个权重与步长的线性组合 $dp/$（$E^+E^-S$）。附录B 给出了该项：

$$p^2 S = \frac{d}{dp}\Big[\frac{p\,S\,(16\,p^2 + 10\,\rho^2 - S^2)}{48}\Big] + \frac{c_1 + c_2\,h_E^2 + c_3\,h_\mu^2}{E^+E^-\,S}, \tag{20}$$

其系数 $c_1$、 $c_2$ 和 $c_3$ 都是关于 $m$、 $\mu$和 $\Delta$的多项式，（B6）。这是动量的代数函数之间的一个恒等式，验证它只需进行一次微分。在 $\mu = 0$ 处，它就是自由真空能的分部积分。文献 [18]通过另一种途径得到这一结果，即对变量$S^2$中的积分进行 Hermite 约化。沿着弧并使用步长（18）和权重（19）进行积分，可得

$$\begin{aligned} I(\Lambda) = W(\Lambda) + \frac{1}{2\mu\sqrt{\ell_+\ell_-}}\Big[&\big(c_1 - c_2\,(h_{\mu 0}^2 - \Delta^2)\big)\,\mathrm{F}(\varphi_\Lambda,k) + c_2\,\ell_+\ell_-\,\mathrm{E}(\varphi_\Lambda,k) \\ &+ c_3\,h_{\mu 0}^2\,\Pi(\varphi_\Lambda;\alpha^2,k)\Big], \qquad \cos\varphi_\Lambda = \frac{h_E(\Lambda)}{h_m}, \end{aligned} \tag{21}$$

在每个 $\Lambda$处都精确成立。这里 $W$ 是式（20）的边界项，而 $\varphi_\Lambda$ 是上限使标记停止处的振幅。

令 $T_1$， $T_2$ 和 $T_3$ 分别为 $\mathbf{1}$、 $h_E^2$ 和 $h_\mu^2$ 关于动量、步长为 $dp/\left(E^+E^-S\right)$ 的和；它们是 F、E 和 Π的组合， （B7）。根据式（12），用一维空间的测度 $dp$ 对一个模态求和所得的三个内容为

$$\begin{aligned}
&\text{charge:} && \int_0^\Lambda \left(v_-^2 - v_+^2\right) dp = 2\mu\, T_2, \\
&\text{scalar density:} && \int_0^\Lambda \frac{m}{E_p}\left(1 - v_-^2 - v_+^2\right) dp = 2m\, T_3, \\
&\text{粒子对:} && \int_0^\Lambda \left(u_- v_- + u_+ v_+\right) dp = 2\Delta\left(\mu^2 T_1 + T_3\right).
\end{aligned} \tag{22}$$

这里 $T_1$ 是坐标中路径的长度 $u$， $T_2$ 给出电荷，而 $T_3$ 则给出标量密度；粒子对与半径相乘并结合 $T_1$ 和 $T_3$。在一维中，除去势的因子后，它们分别是密度、标量凝聚和能隙方程。使用 $p^2dp$ 三维的测度时，同样的三个和与边界项构成积分本身（B8）。在大动量下，模态的电荷按 $\mu\Delta^2/p^3$衰减，而其标量密度保持 $m/E_p$ 真空中的数值：增长的是标量密度的和。

### D. 三个增长项

（21）中所有增长的内容行与 $\Lambda$ 来自弧的末端。边界项包含两个幂，

$$W(\Lambda) = \frac{\Lambda^4}{2} + \frac{\rho^2\Lambda^2}{2} + \mathcal{C}_W + O(\Lambda^{-2}), \qquad \mathcal{C}_W = \frac{\mu^2\Delta^2}{12} + \frac{\rho^4}{16}, \tag{23}$$

而化学势从两者中都消失了。它只通过对数系数参与增长，而该系数由大动量下的被积函数确定，

$$S = 2p + \frac{\rho^2}{p} + \frac{c_3/2}{p^3} + O(p^{-5}), \qquad \frac{c_3}{2} = \mu^2\Delta^2 - \frac{\rho^4}{4}. \tag{24}$$

对数本身包含在第三个权重的总和中，其中 Π末尾的极点可以用初等函数（附录 C）替换。结果为

$$I(\Lambda) = \frac{\Lambda^4}{2} + \frac{\rho^2\Lambda^2}{2} + \frac{c_3}{2}\ln\frac{2\Lambda}{\ell_0} + \mathcal{C}(m,\mu,\Delta) + O(\Lambda^{-2}), \qquad \ell_0 \equiv \sqrt{\ell_+\ell_- + \mu^2}, \tag{25}$$

有限部分为

$$\mathcal{C}(m,\mu,\Delta) = \mathcal{C}_W + \frac{1}{2\mu\sqrt{\ell_+\ell_-}}\Big[\left(c_1 - c_2\left(h_{\mu 0}^2 - \Delta^2\right) + c_3\, h_{\mu 0}^2\right)\mathrm{F}(\varphi_1,k) + c_2\,\ell_+\ell_-\,\mathrm{E}(\varphi_1,k) - c_3\, h_{\mu 0}^2\,\Pi(\varphi_1;\omega^2,k)\Big], \tag{26}$$

其中 $\omega^2 = k^2\sin^2\varphi_1$。随着上限增大，该积分因此按两个幂次和一个对数增长，而对数系数是参数的一个多项式。余项，即在整个弧上取勒让德三类积分所得的结果，是有限的。

### E. 积分的闭式表达

这三个增长项归入何处，取决于该积分所处的势。它与一项关于能隙的二次方程项共同出现，即 $\Delta^2$ 除以耦合；在固定质量下，三项相应地重新组合为

$$\frac{\Lambda^4}{2} + \frac{\rho^2\Lambda^2}{2} + \frac{c_3}{2}\ln\Lambda = \left[\frac{\Lambda^4}{2} + \frac{m^2\Lambda^2}{2} - \frac{m^4}{4}\ln\Lambda\right] + \Delta^2\left[\frac{\Lambda^2}{2} + \frac{m^2}{2}\ln\Lambda\right] + \left[\Delta^2\left(\mu^2 - m^2\right) - \frac{\Delta^4}{4}\right]\ln\Lambda. \tag{27}$$

第一项是质量为 $m$ 的自由费米子零点能中不断增长的部分，与态无关。第二项是 $\Lambda$ 的一个函数乘以 $\Delta^2$，这正是耦合所吸收的部分。第三项则无法以这种方式吸收：耦合与态无关，而且含有 $\mu^2\Delta^2$ 和 $\Delta^4$ 的项并非 $\Lambda$ 的一个函数乘以$\Delta^2$。项 $-m^2\Delta^2\ln\Lambda$ 如何在第二项和第三项之间分配，取决于一种约定；这里采用的是

两个粒子的阈值（第 IV 节）。因此，这两个幂分别并入常数和耦合，各自带有一部分对数，而仍会留下一个对数。当质量本身就是凝聚时，如南部–约纳-拉西尼奥模型（第 VIA 节）中那样，耦合乘以 $\rho^2$：它吸收 $\rho^2\Lambda^2$ 整体，不吸收任何部分的对数。

积分的截断方式通过一个数值影响有限部分，即对数的尺度。作用于动量的规则——一个在小动量处取值为 1、在大动量处衰减的窗函数 $f(p/\Lambda)$——只会在弧的末端附近影响积分，而

$$\int_0^\infty p^2 S\, f(p/\Lambda)\, dp = 2f_3\,\Lambda^4 + f_1\,\rho^2\Lambda^2 + \frac{c_3}{2}\ln\frac{2s_f\Lambda}{\ell_0} + \mathcal{C} + o(1), \tag{28}$$

由三个数值 $f_3$、$f_1$ 和 $s_f$ 描述，它们仅取决于窗函数 [22]；对于 (25) 的上限，它们分别为 $1/4$、$1/2$ 和 1。该规则会改变两个幂次项的系数，这两个幂次项分别乘以 1 和 $\rho^2$（无论它是什么），并使对数的尺度乘以因子 $s_f$。除此之外，它不会改变任何内容：对数系数保持不变，而对于有限部分，每种这样的规则都等效于上限 $s_f\Lambda$。因此，该规则可以用其尺度替代：我们对所有动量积分，减去两个幂次项，并从尺度 $\lambda$ 开始计算对数，

$$I_\lambda(m,\mu,\Delta) \equiv \lim_{\Lambda\to\infty}\Big[I(\Lambda) - \frac{\Lambda^4}{2} - \frac{\rho^2\Lambda^2}{2} - \frac{c_3}{2}\ln\frac{\Lambda}{\lambda}\Big]. \tag{29}$$

由（25）可知，积分剩下的部分为

$$I_\lambda(m,\mu,\Delta) = \mathcal{C}(m,\mu,\Delta) + \frac{c_3}{2}\ln\frac{2\lambda}{\ell_0}. \tag{30}$$

方程（30）是本文的主要结果。有限部分（26）在弧的末端包含勒让德三类积分，对数系数是（24）中的多项式，而 $\lambda$ 是积分无法确定的唯一数值。从这里起，“已对所有动量积分”指的就是这个极限，对积分本身及其所有推导结果皆如此：减去各次幂，并将 $\ln\Lambda$ 替换为 $\ln\lambda$。忽略 $\lambda^{-2}$ 阶的项，它就是积分截断在$\Lambda=\lambda$处的结果，不包含那两个幂次项。

对数中的能量 $\ell_0 = \overline{\sqrt{\ell_+\ell_-}} + \mu^2$ 不是一个参数。它由图1b中的三角形确定；在真空中，当 $\Delta=0$ 和 $\mu<m$时，它就是质量，因此对数为 $\ln(2\lambda/m)$。配对通道的有效程$r_e$将从这里读出，即 $\ln(2\lambda/m) = 1 - \frac{1}{4}\pi\, m\, r_e$（第五节）。式（30）在有限部分和对数之间如何分配，属于一种约定：若用另一个能量 $\ell_0'$ 代替 $\ell_0$，有限部分就变为 $\mathcal{C} + \frac{1}{2}c_3\ln(\ell_0'/\ell_0)$，两者之和不变，而点 $2\lambda=\ell_0$ 本身没有意义。与约定无关的是系数 $\frac{1}{2}c_3$，以及积分通过一个对数 $\lambda\partial I_\lambda/\partial\lambda = \frac{1}{2}c_3$依赖于 $\lambda$这一事实。一旦积分进入势中，改变尺度本身就不再是约定：$\frac{1}{2}c_3$ 的 $\mu^2\Delta^2 - \frac{1}{4}\Delta^4$ 项既不是常数，也不单独与 $\Delta^2$ 成正比，常数和耦合都无法抵消它们。能隙方程和交叉区密度是式（30）的导数（第四节）。

## IV. 闭式交叉

平均场理论的势通过求导给出其方程：对能隙求导得到能隙方程，对化学势求导则得到密度。如第 III 节所示，我们保留上限 $\Lambda$，直到掌握增长项，然后对所有动量积分。

### A. 两个方程

积分（3）对 $\mu$、$m$ 和 $\Delta$ 的导数的一半，是一个模态的三个内容（12），对各模态求和并乘以因子 $p^2$：

$$Q_\mu \equiv \int_0^\Lambda p^2\big(v_-^2 - v_+^2\big)dp, \qquad Q_m \equiv \int_0^\Lambda p^2\,\frac{m}{E_p}\big(1 - v_-^2 - v_+^2\big)dp, \qquad Q_\Delta \equiv \int_0^\Lambda p^2\big(u_-v_- + u_+v_+\big)dp. \tag{31}$$

除去势中乘在积分前的因子外，$Q_\mu$ 是电荷密度，$Q_m$ 是标量密度，$Q_\Delta$ 是能隙方程的积分。按照第三节的做法，去掉因子 $p^2$，于是这三者分别都是一个边界项与沿弧线的相同三个和的组合（D3）。我们将含有该积分的势写作 $\Omega = \Delta^2/G - N\,I(\Lambda)$，其中耦合 $G$ 和数值 $N$ 取决于模型。能隙方程 $\partial\Omega/\partial\Delta = 0$ 于是为 $Q_\Delta/\Delta = 1/(NG)$，由于 $u_\pm v_\pm = \Delta/2E^\pm$，其左侧为$\frac{1}{2}\int_0^\Lambda p^2(1/E^+ + 1/E^-)\,dp$。在给定密度下，能隙方程和密度（乘以模型的因子 $Q_\mu$）构成关于 $\mu$和 $\Delta$的两个方程。它们就是平均场相对论性交叉 [10, 12]的方程。

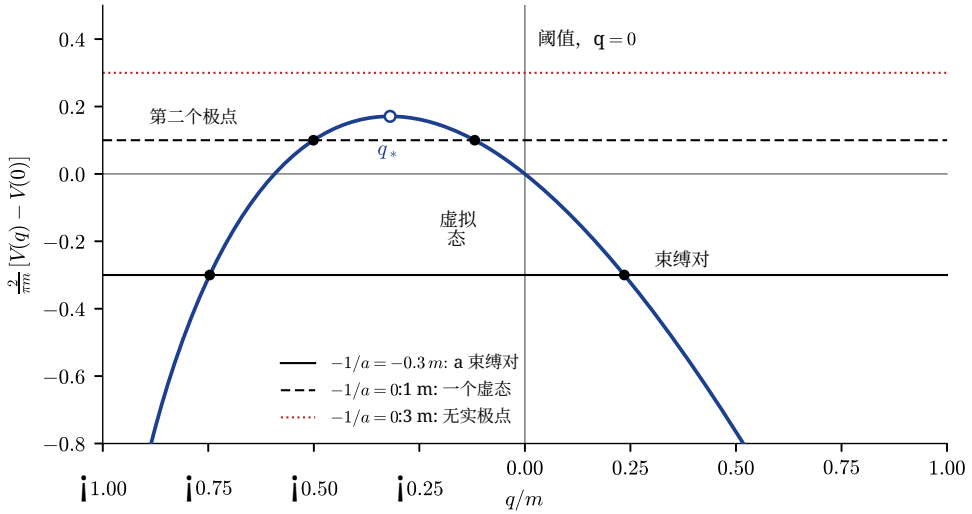



图 6. 粒子对在圈图曲线上的极点：$\frac{2}{\pi m}[V(q) - V(0)]$ 相对于 $q$ 在 $\Lambda = 10\,m$处，其中 $V(q)$ 是式（32）在 $q_B = q$处的闭式。耦合是位于 $\frac{2}{\pi m}[1/(NG) - V(0)] = -1/a$处的水平线，而极点是它与曲线的交点：一个束缚对和一个远极点（实线）、一个虚态和第二个极点（虚线）；当超过曲线在 $q_*$ 处的最大值时，则没有实极点（点线）。

### B. 粒子对的耦合与质量

耦合可以用粒子对的某种性质来替代。当 $\Delta \to 0$ 在 $\mu < m$ 两个能级变为 $E_p \pm \mu$时，能隙方程的左侧变为 $E_p\, p^2/(p^2 + q^2)$的积分，其中 $q^2 = m^2 - \mu^2$是总能量为 $2\mu$时两个自由粒子的圈图。减去 $1/(NG)$后，该圈图是真空中两个粒子散射振幅的分母（第五节），而束缚对就是其零点。对于束缚对，令 $m_B$ 为 $2\mu$能隙开始出现时的值。它就是粒子的质量；当其化学势达到其质量 [8]时，粒子对发生凝聚。起始处的能隙方程是粒子对极点的条件，即 Thouless判据 [24]，

$$\begin{aligned} \frac{1}{NG} = V(\Lambda) \equiv \int_0^\Lambda \frac{E_p\, p^2}{p^2 + q_B^2}\, dp, \qquad q_B^2 \equiv m^2 - \tfrac{1}{4} m_B^2, \\ V(\Lambda) = \frac{\Lambda E_\Lambda + m^2 \operatorname{arsinh}(\Lambda/m)}{2} - q_B^2 \operatorname{arsinh} \frac{\Lambda}{m} - q_B \sqrt{m^2 - q_B^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{q_B\, E_\Lambda}{\Lambda \sqrt{m^2 - q_B^2}} \right], \end{aligned} \tag{32}$$

其中，$q_B > 0$ 是粒子对的束缚动量，$E_\Lambda = \sqrt{\Lambda^2 + m^2}$。消去耦合后，上限 $\Lambda$ 处的能隙方程即为分母的零点

$$D(\Lambda) \equiv \frac{Q_\Delta}{\Delta} - V(\Lambda) = 0. \tag{33}$$

除一个符号差异外，$D$ 是粒子对在零动量 [9]处的逆传播子。

也可以在两个粒子的阈值处用 $q_B = 0$替代耦合，其中 $V$ 是 $E_p$的积分，其增长部分乘以 $\Delta^2$ （27）中的 [9, 10, 12]。这相当于采用散射长度 [9, 10, 12]。散射长度 $a$由（$\pi m/2$）$/a \equiv V|_{q_B=0} - 1/$（$NG$）定义时，能隙方程为

$$D\big|_{q_B=0} + \frac{\pi m}{2a} = 0.$$

粒子对处于束缚态时，这就是（33），且对 $a$的任一符号都成立。

更弱的吸引作用无法形成束缚态。随后，极点越过阈值，$q_B = 0$，并继续进入能量的第二张黎曼面：在 $q_B < 0$处形成虚态，这与负散射长度的情形相同。将（32）的闭式结果经由$q_B = 0$延拓后，即可得到这种较弱吸引作用对应的耦合，而 $m_B$ 此时是虚态的能量，而不是质量。只要 $V$ 随 $-q_B$ 增大，虚态就会停留在实轴上（图6）。在这一侧的 $V$ 最大值处，$q_B = q_*$它与第二个极点相遇，随后两者一同离开实轴；更弱的吸引作用无法用实数$q_B$描述，此时需采用含有 $a$的形式来使用能隙方程。第V节将 $q_*$ 与该道的有效程联系起来。

### C. 对数与尺度

用粒子对取代耦合后，得到两个方程： $D=0$ 以及密度。在非相对论交叉中，作同样的替换后，对所有动量积分时两个方程都保持有限，而吸引作用的唯一参数便是散射长度 [4]。在这里，两个方程各自都保留一个对数。两个方程的被积函数分别为$f_D=\frac{1}{2}p^2\,(1/E^+ + 1/E^-)\;-E_p\,p^2/\,(p^2+q_B^2)$ 和 $f_\mu = p^2\,(v_-^2 - v_+^2)$。当动量远大于 $|q_B|$ 和$\sqrt{|m^2-\mu^2|}$，且能隙远小于能级时， $f_D$ 的主导项为 $(\mu^2 - m^2 + q_B^2)\;E_p/p^2$，而$f_\mu$ 为 $\mu\Delta^2\,E_p/p^2$：两者都乘以同一个因子 $E_p/p^2$。在质量以下，该因子为 $m/p^2$：这些是非相对论问题的尾部，并且收敛。在质量以上，该因子为 $1/p$；再加上能隙给 $f_D$增加的项 $-\Delta^2/2p$，

$$f_D \;\to\; \frac{1}{p}\Big(\mu^2 - \tfrac{1}{4}m_B^2 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\Big), \qquad f_\mu \;\to\; \frac{1}{p}\,\mu\Delta^2 \qquad (p \gg m). \tag{34}$$

尾项 $1/p$积分后得到一个对数。它与非相对论问题的区别在于能量随动量的增长方式不同。非相对论能量按 $p^2$ 增长，因此能量的每一个倒数都会使被积函数受到动量二次方的抑制。相对论能量按 $p$ 增长，因此每一个倒数只会使其受到动量一次方的抑制。

对所有动量完成积分后，这两个方程由（30）（附录 D）推出，并且每个方程的对数均以该尺度 $\lambda$为基准，

$$Q_\mu = \mu\Delta^2 \ln\frac{2\lambda}{\ell_0} + q_\mu, \qquad D = \big(\mu^2 - \tfrac{1}{4}m_B^2 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\big)\ln\frac{2\lambda}{\ell_0} + D_0, \tag{35}$$

其中 $q_\mu$ 和 $D_0$ 来自（D5），它们与尺度无关，并使弧末端的勒让德积分保持不变。这些方程是（31）和（33），且已对所有动量完成积分：幂次在 $Q_\Delta/\Delta$ 和 $V$之间相互抵消， $Q_\mu$ 没有幂次，而每一项都保留其对数。这两个对数的系数就是尾项（34）的系数，并且它们都是同一个函数的导数，

$$\begin{gathered}\mu^2 - \tfrac{1}{4}m_B^2 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 = -\frac{\partial\Omega_B}{\partial(\Delta^2)}, \qquad \mu\Delta^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_B}{\partial\mu}, \\ \Omega_B \equiv \Delta^2\big(\tfrac{1}{4}m_B^2 - \mu^2\big) + \tfrac{1}{4}\Delta^4 = \tfrac{1}{4}\big[(m_B^2 - \mu_B^2)\,\Delta^2 + \Delta^4\big], \qquad \mu_B = 2\mu.\end{gathered} \tag{36}$$

在任意能隙处，$\Omega_B$ 都是相对论玻色气体的平均场势 [25]：这是一个化学势为 $\mu_B = 2\mu$、质量为 $m_B$ 并具有四次排斥作用的场。对于 $q_B > 0$ 而言，它就是粒子对本身；当 $\mu_B$ 超过 $m_B$时，粒子对发生凝聚。其动能项和四次项带有同一个对数，这是复合场 [26, 27],的特征，而尺度仅留在该场的归一化中。在南部–约纳-拉西尼奥模型中，接近凝聚开始时，整个势都化为粒子对玻色气体的势 [13]；在这里，$\Omega_B$ 是在任意能隙处由尺度的对数相乘的量（附录D）。

尺度是吸引作用的第二个参数，仅次于散射长度，因此也是交叉的第三个参数。第V 节表明，它决定了配对通道的有效程。在给定密度下，（35）是关于 $\mu$ 和 $\Delta$ 的两个闭式方程：解是两个闭式表达式的公共根，无需计算动量积分。如文献 [18], 所述，该态是从小能隙连续延伸而来的局部极小值：当以 $\lambda$ 为基准测量对数时，势会在数量级为 $\lambda$ 的能隙处下降，并且没有下界。

## V. 截断作为有效程

在关于相对论性交叉的文献中，耦合通常像在非相对论问题中一样用散射长度表示，并对剩余的对数进行截断，因此截断作为一个参数保留在方程中 [10, 12]。用第IV节的术语来说，这个参数就是尺度 $\lambda$。我们将在这里说明，它确定了粒子对通道的有效程，并且在低密度下，该交叉是具有这一有效程的费什巴赫共振交叉。

### A. 两个粒子的振幅

圈图 $V$（32）不仅用于确定耦合。将 $q_B$ 替换为变量 $q$ 后，它就是总能量为$2\sqrt{m^2-q^2}$的两个粒子的真空圈图，我们将其写作 $V\,(q)$。由于 $1/\,(NG) = V\,(q_B)$，差值 $V\,(q_B) - V\,(q)$ 就是它们散射振幅的分母。我们对两个圈图中的所有动量都进行积分（附录D），

$$V_\lambda(q) = \frac{m^2}{4} + \big(\tfrac{1}{2}m^2 - q^2\big)\ln\frac{2\lambda}{m} - q\sqrt{m^2-q^2}\,\arccos\frac{q}{m},$$

因此，第IV节中定义的散射长度，在两个粒子的阈值处按照文献 [10], 定义为（$\pi m/2$）$/a$ $=V_\lambda$（0）$-V_\lambda$（$q_B$）。在接近阈值处

$$\frac{2}{\pi m}\big[V_\lambda(q_B)-V_\lambda(q)\big]=-\frac{1}{a}+q-\tfrac{1}{2}\,r_e\,q^2+O(q^3),\qquad r_e=-\frac{4}{\pi m}\Big[\ln\frac{2\lambda}{m}-1\Big]. \tag{37}$$

束缚对是 $q=q_B$ 处的零点。在阈值以上，即 $q=-ik$ 处，左侧乘以相对论相空间因子 $m/\sqrt{m^2+k^2}$ 后等于 $k\cot\delta-ik$，其中 $\delta$ 是相对动量为 $k$ 的两个粒子的相移，因此

$$k\cot\delta=-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\Big[r_e+\frac{1}{a\,m^2}\Big]k^2+\ldots,\qquad k\ll m. \tag{38}$$

括号中的第二项仅来自该因子，在共振附近 $|1/a|\ll m^2|r_e|$ 很小。因此，相的有效程为 $r_e+1/(am^2)$；在共振处 $1/a=0$，两者相等。数值 $r_e$ 本身不依赖于耦合：它是道的属性，也就是我们所称的有效程。在给定质量下，仅由尺度决定它。对于高于 $\frac{1}{2}e\,m$ 的 $\lambda$，它为负，其绝对值随尺度的对数增大。若改为在上限 $\Lambda$ 处截断积分，则有效程为 $(4/\pi m)[E_\Lambda/\Lambda-\mathrm{arsinh}(\Lambda/m)],$，这相当于尺度 $\lambda=\Lambda$ 的有效程加上 $m/(\pi\Lambda^2)$ 以及关于 $1/\Lambda^2$ 的高阶项。

式（37）中的二次方程的两个根近似于图 6中的两个极点；尺度的对数越大，近似越好。它们在 $q=1/r_e$处相交，该点估计了虚态离开实轴的点 $q_*$。对于非相对论接触相互作用，有效程并非负值：在上限 $4/$（$\pi\Lambda$）处为 $\Lambda$，而当移除该上限时则消失。此时，圈图在 $q<0$一侧没有最大值，并且每个负散射长度处都存在一个虚态：点 $q_*$ 正是该道具有负有效程的标志。

### B. 由圆得到的有效程

第二节的图 II 直接给出了展开式（37）。在 $\Delta=0$ 和 $\mu<m$ 处，顶点位于底边上，介于点 $\pm E_p$之间。经过该点的椭圆就是其两个焦点之间的线段，因此 $h_E=0$ 和 $\frac{1}{2}S=E_p$，而圆在 $\mu$ 上方的高度为

$$h_\mu^2=p^2+q^2,\qquad q^2=m^2-\mu^2,\qquad \left.\frac{\partial S}{\partial(\Delta^2)}\right|_{\Delta=0}=\frac{S/2}{h_\mu^2}=\frac{E_p}{p^2+q^2}. \tag{39}$$

高于 $\mu$ 的高度的平方是圈图的分母，而在 $p=0$ 处，高度本身就是 $q$：粒子对的束缚动量，就是顶点脚下最小圆的高度。对于$\mu$上方的圆上的点，$(\frac{1}{2}S)^2=\mu^2+h_\mu^2$，而积分到 $\Lambda$的圈图分成两部分，

$$V(\Lambda,q)=\int_0^\Lambda\frac{p^2\,dp}{E_p}+\mu^2\int_0^\Lambda\frac{p^2\,dp}{E_p\,h_\mu^2}=\int_0^\Lambda\frac{p^2\,dp}{E_p}+\Big(\frac{E_{\rm pair}}{2m}\Big)^2V_s(\Lambda,q),\qquad V_s(\Lambda,q)=\int_0^\Lambda\frac{m^2}{E_p}\,\frac{p^2\,dp}{p^2+q^2}, \tag{40}$$

其中 $E_{\rm pair}=2\mu=2\sqrt{m^2-q^2}$是粒子对的能量。第一个求和与该能量无关，因此在差值 $V(q_B)-V(q)$ 中抵消。第二项通过因子 $\mu^2$携带能量。在阈值处，高于$\mu$ 的高度就是动量本身，测度与之抵消，剩下的是半径倒数之和，$\int dp/E_p$。它按对数增长，因为半径仅随动量线性增长。随着粒子对结合得更深，$\mu^2$ 减少了 $q^2$，这使对数进入 $q^2$ 在 $V$中的系数。这个系数就是第 IV节中夸克对场的归一化，即圈图对 $\mu^2$的响应，

$$Z(q)\equiv\frac{\partial V}{\partial(\mu^2)}=\int_0^\Lambda\frac{(S/2)\,p^2\,dp}{h_\mu^4}=\frac{\pi m}{4q}+\mathrm{arsinh}\,\frac{\Lambda}{m}-\frac{E_\Lambda}{\Lambda}+O(q),\qquad r_e=-\frac{4}{\pi m}\lim_{q\to0}\Big[Z(q)-\frac{\pi m}{4q}\Big], \tag{41}$$

其中第一项是两个自由粒子的阈值，而 $r_e$ 是上限处的范围 $\Lambda$。对所有动量积分后，第一项之后的两项为 $\ln(2\lambda/m)-1$，而 $r_e$ 是式（37）的结果。负有效程对应于夸克对场的正归一化。

### C. 闭道

半径为 $R$ 的势阱具有数量级为 $R$的有效程，而非相对论粒子的接触相互作用在上限为 $\Lambda$时具有 $r_e=4/(\pi\Lambda)$，当对所有动量进行积分时该量消失。负有效

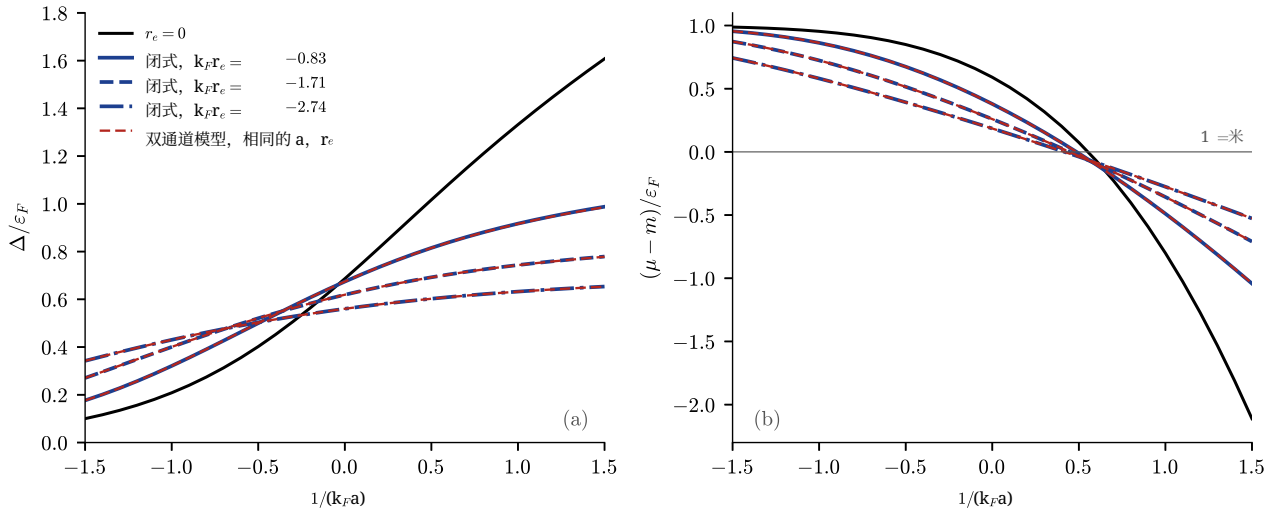



图7。在 $k_F = 0.05\,m$ 处的交叉，以及 $k_F r_e$、 $-0.83$、 $-1.71$ 和 $-2.74$的三个取值： (a) 能隙和 (b) 从质量起算的化学势，以 $\varepsilon_F = k_F^2/2m$为单位，绘制为逆散射长度 $1/(k_F a)$ 的函数。蓝色：方程（35），对所有动量进行积分。红色虚线：双通道模型（42），具有相同的 $a$和 $r_e$。黑色： $r_e = 0$，参考文献 [4]中的交叉。

程远大于力的范围，是粒子对有一部分时间处于另一种态——闭合通道——的标志，例如在费什巴赫共振 [16, 28, 29]处。

这里没有引入闭合通道。它的作用由相对动量远高于质量的粒子对本身承担，此时一个模态携带第 $\mu\Delta^2/p^3$ 节 III中的电荷。这些模态携带密度的对数项（35），该密度是相对于尺度 $\lambda$测量的；从 $k \ll m$ 来看，它们起到了第二通道的作用。在模型本身中，从第 IV节的意义上说，粒子对是复合的，而闭合通道属于其低能描述。

具有有限有效程的平均场交叉就是费什巴赫共振双通道模型的交叉 [16]。在玻色子–费米子模型中，有效程源于玻色子与费米子的耦合 [15], ，而文献 [30] 将窄共振讨论为玻色子–费米子耦合较小时的极限。对于两个自旋态，密度为$n = Q_\mu/\pi^2 = k_F^3/3\pi^2$；按照这一归一化，双通道模型的能隙方程和密度为

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Big[\frac{k^2}{2E_k} - m\Big]dk + \frac{\pi m}{2}\Big[\frac{1}{a} - r_e\, m\, \mu_{\rm nr}\Big] &= 0, \\ \tfrac{1}{3}k_F^3 = \int_0^\infty k^2 v_k^2\, dk + \frac{\pi}{4}\, m^2 |r_e|\, \Delta^2, \qquad & E_k = \sqrt{\big(k^2/2m - \mu_{\rm nr}\big)^2 + \Delta^2}. \end{aligned} \tag{42}$$

这里 $\mu_{\rm nr} \equiv \mu - m$，而 $v_k^2 = \frac{1}{2}[1 - (k^2/2m - \mu_{\rm nr})/E_k]$ 是一个模态的占据数。最后一项是束缚在闭合通道分子中的费米子密度，即分子密度的两倍；取 $r_e = 0$ 时，这些方程就是文献 [4] 中的方程。

令 $k_F/m \to 0$，并固定 $k_F r_e$，于是 $\lambda$呈指数级增大。此时，式 (35) 的密度和第四节中写作 $D|_{q_B=0} + \pi m/2a = 0$ 的能隙方程变为式 (42)。密度中的对数项 $\mu\Delta^2 \ln(2\lambda/\ell_0) \to m\Delta^2 \ln(2\lambda/m)$，再加上来自 $q_\mu$ 的一个常数，就是双通道模型归于闭合通道的那部分密度， $\frac{1}{4}\pi\, m^2 |r_e| \Delta^2$。能隙方程中的对数项，再加上来自 $D_0$ 的一个常数，则体现了耦合随能量的变化，$-\frac{1}{2}\pi\, m\, r_e\, m\mu_{\rm nr}$。因此，在 $k_F \ll m$ 处的相对论性交叉对应于有限宽度共振。只有当 $\ln(2\lambda/m) \gg 2m/k_F$ 时，按照文献 [16], 的记号，共振才在与交叉相关的意义上是窄的： $\gamma_s = (8/\pi)/(k_F|r_e|) \ll 1$ 。在固定的 $\lambda$ 下，乘积 $k_F r_e$ 随 $k_F/m \to 0$ 趋于零，交叉也就趋向于文献 [4] 中的情形。

图 7 展示了固定 $k_F r_e$在 $k_F = 0.05\,m$下、取 $k_F r_e$三个值时的极限；能量的单位为$\varepsilon_F = k_F^2/2m$。方程（35）中的能隙和化学势，与具有相同$a$ 和 $r_e$ 的双通道模型中的相应量，在整幅图所示的范围内相差不超过 $2 \times 10^{-3}\,\varepsilon_F$，并且二者都远离 $r_e = 0$的交叉：在此极限下，两者逐项给出相同的平均场方程，以及相同的解。有效程削弱了对散射长度的依赖：在弱吸引下，能隙大于 $r_e = 0$ 时的能隙，而化学势较低；在强吸引下，能隙较小，而化学势较高。在此 $k_F$ 下，这些 $k_F r_e$ 取值需要满足 $\lambda/m = 6 \times 10^5$， $6 \times 10^{11}$ 以及 $6 \times 10^{18}$：图中展示的是 $\lambda$ 呈指数级增大的极限。

### D. 哪些粒子对具有对数

负有效程源自配对顶点；单独的相对论性并不会产生它。圈图（32）的被积函数为 $E_p^2/E_p$ 乘以 $p^2/(p^2+q^2)$，其分子 $E_p^2$ 除以因子 8 后，等于一个费米子处于 $\mathbf{p}$ 、一个反费米子处于 $-\mathbf{p}$时，二者之间配对顶点的矩阵元平方，并对自旋态求和。对于三个顶点，以及由电荷共轭 $C = i\gamma^2\gamma^0$配成粒子对的两个费米子，它为

$$\sum_{\text{spins}} \left|\bar{u}(\mathbf{p})\,\Gamma\,v(-\mathbf{p})\right|^2 = \begin{cases} 8p^2, & \Gamma = 1, \\ 8E_p^2, & \Gamma = i\gamma_5, \\ 8m^2, & \Gamma = \gamma^0\gamma_5, \end{cases} \qquad \sum_{\text{spins}} \left|\bar{u}(\mathbf{p})\,\Gamma C\,\bar{u}(-\mathbf{p})^{\mathrm{T}}\right|^2 = \begin{cases} 8p^2, & \Gamma = 1, \\ 8E_p^2, & \Gamma = \gamma_5. \end{cases} \tag{43}$$

这两列之所以一致，是因为旋量 $C\bar{u}^{\mathrm{T}}$ 是反费米子的旋量 $v$ 。(1) 的配对项，即其中所用基底中的单位狄拉克矩阵，是 $\gamma_5$ 费米子与反费米子之间的顶角，其矩阵元 $8E_p^2$会随能量增长。标量顶角在阈值处按 $p^2$消失：它以 $p$ 波进行配对。若采用顶角 $\gamma^0\gamma_5$ ，圈图将是 ( $V_s$ 40) 本身的 圈图。其对数与能量无关，因此其有效程不含对数：对于任何限制动量的规则，它都趋于 $4/\pi m$ ，例如在共振处无自旋粒子的相对论接触相互作用 [31]。由 $C\gamma_5$配对的两个费米子，如夸克物质中的标量双夸克，具有 (1) 的粒子对的圈图：在相同的 $m$ 和 $\lambda$ 下，两者具有相同的 $r_e$，只有它们的散射长度不同。

### E. 非相对论区域及更早的解

在参数空间的一个区域内，答案早已为人所知。令 $m \to \infty$ ，并将 $\mu_{\mathrm{nr}}$ 和 $\Delta$ 固定。此时反粒子的能级移至 $2m$，问题便化为第二节II中一个点所对应的问题。模数和第三类参数趋于参考文献 [4], 中的模数，弧增大为椭圆的四分之一，而第三类积分不再是一个新函数。只剩下第一类和第二类完全椭圆积分，两个方程则变为该参考文献中的能隙方程和密度方程（附录 E）。这是固定比值 $\lambda/m$下的区域：式（35）的对数中包含阶为 $k_F r_e$的修正项，这些修正项在该处消失。在固定 $k_F r_e$ 时，该区域对应于双通道模型（式 42），如第五节 V C所述。

偏离该角点时，两个方程（35）按其原式求解；在 $k_F = m/2$ 处的曲线见补充材料 [22]。在那里， $\lambda$越大，$|r_e|$ 越大，能隙对散射长度的依赖也越弱。

早期的有限截断计算为当前表述提供了有用的基准。在文献 [10] 中，交叉是在 $\Lambda = 10\,m$处求解的；除去 $m^2/\Lambda^2$量级的修正项外，该截断对应于 $\lambda = 10\,m$这一尺度。文献 [12]考察了 $k_F = 0.2\,m$ 和 $\Lambda = 5\,m$，对应于 $k_F r_e = -0.33$。当选择 $\lambda$ 以再现相同的有效程时，将所有动量积分到无穷的方程能够恢复文献 [12], 方程在其截断下的零温能隙；在其图 2 [22]所示的整个耦合范围内，二者相差不超过0.2%。这一致性为闭式以及 $\lambda$ 与有效程之间的映射提供了非平凡的交叉检验。

## VI. 南部–约纳-拉西尼奥模型中的夸克物质

夸克物质的南部–约纳-拉西尼奥模型在其不止一个相中具有两个能级（2）。在非零同位旋化学势下，该粒子对是π介子；而在双味色超导体中，它是标量双夸克。在此模型中，尺度 $\lambda$ 并非自由参数：π介子衰变常数同时为π介子和双夸克确定了该尺度。加入第二种凝聚后，图像出现第二个顶点，闭式不再适用。

### A. π介子凝聚

在参考文献 [18] 的模型中，费米子是夸克， $\mu = \mu_I/2$ 是同位旋化学势的一半，能隙是带电π介子凝聚，而夸克的质量 $M$ 本身也是一种凝聚。在 $\rho^2 = M^2 + \Delta^2$ 以及对所有动量积分后，其势为

$$\Omega = \tfrac{1}{2}A'\rho^2 - B'M - \frac{N_c}{\pi^2}\,I_\lambda(M,\mu,\Delta),$$

其中， $B'$ 与夸克的流夸克质量成正比。位于 $A'$ 中的耦合取了完整的幂次$\rho^2\Lambda^2$ ，因此对数的任何部分都未被吸收，整个系数 $\frac{1}{2}c_3$ 都与唯一的尺度 $\lambda$相联系。

质量和能隙分别由 $\partial\Omega/\partial M = 0$ 和 $\partial\Omega/\partial\Delta = 0$给出，而这三个数值 $A'$、 $B'$ 和 $\lambda$ 在真空中确定。

### 1. The pion

在该模型中，尺度 $\lambda$由π介子衰变常数确定， $f_\pi^2 = (N_c M^2/2\pi^2)[\ln(2\lambda/M) - 1]$ [18]，π介子的夸克-反夸克道具有

$$r_e = -\frac{8\pi f_\pi^2}{N_c M^3} = -\frac{8\pi}{N_c M\, g_{\pi qq}^2} \approx -0.50 \text{ fm}, \qquad g_{\pi qq} = \frac{M}{f_\pi}, \tag{44}$$

对于 $M = 303.5$ 兆电子伏特和 $f_\pi = 92.4$ 兆电子伏特，参考文献 [18] 的数值为； $g_{\pi qq} = M/f_\pi$ 是手征极限下π介子与夸克的耦合。这就是该道在共振处应具有的有效程。第二种形式是参考文献 [16]，中双通道模型的有效程 $-8\pi/(m^2 g_s^2)$，其中π介子是分子态，而 $g_s^2 = N_c g_{\pi qq}^2/M$ 是其在阈值处与一个夸克和一个反夸克的耦合。在此质量下，$|r_e| = 0.78/M$ 比夸克的康普顿波长更短，因此该道并不接近窄共振，而 $r_e$ 也不能测量π介子的闭通道混合。π介子本身是深度束缚的， $q_B \approx M$，其相位的有效程 $r_e + 1/(aM^2)$ 则具有相反的符号。

式（44）的两种形式，是夸克对场归一化式（41）在夸克对不同能量处取值的同一个函数。作为动量 $q$ 的函数，

$$Z(q) = \int_0^\Lambda \frac{E_p\, p^2\, dp}{(p^2+q^2)^2} = -\frac{\partial V}{\partial(q^2)}.$$

在两个夸克的阈值处， $q \to 0$，它给出有效程， $r_e = -(4/\pi M)K$，其中 $K = \lim_{q\to 0}[Z(q) - \pi M/4q]$；对所有动量积分后，结果为 $\ln(2\lambda/M) - 1$。在零能量处， $q = M$，它是 $Z(M) = \int_0^\Lambda p^2 dp/E_p^3$，即文献 [18] 中的积分 $f_\pi$， $f_\pi^2 = (N_c M^2/2\pi^2)Z(M)$。当能隙为零时，这也是式（3）中 $\mu^2\Delta^2$ 的系数：对于任意能隙，$S = 2E_\rho + \mu^2\Delta^2/E_\rho^3 + O(\mu^4)$，其中 $E_\rho^2 = p^2 + M^2 + \Delta^2$，因此该系数就是以 $\rho$ 代替 $M$ 后得到的同一个积分。由此， $f_\pi$ 所确定的尺度，正是化学势引入的对数的尺度。对所有动量积分后， $Z(M) = K$。因此，同一个数值出现在圈图曲线的两个位置：以质量为单位，$M r_e = -(4/\pi)K$ 是阈值处的曲率（图 6 展示了这一点），也是端点 $q = M$ 处的斜率；后者在该图的范围之外，手征极限下的 π 介子就位于此处。在 π 介子的极点处， $q = q_B$，其中 $2(M^2 - q_B^2)^{1/2} = m_\pi$， $Z$ 给出夸克与反夸克振幅的留数，而由留数读出的 π 介子与夸克的耦合为 $g_{\pi qq}^2 = 2\pi^2/[N_c Z(q_B)]$。根据式（32），该极点就是 π 介子相的起始点， $2\mu = \mu_I = m_\pi$。在手征极限下，极点位于零能量处， $q_B = M$：耦合为 $g_{\pi qq} = M/f_\pi$，即 Goldberger和Treiman 关系，式（44）的两种形式也因此重合。离开手征极限时，第一种形式对任意夸克流夸克质量都成立；第二种形式中由极点处读出的耦合则取决于该质量 [22]。

### 2. The constituent quark mass

真空并不能确定夸克的组分质量。势的三个参数 $A'$、 $B'$ 和 $\lambda$ 由真空的三个量确定，分别为 $M$、 $f_\pi$ 和 $m_\pi$ [18]，其中只有 $M$ 不是可观测量。在给定 $f_\pi$时， $f_\pi$ 的公式和式（44）的第一种形式将有效程和尺度确定为质量的函数，

$$\lambda = \frac{M}{2}\exp\Big[1 + \frac{2\pi^2 f_\pi^2}{N_c M^2}\Big], \qquad r_e M^3 = -\frac{8\pi f_\pi^2}{N_c},$$

因此，有效程的绝对值随质量的立方反比而减小。

在固定的 $\lambda$ 下，π介子 衰变常数作为质量的函数先上升，达到最大值后下降（图 8a）。

$$\frac{df_\pi^2}{dM} = \frac{N_c M}{2\pi^2}(2K-1), \qquad K = \ln\frac{2\lambda}{M} - 1.$$

最大值出现在 $K = \frac{1}{2}$，也就是 $M = 2\lambda e^{-3/2}$，其高度为 $f_\pi = \sqrt{N_c}\, M/2\pi$。测得的 $f_\pi$ 不能超过这一高度，这就为尺度设定了下限，

$$\lambda \geq \lambda_{\min} = \frac{e^{3/2}\,\pi f_\pi}{\sqrt{N_c}}, \qquad M_* = \frac{2\pi f_\pi}{\sqrt{N_c}}.$$

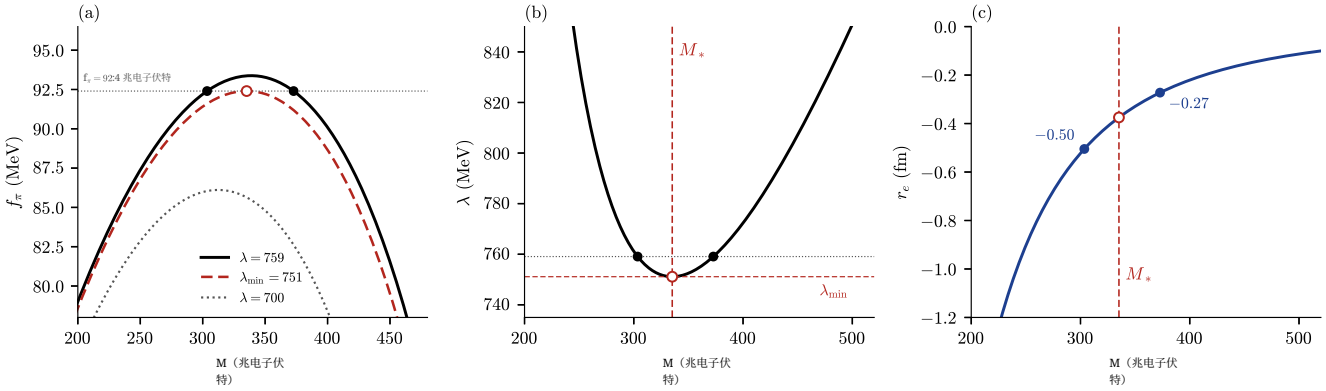



图 8. 夸克的组分质量随自由数的变化， $N_c = 3$；质量和尺度以兆电子伏特为单位。(a) 三种固定尺度下，π介子衰变常数随质量的变化：$\lambda = 759$ （实线）、 $\lambda_{\min} = 751$ （虚线）和 700（点线）。水平线为 $f_\pi = 92.4$ 兆电子伏特：第一条曲线与其相交于两个质量值 303。5 和 373 兆电子伏特（点），第二条曲线在 $M_* = 335$ 兆电子伏特处与其相切（空心圆），第三条曲线则始终低于它。(b) 在 $f_\pi = 92.4$ 兆电子伏特时，尺度随质量的变化，其最小值 $\lambda_{\min}$ 位于 $M_*$；点表示(a)中的两个质量值。(c) 相同44条件下的有效程（ $f_\pi$飞米）。

在 $\lambda = \lambda_{\min}$ 测得的 $f_\pi$ 在一个质量值处达到， $M_*$。在更大的 $\lambda$ 处，它在两个质量值处达到，一个低于 $M_*$，另一个高于（图 8b）；二者的有效程不同（图 8c）。因此，取值为 $\lambda$并不能唯一确定模型，而取值为 $M$ 则可以：自由参数是质量。在最大值处，Goldberger和Treiman的耦合为 $g_{\pi qq} = M/f_\pi = 2\pi/\sqrt{N_c}$， 而 $M_*$ 是在线性σ模型中通过一圈图生成的夸克质量 [32]。

因此，尺度在真空中一次确定：测得的 $f_\pi$ 在给定的 $M$下给出 $\lambda$ ，并由此确定π介子所在道的有效程。质量 $M$，即真空中夸克的组分质量，是真空留下的唯一自由参数。

### *3. Isospin density*

在同位旋化学势高于π介子质量时，该模型呈现本文所讨论的交叉，以带电π介子作为粒子对；夸克的质量则与能隙一样，由势的两个方程确定。图9 展示了从凝聚开始时的 $\mu_I = m_\pi$到 $7\,m_\pi$之间，在一个 $f_\pi$ 和三个夸克质量下，将所有动量积分后的压强和声速平方。固定 $f_\pi$ 时，状态方程仅微弱依赖于真空留下的自由质量。在1.5到 $7\,m_\pi$ 之间，三种压强相差不到10%，尽管有效程（44）几乎变化了三倍，而的变化会使压强移动得更多 [22]。声速平方在共形值 $1\ 3$之上出现峰值，且峰值高度随质量增加，从0.66增至0.72。不过，在这里不能像第V节那样解读有效程。临近开始点时，密度较低，但π介子是深度束缚的，远离共振；再往后，夸克质量下降，而相对于其自身尺度而言，密度已不再低。这里的交叉是完整的交叉，闭式能够描述它，而双通道模型无法描述。格点QCD已经计算了该物质在零温度下的状态方程 [33]；本文不在此处将其与之比较。

## B. 色超导

在双味色超导体中，成对夸克具有（2）中的两个能级，其中夸克的化学势取代了 $\mu$ [20]，闭式可直接应用于这些能级。粒子对是标量双夸克，即由 $C\gamma_5$配对的两个夸克。根据（43），它在真空中的圈图就是（1）中粒子对的圈图，因此双夸克道具有与π介子通道相同的对数，并且在相同的 $M$ 和 $\lambda$下，其有效程也相同。将质量作为参数时，这就是参考文献 [12]，中的模型，其中两种颜色的夸克配对，第三种颜色的夸克则构成自由气体；第V节将其零温度方程与闭式进行了比较。

对这一相的两项重整化群研究使我们能够将闭式与独立获得的结果进行比较。参考文献 [34] 构建了南部–约纳-拉西尼奥模型中该相的一种处理方法，并且该方法在重整化群意义下是一致的：真空部分经过正则化和拟合，而介质部分则积分至无穷远。一个

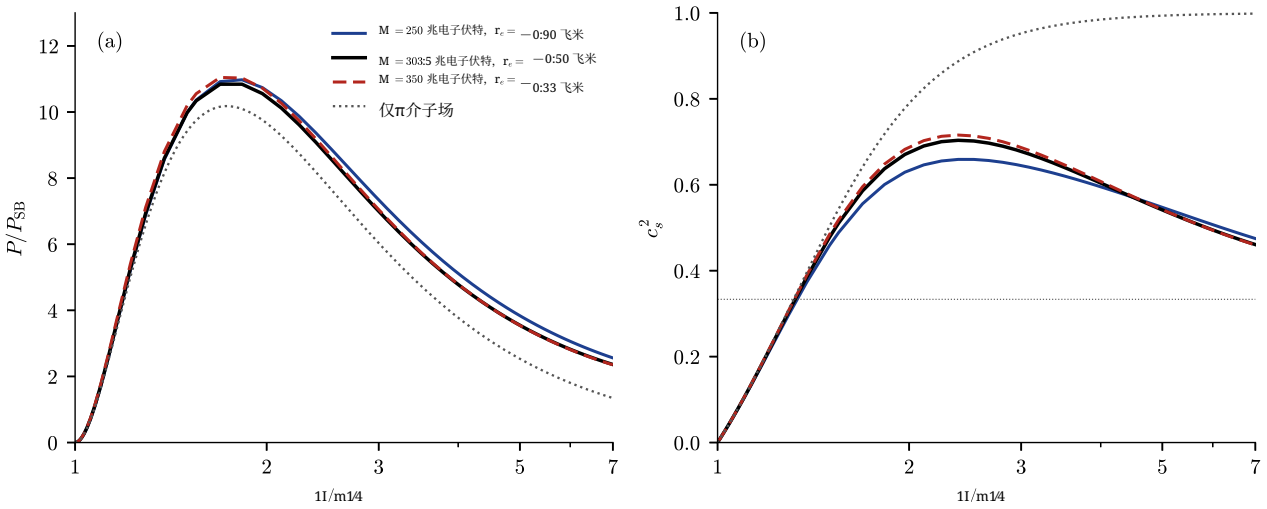



图9。参考文献 [18] 模型中的π介子凝聚，其中所有动量均已积分：(a) 以 $P_{\rm SB} = \mu_I^4/32\pi^2$ 为单位的压强，以及(b) 声速平方，分别相对于 $\mu_I/m_\pi$绘制；取物理上的 $f_\pi = 92.07$ 兆电子伏特和 $m_\pi = 139.57$ 兆电子伏特，以及夸克的三种质量。图例中的有效程取自（44）。虚线：仅π介子场，即手征微扰理论的最低阶结果。(b)中的细线为共形值1 3。

对数发散随后出现在介质中，$-(2/\pi^2)\,\mu^2\Delta^2\ln\Lambda$，作者通过反项将其抵消；这些反项在真空中消失，并分别采用有质量、无质量和最小三种方案，且每种方案在重整化群意义下都是一致的。这就是第 $\mu^2\Delta^2$ 个系数（24），其中还要乘以成对夸克的数量，因此他们的结果证实了第IV节中介质内的对数系数。

在他们的每种方案中，乘在 $-(2/\pi^2)\,\mu^2\Delta^2$ 前的因子是 $p^2/E_\rho^3$的积分，即 $\mu^2\Delta^2$ 第VI A节中 $K_\rho$的系数，我们将其写作 $\Lambda'$。在其截断 $\rho^2 = M^2 + \Delta^2$和，

$$K_\rho^{\rm massive} = \operatorname{arsinh}\frac{\Lambda'}{\rho} - \frac{\Lambda'}{\sqrt{\Lambda'^2+\rho^2}}, \qquad K_\rho^{\rm massless} = \operatorname{arsinh}\frac{\Lambda'}{\Delta} - \frac{\Lambda'}{\sqrt{\Lambda'^2+\Delta^2}} + \ln\frac{\Delta}{\rho},$$

$$K_\rho^{\rm minimal} = \ln\frac{2\Lambda'}{\rho} - 1.$$

对所有动量积分后，该因子为

$$K_\rho = \ln\frac{2\lambda}{\rho} - 1,$$

并且在 $\lambda = \Lambda'$ 时，它们的三个因子与其一致，最多相差 $3\rho^2/4\Lambda'^2$，$3\Delta^2/4\Lambda'^2$ 并且为零 [22]。这些方案在不依赖闭式结果的情况下构建，但具有相同的对数和尺度；在有限 $\Lambda'$ 下它们之间不同的项为 $\rho^2/\Lambda'^2$阶。在真空中，当 $\rho = M$时，$K_\rho$就是第 $K$VI A节的。

˜参考文献 [35] 对夸克–介子–双夸克模型进行了重整化，并提供了第二项检验。其常数 $Z_\Delta$ 为 $K$ 乘以$g_\Delta^2/2\pi^2$，其中 $g_\Delta$ 是双夸克与夸克之间的耦合。由于 $K$ 给出了两个夸克组成的道的有效程，$r_e = -(4/\pi M)K$ 根据第 V节，在对所有动量积分后

$$r_e^{qq} = -\frac{8\pi\,\tilde{Z}_\Delta}{M\,g_\Delta^2},$$

相同 $\lambda$时 π介子通道的有效程，如（43）所要求的。该研究还有第四种方案，即真空匹配，它在真空凝聚处取反项。将其应用于南部–约纳-拉西尼奥模型后，它就是对所有动量积分后的势，其中 $\lambda$ 由 $f_\pi$固定：重整化群构造得到了闭式。

对于π介子，$K$由$f_\pi^2$确定，这是一个真空量（第VI A节）。如果将真空部分和介质部分在所有动量上统一积分，则两个道具有同一个尺度，而 $f_\pi$ 也确定了 $K$ 双夸克的相应量。在三种颜色情况下，没有任何真空量能单独确定双夸克道的该因子；在两种颜色情况下，

泡利对称性与G¨乌尔赛对称性将两个道联系起来 [36]。这里考察的色超导体具有两种味，并且不是中性的。在三种味的中性物质中，粒子对 $us$和 $ds$由质量不同的夸克组成；它们的能级并非（2）中的能级，因此闭式不适用。

### C. 多个顶点

图中也显示了闭式的适用范围。具有自身化学势的第二个凝聚，是同一底边上的第二个顶点。在 (1) 中，动量项、质量项和能隙项彼此反对易，而化学势的电荷与前两项对易、与第三项反对易。当某个化学势的电荷与某个凝聚项反对易、并与其他所有项对易时，我们称该凝聚与该化学势互为共轭。一个共轭对构成一个顶点， $w_j = \mu_j + i\Delta_j$; 质量没有自身的化学势，因此仍处于底边上。对于 $n$ 个位于同一底边上的顶点，直径为 $S$ 的圆位于底边端点 $h_E$ 上方，高度为 $E_p$ ；并且位于每个顶点底脚上方，高度为 $h_j$ ，于是 (7) 变为

$$\frac{S^2}{4} - h_E^2 = p^2 + m^2, \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_j^2}{h_j^2} = \frac{4h_E^2}{S^2}, \qquad h_j^2 = \frac{S^2}{4} - \mu_j^2, \tag{45}$$
$$\eta = \pm r_1 \pm r_2 \pm \cdots \pm r_{n+1}.$$

对于一个顶点，第二个方程就是两高度定律 (10)。一般而言，它是关于 $n+1$ 的$S^2$ 次方程，具有实数正根；而以 $r_k$ 次方根的平方根的一半为 $k$时，模态的各个能级 $\eta$ 就是第二行中的所有和；最大的根是圆， $r_1 = \frac{1}{2}S$。这是因为这样的哈密顿量是由 $2n+2$ 个单位平方的反对易矩阵构成的双线性形式：其能级是系数矩阵奇异值取遍所有符号后的和，而 $r_k$ 就是这些奇异值 [22]。

只要 $r_1$ 在每个 $r_k$ 动量处都超过其他$S$ 之和，就不会有能级穿过零点，而势的积分$\rho^2 = m^2 + \sum_j \Delta_j^2$也与之前相同。第III 节的分部积分随后可以逐字照搬，式（20）中的边界项保持不变，并且$\rho^2 = m^2 + \sum_j \Delta_j^2$。积分以相同的方式增加两个幂次和一个对数，

$$S = 2p + \frac{\rho^2}{p} + \frac{c_3/2}{p^3} + O(p^{-5}), \qquad c_3 = 2\sum_{j=1}^{n} \mu_j^2 \Delta_j^2 - \frac{\rho^4}{2}, \tag{46}$$

每个顶点都会向其系数添加自身的 $\mu_j^2\Delta_j^2$。如果某个能级在一个动量窗函数内穿过零点，那么其中的被积函数不同于 $S$；增长项来自大动量，因此保持不变。无法照搬的是最后一步。根据式（45），动量的平方是 $S^2$的有理函数，而 $p^2 S\, dp$ 是一个亏格为$n$的曲线上的微分。对于两个顶点，剩余的积分是超椭圆的；对于一般位置的参数，它们不能化为椭圆积分。本文的闭式结果对应于只有一个顶点的情形。

## VII. 结论

带能隙的狄拉克费米子的两个能级之和对动量积分，是其在零温度下平均场势的一个积分。我们从一个几何图形中读出了它的闭式。两个能级分别是从点 $w = \mu + i\Delta$ 到点 $\mp E_p$ 的距离；它们的和是一个圆的直径，该圆的两个高度满足 $h_E h_\mu = \frac{1}{2}S\Delta$，而动量线是椭圆 $p = 0$ 的一段有限弧。在这段弧上，对各模态求和后的电荷、标量密度和配对振幅，都是勒让德三类积分的组合，且只有第三类积分会增长。随着上限增大，该积分会增加两次幂次的上限项，这些项分别被吸收到一个常数和耦合中，此外还增加一个对数。对所有动量积分后，剩下的是

$$I_\lambda(m,\mu,\Delta) = \mathcal{C}(m,\mu,\Delta) + \frac{c_3}{2}\ln\frac{2\lambda}{\ell_0}, \qquad \frac{c_3}{2} = \mu^2\Delta^2 - \frac{\rho^4}{4},$$

其中有限部分（26）和一个尺度 $\lambda$ 是该积分无法确定的。

相对论性交叉的能隙方程和密度是此公式的导数，（35），而求解交叉意味着求出两个闭式表达式的公共根。这些方程本身见参考文献 [10, 12], ，其中截断被保留为一个参数。在闭式表达中，该参数是尺度 $\lambda$，且有其物理意义：它决定了配对通道的有效程， $r_e = -(4/\pi m)[\ln(2\lambda/m) - 1]$。有效程为

负值，其绝对值随尺度的对数增大，因为配对顶点 $\gamma_5$的矩阵元会随能量增加；仅凭相对论性并不会产生这一点。在 $k_F \ll m$ 且固定 $k_F r_e$ 时，该交叉与具有相同散射长度和有效程的费什巴赫共振双通道模型中的交叉相同，而闭合通道的作用则由动量远高于质量的粒子对本身承担。

在南部–约纳-拉西尼奥模型中，尺度在真空中由 π 介子衰变常数一次性确定。π 介子通道的有效程因而为 $-8\pi f_\pi^2/(N_c M^3)$，而真空中夸克的质量 $M$是唯一仍可自由选择的参数。关于双味色超导体的重整化群研究 [34, 35] 在介质中发现了相同的对数，其方案在 $2\lambda/\rho) - 1$ 处重现了闭式中的因子 ln( $\lambda = \Lambda'$ ，精度可达相差 $\rho^2/\Lambda'^2$量级的项。

值得在其他地方寻找这种负有效程：例如四费米子模型的格点计算中，其大小应随格点间距倒数的对数增大；又如原子气体中，在窄费什巴赫共振处已实现了较大的负有效程 [37]；还有狄拉克材料，它们具有相同的两个能级 [21, 38]。关于该效应在格点和原子气体中的估算，见补充材料 [22]。

该闭式是在零温度下、针对具有化学势的单一凝聚所得到的平均场结果：若再加入一个具有自身化学势的第二凝聚，积分便是超椭圆积分。它所描述的态是局部极小值，因为当能隙达到 $\lambda$ 量级时，势会转而下降。在适用范围内，无需再计算任何动量积分：势、能隙方程和密度都是质量、化学势与能隙的闭式表达，而积分无法确定的尺度则是该粒子对在真空中的性质。


## 致谢

我谨向以下人士表示感谢：Zhukovsky教授、Klimenko教授、A. Akhmeteli、Kvinikhidze院士以及Zhokhov博士 .

本研究获得格鲁吉亚Shota Rustaveli国家科学基金会（SRNSFG）FR-25-7544号项目资助，项目名称为“QCD临界点的非微扰分析：有效模型中的正规化问题与重整化群技术”。

在准备手稿期间，Claude（Anthropic，Claude Fable 5.2）协助撰写和编辑文本，并整理补充材料及生成和检查这些材料的脚本。作者审阅并修订了所有由 AI 协助撰写的文本，并对科学内容和最终措辞承担全部责任。


## 附录 A：图形的响应

二次方程（6）包含 $S^2$， $E_p^2$， $\mu^2$ 和 $\Delta^2$。对这四个量分别求导，并令（11）作为 $d(S^2)$ 的系数，可得

$$E^+E^-\,d\big(S^2\big) = 4h_\mu^2\,d\big(E_p^2\big) + 4h_E^2\,d\big(\mu^2\big) + S^2\,d\big(\Delta^2\big). \tag{A1}$$

$\mu$ 上方的高度对应于点 $E_p$， $E_p$ 上方的高度对应于点 $\mu$，半径则对应于顶点高度。令 $E_p^2 = p^2 + m^2$ ，这些就是总和 $S$ 的导数，

$$\frac{dS}{dp} = \frac{4p\,h_\mu^2}{E^+E^-S}, \qquad \frac{\partial S}{\partial m} = \frac{4m\,h_\mu^2}{E^+E^-S}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \mu} = \frac{4\mu\,h_E^2}{E^+E^-S}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \Delta} = \frac{\Delta\,S}{E^+E^-}. \tag{A2}$$

T两个分支在动量 $p$ 处的 Bogoliubov 角和振幅为

$$\cos\theta_\pm(p) = \frac{E_p \pm \mu}{E^\pm}, \qquad \sin\theta_\pm(p) = \frac{\Delta}{E^\pm}, \qquad u_\pm = \cos\frac{\theta_\pm}{2}, \quad v_\pm = \sin\frac{\theta_\pm}{2}, \tag{A3}$$

由此得到的三个内容（12）为 $\frac{1}{2}\partial S/\partial\mu$， $\frac{1}{2}\partial S/\partial E_p$和 $\frac{1}{2}\partial S/\partial\Delta$。 –

## 附录 B：路径与分部积分

在 $p = 0$ 两个高度及其关系（10）和（11）处为

$$\begin{aligned} h_m^2 &= \tfrac{1}{4}(\ell_+ + \ell_-)^2 - m^2, \qquad & h_{\mu 0}^2 &= \tfrac{1}{4}(\ell_+ + \ell_-)^2 - \mu^2, \\ h_m h_{\mu 0} &= \tfrac{1}{2}(\ell_+ + \ell_-)\,\Delta, \qquad & h_m^2 + h_{\mu 0}^2 - \Delta^2 &= \ell_+\ell_-. \end{aligned} \tag{B1}$$

从（ $S$ 和 $h_\mu$ ）以及（7）和（10）中消去，得到动量关于有界高度的函数，

$$p^2 = \frac{\left(h_m^2 - h_E^2\right)\left(h_E^2 + h_{\mu 0}^2 - \Delta^2\right)}{h_E^2 - \Delta^2}, \tag{B2}$$

这样一个比值，其中代换（14）将分子中的两个因子变为 $h_m^2$ 正弦$^2\,\varphi$ 和 $\ell_+\ell_-$（$1 - k^2$ 正弦$^2\,\varphi$）。沿着路径，当 $s \equiv$ 正弦$^2\,\varphi_1 -$ 正弦$^2\,\varphi$时，

$$S = \frac{2\mu\cos\varphi}{\sqrt{s}}, \qquad p = \sqrt{\ell_+\ell_-}\,\frac{\sin\varphi\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{s}}, \qquad h_\mu = \frac{\mu\cos\varphi_1}{\sqrt{s}}. \tag{B3}$$

步长（18）由这些式子和（11）得到，而（17）则由这些式子和（13）得到。

对于分部积分，被积函数 $p^2 S$ 关于 $p$ 是偶函数，并且按 $2p^3$增长，因此我们尝试取奇函数 $W = p\,S$（$w_1 p^2 + w_2 + w_3 S^2$），并要求 $p^2 S - dW/dp$ 为（$c_1 + c_2 h_E^2 + c_3 h_\mu^2$）/（$E^+E^-S$）。令（ $dS/dp$ 为（A2）的

$$E^+E^-S\,\frac{dW}{dp} = \left(E^+E^-S^2 + 4p^2h_\mu^2\right)Q + p^2S^2\left(2w_1E^+E^- + 8w_3h_\mu^2\right), \qquad Q = w_1p^2 + w_2 + w_3S^2, \tag{B4}$$

关于 $p^2$的多项式， $S^2$ 以及参数，一旦 $E^+E^-$ 和 $h_\mu^2$ 通过（ $S^2$ 由（11）表示为 $S^2$，即可得到。利用二次方程（6）消去 $S^4$后，该要求构成关于这六个数的线性方程组，并且有一个解：

$$W = \frac{p\,S\left(16\,p^2 + 10\,\rho^2 - S^2\right)}{48}, \tag{B5}$$

$$c_1 = \frac{\mu^2\Delta^2}{6}\left(12\mu^2 - 11m^2 - 3\Delta^2\right), \qquad c_2 = \frac{\mu^2}{6}\left(2\mu^2 - 5m^2 - 13\Delta^2\right), \qquad c_3 = 2\mu^2\Delta^2 - \frac{\rho^4}{2}. \tag{B6}$$

三个权重的和，取至 $\Lambda$，步长为 (18)，为

$$\begin{aligned}
T_1 &\equiv \int_0^\Lambda \frac{dp}{E^+E^-S} = g\,\mathrm{F}(\varphi_\Lambda, k), \\
T_2 &\equiv \int_0^\Lambda \frac{h_E^2\,dp}{E^+E^-S} = g\left[\ell_+\ell_-\,\mathrm{E}(\varphi_\Lambda, k) - (h_{\mu 0}^2 - \Delta^2)\,\mathrm{F}(\varphi_\Lambda, k)\right], \\
T_3 &\equiv \int_0^\Lambda \frac{h_\mu^2\,dp}{E^+E^-S} = g\,h_{\mu 0}^2\,\Pi(\varphi_\Lambda; \alpha^2, k),
\end{aligned} \tag{B7}$$

其中 $g \equiv 1/(2\mu\sqrt{\ell_+\ell_-})$，恒等式 (20积分后得到

$$I(\Lambda) = W(\Lambda) + c_1\,T_1 + c_2\,T_2 + c_3\,T_3, \tag{B8}$$

逐项即为 (21)。

## 附录 C：弧的终点

随 $\Lambda$ 增长的量由大动量决定，而在那里只有高于 $\mu$ 的高度在增长：根据（13）， $h_\mu^2 = \Lambda^2 + \rho^2 - \mu^2 + O\left(\Lambda^{-2}\right)$ 在 $p = \Lambda$处，而 $h_E$ 归结为 $\Delta$。就 $h_\mu$ 而言，整个式子是有理的：

$$S^2 = 4\left(h_\mu^2 + \mu^2\right), \qquad h_E^2 = \Delta^2 + \frac{\mu^2\Delta^2}{h_\mu^2}, \qquad E^+E^- = h_\mu^2 + \frac{\mu^2\Delta^2}{h_\mu^2},$$

$$p^2 = h_\mu^2 + \mu^2 - \rho^2 - \frac{\mu^2\Delta^2}{h_\mu^2}, \qquad p\,dp = \frac{E^+E^-}{h_\mu}\,dh_\mu,$$

$$W = \frac{p\,S}{48}\left(12h_\mu^2 + 12\mu^2 - 6\rho^2 - \frac{16\mu^2\Delta^2}{h_\mu^2}\right) = \frac{h_\mu^4}{2} + \frac{(2\mu^2 - \rho^2)\,h_\mu^2}{2} + w_0 + O(h_\mu^{-2}), \tag{C1}$$

$$w_0 = \frac{(2\mu^2 - \rho^2)^2}{8} - \frac{11}{12}\,\mu^2\Delta^2 - \frac{\rho^4}{16},$$

$$\frac{c_1 + c_2\,h_E^2 + c_3\,h_\mu^2}{E^+E^-\,S}\,dp = \frac{c_1 + c_2\,h_E^2 + c_3\,h_\mu^2}{p\,S}\,\frac{dh_\mu}{h_\mu} = \frac{c_3}{2}\,\frac{dh_\mu}{h_\mu}\left[1 + O(h_\mu^{-2})\right].$$

边界项留下高度的两个幂次以及常数 $w_0$，它们给出（23）。在最后一行，前两类的分子保持有限，因此它们按 $h_\mu^{-3}$ 衰减，并且只进入有限部分，而第三类留下 $\frac{1}{2}c_3$，对应于每一个单位的 $\ln\, h_\mu$。

根据（11），第三个权重并不独立于另外两个权重，

$$\frac{h_\mu^2}{E^+E^-S} = \frac{1}{S} - \frac{h_E^2-\Delta^2}{E^+E^-S}, \tag{C2}$$

因此，第三类仅通过对 $1/S$ 关于动量的积分出现：

$$\begin{aligned} J(\Lambda) &\equiv \int_0^\Lambda \frac{dp}{E^+ + E^-} = \frac{1}{2}\,\operatorname{artanh} t_\Lambda + \frac{\ell_+\ell_-\,\mathrm{E}(\varphi_\Lambda,k) - h_{\mu0}^2\,\Pi(\varphi_\Lambda;\omega^2,k)}{2\mu\sqrt{\ell_+\ell_-}}, \\ t_\Lambda &= \frac{2\,p\,h_{\mu0}^2}{S\left(h_E^2+h_{\mu0}^2-\Delta^2\right)}\bigg|_{p=\Lambda}, \qquad \omega^2 = k^2\sin^2\varphi_1 = \frac{4\mu^2-(\ell_+-\ell_-)^2}{4\,\ell_+\ell_-}. \end{aligned} \tag{C3}$$

两边在 $\Lambda=0$处均为零，而右侧的导数是弧上的有理函数，等于 $1/S$。在表格中，这就是第三类参数的参数变换 [39], , 它以一个初等函数为代价，将 $\Pi$ 的极点从弧的端点移开。由于 $\omega^2\sin^2\varphi_1<1$，积分 $\Pi(\varphi;\omega^2,\ k)$在弧的末端之前是有限的，而对数就是反双曲正切：$t_\Lambda$ 从0增长到1，并且 $1-t_\Lambda^2=(\ell_+\ell_-+\mu^2)/\Lambda^2+O(\Lambda^{-4})$，因此

$$J(\Lambda) = \frac{1}{2}\ln\frac{2\Lambda}{\sqrt{\ell_+\ell_-+\mu^2}} + \frac{\ell_+\ell_-\,\mathrm{E}(\varphi_1,k) - h_{\mu0}^2\,\Pi(\varphi_1;\omega^2,k)}{2\mu\sqrt{\ell_+\ell_-}} + O(\Lambda^{-2}). \tag{C4}$$

利用（C2）和（C3），积分（21）可写成

$$\begin{aligned} I(\Lambda) = W(\Lambda) + \frac{c_3}{2}\operatorname{artanh} t_\Lambda + \frac{1}{2\mu\sqrt{\ell_+\ell_-}}\Big[&\left(c_1 - c_2\,(h_{\mu0}^2-\Delta^2) + c_3\,h_{\mu0}^2\right)\mathrm{F}(\varphi_\Lambda,k) + c_2\,\ell_+\ell_-\,\mathrm{E}(\varphi_\Lambda,k) \\ &- c_3\,h_{\mu0}^2\,\Pi(\varphi_\Lambda;\omega^2,k)\Big], \end{aligned} \tag{C5}$$

在每个 $\Lambda$处仍然是精确的。幂次位于 $W$中，对数是反双曲正切，而方括号有一个极限，从而得到（25）和（26）。同一个有限部分是对所有动量的收敛积分，

$$\mathcal{C}(m,\mu,\Delta) = \int_0^\infty \Big[p^2\left(E^+ + E^-\right) - 2p^3 - \rho^2 p - \frac{c_3/2}{\sqrt{p^2+\ell_+\ell_-+\mu^2}}\Big]dp. \tag{C6}$$

## 附录D：交叉的常数

根据（12），三个内容中的每一个都是权重 1、$h_E^2$ 和 $h_\mu^2$ 在步长上的组合，并且因子 $p^2$可以像附录 B 中一样移除。加入边界项 $p\,S$ $(b_1+b_2/h_\mu^2+b_3/h_\mu^4)$ 以及待求的数值 $b_i$ 后，同样的搜索得到

$$\begin{aligned} p^2 &= h_\mu^2 - h_E^2 + \mu^2 - m^2, \\ \frac{p^2\,h_E^2}{E^+E^-S} &= \frac{d}{dp}\Big[-\frac{\Delta^2}{12}\,\frac{p\,S}{h_\mu^2}\Big] + \frac{\Delta^2\left(\mu^2-\frac{1}{3}m^2\right)+\frac{1}{3}\left(\mu^2-m^2-2\Delta^2\right)h_E^2+\Delta^2 h_\mu^2}{E^+E^-S}, \\ \frac{p^2\,h_\mu^2}{E^+E^-S} &= \frac{d}{dp}\Big[\frac{p\,S}{8}\Big] - \frac{\mu^2\Delta^2+\mu^2h_E^2+\rho^2h_\mu^2}{2\,E^+E^-S}. \end{aligned} \tag{D1}$$

第一个关系不需要边界项；它是（11）中的第二个关系。对于（ $T_1$、 $T_2$、 $T_3$ ）中的和，并将第三个和表示为（B7）中函数 $J$ （C3）的形式，

$$T_3 = \int_0^\Lambda \frac{h_\mu^2\,dp}{E^+E^-S} = J(\Lambda) - T_2 + \Delta^2 T_1, \tag{D2}$$

这三个内容为

$$
\begin{aligned}
Q_\mu &= 2\mu\Big[-\frac{\Delta^2}{12}\,\frac{\Lambda S}{h_\mu^2} + \Delta^2\big(\mu^2 - \tfrac{1}{3}m^2\big)T_1 + \tfrac{1}{3}\big(\mu^2 - m^2 - 2\Delta^2\big)T_2 + \Delta^2\,T_3\Big],\\
Q_m &= 2m\Big[\frac{\Lambda S}{8} - \tfrac{1}{2}\mu^2\Delta^2\,T_1 - \tfrac{1}{2}\mu^2\,T_2 - \tfrac{1}{2}\rho^2\,T_3\Big],\\
Q_\Delta &= 2\Delta\Big[\frac{\Lambda S}{8} + \mu^2\big(\mu^2 - m^2 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\big)T_1 - \tfrac{3}{2}\mu^2\,T_2 + \big(\mu^2 - \tfrac{1}{2}\rho^2\big)T_3\Big],
\end{aligned}
\tag{D3}
$$

其中 $S$ 和 $h_\mu$ 取在 $p=\Lambda$处，在每个 $\Lambda$处都精确成立。

和 $T_1$ 以及 $T_2$ 均收敛，而 $T_3$ 随 $J$增长，因为 $1\ 2\ln(2\Lambda/\ell_0)$ 由 (C4) 给出。因此，每个内容中的对数系数是 $T_3$ 的系数的一半：在 $Q_\mu$ 中，以及 $\mu^2 - \frac{1}{2}\rho^2$ 在 $Q_\Delta/\Delta$ 中。在 $V$ 中，对数的系数为 $\frac{1}{2}m^2 - q_B^2$,

$$
V(\Lambda) = \tfrac{1}{2}\Lambda^2 + \tfrac{1}{4}m^2 + \big(\tfrac{1}{2}m^2 - q_B^2\big)\ln\frac{2\Lambda}{m} - q_B\sqrt{m^2 - q_B^2}\,\arccos\frac{q_B}{m} + O(\Lambda^{-2}),
\tag{D4}
$$

两个系数之差 $\mu^2 - \frac{1}{4}m_B^2 - \frac{1}{2}\Delta^2$是 $f_D$ 在 (34) 中尾项的系数。的边界项为 $\frac{1}{4}\Lambda S = \frac{1}{2}\Lambda^2 + \frac{1}{4}\rho^2 + O(\Lambda^{-2})$，其 $\frac{1}{2}\Lambda^2$是 $V$中耦合取走的部分；而$-Q_\mu$趋于 $-\frac{1}{3}\mu\Delta^2$。当上限较大时，密度和分母分别为 $\mu\Delta^2\ln(2\Lambda/\ell_0) + q_\mu$和 $(\mu^2 - \frac{1}{4}m_B^2 - \frac{1}{2}\Delta^2)\ln(2\Lambda/\ell_0) + D_0$，忽略 $\Lambda^{-2}$阶的项，其中

$$
\begin{aligned}
q_\mu &= 2\mu\Big[-\frac{\Delta^2}{6} + \Delta^2\big(\mu^2 - \tfrac{1}{3}m^2 + \Delta^2\big)T_1^\infty + \tfrac{1}{3}\big(\mu^2 - m^2 - 5\Delta^2\big)T_2^\infty + \Delta^2 J_1\Big],\\
D_0 &= \frac{\Delta^2}{4} + \big(q_B^2 - \tfrac{1}{2}m^2\big)\ln\frac{\ell_0}{m} + q_B\sqrt{m^2 - q_B^2}\,\arccos\frac{q_B}{m}\\
&\quad + 2\Big[\big(\mu^2(\mu^2 - m^2 - \tfrac{1}{2}\Delta^2) + \Delta^2(\mu^2 - \tfrac{1}{2}\rho^2)\big)T_1^\infty - \big(\tfrac{5}{2}\mu^2 - \tfrac{1}{2}\rho^2\big)T_2^\infty + \big(\mu^2 - \tfrac{1}{2}\rho^2\big)J_1\Big],
\end{aligned}
\tag{D5}
$$

其中 $T_1^\infty$和 $T_2^\infty$分别是 $T_1$和 $T_2$在弧的末端， $\varphi_\Lambda \to \varphi_1$，而 $J_1$是（C4）的第二项。对所有动量积分，并以 $\lambda$为对数的测量基准，这些就是（35），没有舍去任何项。在 $D_0$ 中，含 $\ln(\ell_0/m)$ 的项将 $V$的对数从能量 $m$ 移到能量 $\ell_0$。

这两个方程是同一个势的导数。对所有动量积分后，该积分为 $I_\lambda$ （30）的积分，而圈图（32）的对数以相同尺度为基准，

$$
V_\lambda \equiv \lim_{\Lambda\to\infty}\Big[V(\Lambda) - \frac{\Lambda^2}{2} - \big(\tfrac{1}{2}m^2 - q_B^2\big)\ln\frac{\Lambda}{\lambda}\Big] = \frac{m^2}{4} + \big(\tfrac{1}{2}m^2 - q_B^2\big)\ln\frac{2\lambda}{m} - q_B\sqrt{m^2 - q_B^2}\,\arccos\frac{q_B}{m}.
$$

从 $V$ 中取出的幂，正是耦合在（27）中取入的幂。略去一个常数后，势为 $\Omega/N = \Delta^2 V_\lambda - I_\lambda$，其导数为 $D = -\partial(\Omega/N)/\partial(\Delta^2)$，即 $\partial I_\lambda/\partial(\Delta^2) - V_\lambda$，以及 $Q_\mu = -\frac{1}{2}\partial(\Omega/N)/\partial\mu = \frac{1}{2}\partial I_\lambda/\partial\mu$。在质量和粒子对束缚均固定时，势通过尺度依赖于

$$
\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\frac{\Omega}{N} = \frac{m^4}{4} + \Omega_B,
\tag{D6}
$$

也就是说，势中包含系数为 $\frac{1}{4}m^4 + \Omega_B$ 的 $\ln\ \lambda$。第一项属于真空，而第二项是唯一一个受尺度的对数乘上的态函数。

## 附录 E：非相对论区域

令 $m\to\infty$ 满足 $\mu_{\rm nr} \equiv \mu - m$ 且 $\Delta$ 固定，动量和上限均为 $\sqrt{2m\Delta}$的量级，从而$p^2/2m$ 保持有限，并令 $\xi_p \equiv E_p - \mu$ 为相对于化学势测量的自由粒子能量，从而 $E^- = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$ 恰好成立。根据（11），两个高度恰好为

$$
h_\mu^2 - h_E^2 = \xi_p\,(\xi_p + 2\mu), \qquad h_\mu^2 + h_E^2 = E^+E^- + \Delta^2.
\tag{E1}
$$

在该角落， $\xi_p \to p^2/2m - \mu_{\rm nr}$ 保持有限，而 $E^+ \to 2m$，对于 BCS理论的振幅，$u_p^2$， $v_p^2 = 1\ 2(1 \pm \xi_p/E^-)$，

$$
h_E^2 = 2mE^-\,v_p^2\,\big[1 + O(m^{-1})\big], \qquad h_\mu^2 = 2mE^-\,u_p^2\,\big[1 + O(m^{-1})\big], \qquad \frac{dp}{E^+E^-S} = \frac{dp}{4m^2E^-}\,\big[1 + O(m^{-1})\big].
\tag{E2}
$$

高于 $E_p$ 的高度的平方变为该模态的占据数，而高于 $\mu$其补集的高度的平方。三个和（B7）变为

$$T_1 \to \frac{1}{4m^2}\int_0^\Lambda \frac{dp}{E^-}, \qquad T_2 \to \frac{1}{2m}\int_0^\Lambda v_p^2\,dp, \qquad T_3 \to \frac{\Lambda}{2m} - \frac{1}{2m}\int_0^\Lambda v_p^2\,dp. \tag{E3}$$

第三个求和式是 $\Lambda/2m$ 第二个求和式的减去项：当反粒子的能级被冻结时，第三个权重不会带来新的函数。

三角形展开成一个角：顶点到基边近端的距离为 $\ell_- = \sqrt{\mu_{\rm nr}^2 + \Delta^2}$，而远端则沿着轴线。于是

$$k^2,\ \omega^2 \ \longrightarrow\ \kappa^2 = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\mu_{\rm nr}}{\sqrt{\mu_{\rm nr}^2+\Delta^2}}\Big), \qquad \cos^2\varphi_1 = \frac{\ell_- - \mu_{\rm nr}}{m} + O(m^{-2}), \qquad \alpha^2 \ \longrightarrow\ 1. \tag{E4}$$

端点的振幅趋于 $\pi/2$：弧增长到椭圆的四分之一，积分变为完全积分。第三类参数在（21）中趋于 $\mathbf{1}$，在（C5）中趋于模数；在这些取值下，第三类积分并不是一个新函数：

$$\begin{aligned}\Pi(\varphi;1,k) &= \mathrm{F}(\varphi,k) - \frac{\mathrm{E}(\varphi,k) - \tan\varphi\,\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2},\\ \Pi(\varphi;k^2,k) &= \frac{1}{1-k^2}\Big[\mathrm{E}(\varphi,k) - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\Big].\end{aligned} \tag{E5}$$

剩下的是 $\mathrm{K}(\kappa)$ 和 $\mathrm{E}(\kappa)$，即参考文献 [4] 中的函数及模数。其中一个积分可以直接比较。（25）的三个增长项的系数中，没有一个同时包含 $m$ 和 $\mu$，因此该积分的混合导数本身收敛，而在这个角落

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2}{\partial m\,\partial\mu}\int_0^\infty p^2\big(E^+ + E^-\big)\,dp &= \int_0^\infty \frac{m\Delta^2}{E_p}\Big[\frac{1}{(E^-)^3} - \frac{1}{(E^+)^3}\Big]p^2\,dp \ \longrightarrow\ (2m)^{3/2}\,\Delta^{1/2}\,I_5(x_0),\\ I_5(x_0) \equiv \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\big[(x^2-x_0)^2+1\big]^{3/2}} &= (1+x_0^2)^{1/4}\,\mathrm{E}(\kappa) - \frac{\mathrm{K}(\kappa)}{4x_1^2\,(1+x_0^2)^{1/4}},\\ x_0 = \frac{\mu_{\rm nr}}{\Delta}, \qquad x_1^2 &= \frac{\sqrt{1+x_0^2}+x_0}{2},\end{aligned} \tag{E6}$$

其中 $p^2 = 2m\Delta\,x^2$；左侧的导数是在积分号下求取的。两侧的相对差异按 $1/m$ 的量级衰减。

对于第 IV 节的两个方程，我们以非相对论问题的单位来度量动量，$p = \sqrt{2m\Delta}\,x$，并在这些单位下固定上限和 $q_B$，$\Lambda = \sqrt{2m\Delta}\,x_\Lambda$ 以及 $q_B = \sqrt{2m\Delta}\,\hat{q}$，并令 $m \to \infty$。于是，令$\xi_x = x^2 - x_0$ 和 $E_x = \sqrt{\xi_x^2+1}$，

$$\begin{aligned}\frac{D(\Lambda)}{m\sqrt{2m\Delta}} &\ \longrightarrow\ \int_0^{x_\Lambda}\Big(\frac{x^2}{E_x} - 1\Big)dx + \hat{q}\,\Big[\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\hat{q}}{x_\Lambda}\Big],\\ \frac{Q_\mu(\Lambda)}{\frac{1}{2}(2m\Delta)^{3/2}} &\ \longrightarrow\ \int_0^{x_\Lambda} x^2\Big(1 - \frac{\xi_x}{E_x}\Big)dx,\end{aligned} \tag{E7}$$

在固定 $x_\Lambda$ 时，修正项的量级为 $\Delta/m$。当 $x_\Lambda \to \infty$ 时，右侧分别为 $I_1(x_0) + \frac{1}{2}\pi\hat{q}$和 $I_2(x_0)$，其中两个积分对应参考文献 [4]，中的式（2.9）和（2.10），能隙方程 $D=0$ 和两个自旋态的密度 $n = Q_\mu/\pi^2$ 对应其式（2.8a）和（2.8b），散射长度为 $a = 1/q_B$。$q_B$ 的两种符号都必不可少：$I_1(x_0)$ 在 $x_0 = 0.8604$ 处，即点 $1/a = 0$，取值为零；当 $x_0$ 更大时，在 BCS 配对一侧，$q_B < 0$。

如果上限达到 $m$ 量级或更高，例如对所有动量进行积分且对数是从 $\lambda$ 度量的，那么区域 $p \sim m$ 也会作出贡献，而式（35）的对数在该区域中不会恒等于零。在能隙方程中，其系数为 $\mu^2 - \frac{1}{4}m_B^2 - \frac{1}{2}\Delta^2 \simeq 2m\Delta\,(x_0 + \hat{q}^2)$，相对于方程的大小 $m\sqrt{2m\Delta}$ 而言；在密度中则为 $\mu\Delta^2 \simeq m\Delta^2$，相对于 $\frac{1}{2}(2m\Delta)^{3/2}$ 而言。在这两种情况下，修正项的相对阶数都是 $\sqrt{\Delta/m}\,\ln(2\lambda/m)$，也就是 $k_F r_e$ 阶。

### 附录 F：公式的核验方法

本文中每个非定义性的编号公式，都由生成补充材料的脚本进行验证 [22], ；凡陈述属于代数的，均以符号方式验证；按本文中的编号列出的公式清单，以及对每个公式的闭合检验，都是该材料的一部分。路径的恒等式在由两个数 $\sin^2\varphi_1$ 和 $\cosh^2\xi_1$构成的场中进行检验；在该场中，每个量都是有理数，无需选择平方根。其他陈述则以三十位数字精度进行数值检验：上限处的积分、式（21）和（C5），与求积结果进行比较；有限部分（26）与收敛积分（C6）进行比较；以及在三个上限处检验式（25）的余项；式（28）的两个窗函数；式（D3）的三个内容，以及随着上限增大，它们和势如何趋近于式（35）和（D6）；有效程，即式（37）–（41），以及趋近双通道模型的极限（42）；三个质量下的非相对论区域；以及对于两个顶点，式（46）背后的分部积分。

有三项核验是将结果与其他文献所得结果进行比较。参考文献 [18]以三种形式给出了同一积分的闭式解，均由该文献通过 Hermite 约化得到；它们与（21）、（C5）和（26）在计算精度范围内一致；该参考文献中的有限部分，用本文的记号表示为 $\mathcal{C}+\frac{1}{2}c_3\ln(2/\ell_0)$。在积分可化为初等形式的三个极限情形下，$\mu\to 0$ 以及 $\Delta\to 0$ 在 $\mu=m$两侧的情形中，有限部分均趋于相应的初等值。在非相对论区域，这两个方程变为参考文献 [4] （附录 E）中的方程。脚本、其输出以及图中所用代码均包含在补充材料中。

---

[1] D. M. Eagles, 《体相与薄膜超导半导体在低载流子浓度下可能出现的无超导配对》, 《物理评论》186, 456（1969）。[2] A. J. Leggett, 《双原子分子与库珀对》, 载于 *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, 《物理学讲义》, 第115卷, A. Pekalski 和 J. A. Przystawa 编（Springer, 柏林、海德堡, 1980）, 第13页。[3] P. Nozi`eres 和 S. Schmitt-Rink, 《吸引费米气体中的玻色凝聚：从弱耦合到强耦合超导》, 《低温物理学杂志》59, 195（1985）。[4] M. Marini、F. Pistolesi 和 G. C. Strinati, 《从 BCS 超导到玻色凝聚的演变：三维交叉的解析结果》, 《欧洲物理学杂志 B》1, 151（1998）, arXiv:cond-mat/9703160。[5] T. Papenbrock 和 G. F. Bertsch, 《低密度费米气体中的配对》, 《物理评论 C》59, 2052（1999）, arXiv:nucl-th/9811077。[6] D. Bailin 和 A. Love, 《相对论性费米子系统中的超流动性与超导》, 《物理报告》107, 325（1984）。[7] D. T. Son 和 M. A. Stephanov, 《有限同位旋密度下的量子色动力学》, 《物理评论快报》86, 592（2001）, arXiv:hep-ph/0005225。[8] Y. Nishida 和 H. Abuki, 《相对论性超流体中的 BCS-BEC 交叉及其对夸克物质的意义》, 《物理评论 D》72, 096004（2005）, arXiv:hep-ph/0504083。[9] H. Abuki, 《夸克物质中的 BCS/BEC 交叉及其静态和动态性质的演变：从原子单位幺正气体到色超导》, 《核物理 A》791, 117（2007）, arXiv:hep-ph/0605081。[10] L. He 和 P. Zhuang, 《零温度下的相对论性 BCS-BEC 交叉》, 《物理评论 D》75, 096003（2007）, arXiv:hep-ph/0703042。[11] G. Sun、L. He 和 P. Zhuang, 《量子色动力学南部–约纳-拉西尼奥模型中的 BEC-BCS 交叉》, 《物理评论 D》75, 096004（2007）, arXiv:hep-ph/0703159。[12] T. Brauner, 《致密相对论性物质中的 BCS-BEC 交叉：集体激发》, 《物理评论 D》77, 096006（2008）, arXiv:0803.2422。[13] L. He, 《南部–约纳-拉西尼奥模型对弱相互作用玻色凝聚体的描述，以及致密类 QCD 理论中的 BEC-BCS 交叉》, 《物理评论 D》82, 096003（2010）, arXiv:1007.1920。[14] L. He、S. Mao 和 P. Zhuang, 《相对论性费米系统中的 BCS-BEC 交叉》, 《国际现代物理学杂志 A》28, 1330054（2013）, arXiv:1311.6704。[15] J. Deng、A. Schmitt 和 Q. Wang, 《玻色子-费米子模型中的相对论性 BCS-BEC 交叉》, 《物理评论 D》76, 034013（2007）, arXiv:nucl-th/0611097。[16] V. Gurarie 和 L. Radzihovsky, 《共振配对的费米子超流体》, 《物理年鉴》322, 2（2007）, arXiv:cond-mat/0611022。[17] V. Ch. Zhukovsky、K. G. Klimenko 和 T. G. Khunjua, 《Gross-Neveu 模型中的 π介子凝聚》, 《莫斯科大学物理学通报》65, 21（2010）。[18] T. G. Khunjua, 《同位旋密度下南部–约纳-拉西尼奥模型的闭式解：正规化能改变什么》（2026）, arXiv:2611.28323 [hep-ph]。[19] T. Brauner、K. Fukushima 和 Y. Hidaka, 《双色夸克物质：U(1)$_A$ 恢复、超流动性与夸克-重子相》, 《物理评论 D》 **80**, 074035 [勘误，见同刊第81卷（2010） 119904] （2009）, arXiv:0907.4905。[20] I. A. Shovkovy, 《关于色超导的两场讲座》, 《基础物理学》35, 1309（2005）, arXiv:nucl-th/0410091。[21] T. Mizoguchi 和 M. Ogata, 《超导态中带间效应导致的狄拉克电子迈斯纳效应》, 《日本物理学会杂志》84, 084704（2015）, arXiv:1502.05769。[22] 补充材料，随本文 arXiv 版本作为附属文件提供：推导、检验、三种粒子对的有效程、交叉问题的解、对晶格和原子气体的估算，以及

代码。[23] P. W. Anderson，《超导理论中的随机相位近似》，《物理评论》112，1900（1958）。[24] D. J. Thouless，《统计力学中的微扰理论与超导理论》，《物理年鉴》10，553（1960）。[25] J. I. Kapusta，《玻色–爱因斯坦凝聚、自发对称性破缺与规范理论》，《物理评论 D》24，426（1981）。[26] T. Eguchi，《超导模型中集体现象的新方法》，《物理评论 D》14，2755（1976）。[27] W. A. Bardeen、C. T. Hill 和 M. Lindner，《标准模型的最小动力学对称性破缺》，《物理评论 D》41，1647（1990）。[28] D. S. Petrov，《窄费什巴赫共振附近的三玻色子问题》，《物理评论快报》93，143201（2004），arXiv:cond-mat/0404036。[29] C. Chin、R. Grimm、P. Julienne 和 E. Tiesinga，《超冷气体中的费什巴赫共振》，《现代物理评论》82，1225（2010），arXiv:0812.1496。[30]J. Braun，《强相互作用理论中的费米子相互作用与普适行为》，《物理学杂志 G》39，033001（2012），arXiv:1108.4449。[31] V. Pascalutsa，《通过零程相互作用在相对论散射中超越维格纳因果性界限》，载于 *8th International Workshop on Chiral Dynamics (CD2015)* 15 2016 114, 1402 4973 ，

《PoS》，第CD卷（），第页 arXiv: 。[32] R. Delbourgo 和 M. D. Scadron，《规范化 SU(2 10，251 1995 ) 线性σ模型的动力学生成》，《现代物理快报 A》（）。[33] R. Abbott、W. Detmold、M. Illa、A. Parre˜no、R. J. Perry、F. Romero-L´opez、P. E. Shanahan 和 M. L. Wagman，《同位旋致密物质与核物质状态方程的量子色动力学约束》，《物理评论快报》134，011903（2025），arXiv:2406.09273。[34] H. Gholami、M. Hofmann 和 M. Buballa，《NJL模型中色超导的重整化群一致处理》，《物理评论 D》111，014006（2025），arXiv:2408.06704。[35] H. Gholami、L. Kurth、U. Mire、M. Buballa 和 B.-J. Schaefer，《夸克–介子–双夸克模型的重整化》，《物理评论 D》113，114020（2026），arXiv:2505.22542。[36] T. G. Khunjua、K. G. Klimenko 和 R. N. Zhokhov，《由双色夸克构成的手征与同位旋不对称致密夸克物质的对偶性质》，《高能物理学杂志》2020（06），148，arXiv:2003.10562。[37] E. L. Hazlett、Y. Zhang、R. W. Stites 和 K. M. O'Hara，《大有效程共振费米气体的实现》，《物理评论快报》108，045304（2012），arXiv:1112.5977。[38] H. Hayasaka，《狄拉克超导体中的规范不变性、集体模与正常态扣除的依据》，《日本物理学会杂志》95，124705（2026），arXiv:2608.28485。[39] 美国国家标准与技术研究院数学函数数字图书馆，https://dlmf.nist.gov/，第19章。