arXiv:2611.33025v1 [math.AG] 24 Nov 2026

离散周期算子的布洛赫判别式

MARGARET H. REGAN、FRANK SOTTILE 和 SIMON TELEN

Abstract. 周期图上算子的布洛赫簇编码了其谱与图上群作用之间的关系，其中临界点对应于谱的边缘。我们将计算代数几何中的方法加以调整，用于描述三个 $\mathbb{Z}^2$-周期图的布洛赫簇临界点的定性行为如何依赖于参数。定性行为发生变化的参数集合就是布洛赫判别式。由于相对于复环面上的非标准实结构，临界点是实代数的，这也是开发用于具有非标准实结构的簇的计算工具的第一步。

Introduction

周期图上的离散算子是晶体物理模型的近似，例如固体物理中的紧束缚模型 [1, 23]。算子的谱是电子能够在介质中传播时所对应的能量集合。离散化后，可以通过与其相关联的布洛赫簇和费米簇等对象，从（实）代数几何的视角研究这类算子的谱。[9], 采取了这一观点，考察布洛赫簇在极值处的行为如何依赖于自由参数，并在定理 12 中指出 同上：布洛赫簇具有退化临界点，要么发生在几乎所有参数值处，要么发生在几乎没有参数值处。这一代数视角在 [31]中得到发展。我们从计算代数几何的角度对其加以拓展。我们的目标是明确描述布洛赫簇的特征如何依赖于参数。我们建立了一些一般理论，并针对若干图开展了案例研究，其中包括六角晶格，以及一个布洛赫簇含有退化临界点曲线的图，该图类似于 Filonov 和 Kachkovskiy 的例子 [18]。

设 Γ 是一个图，其上带有 $\mathbb{Z}^d$ 的自由作用，并且在其边 $\mathcal{E}$ 和顶点 $\mathcal{V}$ 上具有有限多个轨道。我们用参数 $p = (e, V)$ 标记 Γ，其中 $e\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^\times$ 和 $V\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ 在轨道上为常数。这些数据定义了希尔伯特空间 $\ell_2(\Gamma)$ 上的薛定谔算子 ¨ H_p。应用弗洛凯变换（傅里叶变换的一种形式）后， H_p 表示为一个关于弗洛凯参数 $z \in \mathbb{T}^d$ 的劳朗多项式矩阵 $H_p(z)$。这里， $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$ 是单位复数的群。对于

$z \in \mathbb{T}^d$，弗洛凯矩阵 $H_p(z)$ 是厄米矩阵，因此它的所有特征值都是实数。布洛赫簇 $\mathcal{B}_p$ 是 $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$中的超曲面，由色散多项式 $D_p(z, \lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id} - H_p(z))$ 的零点集定义。它的

2010年数学主题分类。05C50，14P10，81U30，81Q10。关键词和短语。布洛赫簇、薛定谔算子、费米簇、狄拉克点、牛顿多面体、混合体积、倒数多项式、 A-判别式。Sottile 的研究部分得到美国国家科学基金会资助项目 DMS-2201005 和西蒙斯项目 TSM-00014009 的支持。本研究始于 2023年 ICERM谱理论代数几何研讨会。

到 λ-轴的投影是 H_p 的谱。该投影的纤维是费米簇，而临界点对应于奇异费米簇。我们将在第 1 节回顾这一点。

由于 $H_p(z^{-1}) = H_p(z)^\top$，（复化后的）布洛赫簇在对合$z \mapsto z^{-1}$下保持不变，而定义费米簇的多项式 $F(z)$是互反的，即 $F(z) = F(z^{-1})$。奇异互反超曲面由 *reciprocal A-discriminants*参数化，这与经典的 A-判别式 [19]类似。我们在第 2 节中开展对它们研究的初步工作。互反多项式判别式的一般理论在 [22]中得到发展。

布洛赫判别式*Bloch discriminant* 是参数空间中临界点发生定性变化的子集。这些临界点是布洛赫簇上的坐标函数 λ 的临界点；我们关注它们的数量、位置、重数等如何随参数 $p = (e, V)$变化。对这些临界点的分析目前备受关注[4, 9, 14, 15]。临界值是将 A-判别式在 z 的系数处取值后得到的倒数多项式 $D_p(z, \lambda)$的根。布洛赫判别式的补集由称为室的连通分支组成；其性质是，参数位于同一室内的所有算子，其临界点排列在定性上相似。我们在定义 1.6 中对此作出精确定义。描述布洛赫判别式以及每个室中的临界点排列，是确定参数空间地理学这一一般问题的一个实例[6, 21]。

除了阐明这族算子的行为之外，对于布洛赫簇而言，这个问题也颇具挑战性，因为我们所研究的特征（临界点）是 $(\mathbb{C}^\times)^d \times \mathbb{C}$在非标准实结构下的实点：也就是说，通常的复共轭 $(z, \lambda) \mapsto (\overline{z}, \overline{\lambda})$ 被反全纯对合 $(z, \lambda) \mapsto (1/\overline{z}, \overline{\lambda})$ 所取代。这一新结构的不动（实）点为 $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$，不同于经典的实点 $(\mathbb{R}^\times)^d \times \mathbb{R}$。本文的目标之一，是开始为具有非标准实结构的代数簇的实代数几何发展计算和分析工具。

本文的组织如下。第 1 节定义布洛赫簇及其相应的布洛赫判别式。第 2 节讨论倒数多项式的 A-判别式及其与布洛赫判别式的联系。第 3 节进一步研究某些结式和海森矩阵与色散多项式临界点分类之间的联系。最后，在第 4、5 和 6 节中，本文针对若干二部图（包括六角晶格）讨论这些细节。

1. 布洛赫簇

我们回顾一些来自 [15], 的记号和定义，也可参见 [5, 第 4]章。$\mathbb{Z}^d$周期图是一个简单图 Γ，带有 $\mathbb{Z}^d$ 的自由作用，且其顶点 $\mathcal{V}$ 和边 $\mathcal{E}$上的轨道数有限。我们将 $\mathbb{Z}^d$ 在 $\mathcal{V}$ 上的作用记为加法形式：$u \in \mathcal{V}$ 在 $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ 作用下的像为 $u+\alpha \in \mathcal{V}$。我们选取一个基本域 $W \subset \mathcal{V}$，即 $\mathbb{Z}^d$ 在 $\mathcal{V}$上的轨道代表元集合。类似地，令 E 为 $\mathbb{Z}^d$在$\mathcal{E}$中的轨道集合。Γ 的标记是一个有序对 $p = (e, V)$，其中 $\mathbb{Z}^d$周期函数 $e\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^\times$和 $V\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$。（标记为零的边可以删除，从而得到不同的图。）等价地，$p = (e, V)$是 $(\mathbb{R}^\times)^E \times \mathbb{R}^W$中的一个点。图 1 展示了 $\mathbb{Z}^2$周期六角晶格的一部分。其基本域包含两个顶点，并且有三条边的轨道，标记分别为 a、b和 c，势值为 u 和 v，如图所示。

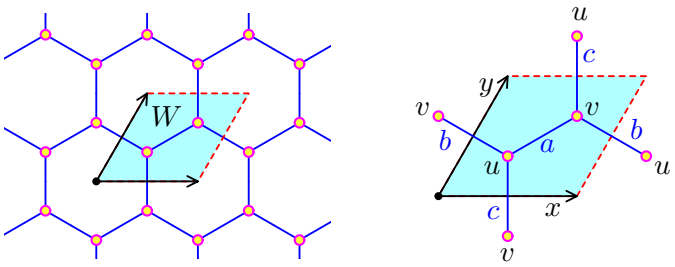


FIGURE 1. 带有基本域和标记的六角晶格。

这些是紧束缚模型的参数[1, 23], 其中涉及离散薛定谔算子作用于函数 $f\colon \mathcal{V}\to\mathbb{C}$。对于标记 $p\in(\mathbb{R}^\times)^E\times\mathbb{R}^W$，相应的 *discrete Schrödinger operator* H_p 作用于 $f\colon \mathcal{V}\to\mathbb{C}$ 如下：

$$\big(H_p(f)\big)(u) \;=\; V(u)f(u) \;+\; \sum_{u\sim v} e(u,v)\cdot f(v)\,. \tag{1}$$

这里的求和遍及所有满足 u 与 v之间存在一条边的顶点 $v\in\mathcal{V}$，记作$u\sim v$。算子 H_p 由一个势和一个加权图拉普拉斯算子组成。在标准表述中，拉普拉斯算子对式 (1) 贡献若干项之和 $-e(u,v)f(u)$。在表述 (1) 中，这个和$-\sum_v e(u,v)$被并入势 $V(u)$。由此得到希尔伯特空间 $\ell_2(\Gamma)$ 上的一个自伴算子，该空间由 $\mathcal{V}$上的平方可和函数构成。其谱$\sigma(H_p)$是 $\mathbb{R}$中的若干区间之并。

$\hat{}$ 算子 H_p 的谱的重要特征可通过弗洛凯变换 $f\mapsto\hat{f}$揭示，它是傅里叶变换的一种形式。关于弗洛凯理论的参考文献包括 [5, 25, 31]。令$\mathbb{T}\subset\mathbb{C}^\times$ 为单位复数群，我们将其与 $\mathbb{Z}$ 上的酉特征标集合通过 $z(n)=z^n$ （其中 $n\in\mathbb{Z}$ 且 $z\in\mathbb{T}$）相对应。类似地， $\mathbb{T}^d$ 是 $\mathbb{Z}^d$上的酉特征标群。对于 $\alpha\in\mathbb{Z}^d$和 $z\in\mathbb{T}^d$，我们用 z^α 表示 $z_1^{\alpha_1}\cdots z_d^{\alpha_d}$。函数 $f\in\ell_2(\Gamma)$的弗洛凯变换是定义在 $\mathbb{T}^d\times\mathcal{V}$ 上的函数$\hat{f}$，它具有拟周期性，即对于 $u\in\mathcal{V}$且 $\alpha\in\mathbb{Z}^d$，有$\hat{f}(z,u+\alpha)=z^\alpha\cdot\hat{f}(z,u)$。这样的拟周期函数由其在 $\mathbb{T}^d\times W$上的取值确定，这使得弗洛凯变换空间可与$L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{C}^W)=L^2(\mathbb{T}^d)^W$相对应；后者是定义在 $\mathbb{T}^d$上且取值于 $\mathbb{C}^W$的平方可积函数空间。弗洛凯变换是 $\ell_2(\Gamma)$与 $L^2(\mathbb{T}^d)^W$之间的线性等距映射。

由于标记具有 $\mathbb{Z}^d$-周期性， H_p 与 $\mathbb{Z}^d$-作用可交换，因而也与弗洛凯变换可交换。对于 $u\in W$，我们有

$$\big(H_p(\hat{f})\big)(z,u) \;=\; V(u)\hat{f}(z,u)+\sum_{u\sim v+\alpha} e(u,v+\alpha)\cdot z^\alpha\cdot\hat{f}(z,v)\,, \tag{2}$$

其中求和遍历 $v\in W$ 和 $\alpha\in\mathbb{Z}^d$，使得 u 与 $v+\alpha$相邻。根据表达式（2），算子 H_p由一个$|W|\times|W|$ *Floquet matrix*表示， $H_p(z)$，其元素是关于 z的劳朗多项式。由于 $u\sim v+\alpha$ 当且仅当 $v\sim u-\alpha$ 且两条边具有相同的标记时，弗洛凯矩阵满足恒等式

$$H_p(z)^T \;=\; H_p(z^{-1})\,. \tag{3}$$

由于 $z\in\mathbb{T}^d$，我们有 $\overline{z}=z^{-1}$，因此弗洛凯矩阵 $H_p(z)$ 是厄米的。

例 1.1. 用 $z = (x, y)$ 表示 $\mathbb{T}^2$ 中的点，图 1 所示六角晶格的弗洛凯矩阵为

$$H_p(x,y) = \begin{pmatrix} u & a + bx^{-1} + cy^{-1} \\ a + bx + cy & v \end{pmatrix} . \tag{4}$$

◇

我们介绍想要研究的几何对象。记 $D_p(z, \lambda)$ 为特征多项式 $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_{|W|} - H_p(z))$，称其为*dispersion polynomial*。

定义 1.2（实布洛赫簇）。 H_p 的 *real Bloch variety* 是超曲面

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_p := \{(z, \lambda) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \mid D_p(z, \lambda) = 0\} .$$

一个水平集 $\mathcal{F}_p(\lambda) = \{z \in \mathbb{T}^d \mid D_p(z, \lambda)$ 布洛赫簇的 $= 0\}$ 是一个 *real Fermi variet y*. ◇

之所以重要，是因为*spectrum* $\sigma(H_p)$ 薛定谔算子¨ H_p 的轴投影就是实布洛赫簇。因此，布洛赫簇编码了 H_p 的谱与 $\mathbb{Z}^d$ 在 $\ell_2(\Gamma)$ 上的作用之间的相互作用。

例 1.3。图 2 展示了带有势$V = 0$的六角晶格的两个布洛赫簇，以及该算子的谱。为便于展示，我们用 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]^2$ 中的基本域 $\mathbb{T}^2$ 表示 $\mathbb{R}^2$。左侧的边参数为 $(a, b, c) = (6, 3, 2)$，右侧则为 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$，从而得到图拉普拉斯算子。它的两个奇点称为狄拉克点。◇

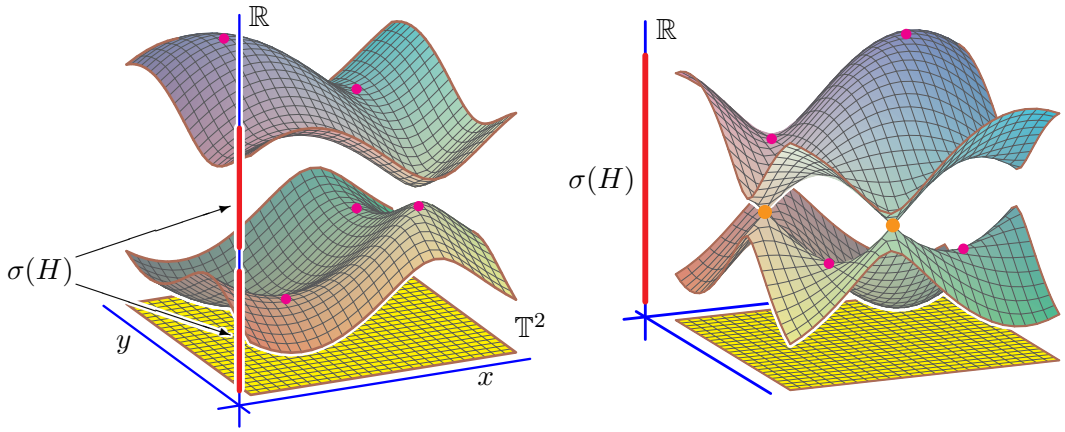


FIGURE 2. 边参数为（6,3,2）和（1,1,1）的布洛赫簇。

术语 *real* 在定义 1.2 中需要作一些说明。尽管 $D_p(z, \lambda)$ 的系数属于 $\mathbb{R}$，但在代数几何中，研究由方程 复点构成的超曲面是惯例 $D_p(z, \lambda) = 0$。下面给出相应的定义。

定义 1.4。*(complex) Bloch variety* 的 H_p 是超曲面

$$\mathcal{B}_p(\mathbb{C}) = \{(z, \lambda) \in (\mathbb{C}^\times)^d \times \mathbb{C} \mid D_p(z, \lambda) = 0\} .$$

(complex) Fermi variety $\mathcal{F}_p(\lambda, \mathbb{C})$ 是 $\lambda \in \mathbb{C}$ 处布洛赫簇的水平集。 ◇

复化在概念和计算方面都具有优势。然而，并非 z、λ 的所有复值都具有物理意义。在应用中，人们通常关注实解。抽象地说，如果点 (z,λ) 在给定的反全纯对合下保持不变，则称其为 *real*。最常见的对合是复共轭：$(z,\lambda)\mapsto(\overline{z},\overline{\lambda})$。由于 D_p 具有实系数，$\mathcal{B}_p(\mathbb{C})$ 在该对合下保持不变，这意味着 (z,λ) 属于 $\mathcal{B}_p(\mathbb{C})$ 当且仅当 $(\overline{z},\overline{\lambda})$ 也属于其中。不动点是普通的实点 $\mathcal{B}_p(\mathbb{C})\cap((\mathbb{R}^\times)^d\times\mathbb{R})$。在谱理论中，有意义的对合选择是 $(z,\lambda)\mapsto(\overline{z^{-1}},\overline{\lambda})$。由于 $D_p(z,\lambda)=D_p(z^{-1},\lambda)$，$\mathcal{B}_p(\mathbb{C})$ 在该对合下同样保持不变。与这一对合对应的实点，恰好就是实布洛赫簇 $\mathcal{B}_p$ 中的点。

在复代数簇上选择一个反全纯对合（实结构）X 决定了 X 中的哪些点是实数点。实代数几何中的大多数计算算法都假设采用与复共轭相对应的标准实结构。布洛赫簇促使人们开发研究自然的非标准实结构的工具，例如 $(z,\ \lambda)\ \mapsto\ (\overline{z^{-1}},\ \overline{\lambda})$。

坐标投影 $\lambda\colon\ (\mathbb{C}^\times)^d\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 限制在复布洛赫簇 $\mathcal{B}_p(\mathbb{C})$ 上成为一个函数。借鉴多项式优化中的方法，在 [15] 中证明了，函数的*critical points* 是 λ 那些 $(z,\ \lambda)$ 满足临界点方程的点，

$$D_p\ =\ z_1\frac{\partial D_p}{\partial z_1}\ =\ \cdots\ =\ z_d\frac{\partial D_p}{\partial z_d}\ =\ 0\,. \tag{5}$$

研究 λ 的临界点的一个动机是 *spectral edges nondegeneracy conjec-ture* [26, 推论 5。25], 该推论断言，对于参数 $p\in(\mathbb{R}^\times)^E\times\mathbb{R}^W$ 的一般值，函数 λ 在实布洛赫簇的每个分支上的极值都是非退化的。这一假设是物理学中许多重要概念的基础；对于 $\mathbb{R}^d$ [32]上的周期算子，这一点最近已得到证明，但对于离散周期算子，仍是一个开放问题。其他几何特征，例如费米簇 [13, 17, 27]的不可约性以及临界点轨迹[10, 11, 16], 的维数，也受到数学物理学界的关注。

我们介绍一些与色散多项式 $D_p(z,\lambda)$ 相关的几何组合学对象。$D_p(z,\lambda)$ 中单项式的指数构成 $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{N}$ 的一个子集，称为其 *support*。它们的凸包是其 *Newton polytope*，即 $\mathcal{N}=\mathcal{N}(D_p(z,\lambda))$。这一结构构成了临界点方程（5）的表述基础。乘以 $z_i\in\mathbb{C}^\times$ 不会改变 $(\mathbb{C}^\times)^d\times\mathbb{C}$ 中的解集，并且 $z_i\frac{\partial D_p}{\partial z_i}$ 的牛顿多面体包含于 D_p 的牛顿多面体中。[15] 的一项结果表明，按重数计算的临界点数量不超过 $\mathcal{N}$ 的归一化体积，即其欧几里得体积乘以 $(d+1)!$。

例 1.5。考虑色散多项式 $D_p=\det(\lambda\cdot\mathrm{id}-H_p)$，其中 H_p 如（4）所示。利用计算机代数系统，例如 `Macaulay2` [20]、`Oscar` [29] 或 `Singular` [8]，我们可以验证：对于参数 p 的一般取值，临界点方程（5）有十二个复数解。这等于 [15, 推论 2.5], 中给出的上界，即 $\mathcal{N}$ 的归一化体积。图 3 将 D_p 的支撑表示为一个矩阵的列，并展示了其牛顿多面体 $\mathcal{N}$。$\mathcal{N}$ 的底面是一个面积为 3 的六边形，且它是一个高为 2 的棱锥。因此，该棱锥的欧几里得体积为 2，因而归一化体积为 $3!\ \mathrm{vol}(\mathcal{N})=12$。$\diamond$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{N} =$$

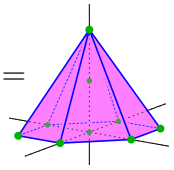


FIGURE 3. 六边形图的色散多项式支撑及其牛顿多面体。

现在，我们已经准备好定义本文研究的主要对象。

定义1.6。设 Γ 是一个 $\mathbb{Z}^d$-周期图。对于*Bloch discriminant* 而言， Γ 是一个超曲面 $\mathrm{BD}_\Gamma \subset (\mathbb{C}^\times)^E \times \mathbb{C}^W$，使得方程 (5) 的实解数（$z$， λ） $\in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ 对每个 p 中每个连通分支内的所有 $\left((\mathbb{R}^\times)^E \times \mathbb{R}^W\right) \smallsetminus \mathrm{BD}_\Gamma$均为常数。这些连通分支称为*discriminant chambers*。$\diamond$

我们用 BD_Γ 表示 $(\mathbb{C}^\times)^E \times \mathbb{C}^W$ 中的布洛赫判别超曲面，也表示其定义多项式方程。也就是说，多项式 BD_Γ 定义了布洛赫判别簇 $\mathrm{BD}_\Gamma = \{p \in (\mathbb{C}^\times)^E \times \mathbb{C}^W \mid \mathrm{BD}_\Gamma(p) = 0\}$。

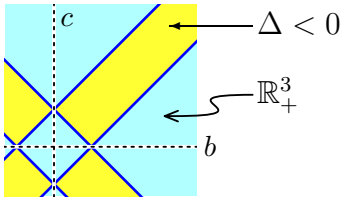
我们计算了六角晶格的第一个布洛赫判别式——其结果总结于下文的定理 1.7，并在第 4 节中详细展开。

定理 1.7. 设 Γ 为图 1 所示的六角晶格。五次多项式 l

$$\mathrm{BD}_\Gamma = (u-v)(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

是 Γ 的一个布洛赫判别式。

记 Δ 为判别多项式 BD_Γ 中仅涉及 a、b、c 的因子。其符号决定了临界点结构。值得注意的是，$\Delta < 0$ 当且仅当 $|a|$、$|b|$、$|c|$ 构成一个三角形。我们在 $(b,\ c)$ 平面中展示这一点，其中 $a = 1$。



点线表示 b 或 c 为零的位置，实线表示 $\Delta = 0$ 为零的位置。判别式Δ 在黄色区域为负，在浅蓝色区域为正。

表 1 总结了与相应参数值对应的临界点分布。这证实了命题 4.2 中关于当 $\Delta < 0$ 时 λ^+ 的最小值的论断。海森矩阵列中的三元组记录了实数非退化临界点中局部极小值点、鞍点和局部极大值点的数量。只有前两行涉及判别室；其余各行描述的是布洛赫判别式为零处的临界点分布。

使临界点方程 (5) 存在重数至少为二的面积解的参数，属于布洛赫判别式。也就是说，临界点方程的雅可比矩阵在该解处不具有满秩。

	Δ	非退化 临界点	退化 临界点	海森矩阵
$u \neq v$	< 0	12	0	(3,6,3)
	> 0	8	0	(2,4,2)
	$= 0$	6	2（重数为 3）	(1,4,1)
$u = v$	< 0	8	2（狄拉克）	(1,6,1)
	> 0	8	0	(2,4,2)
	$= 0$	6	1（重数 6）	(1,4,1)

TABLE 1. 六角晶格的临界点分布摘要。

我们利用这一点，在以下假设下给出计算布洛赫判别式的步骤：对于一般参数值，方程 (5) 有有限多个解，且所有解的重数均为一。第 4–6 节中的案例研究均满足这一假设。

算法 1.8 为 Γ计算布洛赫判别式

1: 在多项式环 $R = \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_d, p_0, \dots, p_m, \lambda, \mu]$ 中进行计算，其中有 $d + |E| + |W| + 2$个变量。这里， p_i 是为 Γ的边和顶点进行标记的参数。2: 设 g_0、 g_1、 ……、 $g_d \in R$为式（5）中出现的有理函数的分子。也就是说，它们是色散多项式及其托里克导数的分子。3: 设 $g_{d+1} = z_1 z_2 \cdots z_d (\prod_{e \in E} p_e)\ \mu - 1 \in R$，其中乘积遍历所有边标签。4: 计算 $(d + 2) \times (d + 2)$ g_0、 g_1、 ……、 g_{d+1}的雅可比行列式：

$$h = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_0}{\partial z_d} & \frac{\partial g_0}{\partial \lambda} & \frac{\partial g_0}{\partial \mu} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_d}{\partial z_d} & \frac{\partial g_d}{\partial \lambda} & \frac{\partial g_d}{\partial \mu} \\ \frac{\partial g_{d+1}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_{d+1}}{\partial z_d} & \frac{\partial g_{d+1}}{\partial \lambda} & \frac{\partial g_{d+1}}{\partial \mu} \end{pmatrix}$$

5: 令 $I \subset R$为理想 $\langle g_0, g_1, \dots, g_{d+1}, h \rangle$.6: 计算消去理想 $J = I \cap \mathbb{Q}[p_0, \dots, p_m]$.7: 返回根理想 $\sqrt{J}$的一个非零生成元。

正确性证明。计算机代数系统处理普通多项式。因此，步骤 2 中必须取分子（分母是 z 中的单项式）。步骤 3 中的辅助不定元 μ 和多项式 g_{d+1} 确保在解处，任何坐标 z_i和任何参数 $p_e, e \in E$都不为零。理想 I在 (z, p, λ, μ) 处为零，而这些是满足临界点方程的奇异解，其中 $z \in (\mathbb{C}^\times)^d$ 且 $p \in (\mathbb{C}^\times)^E \times \mathbb{C}^W$。

第 6 步的消去理想 J 定义了这样的参数 p ：临界点方程在这些参数下有奇异解。根据假设，这种情况不会在一般参数下发生，因此 J 不是零理想。当 J 为主理想时， $J = \langle f \rangle$ 及其根基由 f的无平方因子部分生成。如果 J 不是主理想，那么奇异参数的轨迹具有

余维为 ≥ 2的潜在嵌入分支。在这种情况下，算法会返回一个超曲面的定义多项式，该超曲面可能严格包含该轨迹。根据定义，这就是布洛赫判别式。□

将算法 1.8 应用于图 1 中的六角晶格，可得到一个次数为 13 且具有九个不可约因子的多项式。五个线性因子出现在定理 1.7 中。其余四个二次因子为

$$(u-v)^2 \;+\; 4(a \pm b \pm c)^2\,.$$

这些多项式将在第 4 节的分析中再次出现。注意，它们在 $(\mathbb{R}^\times)^E \times \mathbb{R}^W$ 中的零点集包含于定理 1.7 所述的超曲面中。从这个意义上说，这四个因子是冗余的。定理 1.7 给出了一个更高效的布洛赫判别式。

算法 1.8 第 6 步中的消元可能会耗费极多资源，因此算法 1.8 仅适用于计算较小的示例。我们将利用色散多项式的结构来开发更具针对性的工具，并介绍若干案例研究。我们还对费米簇作出一个重要观察。临界值（临界点的 λ坐标）是 *critical energy*。

引理 1.9。费米簇 $\mathcal{F}_p(\lambda,\mathbb{C})$ 是奇异的，当且仅当 λ 是临界能量；其奇异点就是能量为 λ 时布洛赫簇的临界点。

证明。 费米簇 $\mathcal{F}_p(\lambda_0,\mathbb{C})$ 在 z_0 处是奇异的，当且仅当 (z_0,λ_0) 满足 (5)。 □

如 [19], 所研究的，超曲面是奇异的，当且仅当某个适当的判别式在其系数处为零。这自然引出了下一节的主题。

2. Discriminants of reciprocal polynomials

劳朗多项式 $f(z)$ *reciprocal* 若在不定元取逆下保持不变，则称为 $f(z) = f(z^{-1})$。作为 z的多项式，色散多项式 $D_p(z,\lambda)$ 是倒数多项式。倒数多项式的超曲面 $\mathcal{V}(f) \subset (\mathbb{C}^\times)^d$ 在映射 $z \mapsto z^{-1}$下保持不变。下面考虑由倒数多项式定义的超曲面族

$$f(z,p) \;:=\; p_0 + p_1\left(\frac{z^{a_1}+z^{-a_1}}{2}\right) + \cdots + p_m\left(\frac{z^{a_m}+z^{-a_m}}{2}\right)\,. \tag{6}$$

这里，指数 $\{a_1,\ldots,a_m\} \subset \mathbb{Z}^d$ 均非零且互不相同，并且我们假设它们张成 $\mathbb{R}^d$。我们将 p 视为射影空间 $\mathbb{P}^m$ 中的一个点。令 $A := \{0, \pm a_1, \ldots, \pm a_m\}$ 为式 (6) 中出现的指数。

discriminant variety $\nabla_r(A) \subset \mathbb{P}^m$ 是满足超曲面 $\mathcal{V}(f(z,p)) \subset (\mathbb{C}^\times)^d$ 为奇异的点 $p \in \mathbb{P}^m$ 的集合的闭包。如 [22] 所示，这是一个可约超曲面。其本原无平方因子定义多项式记为 $\Delta_r(A) \in \mathbb{Z}[p]$，它在乘以 $\mathbb{Z}$ 的单位 ± 1 的意义下是良定义的。我们在算法 2.1 中提供了一种计算 $\Delta_r(A)$ 的多项式倍数的方法。

判别式 $\Delta_r(A)$ 将是 $I \cap \mathbb{Q}[p_0,\ldots,p_m]$ 中次数最小的多项式的无平方因子部分，因此步骤 5 将计算出它。目前尚不清楚在步骤 3 计算得到的 Gr¨obner 基中是否会出现它的倍数；若出现这种情况，算法 2.1 将在步骤 4 停止，并得到 $\Delta_r(A)$ 的一个多项式倍数。本文中我们用此方法计算判别式。值得注意的是，在所有情况下，算法都在步骤 4 停止，并返回 $\Delta_r(A)$。

算法 2.1 计算判别式

1: 令 $R = \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_d, w_1, \ldots, w_d, p_0, \ldots, p_m]$.2: 令 I 为一个理想，其生成元为多项式 f (z, p) 的（分子）以及对每个 z_i 求偏导数所得的多项式，还有多项式 $z_i w_i - 1$.3: 使用次数逆字典序项序，计算 I 的 Gr¨obner 基 G .4: 如果 $G \cap \mathbb{Q}[p]$ 中存在非零多项式，则返回其无平方因子部分并停止。5: 否则，计算消去理想 $J = I \cap \mathbb{Q}[p]$ ，并返回其生成元的无平方因子部分。

这个判别簇 $\nabla_r(A)$ 是一个可约超曲面：倒数结构导致其在 $z \mapsto z^{-1}$ 的 $\mathcal{V}(f(z,p))$ 上的不动点处出现奇异点。这是因为每个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ 在这样的点处都为零。我们将这组 2^d不动点记为 CP：$= \{(\pm 1, \ldots, \pm 1)\} \subset \mathbb{T}^d$，它们在 *corner points* 中称为 [4]。

引理 2.2. 如果线性形式 $\{f(z^*, p) \mid z^* \in \mathsf{CP}\}$ 中的任意一个在点 $p \in \mathbb{P}^m$ 处为零，那么超曲面 $\mathcal{V}(f(z,p)) \subset (\mathbb{C}^\times)^d$ 在 z^* 处是奇异的。

因此，对于 $z^* \in \mathsf{CP}$，每个超平面 $\mathcal{V}(f(z^*, p)) \subset \mathbb{P}^m$ 都是 $\nabla_r(A)$ 的一个不可约分支。由引理 2.2 可知，$\Delta_r(A)$ 是可约的，并且至少有不可约因子 $\{f(z^*, p) \mid z^* \in \mathsf{CP}\}$。另一部分由 *reciprocal discriminant* 描述。设 $Z_A \subset (\mathbb{C}^\times)^d$ 为由 $(z^{a_1} - z^{-a_1})(z^{a_2} - z^{-a_2}) \cdots (z^{a_m} - z^{-a_m}) = 0$ 定义的超曲面，它是一个包含 CP 的环面配置。

定义 2.3。 *reciprocal A-discriminant variety* ∇_A^{rec}是该集合的 Zariski闭包 t

$$\left\{ p \in \mathbb{P}^m \mid f = z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = \cdots = z_d \frac{\partial f}{\partial z_d} = 0, \text{ for some } z \in (\mathbb{C}^\times)^d \setminus Z_A \right\},$$

其中 $f = f(z,p)$ 是倒数多项式 (6)。 ◇

对于一般的 $p \in \nabla_A^{\mathrm{rec}}$，$\mathcal{V}(f(z,p))$ 的奇异点不会出现在角点处。它们也不会出现在环面配置 Z_A 上的点 z 处。

注 2.4。 由 Gel'fand、Kapranov 和 Zelevinsky 发展起来的经典 *A-discriminants* 理论 [19] 还为一组 $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ 整数指数向量关联了一个判别式；当相应的超曲面为奇异时，该判别式为零。具体而言，设$g(z,\ q) =\ q_0\, z^{a_0} + q_1\, z^{a_1} + \cdots + q_n\, z^{a_n}$ 是一族劳朗多项式。 *A-discriminantvariety* $\nabla_A \subset \mathbb{P}^n$ 是下列集合的 Zariski 闭包

$$\left\{ q \in \mathbb{P}^n \mid g(z,q) = \frac{\partial g}{\partial z_1}(z,q) = \cdots = \frac{\partial g}{\partial z_d}(z,q) = 0, \text{ for some } z \in (\mathbb{C}^\times)^d \right\}.$$

当它是一个超曲面时，其定义多项式就是 A-判别式，$\Delta_A \in \mathbb{Z}[q]$。它也被认作由 A 中的指数确定、以 z 中的单项式参数化的环面簇的射影对偶簇。我们将在下面的例 2.8 中说明这一点。◇

命题 2.5。倒数 A-判别簇 $\nabla_A^{\mathrm{rec}} \subset \mathbb{P}^m$ 不可约，余维至少为一。

证明。令 $f = f(z,p)$ 为倒数多项式 (6)。考虑关联簇

$$Y := \left\{(z,p) \in ((\mathbb{C}^\times)^d \setminus Z_A) \times \mathbb{P}^m \mid f = z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = \cdots = z_d\frac{\partial f}{\partial z_d} = 0\right\}.$$

簇 $\nabla_A^{\rm rec}$是投影 $Y \to \mathbb{P}^m$的像的闭包。因此，只需证明 Y是不可约的且维数为 $\leq m-1$。为此，考虑另一个投影π： $Y \to (\mathbb{C}^\times)^d \smallsetminus Z_A$。该投影的一个纤维 $\pi^{-1}(z)$ 是 $\mathbb{P}^m$ 中的一个线性空间，因为定义 Y 的方程关于 p是线性的。

受[28], 的启发，我们巧妙地写出 Y的方程。令 B 为列向量为 0、a_1、.....、a_m的 $d\times(m+1)$-矩阵。令 $\tau(z)$: $=(2, z^{a_1}+z^{-a_1}, \ldots\ldots, z^{a_m}+z^{-a_m})$ 为 p在 $2f(z,p)$ 中的系数，并令 $\tau'(z)$: $=(0, z^{a_1}-z^{-a_1}, \ldots\ldots, z^{a_m}-z^{-a_m})$。将 $\tau(z)$ 写成行向量，并将系数 p 写成列向量，我们得到

$$2f(z,p) = \tau(z)\cdot p\,. \tag{7}$$

托里克导数向量 $(2z_i\partial f/\partial z_i \mid i = 1,\ldots,d)$ 是

$$B\cdot \mathrm{Diag}(\tau'(z))\cdot p\,. \tag{8}$$

对于固定的 $z \in (\mathbb{C}^\times)^d$， $1+d$线性方程 $\tau(z)\cdot p = 0$和 $B\cdot\mathrm{Diag}(\tau'(z))\cdot p = 0$定义了$\pi^{-1}(z)$。如果 $z \notin Z_A$，那么这组线性方程的秩为 $d+1$。事实上， p_0 的系数在第一个方程中为 2，在其余方程中均为 0。我们对指数的假设是，矩阵 B 的秩为 d；并且由于 $z \notin Z_A$，除对应于 p_0的首项外，$\mathrm{Diag}(\tau'(z))$ 中没有任何元素为零。证明完毕。□

如果 $X \subset \mathbb{P}^m$ 是由以下参数化的簇

$$(\mathbb{C}^\times)^d \ni z \longmapsto \left(1 : \frac{z^{a_1}+z^{-a_1}}{2} : \cdots : \frac{z^{a_m}+z^{-a_m}}{2}\right),$$

那么 $\nabla_A^{\rm rec}$是 $\mathbb{P}^m$ 中与 X的光滑点相切的超平面集合的（闭包）。也就是说，它是 X的射影对偶。贝尔蒂尼定理意味着它是一个真子簇。注意， X 是由以下参数化的仿射簇的射影闭包： $u \mapsto (\cos(a_1\cdot u)\ldots,\cos(a_m\cdot u))$，它在 *Chebyshev variety* 中被称为 [3]。

命题 2.5 为以下定义提供了依据。

定义 2.6： 若 $\nabla_A^{\rm rec}$是一个超曲面，则 *reciprocal A-discriminant* 是不可约多项式 $\Delta_A^{\rm rec} \in \mathbb{Z}[p_0,\ldots,p_m]$，其复簇为 $\nabla_A^{\rm rec}$。该多项式在乘以 -1的意义下是唯一确定的。若 $\nabla_A^{\rm rec}$不是超曲面，则令 $\Delta_A^{\rm rec} = 1$。 ⋄

我们注意到，互反判别簇 $\nabla_A^{\rm rec}$不一定是超曲面。

例 2.7。考虑以下关于三个变量的倒数多项式：

$$f(z,p) := p_0 + p_1\frac{z_1+z_1^{-1}}{2} + p_2\frac{z_2+z_2^{-1}}{2} + p_3\frac{z_1z_2^{-1}+z_1^{-1}z_2}{2} + p_4\frac{z_3+z_3^{-1}}{2}.$$

其指数集构成矩阵的各列

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

我们使用算法 2.1 计算判别式 $\Delta_r(A) \subset \mathbb{P}^4$，它是一个含有 10 个分支的超曲面。其中 8 个是引理 2.2 中的超平面。另外两个是四次三维簇 C_+ 和 C_-，由以下条件定义

$$2p_0p_1p_2p_3 \;-\; p_1^2p_2^2 \;-\; p_1^2p_3^2 \;-\; p_2^2p_3^2 \;\pm\; 2p_1p_2p_3p_4 \;=\; 0\,.$$

$C_\pm$ 中的参数给出了其奇异轨迹位于平移子环面$z_3 = \pm 1$中的曲面。

互反 A-判别式的余维为二。它是这些四次多项式交集的一个不可约分支，由下式定义：

$$2p_0p_1p_2p_3 \;-\; p_1^2p_2^2 \;-\; p_1^2p_3^2 \;-\; p_2^2p_3^2 \;=\; p_4 \;=\; 0\,. \tag{10}$$

当 $p_4 = 0$时，奇异多项式 $f(z,p)$仅取决于 z_1 和 z_2。由互反 A-判别式中的一点 p 参数化的超曲面，其奇异轨迹是直线$(z_1^*, z_2^*) \times \mathbb{C}^\times$ 的并，其中(z_1^*, z_2^*)是由$f(z,p)$定义的$(\mathbb{C}^\times)^2$ 中的超曲面的奇点（当 $p_4 = 0$时，未定元 z_3不会出现在 $f(z,p)$中）。$\diamond$

该例表明，∇_A^{rec}可能不是超曲面，并且判别式 $\Delta_r(A)$可能还具有除引理 2.2或定义 2.3所给出的分支之外的其他不可约分支。

现在我们研究 $\Delta_r(A)$，其中指数 A 出现在某些图的色散多项式中，首先考察六角晶格。

例 2.8。色散多项式 $D_p = \det(\lambda \cdot \mathrm{id} - H_p)$，其中 H_p是例 1.1 中的弗洛凯矩阵，属于以下 Laurent 多项式族，

$$g(z,q) \;=\; q_0 \;+\; q_1\,x \;+\; q_2\,x^{-1} \;+\; q_3\,y \;+\; q_4\,y^{-1} \;+\; q_5\,xy^{-1} \;+\; q_6\,x^{-1}y\,.$$

此多项式中出现的指数是矩阵的列 x

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

这些是多边形中的晶格点，该多边形是图 3 所示棱锥的底面，也是矩阵 (9) 的左上 2×7 块。对于 $g(z,q)$ 的 A-判别式（注2.4）是一个十二次齐次多项式，含有 127 项，

$$\begin{aligned}\Delta_A \;=\;& q_0^6q_1q_2q_3q_4q_5q_6 - q_0^5q_1^2q_2q_3q_4^2q_6 - q_0^5q_1^2q_2q_4q_5q_6^2 - q_0^5q_1q_2^2q_3^2q_4q_5 - q_0^5q_1q_2^2q_3q_5^2q_6 \\ & - q_0^5q_1q_3q_4^2q_5q_6^2 - q_0^5q_2q_3^2q_4q_5^2q_6 + q_0^4q_1^3q_2q_4^2q_6^2 + q_0^4q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 + \cdots + 16q_3^2q_4^2q_5^4q_6^4\,.\end{aligned}$$

此多项式在那些点处为零 $q \in \mathbb{P}^6$ 满足 $g(z,\ q)$ 在 $(\mathbb{C}^\times)^2$中定义一条奇异曲线。这组六维 Laurent 多项式族包含一个三维倒数子族 L_{rec} 通过令以下各项取值而得到

$$q_0 = p_0,\quad 2q_1 = 2q_2 = p_1,\quad 2q_3 = 2q_4 = p_2,\quad 2q_5 = 2q_6 = p_3\,. \tag{11}$$

我们得到一般倒数多项式 (6) 的以下一个实例。

$$f(z,p) \;=\; p_0 + p_1\left(\frac{x+x^{-1}}{2}\right) + p_2\left(\frac{y+y^{-1}}{2}\right) + p_3\left(\frac{xy^{-1}+x^{-1}y}{2}\right). \tag{12}$$

将 (11) 代入 Δ_A，得到

$$\frac{1}{256}(p_0+p_1-p_2-p_3)(p_0-p_1+p_2-p_3)(p_0-p_1-p_2+p_3)(p_0+p_1+p_2+p_3)\cdot(\Delta_A^{\mathrm{rec}})^2\,,$$

其中 $\Delta_A^{\rm rec} = 2p_0p_1p_2p_3 - p_1^2p_2^2 - p_1^2p_3^2 - p_2^2p_3^2$ 是 (10) 中的四次多项式。根据定义，该表达式的本原无平方因子部分就是判别式 $\Delta_r(A)$。引理 2.2 给出了这些线性因子的预测。

四次互反 A-判别式 $\Delta_A^{\rm rec}$是 $\mathbb{P}^3$ 中单有理切比雪夫曲面对偶曲面的定义方程，该曲面由以下参数化：

$$(x,y) \;\longmapsto\; \left(1 : \frac{x+x^{-1}}{2} : \frac{y+y^{-1}}{2} : \frac{xy^{-1}+x^{-1}y}{2}\right).$$

对偶曲面 $\Delta_A^{\rm rec} = 0$ 由 $(m_{234} : -m_{134} : m_{124} : -m_{123})$ 参数化，其中 m_{ijk}是以下 3×4矩阵的极大子式：

$$\begin{pmatrix} 2 & x+x^{-1} & y+y^{-1} & xy^{-1}+yx^{-1} \\ 0 & 1-x^{-2} & 0 & y^{-1}-yx^{-2} \\ 0 & 0 & 1-y^{-2} & x^{-1}-xy^{-2} \end{pmatrix}.$$

将 A-判别式进一步特化为色散多项式 D_p，方法是令

$$(13)\quad p_0 = (\lambda-u)(\lambda-v) - a^2 - b^2 - c^2\,,\quad p_1 = -2ab\,,\quad p_2 = -2ac\,,\quad p_3 = -2bc\,.$$

这些是将 D_p 表示为形式 (6) 时的系数。作此代换后，倒数判别式 $\Delta_A^{\rm rec}$特化为 $-16\,a^2b^2c^2\,(\lambda-u)(\lambda-v)$。$\diamond$

我们将在第 4 节进一步研究这个判别式。如例 2.8 所示，当 A 具有对称性，即 $A=-A$ 时，倒数 A-判别式是 A-判别式特化后的一个因子。对于一元互反多项式，这一点众所周知，此时 $d=1$。这样的多项式 f具有形式 $f(z) = g(\frac{z+z^{-1}}{2})$，其中 g是一元多项式。于是

$$\operatorname{disc}(f) \;=\; 2^{-2n(n-1)} g(1)\cdot g(-1)\cdot \big(\operatorname{disc}(g)\big)^2\,,$$

其中 n 是 g的次数。（指数 2 可以根据用根表示判别式的公式推得。）这表明，互反 A-判别式远比 A-判别式简单，次数也显著更低。支撑为 A 的多项式构成射影空间 $\mathbb{P}^{2m}$，其中 A 由 $2m+1$ 个指数向量组成。互反多项式构成一个 m维线性子空间 $L_{\rm rec}$。

定理 2.9. 如果 $a_1,\ldots,a_m$ 作为群生成 $\mathbb{Z}^d$，那么 $\deg(\Delta_A^{\rm rec}) \le \frac{1}{2}(\deg(\Delta_A) - 2^d)$。

证明。回顾一下，对于族 (6)，判别簇 $\nabla_r(A) \subset L_{\rm rec}$ 是一个超曲面。由于 $\nabla_r(A) = L_{\rm rec}\cap\nabla_A$，我们有 $L_{\rm rec}\not\subset\nabla_A$。因此，$\nabla_r(A)$ 是一个由 A-判别式在 $L_{\rm rec}$ 上的限制 $\Delta_A(L_{\rm rec})$ 所定义的簇（约化概形），而定义 $\nabla_r(A)$ 的多项式$\Delta_r(A)$ 是 $\Delta_A(L_{\rm rec})$ 的本原无平方因子部分。

假设 a_1、…、a_m 作为群生成 $\mathbb{Z}^d$，这意味着引理 2.2 中的超平面/线性因子互不相同，因此 $\Delta_A(L_{\rm rec})$ 有 2^d 个线性因子。根据构造，$\Delta_A(L_{\rm rec})$ 的其余因子之一是 $\Delta_A^{\rm rec}$。（这包括 $\Delta_A^{\rm rec} = 1$ 的情形。）我们声称，因子 $\Delta_A^{\rm rec}$出现的指数为 ≥ 2（正如我们在例 2.8 中所见）。事实上，对于 $\nabla_A^{\rm rec}$上的一般点，超曲面 (6) 至少有两个互为倒数的奇点。因此，A-判别式沿着互为倒数的 A-判别式发生自交。□

我们在下一个例子中阐释这个定理。

*Exam*例 2.10。我们在例 2.8 的矩阵 A 中再添加四列。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

使用 [30], 中的软件，我们发现 A-判别式的次数为 24，其牛顿多面体包含 200249 个晶格点。计算其系数并不可行，但我们可以不先计算 A-判别式，直接计算倒数判别式。设

$$f(z,p) = p_0 + p_1\left(\frac{x+x^{-1}}{2}\right) + \cdots + p_4\left(\frac{xy+x^{-1}y^{-1}}{2}\right) + p_5\left(\frac{x^2+x^{-2}}{2}\right)$$

为式 (12) 中的多项式再加上两个新项。将 A-判别式专门化到这个倒数族，我们预期会得到四个一次因子（引理 2.2）与 $(\Delta_A^{\mathrm{rec}})^2$ 的乘积。由此观察，我们预期 Δ_A^{rec} 的次数为 10。我们使用算法 2.1 计算$\Delta_r(A)$，耗时不到十秒，并在步骤 4 停止。结果包含预期的四个一次因子，以及一个次数为 10、仅含 249 项的因子，即 Δ_A^{rec}。我们将在第 5 节把它与一张图联系起来。$\diamond$

例 2.11。我们将两列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ 添加到例 2.10 的矩阵 A 中。设

$$f(z,p) = p_0 + p_1\left(\frac{x+x^{-1}}{2}\right) + \cdots + p_5\left(\frac{x^2+x^{-2}}{2}\right) + p_6\left(\frac{y^2+y^{-2}}{2}\right).$$

我们使用算法 2.1 计算 $\Delta_r(A)$，用 Singular 计算需要一小时，并且同样在步骤 4 停止。结果包含预期的四个线性因子，以及一个次数为 14、含有 3755 项的第五个因子，

$$16384p_0^6p_3^2p_4^2p_5^2p_6^2 - 65536p_0^6p_3^2p_5^3p_6^3 + \cdots - 524288p_5^5p_6^9 + 262144p_5^4p_6^{10}.$$

我们强调，这是由 $f, \frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f, xz-1, yw-1$ 的分子生成的理想的、关于 $p_0,\ldots,p_6$ 的次数约化 Gr¨obner 基中唯一的多项式。它并非使用消元的标准技术计算得到。$\diamond$

3. Resultants and Hessians for bipartite graphs

色散多项式关于其 z 变量是互反的。根据引理 1.9，将判别式 $\Delta_r(A)$ 专门取为色散多项式的系数后，便描述了临界能量对参数 $p=(e,V)$ 的依赖关系。对于具有 $|W|=2$ 的二部图，色散多项式是一个结构化 2×2 矩阵的行列式。

设 H 为如下形式的 2×2 矩阵,

$$H = \begin{pmatrix} g(p) & f(z,p) \\ f(z^{-1},p) & h(p) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中， g、h 是关于 $p=(p_1,\ldots,p_n)$的多项式，而 f是关于z 的二元劳朗多项式，其指数向量张成 $\mathbb{R}^2$ ，且其系数是关于 p的多项式。我们假设，对于一般的p， $f(z,p) = f(z^{-1},p) = 0$ 在 $(\mathbb{C}^\times)^2$, 中有有限个正数的解。令

$$D := \det(\lambda \mathrm{id}_2 - H) = (\lambda - g(p))(\lambda - h(p)) - f(z,p)f(z^{-1},p) \tag{15}$$

为 H的特征多项式。我们考虑关联簇：

$$Y \;:=\; \Big\{(\lambda,p,z)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times(\mathbb{C}^*)^2 \;\Big|\; D \;=\; z_1\frac{\partial D}{\partial z_1} \;=\; z_2\frac{\partial D}{\partial z_2} \;=\; 0\Big\}. \tag{16}$$

命题 3.1. 投影 ∇ 的闭包 Y(16) 到 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ 包含超曲面

$$\Big\{(\lambda,p)\;\Big|\;(\lambda-g(p))(\lambda-h(p))\prod_{z^*\in\mathrm{CP}}\big((\lambda-g(p))(\lambda-h(p))-f(z^*,p)^2\big) \;=\; 0\Big\},$$

其中 CP $=\{(\pm1,\pm1)\}$ 是 $(\mathbb{C}^*)^2$ 中角点的集合。

该簇 ∇ 是多项式族 (15) 的判别簇。记 A 为 D中 z 的指数，则判别式 $\Delta_r(A)$ 在 D 中 z的系数处特化后，在 ∇上消失。命题 3.1 给出了该特化的六个分支/因子，其中包含十个临界能量。关于 λ 为二次式的因子，对应于引理 2.2 中 $\Delta_r(A)$ 的一次因子。我们将在第 5 节看到，还可能存在其他因子。

命题 3.1 的证明。当 $g(p)=\lambda$时，我们有 $D=\det H=-f(z,p)f(z^{-1},p)$。方程 $D=z_1\partial_{z_1}D=z_2\partial_{z_2}D=0$ 在由 $f(z,p)f(z^{-1},p)=0$定义的曲线的奇点处成立，其中包括两个分支相交的点，例如满足 $f(z,p)=f(z^{-1},p)=0$的点 z。根据假设，该方程有解，因此这样的奇点确实存在。对于 $h(p)=\lambda$，同样的论证也适用。二次因子 $D(p,\lambda,z^*)$ 已在引理 2.2 中确定。□

例 3.2。例 1.1 中的弗洛凯矩阵 $H_p(x,y)$ 具有形式 (14)，其中$f(z,p)=a+bx+cy$，$g(p)=u$，且 $h(p)=v$。因子 $\lambda-u$ 和 $\lambda-v$ 在例 2.8 中被确定为特化互反 A-判别式的因子。◇

我们将 ∇ 的定义方程视为关于 λ 的一元多项式。其根即为临界能量。我们关注使两个临界能量重合的参数 p。为此，对于 $z^*\in$CP，我们求解 $D(\lambda,z^*,p)=(\lambda-g(p))(\lambda-h(p))-f(z^*,p)^2=0$，求出 λ:

$$\lambda \;=\; \frac{1}{2}\left(g(p)+h(p)\;\pm\sqrt{(g(p)-h(p))^2+4\,f(z^*,p)^2}\right)\;. \tag{17}$$

注意，$g(p)$ 是 $D(p,\lambda,z^*)$ 的根，当且仅当 $f(z^*,p)=0$。

命题 3.3. 设 D,f,g,h 如命题 3.1 中所述，且 $z^*,z_1^*,z_2^*\in$CP。

(1) The discriminant of $D(\lambda,z^*,p)$ *is* $\nabla_\lambda(D(\lambda,z^*,p)) \;=\; (g(p)-h(p))^2+4f(z^*,p)^2$.
(2) The resultant $\mathrm{res}_\lambda(D(p,\lambda,z_1^*),D(p,\lambda,z_2^*))$ *is* $(f(z_1^*,p)^2-f(z_2^*,p)^2)^2$.
(3) The resultant $\mathrm{res}_\lambda(D(p,\lambda,z^*),g(p)-\lambda)$ *is* $-f(z^*,p)^2$.

证明。第一项是计算式（17）的一部分，其余各项则由一元首一多项式 $F(t)$ $G(t)$ 的结式的泊松公式得出，

$$\mathrm{res}(F(t),G(t)) \;=\; \pm\prod_{a\colon F(a)=0} G(a)\,. \qquad\square$$

我们推导在角点 $z \in \mathsf{CP}$ 处取值的特征值函数 $\lambda(z) = \lambda(x,y)$ 的海森矩阵公式。这将有助于在后续章节中描述相应临界点的性质。为简化记号，我们省略对 p 的依赖，并从 $\lambda(x,y)$ 的隐式定义开始，

$$D(x,y,\lambda(x,y)) = (\lambda(x,y)-g)(\lambda(x,y)-h) - f(x,y)f(x^{-1},y^{-1}) = 0\,.$$

将 $\lambda_x = {}^{\partial\lambda}{}_{(x,y)\,\partial x}$ 记作……，对 y也作类似记法，对 $D=0$ 进行隐函数微分可得

$$2\lambda\lambda_x - (g+h)\lambda_x = f_x(x,y)f(x^{-1},y^{-1}) - f(x,y)f_x(x^{-1},y^{-1})\frac{1}{x^2} \tag{18}$$

再对 $\frac{\partial}{\partial x}$ 求一次，并在满足 $x^2=y^2=1$ 且$\lambda_x(x,y) = \lambda_y(x,y) = 0$的点 $(x,y) \in \mathsf{CP}$ 处求值，可得

$$\Big(\lambda - \frac{g+h}{2}\Big)\lambda_{xx} = f(x,y)f_{xx}(x,y) - f_x(x,y)^2 + xf(x,y)f_x(x,y)\,.$$

对 $\frac{\partial}{\partial y}$ 进行类似计算可得

$$\Big(\lambda - \frac{g+h}{2}\Big)\lambda_{xy} = f(x,y)f_{xy}(x,y) - f_x(x,y)f_y(x,y)\,.$$

由此得到 在 $(x,y) \in \mathsf{CP}$ 处求值的 $\lambda(x,y)$ 的海森矩阵表达式，

$$\Big(\lambda - \frac{g+h}{2}\Big)\mathrm{Hess}(\lambda) = \begin{pmatrix} ff_{xx} - f_x^2 + xff_x & ff_{xy} - f_xf_y \\ ff_{xy} - f_xf_y & ff_{yy} - f_y^2 + yff_y \end{pmatrix}\,, \tag{19}$$

其中 f、f_x、f_y、……是 f 及其在 (x,y) 处的偏导数的值。我们将利用 (19) 来研究临界点 $(x,y) \in \mathsf{CP}$ 的性质。因子 $(\lambda - \frac{1}{2}(g+h))$ 的符号取决于我们考虑的是 D 的哪个根 (17)。

例3.4. 若 $f = a + bx + cy$，则 (19) 变为

$$\begin{pmatrix} -b^2 + x(a+bx+cy)b & -bc \\ -bc & -c^2 + y(a+bx+cy)c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abx + bcxy & -bc \\ -bc & acy + bcxy \end{pmatrix}\,,$$

利用 $x^2 = y^2 = 1$ 进行化简。 ◇

4. The Hexagonal Lattice

考虑图 1 所示六角晶格上的算子族。其弗洛凯矩阵 $H_p(x,y)$ 已在例 1.1 中给出，其色散多项式 $D_p(x,y,\lambda)$ 为

$$(\lambda - u)(\lambda - v) - (a + bx + cy)(a + bx^{-1} + cy^{-1})\,. \tag{20}$$

从临界点方程 (5) 中消去变量 x 和 y，得到关于 λ 的一个十次多项式。正如命题 3.1 所预测的，该多项式有六个不可约因子。

$$\begin{gathered} \lambda - u \\ \lambda - v \\ (\lambda-u)(\lambda-v) - (a+b+c)^2 \\ (\lambda-u)(\lambda-v) - (a+b-c)^2 \\ (\lambda-u)(\lambda-v) - (a-b+c)^2 \\ (\lambda-u)(\lambda-v) - (a-b-c)^2 \end{gathered} \tag{21}$$

根据引理 1.9，这些多项式给出了参数 p与临界能量之间的关系。对于 $p=(a,b,c,u,v)$ 的一般取值，存在十个互不相同的（复）临界能量，分别对应于 (21) 中多项式的十个根。当命题 3.3 中的某个判别式或结式为零时，这一结论不再成立；这是两个临界点 (z,λ) 碰撞的必要条件。因此，这些条件给出了布洛赫判别式。

定理 1.7. 设 Γ 为图 1 中的六边形图。五次多项式 l

$$\mathrm{BD}_\Gamma := (u-v)(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\,.$$

是 Γ 的布洛赫判别式。

最后四个因子中任意两个同时为零，都意味着 a、b、c 中至少有一个也为零，而这是不允许的。

证明。命题 3.3(2) 中的结式不会对布洛赫判别式产生贡献，因为相应的临界点位于不同的角点上方。命题 3.3(3) 中的结式为（$a\pm b\pm c$ 的平方）。

命题 3.3(1) 中的判别式是平方和

$$(u-v)^2+4\,(a\pm b\pm c)^2\,.$$

These 仅在 $u-v=a\pm b\pm c=0$ 时为零，这一点由 BD_Γ 计入 . □

我们研究临界点的性质如何依赖于参数。(21) 中的消元式分解为多个低次数不可约因子，这使得我们能够进行细致的分析。每个因子作为关于 λ 的多项式，其根即为临界能量。我们确定相应临界点的 (x,y) 坐标，研究其是否为实数，以及能量函数 $\lambda(x,y)$ 的海森矩阵的特征符号。我们分别讨论 (21) 中的四个二次因子和两个一次因子。第 4.1 节和第 4.2 节推出以下结果。

定理 4.1. 若 $\mathrm{BD}_\Gamma\neq 0$，则复布洛赫簇有十二个非退化临界点。若平方 $(a\pm b\pm c)^2$ 互不相同，则临界点在 (21) 中各因子的根之间分布如下。

(1) 每个来自二次因子的临界能量对应一个临界点 .
(2) 每个来自一次因子的临界能量对应两个临界点。

注意，如果平方 $(a\pm b\pm c)^2$ 不互不相同，那么 (21) 中的一些二次因子会重合。它们的临界能量 λ 也会重合，但相应临界点的 (x,y)-坐标彼此不同：它们是不同的角点。因此，平方 $(a\pm b\pm c)^2$ 互不相同这一条件并未出现在布洛赫判别式中。

4.1. 临界 点对应二次因子。四个二次因子 (21) 有 roo ts

$$\frac{1}{2}\Big(u+v\ \pm\sqrt{(u-v)^2+4(a\pm b\pm c)^2}\Big)\,, \tag{22}$$

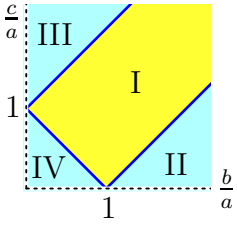
见 (17)。当 t 这些平方（$a\pm b\pm c$）^{2}彼此不同，因此会产生八个不同的临界能量。

对于每个这样的临界能量 λ，费米曲线 $\mathcal{F}(\lambda)$ 在临界点 $(\pm1,\pm1,\lambda)$ 处是奇异的，其符号与 (22) 中项 $(a\pm b\pm c)$ 的符号相对应。费米曲线的牛顿多面体是图 3 中棱锥的底面，即一个六边形。

其内部有一个整数点，因此 $\mathcal{F}(\lambda)$ 的算术亏格为一，并且是一条只有一个奇点的有理曲线。

我们确定角点 $(x^*, y^*) = (\pm 1, \pm 1)$ 上方临界点的类型。布洛赫簇有两个分支 λ^+ 和 λ^-（其符号对应于方程 (22) 中平方根前的符号）——它们就是谱带函数。当且仅当 (x, y, λ^-) 是相对最小值/鞍点/相对最大值时，点 (x, y, λ^+) 才是相对最大值/鞍点/最小值。下一个命题采用记号 $\Delta = \mathrm{BD}_\Gamma/(u-v)$。

命题 4.2. 假设 $a, b, c \neq 0$ 和 $\Delta \neq 0$。分支 λ^+ 在每个角点上方都有一个非退化临界点。对于 $a, b, c > 0$，图4对此作了总结。对于其他象限，将 (x^*, y^*) 乘以 $(\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ 的符号。当 $\Delta < 0$（图4中的区域 I）时，全局最小值不出现在角点；而当 $\Delta = 0$ 时，对应角点处有一个重数为三的临界点。



	(1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,-1)
I	最大值	鞍点	鞍点	鞍点
II	最大值	最小值	鞍点	鞍点
III	最大值	鞍点	最小值	鞍点
IV	最大值	鞍点	鞍点	最小值

FIGURE 4. λ^+ 和 a、b、$c > 0$的临界点分析。

证明。设 f是一个在点（x^*，y^*）处有临界点的实二元函数。设 $\frac{1}{2}Qf$是函数 f 在点（x^*，y^*处的泰勒展开中的二次项。那么，如果 x^*，y^*的行列式为正，则（Qf，Qf）是相对极值；如果行列式为负，则是鞍点。行列式为正时，相对极值为相对最小值或最大值，分别取决于 Qf 的迹为正还是负。对我们而言，重要的是 x^*是点（y^*，$\frac{1}{2}Qf$）处切空间的二次对称幂上的线性映射。

在微积分中，Qf是 f在（x^*, y^*）处的二阶偏导数矩阵 Hess(f)。然而，对我们而言，$Qf = -\mathrm{Hess}(f)$。这是因为我们的环境空间是 $\mathbb{T}^2$，而不是 $\mathbb{R}^2$；$\mathbb{T}$ 在 $x \in \mathbb{T}$ 处的切空间 $T_x\mathbb{T}$ 是$\mathbb{R} \cdot \sqrt{-1}x \subset \mathbb{C} = T_x\mathbb{C}^\times$。在角点（$x^*, y^*$）处，我们有$T_{(x^*,y^*)}$ $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}\sqrt{-1} \oplus \mathbb{R}\sqrt{-1} \subset \mathbb{C}^2 = T_{(x^*,y^*)}(\mathbb{C}^\times)^2$。$\sqrt{-1}$ 在二次对称幂中给出一个负号。

根据例3.4之前的讨论以及式（19），我们有

$$\delta \cdot Q\lambda^+ \;=\; -\delta \cdot \mathrm{Hess}(\lambda^+) \;:=\; \begin{pmatrix} -abx^* - bcx^*y^* & bc \\ bc & -acy^* - bcx^*y^* \end{pmatrix},$$

其中 $\delta := \lambda^+ - (u+v)/2 > 0$。因此

$$\begin{aligned} \delta^2 \det(Q\lambda^+) &= abcx^*y^*(a + bx^* + cy^*), \quad \text{and} \\ \delta \mathrm{Trace}(Q\lambda^+) &= -(abx^* + acy^* + 2bcx^*y^*). \end{aligned}$$

将 det 记作 $\delta^2\det(Q\lambda^+)$，并将 Tr 记作 $\delta\mathrm{Trace}(Q\lambda^+)$。我们分析它们在每个角点（$x^*$，$y^*$）处的符号，并假设 a，b，$c > 0$。

$(+1,\ +1)$：则 $\det\ >0$，且 $\mathrm{Tr}\ <0$。

$(-1,+1)$：那么，当且仅当 $=-abc(a-b+c)\ >0\ \ a-b+c<0$ 时，$\det$ 成立；这对应于图4中的区域II。在此假设下，由于 $b-c>a$ 我们有

$$\mathrm{Tr}\ =\ ab-ac+2bc\ =\ a(b-c)+2bc\ >\ a^2+2bc\ >\ 0\,.$$

$(+1,-1)$：这与前一种情况具有对称性，因此当且仅当 (a,b,c) 位于区域III时，$\det\ >0$ 成立，并且在那里 $\mathrm{Tr}>0$。

$(-1,-1)$：那么，当且仅当 $\ a\ >\ b+c$ 时，$\det\ =\ abc(a-b-c)\ >0$ 成立，这对应于区域IV。在此假设下，$\mathrm{Tr}\ =ab+ac-2bc>(b+c)^2-2bc=b^2+c^2>0$。

这验证了图4中的结论。关于重数的陈述是我们随后分析的结果——在点 $a,b,c>0$ 附近进行任意扰动且满足 $\Delta=0$时，另外两个非退化临界点会在相应的角点处合并。当 $\Delta<0$时，我们将证明存在两个不在角点处的极小值点。□

4.2. 当 $\ \lambda\ =\ u$ 或 $\ \lambda\ =\ v$时的临界点。线性因子的研究取决于 $\ u\neq v$ 或 $\ u=v$的情况。

4.2.1. $u\ \neq\ v$时对 (21) 中线性因子的分析。如果 $\ \lambda\ =\ u$ 或 $\ \lambda\ =\ v$，则行列式 $D(z,\lambda)$ 可分解，且费米簇是可约的，

$$D(z,\lambda)\ =\ -(a+bx+cy)(a+bx^{-1}+cy^{-1})\,. \tag{23}$$

根据引理 1.9，$\ \lambda$ 处的复临界点是费米簇$\mathcal{F}(\lambda)$的奇点。如命题 3.1 的证明所示，这些点是由两个因子 (23) 定义的曲线的交点，因为每条曲线都是光滑的。对于一般的 $\ a$、$\ b$、$\ c$，存在两个这样的点。事实上，我们来求解方程组

$$a+bx+cy\ =\ a+bx^{-1}+cy^{-1}\ =\ 0\,.$$

分别乘以 $\ a+bx^{-1}$ 和 $\ cy$，然后将两式相减，得到

$$0\ =\ abx+(a^2+b^2-c^2)+abx^{-1}\,. \tag{24}$$

代入其两个解到 $y=-\frac{1}{c}(a+bx)$ 中，得到两个临界点

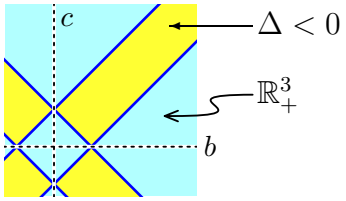
$$(x,y)\ =\ \Big(-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\ \pm\ \frac{1}{2ab}\sqrt{\Delta}\,,\ -\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\ \mp\ \frac{1}{2ac}\sqrt{\Delta}\Big)\,, \tag{25}$$

其中 Δ 与前文相同。它也是多项式 (24) 的判别式

$$\Delta\ =\ (a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2\ =\ (a-b-c)(c-a-b)(b-a-c)(a+b+c)\,.$$

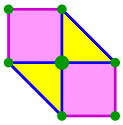
这两个点 (25) 在对合 $(x,y)\ \mapsto(x^{-1},y^{-1})$ 下互换。

当 $\ \Delta>0$ 时，(25) 中的两个点位于 $\ \mathbb{R}^2$，因此不是实布洛赫簇的临界点。当 $\ \Delta<0$ 时，它们位于紧致环面 $\ \mathbb{T}^2$ 上，并且都是实布洛赫簇的临界点。我们在 (b,c)-平面中展示这一点，其中 $\ a=1$。



点线表示 b 或 c 为零的位置，实线表示 $\Delta = 0$ 的位置。判别式 Δ 在黄色区域为负，在浅蓝色区域为正。

解的数量 2 是式 (23) 中各因子的牛顿多边形的混合面积，这也是伯恩斯坦定理给出的上界 [7]。因此，当 $\Delta \neq 0$时，两条曲线在每个解处横截相交。下面我们展示每个因子的牛顿多面体 P和 $-P$，以及它们的闵可夫斯基和 $P + (-P)$，后者是 $\mathcal{N}$ 色散关系的牛顿多面体的六边形底面，如图 3 所示。

(26) $P =$  $-P =$  $P + (-P) =$ 

混合面积由 $\mathrm{Area}(P + (-P)) - \mathrm{Area}(P) - \mathrm{Area}(-P) = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$给出。

由于 $a, b, c \neq 0$，判别式 Δ 中至多有一个因子为零。对于适当的符号，该因子是 $a \pm b \pm c$。在这种情况下，式 (25) 中的两个点与相应的角点 $(\pm 1, \pm 1)$ 重合，形成一个退化临界点。这解释了布洛赫判别式中出现 Δ 作为因子，以及命题 4.2 中的重数 3。

这也确定了 H_p的谱，表明它存在带隙。若 $\Delta > 0$，使得由（21）中的线性因子得到的临界点不落在 $\mathbb{T}^2$，并且令 m分别为M这些量的最小值（相应地，最大值）

$$\left\{ \tfrac{1}{2}\sqrt{(u-v)^2 + 4(a \pm b \pm c)^2} \mid \text{ all choices of } \pm \right\},$$

那么由（22），H_p 的谱为

$$\left[\tfrac{u+v}{2} - M, \tfrac{u+v}{2} - m\right] \bigcup \left[\tfrac{u+v}{2} + m, \tfrac{u+v}{2} + M\right],$$

其带隙为 $2m$。

若 $\Delta < 0$，设 $v < u$。现在又有四个临界点，来自（21）的每个线性因子各有两个。由于 $0 < \frac{u-v}{2} < m$,

$$\tfrac{u+v}{2} \;<\; u \;=\; \tfrac{u+v}{2} + \tfrac{u-v}{2} \;<\; \tfrac{u+v}{2} + m\,.$$

我们还有 $\frac{u+v}{2} > v > \frac{u+v}{2} - m$。因此，$H$ 的谱为

$$\left[\tfrac{u+v}{2} - M, v\right] \bigcup \left[u, \tfrac{u+v}{2} + M\right],$$

其带隙为 $u - v$。因此，$\lambda = u$ 处的两个临界点都是相对极小值，而 $\lambda = v$ 处的两个临界点都是相对极大值。

无论哪种情况，临界点方程都有十二个解，尽管并非全都是实数（位于 $\mathbb{T}^2$）。由于这等于库什尼连科界 [24]（图 3 所示牛顿多面体的归一化体积），所有解的重数均为 1。根据 [15, 定理 5，2], 所有临界点都是非退化的，并且当 $u \neq v$ 且 $\Delta \neq 0$时，谱边缘猜想成立。

当 $\Delta = 0$ 和 $u \neq v$时，Δ 中的因子恰有一个为零；正如我们所述，与该因子对应的能量 u 和 v处存在两个退化临界点。图 5展示了三个布洛赫簇及其对应的参数值。

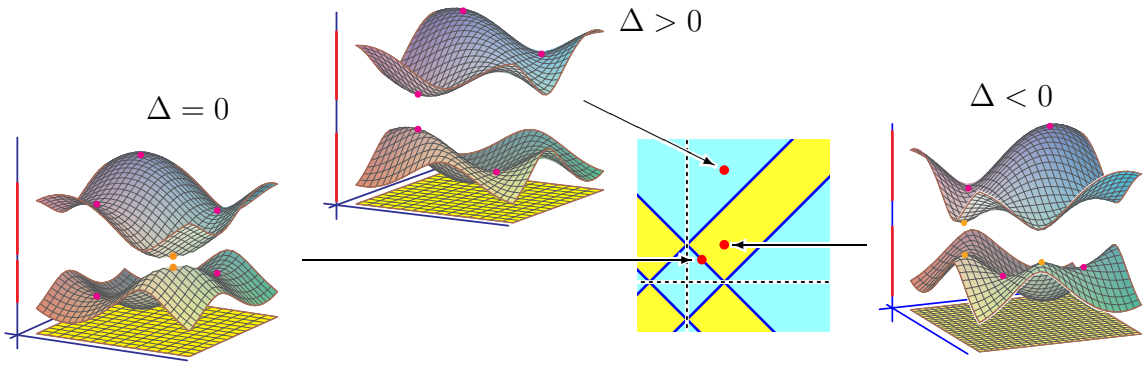


FIGURE 5. 参数为 (1, 25、35)、(1, 1, 3) 和 (1, 1, 1) 时的布洛赫簇。

Δ	非退化 临界点	退化 临界点	海森矩阵
< 0	12	0	(3,6,3)
> 0	8	0	(2,4,2)
$= 0$	6	2（重数为 3）	(1,4,1)

TABLE 2. $u \neq v$时的临界点汇总。

4.2.2. 对 $u = v$时式 (21) 中线性因子的分析。当 $u = v$ 时，式 (21) 中的两个一次因子变得相等。令 $\kappa := \lambda - u = \lambda - v$，则色散多项式变为

$$\kappa^2 - (a + bx + cy)(a + bx^{-1} + cy^{-1}). \tag{27}$$

当 $\Delta \neq 0$时，由两个因子定义的曲线在点（25）处横截相交。于是 $w := a + bx + cy$ 和 $z := a + bx^{-1} + cy^{-1}$ 给出了这些点处的局部坐标。在这些坐标下，布洛赫簇由 $\kappa^2 - wz = 0$定义，这表明当这些临界点满足 $u = v$ 时，它们是复布洛赫簇上的普通双重点奇点。

如果 $\Delta > 0$，那么点（25）位于 $\mathbb{R}^2$ 中，相应的临界点不在实布洛赫簇上。因此，实布洛赫簇是光滑的，具有八个非退化临界点，并且如 $|a \pm b \pm c| > 0$所示存在一个带隙。我们可以在图6的顶部（中部）看到这一点。

如果 $\Delta < 0$，那么点（25）位于 $\mathbb{T}^2$中。为分析该奇点，我们引入在给出 $\mathbb{T}^2$的非标准实结构（共轭）下保持不变的局部坐标。注意，在该共轭作用下，$\overline{w} = z$。于是 $r = \frac{w+z}{2}$ 和 $s = \frac{w-z}{2\sqrt{-1}}$ 是点（25）处的实数（在共轭下保持不变）局部坐标。在这些坐标下，布洛赫簇由 $\kappa^2 = r^2 + s^2$定义，这表明它是一个双锥，称为 *Dirac point*。在图2和图6的右侧可以观察到这些结构。

当 $\Delta = 0$ 时，函数 w 和 z 在临界点处不是局部坐标，因为它们的梯度是相关的。因此，奇点 (27) 不是普通双重点，而是具有更高阶数。具体而言，当 $u \neq v$ 时其阶数为三，当 $u = v$ 时其阶数为六。图6展示了当 $u = v$ 时的三个布洛赫簇及其相应的参数值。

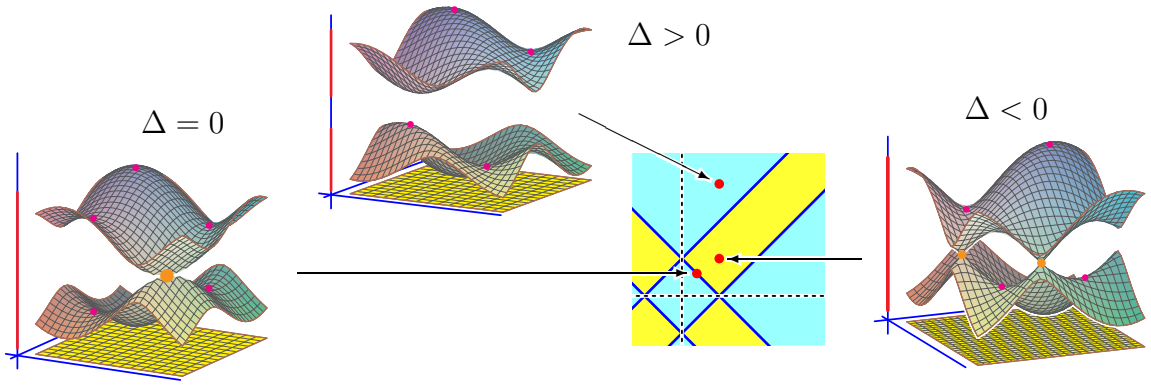


FIGURE 6. 参数为 (1, 25, 35)、(1, 1, 3) 和 (1, 1, 1) 时的布洛赫簇。

Δ	非退化 临界点	退化 临界点	海森矩阵
< 0	8	2（狄拉克）	(1,6,1)
> 0	8	0	(2,4,2)
$= 0$	6	1（重数为 6）	(1,4,1)

TABLE 3. 当 $u = v$ 时六角晶格的临界点汇总 .

5. ANOTHER BIPARTITE GRAPH

在本节及下一节中，我们将第 4 节的部分分析扩展到另外两个适用第2节和第3节结果的二部图。图7展示了一个比六角晶格多一个边轨道的二分周期图 Γ。

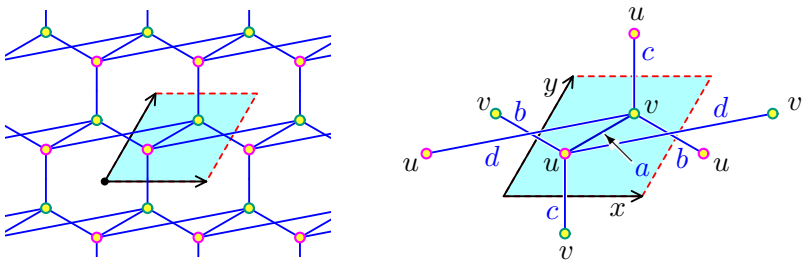


FIGURE 7. 具有四个边轨道和一个标记的二分周期图。

对于此图和这些参数，弗洛凯矩阵为

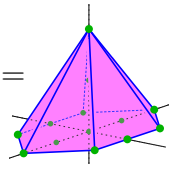
$$H_p(x,y) = \begin{pmatrix} u & a + bx^{-1} + cy^{-1} + dx \\ a + bx + cy + dx^{-1} & v \end{pmatrix}, \tag{28}$$

（参见（14）。）其色散多项式 $D_p(x, y, \lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id} - H_p(x, y))$ 为

$$(\lambda - u)(\lambda - v) - (a + bx^{-1} + cy^{-1} + dx)(a + bx + cy + dx^{-1}). \tag{29}$$

我们展示w，其支撑和牛顿多面体 $\mathcal{N}$ 的归一化体积为 24。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{N} =$$



使用计算机代数软件，我们从临界点方程 (5) 中消去变量 x 和 y。这得到一个关于 λ 的 14 次多项式，其系数取决于参数 p。它可分解为两个一次多项式、四个二次式和一个四次多项式，

$$\begin{array}{c} \lambda - u \\ \lambda - v \\ (\lambda-u)(\lambda-v) \;-\; (a+(b+d)+c)^2 \\ (\lambda-u)(\lambda-v) \;-\; (a+(b+d)-c)^2 \\ (\lambda-u)(\lambda-v) \;-\; (a-(b+d)+c)^2 \\ (\lambda-u)(\lambda-v) \;-\; (a-(b+d)-c)^2 \\ 16b^2d^2(\lambda-u)^2(\lambda-v)^2 \;+\; 8bd(G-8bc^2d)(\lambda-u)(\lambda-v) \;+\; G^2\,. \end{array} \tag{30}$$

一次和二　　次式因子就是命题 3.1 给出的因子。在这里，G 是四次多项式

$$G \;:=\; (b-d)^2(a^2-4bd)+4bc^2d \;=\; a^2(b+d)^2-4bd\bigl(a^2+(b-d)^2-c^2\bigr)\,. \tag{31}$$

将例 2.10 的倒数 A-判别式 $\Delta_A^{\rm rec}$限制到 $D_p(x,y,\lambda)$ 的系数上，得到　　(29)

$b^2\,c^4\,d^2\,(\lambda-u)^2(\lambda-v)^2\,H$，其中 H 是（30）中的第七因子。

定理 5.1。设 Γ 为图7中的周期图。次数为 13 的多项式

$$\mathrm{BD}_\Gamma \;=\; \bigl(a^2(b+d)^2-16b^2d^2\bigr)\,(u-v)\,G\prod_{\pm,\pm}(a\pm(b+d)\pm c)$$

是 Γ的布洛赫判别式。

定理 5.2。如果 $\mathrm{BD}_\Gamma\neq 0$ 且（$b-d$）$(4bd-a^2)\neq 0$，则复布洛赫簇具有 24 个非退化临界点。这些临界点在（30）的各因子的根之间分布如下。

（1）来自二次因子的每个临界能量对应一个临界点。（2）来自一次因子的每个临界能量对应四个临界点。（3）来自第七因子 H 的每个临界能量对应两个临界点。

我们通过分析（30）的每个因子来证明这一点。与第 4 节中的分析类似，临界能量 λ 是各因子的根，由此可确定相应临界点的 (x,y) 坐标。第 (1)、(2) 和 (3) 部分分别在第 5.1 、 5.2 和 5.3 节中讨论，我们也在其中对临界点进行分类（位于 $\mathbb{T}^2$ 中、位于 $(\mathbb{R}^\times)^2$, 中，或两者皆非）。以下观察可以部分解释这些重数：在对合 $(x,y)\mapsto(x^{-1},y^{-1})$ 作用下，非角点临界点会成对出现。

5.1. 二次因子的临界点。对二次因子的分析与六角晶格类似，包括其与 $u-v$ 无关这一性质。它们的根为

$$\lambda = \frac{1}{2}\Big(u+v \pm \sqrt{(u-v)^2+4(a\pm(b+d)\pm c)^2}\Big), \tag{32}$$

且临界点位于相应的角点 $(x,y) = (\pm 1,\pm 1)$ 上。判别式是平方和，只有当 $u-v = (a\pm(b+d)\pm c) = 0$ 时才为零，该点位于 BD_Γ 中。若 $u=v$，则 (32) 变为

$$\lambda = u \pm |a\pm(b+d)\pm c|.$$

这将得到八个临界点，它们全都位于实布洛赫簇上。当 $\mathrm{BD}_\Gamma \neq 0$ 时，对这些临界点的分析与命题 4.2 中的分析类似，只需将那里中的 b 替换为这里的 $b+d$，并将 Δ 替换为 $\prod(a\pm(b+d)\pm c)$。主要区别在于对临界点性质的分析。

5.2. 当 $\lambda = u$ 或 $\lambda = v$ 时的临界点。当 $\lambda = u$ 或 $\lambda = v$ 时，费米簇是由 (28) 的非对角元定义的两条曲线的并集；由于每条曲线都光滑，临界点就是两条曲线的交点。这些是下列方程组的解，

$$a+bx^{-1}+cy^{-1}+dx = a+bx+cy+dx^{-1} = 0. \tag{33}$$

分别对 y 求解、令两式相等并化简，得到倒数四次多项式

$$0 = bdx^2 + (ab+ad)x + a^2+b^2+d^2-c^2 + (ab+ad)x^{-1} + bdx^{-2}. \tag{34}$$

如果 $g(t) := 4bdt^2 + 2a(b+d)t + a^2+(b-d)^2-c^2$，则多项式（34）为 $g(\frac{x+x^{-1}}{2})$。二次式 $g(t)$ 的判别式为 $4G$，其中 G 是多项式（31）。当 1 或 -1 是 g的根，或者 g 具有重根，即当

$$G\cdot g(1)g(-1) = G\cdot\prod_{\pm,\pm}(a\pm(b+d)\pm c) \tag{35}$$

为零。这解释了 BD_Γ 的最后五个因子。当费米簇的两个分支在相应的角点 $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$ 处相切时，因子 $(a\pm(b+d)\pm c)$ 为零，正如我们在六角晶格中所看到的那样。最后，当这些分支有两个相切点时，因子 G 为零。

我们对方程 (33) 的解有如下分类。

定理 5.3. 假设 $G\,g(1)g(-1)\neq 0$。则 (33) 在 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 中有四个解。

(1) 当 $G<0$ 时，$(\mathbb{R}^\times)^2 \bigcup \mathbb{T}^2$ 上没有解。(2) 当 $G>0$ 时，所有解都在 $(\mathbb{R}^\times)^2 \bigcup \mathbb{T}^2$ 上。(3) 若 $g(1)\cdot g(-1) < 0$，则 $G>0$，且在 $(\mathbb{R}^\times)^2$ 上有两个解，在 $\mathbb{T}^2$ 上也有两个解。(4) 若 G, $\frac{1}{bd}g(1)$、$\frac{1}{bd}g(-1)$ 和 $16b^2d^2-a^2(b+d)^2$ 均为正，则所有解都在 $\mathbb{T}^2$ 上。(5) 在所有其他情况下，所有解都在 $(\mathbb{R}^\times)^2$ 上。

证明。如前所述，条件 $G\,g(1)g(-1)\neq 0$ 意味着 (34) 有四个互异解，并且每个解都对应于 (33) 的一个解。

(33) 的一个解 (x, y) 位于 $\mathbb{T}^2$ 上，当且仅当 $x \in \mathbb{T}$。事实上，由于

$$y \;=\; -\frac{a+bx+dx^{-1}}{c} \qquad \text{and} \qquad y^{-1} \;=\; -\frac{a+bx^{-1}+dx}{c}\,,$$

若 $x \in \mathbb{T}$，则 $\overline{x} = x^{-1}$，这意味着 $\overline{y} = y^{-1}$，因此 $y \in \mathbb{T}$。若 $x \in \mathbb{R}^\times$，同理作相应变更即可。

为了对方程 (34) 的解进行分类，我们写作

$$B \;:=\; \frac{a(b+d)}{2bd} \qquad \text{and} \qquad C \;:=\; \frac{a^2+(b-d)^2-c^2}{4bd}\,. \tag{36}$$

于是 $g(t) = 4bd(t^2+Bt+C)$，且 $G = 4b^2d^2(B^2-4C)$，因此

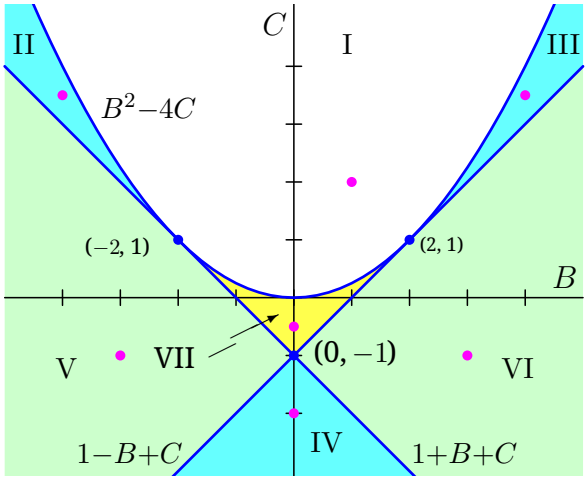
$$g(1)g(-1)\,G \;=\; 64b^4d^4\,(1+B+C)\,(1-B+C)\,(B^2-4C)\,.$$

设 $\mu := \frac{1}{2}(-B \pm (B^2-4C)^{1/2})$ 是 g 的一个根。那么，方程 (34) 的解 x 为

$$x \;=\; \mu \pm (\mu^2-1)^{1/2} \qquad \text{with} \qquad x+x^{-1} \;=\; 2\mu\,. \tag{37}$$

T因此，$x \in \mathbb{R}^\times \cup \mathbb{T}$ 当且仅当 $\mu \in \mathbb{R}$，这解释了前两个结论 .

对于其他断言，我们对 $\mathbb{R}^2$where $0 \neq (1+B+C)(1-B+C)(B^2-4C)$ 的每个连通分支各取一点，求解 (34)。结果汇总于图 8。我们有$16b^2d^2-a^2(b+d)^2 > 0$当 $|B| < 2$ 时，这将区域 VII 与区域 II 和 III 分隔开来。□



	点	摘要
I	$(1,2)$	在 $\mathbb{R}^\times \cup \mathbb{T}$ 上无
II	$(-4,\frac{7}{2})$	4 在 $\mathbb{R}_>$上
III	$(4,\frac{7}{2})$	4 在 $\mathbb{R}_<$上
IV	$(0,-2)$	2 在 $\mathbb{R}_<$ 上，2 在 $\mathbb{R}_>$上
V	$(-3,-1)$	2 在 $\mathbb{R}_>$ 上，2 在 $\mathbb{T}$上
VI	$(3,-1)$	$\mathbb{R}_<$上有 2 个，$\mathbb{T}$上有 2 个
VII	$(0,-\frac{1}{2})$	$\mathbb{T}$上有 4 个

FIGURE 8. $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(B,C) \mid 0 = (1+B+C)(1-B+C)(B^2-4C)\}$ 有七个连通分支。我们在每个分支中各取一点求解了（34）。

5.3. 第七因子的临界点。(30) 中的第七因子 H 是关于 ν 的二次式: $= 4bd(\lambda-u)(\lambda-v)$，即

$$H \;=\; \nu^2 \;+\; 2(G-8bc^2d)\nu \;+\; G^2\,. \tag{38}$$

该二次式的判别式为 $256b^2c^2d^2(b-d)^2(1-\frac{a^2}{4bd})$，其根为

$$\begin{aligned}\nu &= 8bc^2d - G \pm 8bcd(b-d)\big(1-\tfrac{a^2}{4bd}\big)^{1/2}.\\ &= 4bd\left(c \pm (b-d)\big(1-\tfrac{a^2}{4bd}\big)^{1/2}\right)^2 \end{aligned}\tag{39}$$

当且仅当 $1-\frac{a^2}{4bd} \geq 0$ 时，这些解为实数；当 $(b-d)(1-\frac{a^2}{4bd})$ 非零时，它们互不相同。利用 (39) 求解 $\nu = 4bd(\lambda-u)(\lambda-v)$，得到 λ：

$$\lambda = \frac{u+v}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{u-v}{2}\Big)^2 + \Big(c \pm (b-d)\big(1-\tfrac{a^2}{4bd}\big)^{1/2}\Big)^2}\,.\tag{40}$$

注意，判别式是平方和。

引理 5.4。当 $u \neq v$ 时，(30) 中的第七因子 H 有四个根，当且仅当 $(b-d)(1-\frac{a^2}{4bd})$ 非零。这些根在 $1 > a^2/4bd$ 时为实数，否则为复数。当 $(b-d)(1-\frac{a^2}{4bd})$ 为零时，它有两个实解，每个解的重数为二。

我们预计每个临界能量 (40) 都会产生两个临界点。事实上，通过插值和 Gr¨obner 基计算，我们得到以下三个多项式:

$$\begin{aligned} &2bd\,x + a(b+d) + 2bd\,x^{-1}\\ &\pm 2b\big(1-\tfrac{a^2}{4bd}\big)^{1/2}\cdot y - (2bx+a)\\ &4bd\big(1-\tfrac{a^2}{4bd}\big)^{1/2}(y+y^{-1}) \pm 2a(b-d)\,. \end{aligned}\tag{41}$$

这里，符号 $\pm$ 是中间解 ν (39)中的符号。给定 ν的一个值，第一个方程给出 x的两个值；根据第二个方程，每个值又对应 y的一个值。第一个方程的判别式为 $a^2(b+d)^2 - 16b^2d^2$，这正是我们在定理 5.3(4)中看到的。这对应布洛赫判别式 BD_Γ中的第一个因子。当它为正时，根位于 $\mathbb{R}^\times$；当它为负时（即定理 5.3(4)中的条件），两个根都位于 $\mathbb{T}$。

定理 5.5. 若 $16b^2d^2 < a^2(b+d)^2,$，则由第七因子产生的实布洛赫簇上不存在临界点。

假设 $16b^2d^2 > a^2(b+d)^2$。

(1) 若 $b \neq d$，则 (30) 的第七因子 H 有四个实解，给出四个互不相同的实临界能量，且每个能量对应实布洛赫簇上的两个临界点。(2) 若 $b = d$，则 H 有两个实解，每个解对应实布洛赫簇上的四个临界点。

证明。当 $16b^2d^2 < a^2(b+d)^2,$ 时，临界点的坐标 x 不在 $\mathbb{T}$ 上，这就证明了第一个断言。

假设 $16b^2d^2 > a^2(b+d)^2,$，因此临界点的坐标 x 位于 $\mathbb{T}$ 上。要使实临界能量存在，ν 的表达式 (39) 和 $\frac{a^2}{4bd} < 1$ 的表达式 (40) 要求 $bd < 0$。注意，如果 $bd > 0$，这一条件总是成立。如果 $16b^2d^2 > a^2(b+d)^2$，则意味着

$$\frac{a^2}{4bd} < \frac{4bd}{(b+d)^2} < 1\,.$$

最后一个不等式是算术-几何平均不等式。

对于 (1)，假设 $b \neq d$。由于 $1 > \frac{a^2}{4bd}$，(41) 中第三个方程的系数是实数，因此 $y \in \mathbb{T} \cup \mathbb{R}^\times$。由于 $x \in \mathbb{T}$，第二个方程表明 $y \notin \mathbb{R}$，从而 $y \in \mathbb{T}$。对于 (2)，当 $b = d$ ，我们马萨诸塞州y 求解这些方程q以 g给出四个临界 p点

$$\left(-\frac{a}{2b} \pm \left(\tfrac{a^2}{4b^2} - 1\right)^{1/2} \,,\, \pm\sqrt{-1}\right) .$$

由引理 5.4， λ有两个取值，由此证明完毕。 □

进一步分析（此处从略）表明，当（$b - d$）（$1 - \frac{a^2}{4bd}$）为零时，复临界点的数量和类型会发生变化。例如，当 $b = d$时，会出现位于“ ∞”处的临界点，相关研究见 [12, 14, 15]。这些因子不会出现在布洛赫判别式中，因为它们不会影响实临界点。不过，它们会出现在定理 5.3 的陈述中，因为该定理讨论的是布洛赫簇的复临界点。

注 5.6。第 5.1 节以及定理 5.3 和定理 5.5 完整描述了布洛赫判别式 BD_Γ 非零时（实）布洛赫簇上临界点的数量和分布，现总结如下。

(1) 每个四个角点上方总是有两个临界点。(2) (30) 的第七因子 H 根据 $16b^2d^2 - a^2(b+d)^2 = (4bd - a(b+d))\,(4bd + a(b+d))$ 的符号，给出八个或零个临界点。(3) 当 λ等于势u 或 v之一时，临界点的数量为八个、四个或零个。

始终存在至少为 $|u - v|$ 的带隙；当式 (3) 中存在临界点时，该带隙恰为 $|u - v|$。⋄

利用坐标 B 和 C，可以简洁地表达这一分类（36）。在 B, C平面上，布洛赫判别式的因子 $(u - v)$ 并不明显。其他因子映射为四条直线和一个二次曲面，分别是 $1 + B + C$, $1 - B + C$, $B - 2$, $B + 2$ 和 $B^2 - 4C$，它们将平面划分为 13 个判别室。我们展示了其中八个判别室中参数 a, b, c, d 为正时的布洛赫簇；由于将 B 替换为 $-B$ 不会影响我们的分类，但请注意， $a, b, c, d > 0$ 意味着 $B > 0$。

图 9 和图 10 展示了八个布洛赫簇，每个判别室各选取一个作为代表。

设 G, g 如式 (35) 所示。当 $u = v$ 但 $(b - d)(1 - \frac{a^2}{4bd})\; G\, g(1)g(-1) \neq 0$时，复布洛赫簇有四个普通双重点。只有当参数 B, C 落在区域 II、III 和 VII 之一时，这些点才是狄拉克点；在其他所有情况下，临界点的类型和分布在定性上都与图 9 和图 10 中 $u \neq v$ 时的情况等价。当 (B, C) 位于区域 II 时有四个狄拉克点，而参数位于区域 III 和 VII 时有两个。图 11 展示了各区域中具有代表性的布洛赫簇。这解释了布洛赫判别式中的因子 $(u - v)$。

6. A third bipartite graph

我们部分分析第三个二部图的算子临界点。令 Γ 为图 12 中的二部图，其基本域内有两个顶点和五条边的轨道。对于该图及这些参数，我们得到弗洛凯矩阵，

$$H_p(x, y) \;=\; \begin{pmatrix} u & a + bx^{-1} + cy^{-1} + dx + ey \\ a + bx + cy + dx^{-1} + ey^{-1} & v \end{pmatrix} , \tag{42}$$

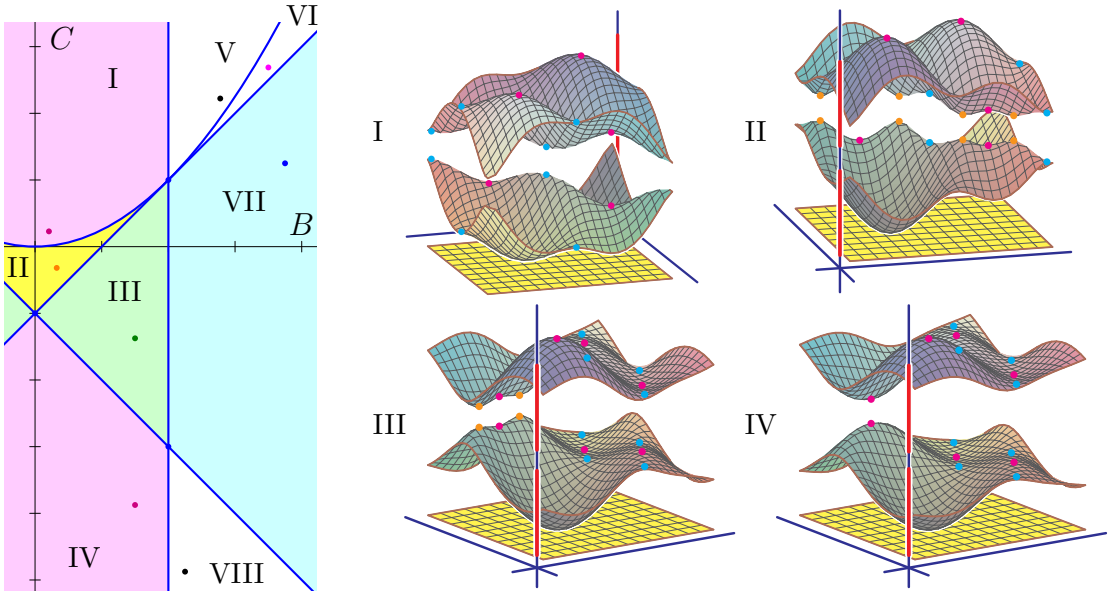


FIGURE 9. 来自区域I–IV的布洛赫簇，具有16、20或24个临界点。

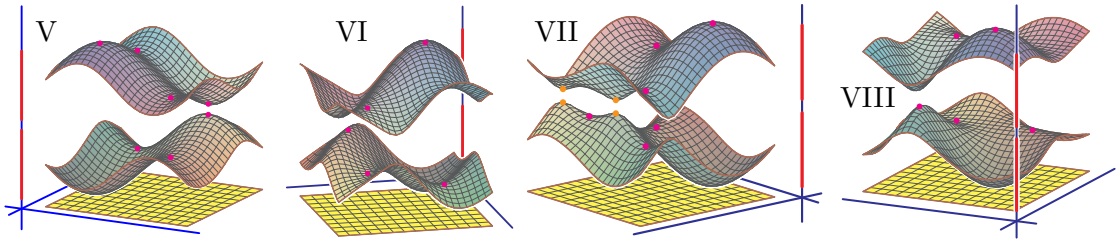


FIGURE 10. 来自区域V–VIII的布洛赫簇，具有8或12个临界点。

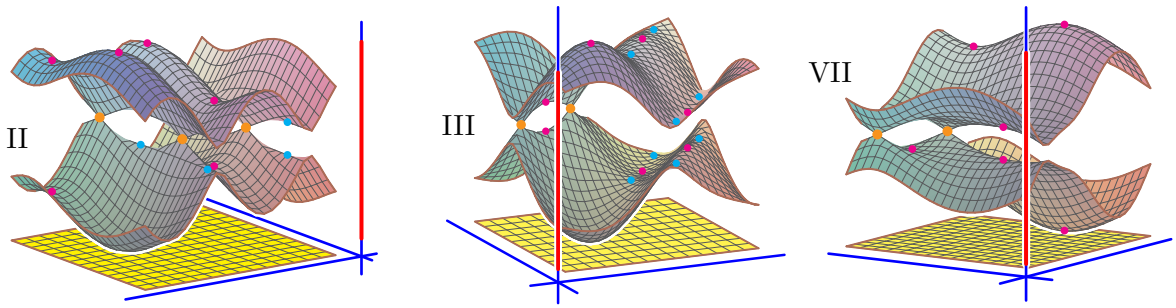


FIGURE 11. 具有狄拉克点的代表性布洛赫簇

其色散多项式为 $D_p(x,y,\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id} - H_p(x,y))$

$$(\lambda - u)(\lambda - v) - (a + bx^{-1} + cy^{-1} + dx + ey)(a + bx + cy + dx^{-1} + ey^{-1}) . \tag{43}$$

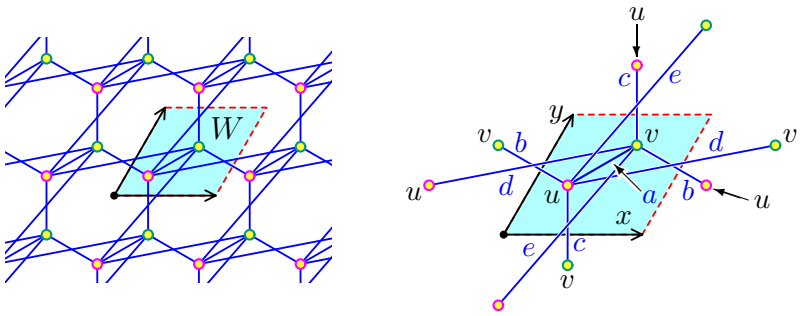
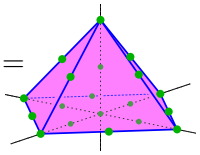


FIGURE 12. 具有五个边轨道及其标记的二分周期图。

我们展示了其支撑和牛顿多面体 $\mathcal{N}$，其归一化体积为 32。

$$(44)\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{N} =$$



与前两个图不同，我们无法计算其临界点方程 (5) 的任何 Gr¨obner 基，其中将参数 a、b、c、d、e、u、v 视为不定元。这是进行符号消元以获得关于 λ 及参数的多项式的先决条件，我们称之为 λ-消元式。根据引理 1.9，该多项式的根是临界能量，即 λ 取值为使相应费米簇奇异的能量。

作为 (x,y) 的多项式，色散多项式的支撑 A 是 (44) 中金字塔形牛顿多面体的底。相应的判别式 $\Delta_r(A)$ 已在例 2.11 中描述。将 $\Delta_r(A)$ 代入色散多项式的 (x,y)-系数，可得到一个具有九个因子的多项式。根据上一段的讨论，涉及 λ 的因子整除 λ-消元式。其中四个因子是平方，

$$(be-cd)^2\,,\quad (bc-de)^2\,,\qquad (\lambda-u)^2\,,\quad \text{and}\quad (\lambda-v)^2\,,$$

有四个不可约二次多项式，

$$(45)\qquad (\lambda-u)(\lambda-v)\ -\ \big(a\pm(b+d)\pm(c+e)\big)^2\,,$$

以及一个含有 2418 项的十六次因子。我们将 H 记作这个最后的因子。

通过观察（以及根据色散多项式 (43) 的形式进行回溯）可知，λ-消元式是 Λ 中的一个多项式：$=(\lambda-u)(\lambda-v)$。令

$$F\ :=\ x^2y^2\big(\Lambda\ -\ (a+bx^{-1}+cy^{-1}+dx+ey)(a+bx+cy+dx^{-1}+ey^{-1})\big)\,,$$

表示代入上述内容后色散多项式 (43) 的分子。临界点理想变为理想 $I\subset\mathbb{Q}[w,z,x,y,\,\Lambda,u,v,a,b,c,d,e]$，其生成元为

$$F\,,\ \frac{\partial}{\partial x}F\,,\ \frac{\partial}{\partial y}F\,,\ xw-1\,,\ yz-1\,,$$

Maple 和 Singular 计算 I 的按次数逆字典序 Gr¨obner 基约需一小时，其倒数第二个成员恰好属于 $\mathbb{Q}[\Lambda,u,v,a,b,c,d,e]$。这

本质上就是算法 2.1，并在步骤 4 停止。该多项式有六个因子。前五个因子关于 Λ 的次数较低，

$$\Lambda\,,\quad \Lambda-\big(a\pm(b+d)\pm(c+e)\big)^2\,, \tag{46}$$

以及最后一个 $G(\Lambda)$，是关于 Λ 的四次多项式，在参数中有 843 项且次数为 16，其常数项具有高度结构化的形式，

$$\begin{aligned} 256b^2c^2d^2e^2\Lambda^4 \;+\; 128bcde\Lambda^3(a^2b^2ce \;+\; \cdots) + \;\Lambda^2(\cdots)\;+\;\Lambda(\cdots) \\ +\;\underline{\big((a^2-4(bd+ce))^2-64bcde\big)} \\ \times\Big(a^2((c-e)^2(b-d)^2)+4((b-d)^2-(c-e)^2)(bc-ed)(be-cd)\Big)^2. \end{aligned} \tag{47}$$

下面，我们用 $D_1\cdot D_2^2$ 表示常数项 $G(0)$，其中 D_1 是上面显示式中带下划线的因子。将 $(\lambda-u)$ $(\lambda-v)$ 代入 Λ 的因子 (46)，得到线性因子

$$(\lambda-u)\quad\text{and}\quad(\lambda-v)$$

以及二次因子 (45)。将这一替换代入多项式 $G(\Lambda)$，得到 $H(\lambda)$。二次因子 (45)、线性因子 $(\lambda-u)(\lambda-v)$ 和八次多项式 $H(\lambda)$ 的乘积，给出了临界点方程 (5) 的一般 λ-消元式。

尽管 $H(\lambda)$是可解的（因为 $G(\Lambda)$ 是一个四次多项式），但其复杂性使得我们无法详细研究这一族布洛赫簇的临界点。不过，我们的方法确实给出了一个布洛赫判别式。

定理 6.1。设 Γ 为图 12 中的周期图。多项式

$$\mathrm{BD}_\Gamma \;=\; (u-v)\cdot\mathrm{disc}_\lambda H(\lambda)\cdot D_1\cdot D_2\prod_{\pm,\pm}D_{\pm,\pm}\prod_{\pm,\pm}G(D_{\pm,\pm}^2)\,,$$

其中 $D_{\pm,\,\pm}=a\pm(b+d)\;\pm(c+e)$，是 Γ的布洛赫判别式。

因子 $\mathrm{disc}_\lambda H(\lambda)$ 在 BD_Γ 中是判别多项式；当 $H(\lambda)$ 有重根时，该多项式为零。由于 H 是关于 λ的八次首一多项式，其判别式可写成 $H(\lambda)\;H'(\lambda)$ 的 15×15 Sylvester 矩阵的行列式，而该矩阵的元素是关于 a、b、c、d、e、u、v的多项式。这提供了一种有效计算 $\mathrm{disc}_\lambda H(\lambda)$ 的方法。下面我们将证明定理 6.1。

在数值参数 $(a,\;b,\;c,\;d,\;e,\;u,\;v)$ 处进行的符号计算 $=(2,\;1,\;1,\;2,\;3,\;1,\;0)$ 表明，每个二次因子 (45) 的两个根各对应一个临界点，且这些临界点位于相应的角点 $(\pm1,\;\pm1)$ 上方。每个一次因子对应四个临界点，而 H的八个互异根各对应两个临界点。临界点总数为 32，这正是 (44) 中牛顿多面体的体积，也是临界点数量的一个上界。正如 [9, 15], 中所解释的，这项计算证实了图 12 所示图的谱边缘非退化猜想。它还意味着以下结论：

定理 6.2. 对于一般参数，复布洛赫簇有 32 个非退化临界点。它们在各因子的根之间分布如下。

（1）每个来自二次因子的临界能量对应一个临界点。（2）每个来自一次因子的临界能量对应四个临界点。

（3）每个来自因子 H 的临界能量对应两个临界点 s.

6.1. 二次因子的临界点。与二次因子相对应的临界点分析

$$(\lambda-u)(\lambda-v) \;-\; (a\pm(b+d)\pm(c+e))^2\,,$$

位于相应角点 $(\pm1,\pm1)$ 上方的情形，与 (5.1) 中的分析完全相同，只需将此处的 $\pm c$ 替换为 $\pm(c+e)$。

6.2. 当 $\lambda=u$ 或 $\lambda=v$ 时的临界点。当 $u\neq v$ 时，这两种情形完全相同。设 $\lambda=u\neq v$。图 Γ 会出现两种在 § 5.2 或 5.3 中未曾出现的新现象。若 $b=d$ 且 $c=e$，则费米曲线变为

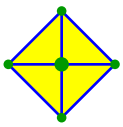
$$\bigl(a+b(x+x^{-1})+c(y+y^{-1})\bigr)^2 \;=\; 0\,, \tag{48}$$

并且，当 (48) 在 $\mathbb{T}^2$中有解时，将出现一维临界点轨迹。这基本上就是 Filonov-Kachkovskiy [18]的例子。我们在图 13 中展示了这样的布洛赫簇，以及其临界点曲线。其参数为 $(a、\ b、\ c、\ d、\ e、\ u、\ v)$ =(5、2、3、2、3、6、0)。注意，多项式 D_2 在 $b=d$ 和 $c=e$处取值为零。这是第一个新现象。

当 $b\neq d$ 或 $c\neq e$ 时，费米曲线的奇点

$$\{(x,y)\in(\mathbb{C}^\times)^2 \mid (a+bx+cy+dx^{-1}+ey^{-1})(a+bx^{-1}+cy^{-1}+dx+ey)=0\} \tag{49}$$

是孤立的。和之前一样，这些点包括两个因子同时为零的点。两个因子具有相同的牛顿多边形



其归一化面积为 4，因此对于一般的 $a、\ b、\ c、\ d、\ e$，将有四个这样的点。

在本文的背景下，我们感兴趣的是刻画在这一意义下并不一般的参数。通过变量消去，我们计算出以下对象的判别式

$$a+bx+cy+dx^{-1}+ey^{-1} \;=\; a+bx^{-1}+cy^{-1}+dx+ey \;=\; 0\,,$$

即，一个多项式 当这些方程具有奇异解时，该多项式为零。结果为

$$D_2\cdot\prod a\pm(b+d)\pm(c+e)\,. \tag{50}$$

这为我们证明定理 6.1 提供了所需的所有工具。

定理 6.1 的证明。假设 λ 消元式有 18 个互异根（视为关于 λ 的多项式）。我们声称，只要 $\mathrm{BD}_\Gamma\neq0$，λ 消元式的每个根 λ^* 都对应定理 6.2 中预期数量的临界点。如果 λ^* 只对应一个临界点，即 λ^* 是某个二次因子的根，显然结论成立。对于 $\lambda^*=u$ 或 $\lambda^*=v$，由 (50) 非零可知，四个临界点互不相同。最后，对于根 $H(\lambda^*)=0$，对应的两个临界点重合，当且仅当它们位于一个角点上。但此时 λ^* 也是某个二次因子的根，这与以下事实矛盾：对每种符号选择，$G((a\pm(b+d)\pm(c+e))^2)\neq0$。

现在假设 λ 消元式没有预期的 18 个互异根，且 $\mathrm{BD}_\Gamma \neq 0$。在这种情况下， λ 消元式的两个二次因子必定有公共根。这是因为 λ 消元式的所有其他判别式和因子的两两结式都整除 BD_Γ。然而，这样的公共根对应于互异临界点的临界能量，而这些临界点的 (x, y) 坐标是不同的角点。因此，由于 $\mathrm{BD}_\Gamma \neq 0$，布洛赫簇有 32 个非退化临界点。□

(49) 中的每个因子都定义了一个曲线 $(\mathbb{C}^\times)^2$，其算术亏格为 1（由牛顿多边形中的内部整点数给出 [2]）。然而，当 A-判别式

$$D_1 = (a^2 - 4bd - 4ce)^2 - 64bcde \tag{51}$$

$(a+bx+cy+dx^{-1}+ey^{-1})(a+bx^{-1}+cy^{-1}+dx+ey)$ 的任一因子的判别式为零时，每个因子都定义了一条具有唯一奇点的有理曲线。这是第二个新现象。该判别式是四次多项式 $G(\Lambda)$ 常数项的一个因子（即（47）中带下划线的项）。因此，当它为零时，两个一次因子的乘积 $(\lambda - u)(\lambda - v)$ 整除 $H(\lambda)$。设 $K(\lambda)$ 是 $H(\lambda)$（一个六次多项式）的另一个因子。我们给出定理 6.2 的一个版本，描述判别式（51）为零时所发生的情况。

定理 6.3. 假设判别式 (51) 为零，但参数在其他方面均为一般情形。则复布洛赫簇有 32 个非退化临界点。它们在各因子的根之间分布如下。

(1) 每个来自二次因子的临界能量对应一个临界点。(2) 每个来自一次因子的临界能量对应六个临界点，其中两个来自费马曲线不可约分支的奇点。(3) 每个来自六次多项式因子 K 的临界能量对应两个临界点。

当参数 a、b、c、d、e 为实数时，(2) 中至多有四个临界点位于实布洛赫簇上。

证明。当 $(a, b, c, d, e, u, v) = (2, 1, 1, 4, 9, 1, 0)$ 时，判别式 (51) 为零，数值计算验证了陈述 (1)–(3) 成立，由此得出关于复布洛赫簇的结论。

对于最后一个断言，请注意，当 a、……、e 为实数时，由下列因子定义的每条曲线

$$(a + bx + cy + dx^{-1} + ey^{-1})(a + bx^{-1} + cy^{-1} + dx + ey)$$

在普通复共轭下保持不变，这意味着其奇点也保持不变，因此是 $(\mathbb{R}^\times)^2$ 中的一个点。由于参数除此之外均为一般参数，这些奇异点不会出现在角点处，因此也不在实布洛赫簇上。□

注记 6.4. 尽管对于一般参数而言，复布洛赫簇有 32 个临界点，但实布洛赫簇通常具有更少的临界点。在第 4 节和第 5 节中，我们分别给出了使实布洛赫簇具有最大数量临界点（分别为 12 个和 24 个）的参数。相比之下，对于此处的图，我们未能找到使其实布洛赫簇上的临界点超过 24 个的参数。我们计算了 150 万组参数的随机选择 $(a, b, c, d, e, u, v) \in \{1, \ldots, 12\}^7$ 所对应的实临界点数量。对于 8 到 24 之间的每个偶数 k，此次搜索都找到了使其实布洛赫簇具有 k 个临界点的参数。对于 $k \in \{10, 14, 18, 22\}$，其中包括奇异

角点上方的临界点，并且 λ-消元式没有 18 个互异根。对于 k 的其他取值， λ-消元式有 18 个互异根。搜索没有找到临界点超过 24 个的实布洛赫簇。这里，8 是由角点临界点给出的下界。在图 13 右侧，我们展示了参数为 (1, 4, 10, 11, 8, 1, 15) 的实布洛赫簇，其临界点数量为观测到的最大值 24。$\diamond$

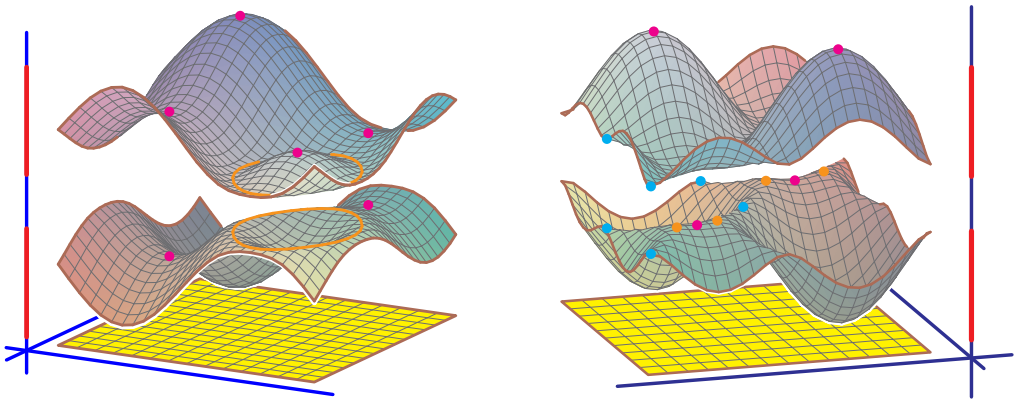


FIGURE 13. 一个具有临界点曲线的布洛赫簇，以及一个具有 24 个临界点的布洛赫簇。

REFERENCES

[1] N. Ashcroft 和 N. Mermin。《固体物理》。Cengage Learning，2022年。[2] H. Baker. 牛顿多边形在代数函数奇点理论中的应用实例。《剑桥哲学学会会刊》，15：第 403 页，1894。[3] Z. Bel-Afia、C. Meroni 和 S. Telen. 切比雪夫簇。《计算数学》，95：2061–2089，2026年。[4] G. Berkolaiko、Y. Canzani、G. Cox 和 J. Marzuola. 周期图色散关系全局极值的局部检验。《纯粹与应用分析》，4(2)：257–286，2022年。[5] G. Berkolaiko 和 P. Kuchment.《量子图导论》，《数学调查与专著》第 186 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013。[6] E. A. Bernal、J. D. Hauenstein、D. Mehta、M. H. Regan 和 T. Tang. 机器学习实判别轨迹。《符号计算杂志》，115：409–426，2023年。[7] D. N. Bernstein. 方程组的根数。《泛函分析及其应用》，9：183–185，1975。[8] W. Decker、G.-M. Greuel、G. Pfister 和 H. Sch¨onemann. SINGULAR 4-1-1 —— 用于多项式计算的计算机代数系统。http://www.singular.uni-kl.de，2018年。[9] N. Do、P. Kuchment 和 F. Sottile. 离散周期算子色散关系的一般性质。《数学物理杂志》，61(10)：103502，19，2020年。[10] M. Faust 和 I. Kachkovskiy. 一般势下离散周期图算子不存在平带，2025年。arXiv/2509.01927。[11] M. Faust 和 W. Liu. 周期图算子中的稀有平带，2025年。arXiv/2503.03632。[12] M. Faust、J. Lopez、S. P. Shipman 和 F. Sottile. 周期算子的环面紧化，2026年。准备中。[13] M. Faust 和 J. Lopez-Garc´ıa. 周期图色散多项式的不可约性。《SIAM 应用代数与几何杂志》，9：83–107，2025年。[14] M. Faust、J. Robinson 和 F. Sottile. 周期图的临界点次数。arXiv/2512.01226，2025年。

[15] M. Faust 和 F. Sottile. 离散周期算子的临界点。《谱理论杂志》，14(1)：1–35，2024年。[16] M. Faust 和 F. Sottile. 通过角点研究谱边缘猜想。arXiv.org/2510.10143，2025年。[17] J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos. 有限程薛定谔算子的布洛赫簇不可约性。《泛函分析杂志》，283(10)，2022年。¨N. Filonov 和 I. Kachkovskiy. 二维周期椭圆算子能带边缘的结构。《数学学报》，221(1)：59–80，2018年。[18] I. M. Gel[19] fand、M. M. Kapranov 和 A. V. Zelevinsky.《判别式、结式与多维行列式》。数学：理论与应用。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1994年。[20] D. R. Grayson 和 M. E. Stillman. Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。[21] H. A. Harrington、D. Mehta、H. M. Byrne 和 J. D. Hauenstein. 通过数值判别式方法分解生物网络的参数空间。载于 J. Gerhard 和 I. Kotsireas 编，《数学教育与研究中的 Maple》，第 114–131 页。Springer International Publishing，2020年。[22] T. Karn、F. Sottile 和 S. Telen. 互反判别式，2026年。准备中。[23] C. Kittel 和 P. McEuen.《固体物理导论》。John Wiley & Sons，2018年。[24] A. G. Kouchnirenko. 牛顿多面体与米尔诺数。《数学发明》，32(1)：1–31，1976年。[25] P. Kuchment.《偏微分方程的弗洛凯理论》，《算子理论：进展与应用》第 60 卷。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，1993年。[26] P. Kuchment. 周期椭圆算子概述。《美国数学会通报（新辑）》，53(3)：343–414，2016年。[27] P. Kuchment 和 B. Vainberg. 受扰周期势薛定谔算子不存在嵌入特征值。《偏微分方程通讯》，25(9–10)：1809–1826，2000年。[28] S. M¨uller、E. Feliu、G. Regensburger、C. Conradi、A. Shiu 和 A. Dickenstein. 广义多项式映射单射性的符号条件及其在化学反应网络和实代数几何中的应用。《计算数学基础》，16(1)：69–97，2016年。[29] Oscar——开源计算机代数研究系统，1.0.0 版，2024年。[30] K. Rose、B. Sturmfels 和 S. Telen.《热带隐式化再探》。载于《计算机代数系统 OSCAR》，第 429–450 页。Springer，Cham，[2025] ©2025年。[31] S. P. Shipman 和 F. Sottile. 周期图算子的代数方面。载于 D. Alpay、F. Colombo 和 I. Sabadini 编，《算子理论》，第 3513–3553 页。Springer，Cham，2026年。[32] Z. Tao 和 M. Yang. 周期薛定谔算子的能带边缘一般位置下孤立且非退化，2026年。arXiv.org/2608.30189。

Margaret H. Regan, Department of Mathematics, Grand Valley State University, Allendale, MI 49424, USA 电子邮件地址：reganmar@gvsu.edu 网址：https://www.margarethregan.com

Frank Sottile, Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, Texas 77843, USA
电子邮件地址：sottile@tamu.edu
网址：https://franksottile.github.io/

Simon Telen, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Inselstrasse 22,04103 Leipzig, Germany电子邮件地址：simon.telen@mis.mpg.de 网址：https://sites.google.com/view/simontelen/home-page