本文已提交至 IEEE，供其考虑是否发表。版权可能在未另行通知的情况下转让，届时此版本可能不再可访问。

arXiv:2611.33026v1 [cs.LG] 24 Nov 2026

基于分数的扩　　散：t-谱域中的超图信号

Zhiyuan Dong、*Carlos Mundo-Levano*、*Daniel L. Lau*、*Gonzalo R. Arce*

金融服务分析研究所，以及特拉华大学电气与计算机工程系；肯塔基大学电气与计算机工程系

摘要

我们提出首个针对固定超图上信号的基于分数的生成模型，该模型在 t-乘积超图信号处理（t-HGSP）的谱域中构建。朴素的张量热半群适定性不佳，因为经过回文对称化后，拉普拉斯张量的谱切片不再是半正定的。通过逐模态进行频率移位即可修正这一问题，从而得到前向 Ornstein–Uhlenbeck 扩散；它在每个（特征模态、切片）对上解耦，并具有闭式边缘分布、精确的分数目标，以及严格各向同性的平稳分布。我们在由此得到的实谱网格上训练一种轻量级的切片条件去噪器。采样时，在数据活跃模态上结合该去噪器的得分，在其他模态上则使用闭式得分；事实证明，这对大规模场景下的稳定性至关重要。闭式余弦形式的观测算子将缺失节点恢复转化为线性高斯引导，并通过稳定化的后验采样实现求解。在最多包含 500 个节点的超图上，我们的模型优于团展开基线，且协方差误差方面的优势从 $2\times$扩大到 $27\times$；其对数据图谱统计特性的匹配优于图基模型本身，并且对于偏离 t-谱轴旋转后的数据，达到有限样本估计下限。在覆盖率保守的情况下，后验采样可将缺失节点归一化均方误差降至 0.28–0.64（经典基线为 0.87–1.1），并使该框架自身的去噪基线最多降低 $3.6\times$。

索引词— 超图信号处理，t-乘积代数结构，基于分数的扩散，逆问题，后验采样

1. 引言

基于得分的扩散模型是生成建模和通过后验分布采样求解逆问题的最先进方法 [1–3]。将其扩展到欧氏网格之外是一个活跃的前沿方向：在图上，针对信号的生成式扩散已通过白噪声前向过程 [4] 以及利用图谱的热驱动正向过程 [5]进行了研究。然而，许多现实中的交互本质上是多元的，例如共同署名、交通走廊和生化反应，用成对图只能粗略地描述。基于 t-乘积张量代数的超图信号处理（t-HGSP） [6] 保留了这种高阶结构：它为超图配备对称张量移位、谱分解，以及与经典图信号处理（GSP）直接类似的采样理论。

本研究填补了剩余的空白：由超图信号驱动的t-谱热半群生成扩散。扩散已被应用于超图结构生成 [7, 8], ，同期研究 [8] 甚至在松弛后的关联矩阵上采用热–OU 前向过程。我们的研究任务（固定超图上的信号）与代数结构（t-乘积、逐切片谱）和这条研究路线相互独立。

我们的贡献包括：**(i)** 给出一个引理，证明朴素的 t-热流是不适定的，并提出按模态进行频率移位的方法加以修正，同时保留谱序（第 4 节）；**(ii)**提出热–OU 前向随机微分方程，使每个（特征模态、离散傅里叶变换切片）彼此解耦，并具有闭式边缘分布和模态匹配噪声，从而得到严格各向同性的平稳分布（第 5 节）；**(iii)** 提出混合解析/神经得分和稳定化似然引导，使大规模采样和后验采样更加稳健，并给出闭式余弦形式的无矩阵观测算子，将恢复与 t-超图信号处理采样理论联系起来（第 6 节）；**(iv)** 开展最多达 $N{=}500$ 个节点的单 GPU 实验：相较于团展开基线，生成性能提升幅度从 $2\times$ 增长至 $27\times$，并达到 N（在离轴数据上达到估计下限）；此外，还实现了经保守校准的缺失节点恢复和去噪（第 7 节）。

2. 相关工作

基于得分的扩散与逆问题。 扩散模型沿前向加噪过程学习得分，并通过反转该过程进行采样 [1, 2, 9]。随后，无需训练即可通过似然引导的反向采样求解线性逆问题 [3, 10]。我们沿用这一机制，但将各向同性前向过程替换为由超图本身生成的过程。

结构化前向过程。 对于图像，热耗散和模糊前向过程 [11, 12] 会沿欧几里得拉普拉斯算子的谱由粗到细地破坏图像。我们的前向过程沿用了这一思路，但作用于本质上不同的算子，因而直接照搬行不通：对称化拉普拉斯算子失去半正定性（引理 1）。这一障碍在欧几里得情形中并不存在，因此第 4 节必须逐模态进行修复。

图和超图上的生成模型。 对于图信号，已有采用白噪声前向过程 [4] 和图谱热前向过程 [5]的扩散生成器。两者都继承了成对拉普拉斯算子，也因此导致多元交互的有损坍缩。超图结构 生成可通过局部展开 [7]实现；与此同时，也有基于松弛关联矩阵的热–OU 前向过程 [8]。上述图信号研究路线以团型矩阵约简 [13] 为基础。据我们所知，尚无先前工作生成超图信号，也没有工作在 t-谱域 [6], 中运行，而逐切片解耦正是我们方法中每个组成部分都具有闭式解的关键。

Z. Dong 任职于特拉华大学金融服务分析研究所，美国特拉华州纽瓦克19716。C. Mundo-Levano 和 G. R. Arce 任职于特拉华大学电气与计算机工程系，美国特拉华州纽瓦克19716。D. L. Lau 任职于肯塔基大学电气与计算机工程系，美国肯塔基州列克星敦40506。本研究部分由美国国家科学基金会通过HAIC合作协议编号2433450、NSF资助项目CIF 2230161、CIF 2617115、IIS 2546201，以及由摩根大通公司共同赞助的金融服务分析研究所资助。

3. 背景：t-HGSP

令 $\mathcal{H}=(\mathcal{V},\ \mathcal{E})$，$|\mathcal{V}|=N$，最大超边基数为 M。按照 [6]，$\mathcal{H}$ 由一个 M 阶邻接张量 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{N\times\cdots\times N}$（$N^M$ 个条目；采用置换归一化权重，并将较小的边填充至相同阶数）、一个度张量 $\mathcal{D}$和一个拉普拉斯算子 $\mathcal{L}=\mathcal{D}-\mathcal{A}$表示；随后将其展平为正面切片（$N\times N\times N^{M-2}$），并通过回文映射 sym(·) 对称化为 $\mathcal{L}_s\in\mathbb{R}^{N\times N\times K}$、$K=2N^{M-2}+1$。以下所有内容均适用于任意 M。为简化记号并适用于所有实验，我们取 M=3，因此 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{N\times N\times N}$和 $K=2N+1$。张量 $\mathcal{A}*\mathcal{B}$ [14] 的 t-乘积是正面切片的循环卷积（$\mathcal{A}*\mathcal{B}$）$^{(j)}=\sum_k \mathcal{A}^{(k)}\mathcal{B}^{((j-k)\bmod K)}$；等价地，在进行模态-3 离散傅里叶变换后，对每个切片执行普通矩阵乘法。我们所有的闭式解都基于这一性质。回文对称性使每个离散傅里叶变换（“帽”）切片 $\hat{}L^{(k)}$ 都是实对称矩阵，因此 $\mathcal{L}_s$ 可通过 K 个独立特征分解 $\hat{}L^{(k)}=V_k\Lambda_kV_k^\top$进行 t-特征分解，而信号张量的 t-HGFT 为 $c_{ik}=[V_k^\top x^{(k)}]_i$ $\hat{}$。

由于谱为实偶谱，切片成对出现 $k\leftrightarrow K-k$：只有 $K_u=(K+1)/2$ 切片是唯一的，而 [6] 的回文信号类具有实数系数，因此自然的状态空间是实网格 $C\in\mathbb{R}^{N\times K_u}$。多通道节点数据 $X\in\mathbb{R}^{N\times L}$ 通过 [6]的（线性）管打包进入这一代数结构。 K带限信号占据每个切片前 k_b 个横向索引。

4. 适定的 t-谱热扩散

一种自然的正向过程是 t-热流 $\mathrm{d}\mathcal{X}_t=-\mathcal{L}_s*\mathcal{X}_t\mathrm{d}t$。然而，该过程是不适定的：

引理 1 (半正定性丧失)。 设 $L_j=D_j-A_j$ 为对称化之前的（功率谱密度）正面切片拉普拉斯算子。经过sym(·)后， $\mathcal{L}_s$ 的每个帽切片都是余弦加权组合$\hat{}L^{(k)}=\sum_j w_k(j)\,L_j$，其权重为 $w_k(j)=\cos(2\pi kj/K)$类型，在 $k\neq 0$时取负值。因此，非直流帽切片不一定是半正定的，且可能带有负特征值（直流切片 k=0 是半正定的），而 t-热半群沿着此类模态发散。

证明。 sym($\cdot$ $\sum_{k=0}^{K-1}L^{(k)}=$) 的 0 零首切片迫使 $\hat{}$，而直流切片 $\hat{}L^{(0)}=\sum_j L_j$ 是半正定且非零的。因此$\sum_{k\neq 0}\hat{}L^{(k)}=-\hat{}L^{(0)}\preceq 0$ 非零，所以某个满足 $k\neq 0$ 的帽形切片具有负特征值。□

因此，我们定义每个模式的t-频率 $f_{iu}=\lambda_{iu}-\min_{i,u}\lambda_{iu}\geq 0$（一个有效的 t-线性平移 $\mathcal{L}_s-\lambda_{\min}\mathcal{I}$，约定 $f=|\lambda|$ 等价地受支持），并将其归一化为 $[0,1]$,，索引位于唯一网格（i, u）上。各模式间的相对破坏速度（即归纳偏置）得以保留，且正性有保证。

5. 热–OU 前向过程的闭式解

在谱坐标下，前向随机微分方程 $\mathrm{d}c=-a_{iu}\,c\mathrm{d}t+g_{iu}\,\mathrm{d}w$ 按模态解耦，速率为 $a_{iu}=\theta f_{iu}+\beta$。我们选择与模态匹配的噪声 $g_{iu}^2=2a_{iu}\sigma^2$:

命题1。 对于每个模式， $c_t\,|\,c_0\sim\mathcal{N}\big(e^{-at}c_0,\ v(t)\big)$ 其中$v(t)$:$=\sigma^2(1-e^{-2at})$，且条件得分为 $-(c_t-e^{-at}c_0)/v(t)$；平稳分布恰为 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$，适用于每个 模式，即在信号空间中各向同性。

算法 1t-谱扩散：训练与引导采样

设置： $\mathcal{L}_s$ →逐切片特征值分解 → V，λ； f=$\lambda-\lambda_{\min}$ 归一化至 $[0,1]$； a=$\theta f+\beta$；矩（μ，ς^2），掩码 $\mathbb{1}_{\text{act}}$，权重 ω来自训练坐标
— 训练（去噪分数匹配）—
对于每个步骤**执行**
  采样 $c_0\sim$数据， $t\sim\mathcal{U}[t_{\min},T]$， $\epsilon\sim\mathcal{N}(0,\ I)$
  $c_t\leftarrow e^{-at}c_0+\sqrt{v(t)}\,\epsilon$； 下降 $\nabla_\phi\,\omega\|\epsilon_\phi(c_t,\ t)-\epsilon\|^2$
结束循环
— 采样（反向随机微分方程、对数网格；有引导时均匀）—
$C\leftarrow\sqrt{v(T)}\,\mathcal{N}(0,\ I)$
对 t 在反向网格上**执行**
  $s\leftarrow$混合得分，公式 (1)
  如果 有引导 **则**
    $\hat{x}_0\ \leftarrow$ 门控 Tweedie估计；将其限制到 3.5σ； $s\ \leftarrow\ s+\nabla$通过公式 (2) 计算 $\log\ p(y|C)$， Γ_t；限制范数
  结束 if
  $C\leftarrow C+[aC+g^2s]\,\Delta t+g\sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,\ I)$
13： **</style}结束 for**
返回 通过公式 (2) 解码 C（所有节点）

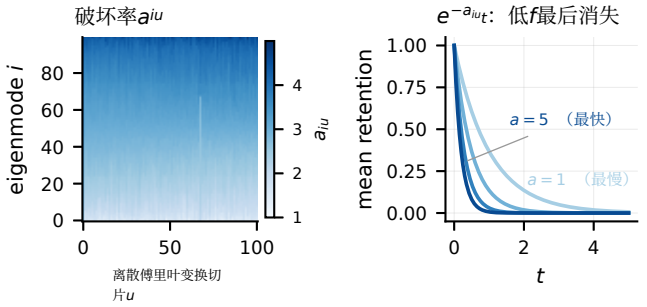

图 1。模式匹配的前向扩散（N=100）。左：特征模态–唯一切片网格上的腐化率 a_{iu}。右：平均保留率 $e^{-a_{iu}t}$；平滑（低 t频率）内容存活时间最长，将超图谱注入生成先验。

证明概要： 乘以因子 e^{at} 后积分；噪声积分的方差由 Itˆo 等距性、$g^2\int_0^t e^{-2a(t-s)}\mathrm{d}s=\frac{g^2}{2a}(1-e^{-2at})$ 得出，而 g^2=$2a\sigma^2$ 使每个模式下括号项的系数均为 σ^2。 □

因此，腐化速度遵循超图谱，低 t-频率最后消失（图 1）；而在 T=5 时，终端分布与平稳高斯分布 ($e^{-aT}\leq e^{-5}$) 的差异呈指数级接近于零，采样从 $\mathcal{N}$(0，$v(T)$) 初始化。我们通过欧拉–丸山模拟验证了这些闭式结果，精度达到浮点精度。完整流程总结于算法 1。

5.1. 训练

去噪器 $\epsilon_\phi(C_t,\ t)$ 是一个小型卷积残差网络，将实数（$N\times K_u$）系数网格视为单通道图像。三个输入对其进行条件调制：扩散时间 t 的正弦嵌入通过 FiLM（学习得到的逐通道缩放与平移）调制每个残差块 [15], ；逐位置速率图 $\log(1+a_{iu})$ 为每个坐标指定其自身的信噪比轨迹；学习得到的位置嵌入则用于区分各个切片。该网络共有 ∼0.6M 个参数，并通过去噪得分进行训练

匹配 [1, 9],

$$\min_{\phi}\ \mathbb{E}_{t\sim\mathcal{U}[t_{\min},T],\,c_0,\,\epsilon}\big[\,\omega\odot\big\|\epsilon_\phi\big(e^{-at}c_0+\sqrt{v(t)}\,\epsilon,\ t\big)-\epsilon\big\|^2\big],$$

因此，网络预测命题 1 的闭式扰动注入的噪声，其精确条件得分使回归目标不受模拟误差影响。最小化器恢复数据分布 [9], 的边缘得分，采样器将其用作 $s_\phi(C,\ t)=-\epsilon_\phi(C,\ t)/\sqrt{v(t)}$。在大规模情况下，有两点很重要。首先，扩散状态 c_0 是生成数据的带限合成系数集合（第 3 节的 $k_b\times K_u$ 非零块），而非节点信号，因为节点空间解码是有损的；对解码后再分析得到的坐标进行扩散，会使数据落在一个稠密且非轴对齐的子空间上，从而令反向动力学不稳定。其次，$k_b\ll N$ 中大多数坐标为空，因此 ω 根据活跃组与空组的大小，对二者进行反向加权。这样，每组在损失中所占比重相同，避免平凡模式挤占携带信号的模式的梯度。“活跃”指数据方差高于最大值的 10^{-4}。在 10^{-3}–10^{-5} 范围内，结果对该阈值不敏感。

6. 采样与后验采样

6.1. 混合解析/神经得分

反向时间积分必须使 ∼97% 空坐标保持收缩，因为对其得分的任何系统性低估都会不断累积为 e^{aT}，导致样本发散（我们观察到在 N=500 处出现了 10^2–10^5 的爆炸）。但在空坐标上，边缘分布是高斯分布，且得分可用闭式形式求得。因此，我们采用

$$s(C,t)=\mathbb{1}_{\text{act}}\cdot s_\phi(C,t)\ +\ (1-\mathbb{1}_{\text{act}})\cdot\Big[-\tfrac{C-e^{-at}\mu}{e^{-2at}\varsigma^2+v(t)}\Big],\quad(1)$$

其中 (μ,ς^2) 是经验训练坐标矩，$\mathbb{1}_{\text{act}}$ 标记数据方差不可忽略的坐标。因此，网络只在数据所在区域受到信任。由于后期反向动力学很僵硬（得分按 $1/v(t)\ \sim\ 1/t$ 缩放，因此显式步长需要 $\Delta t\lesssim 2t$），先验采样采用对数时间网格，在步数相同的情况下，该网格提升了所有生成指标。引导式后验采样则采用均匀网格，因为引导循环需要其较小的早期步长。

6.2. 缺失节点恢复

观察节点子集 S 的通道在谱状态中是线性的。利用切片配对，整个解码链可归结为闭式余弦形式

$$X_{n\ell}=\textstyle\sum_{i,u}V[n,i,u]\,w_{\ell u}\,C_{iu},\quad w_{\ell u}=\frac{2m_u}{K}\cos\!\big(\tfrac{2\pi(\ell+1)u}{K}\big),\quad(2)$$

m_0=1、$m_{u>0}$=2。推导概要：通道读出取逆离散傅里叶变换管的镜像切片对（ℓ+1、$K-\ell-1$），其共轭指数函数相加后得到余弦。随后，实偶谱使 DFT 求和中的 k 和 $K-k$ 项相同，从而将 K 项以重数 m_u 折叠为 K_u。因此，该映射无需矩阵、可微、可分离（超图仅通过 V 参与；w 是固定的 $L\times K_u$ 余弦表），并且为 $O(1/K)$：将节点空间噪声水平与谱先验相耦合的显式衰减。

使用 $y=$掩码$_S(X)+n,\ n\sim\mathcal{N}(0,\ s_y^2I)$，我们采用似然引导执行反向扩散：DPS [3]以及 ΠGDM 风格的方差感知引导 [10] (PGDM)，其中 $\Gamma_t=A\,V_{0|t}A^\top+s_y^2I$ 基于经验先验方差构建。

表 1。无条件生成与留出数据的对比（3 个随机种子下的均值±标准差；N=500 下为 2 个随机种子）。

N	模型覆盖误差↓		t-PSD r↑	g-PSD r↑	最大均值差异↓
100	**t-diff（我们的方法）**	0.74±0.11	0.93±0.01	0.93±0.01	0.0143±0.0009
	团（$1/(\lvert e\rvert-1)$）	1.51±0.02	0.19±0.00	-0.12±0.03	0.1528±0.0047
	团（单位）	1.47±0.02	0.21±0.01	0.00±0.03	0.1476±0.0036
	数据下限（分半）	*0.13*	–	–	–
200	**t-diff（我们的方法）**	0.63±0.37	0.90±0.02	0.91±0.03	0.0134±0.0065
	团（$1/(\lvert e\rvert-1)$）	3.00±0.04	0.24±0.00	0.16±0.02	0.2285±0.0040
	团（单位）	2.86±0.04	0.25±0.00	0.18±0.02	0.2249±0.0042
	数据下限（分半）	*0.12*	–	–	–
500	**t-diff（我们的）**	0.97±0.00	0.82±0.00	0.83±0.00	0.0205±0.0003
	团（$1/\ (\lvert e\rvert-1)\ $）	25.86±0.01	0.18±0.00	-0.03±0.01	0.2567±0.0057
	数据下限（分半）	*0.13*	–	–	–

在模式匹配的调度下，Tweedie 的 $\hat{x}_0=C+v\,s_\phi/e^{-at}$ 会将神经误差放大至 e^{aT} 最高。我们按模式对 $\hat{x}_0$ 进行门控，仅保留 $e^{-at}\ge 10^{-3}$；由于被舍弃模式的精确引导已被证明是 ≈ 0，因此这近似于精确结果。我们还将 $\hat{x}_0$ 限制在先验的 3.5σ 范围内，并将引导范数限制为先验得分范数。对于精确得分，所有稳定器均处于非激活状态：在共轭高斯问题上，采样器能够重现解析后验均值和方差（这是我们的回归测试基准）。

7. 实验

设置。我们将模型称为 *t-diff*。我们使用连通随机超图（成对循环骨架加上 $1.6N$ 个随机三元组），其中 M=3。数据由两个簇的 K带限信号混合而成（$k_b=\max(4,N/25)$），并将其读取为 L=3 个节点通道，其中包含 4096 个训练样本和 512 个留出样本。基线方法是采用团展开（单位权重和 $1/(|e|-1)$权重）及矩阵拉普拉斯特征基，并使用相同的 架构、前向机制、预算（5k 个步骤、指数移动平均）以及相同的 对数网格采样器。唯一不同之处在于谱。在留出的节点空间数据上，我们报告相对协方差误差（以分半数据与数据之间的数值作为有限样本下限）、t 域和图域中数据活跃模态上的对数功率谱密度相关性，以及径向基函数核最大均值差异（MMD）。可复现性：调度计划按照规则设定，而非通过搜索确定（f 归一化为 $[0,1]$, θ=4, β=1, T=5，因此最慢模态会遗忘至 $<$ 1%）。训练使用 AdamW、余弦学习率 $2\cdot10^{-3}$、批大小 64（在 N=500 时为节省内存使用 8），以及带预热的 0.999 指数移动平均。不会针对单元格进行调参，每个单元格都运行相同的命令模板。

生成（表 1）。t-diff 在各个尺度的每项指标上都占据主导地位。三点观察。缩放：基线的协方差误差随 N (1.5 → 3.0 → 25.9) 增长，而 t-diff 始终保持在有限样本下限（0.74 → 0.63 → 0.97）的 5–8× 以内。t 谱表示将数据集中在少数坐标中，且这一优势随 N 增长。图域优势：与直接在该基础上构建的模型（$r\approx 0$）相比，t-diff 能更好地复现数据的图谱特征（$r=0.83$–0。93，图2）。因此，即使对于图域统计量，也需要高阶结构。最大均值差异：始终相差一个数量级。

离轴数据（表 2）。由于混合是在 t-谱基中合成的，我们通过重复实验来排除基对齐这一混淆因素：使用固定的随机等距变换，将混合后的 k_b 系数映射到前 $m=4k_b$ 个特征模态行的张成空间中，因此数据的秩为-k_b，但在 t-谱轴上并不稀疏。t-diff 不受影响。在 N=100 处，它达到估计下限（协方差误差为 0.11，而下限为 0.12，MMD ≈ 0），而基线的不足依然存在。这一优势源于代数结构与交互结构相匹配，而非来自轴对齐。

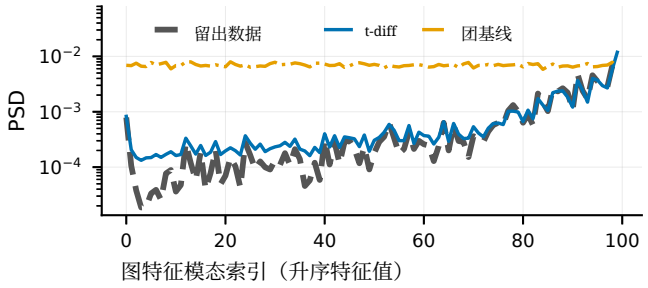

图2。 N=100 处的图域功率谱密度（按通道平均）：t-diff 逐模态追踪留出数据的轮廓模态，而团基线则呈平坦分布，能量还高出一个数量级，尽管它正是在这一基底中训练的。

表 2。非轴对齐变体：系数旋转至前 m 个特征模态行（随机种子 0）。当分布匹配时，无偏 MMD 估计量会在零值附近波动，因此略微为负的值也处于该噪声范围内。

N	模型	cov. err. ↓	t-功率谱密度 r ↑	g-功率谱密度 r ↑	最大均值差异 ↓
100(m=16)	**t-diff（我们的方法）**	0.11	0.95	0.98	-0.0003
	团 ($1/(\lvert e\rvert-1)$)	1.48	0.26	-0.10	0.1745
	数据下限（分半）	*0.12*	–	–	–
200 (m=32)	**t-diff（我们的方法）**	0.88	0.80	0.81	0.0341
	团（$1/\ (\lvert e\rvert-1)$ ）	3.20	0.31	0.05	0.2393
	数据下限（分半）	*0.13*	–	–	–

表 3。缺失节点恢复，隐藏 50% 的节点：隐藏节点上的汇总归一化均方误差（$\sum\|\text{err}\|^2 / \sum\|\text{truth}\|^2$，共进行 8–16 次试验）。

方法	N=100	N=200	N=500
零填充	1.000	1.000	1.000
低通 [6]	0.998	0.999	0.999
定理 2 最小二乘 [6]	1.064	0.927	0.992
t-diff + DPS	0.919	1.088	1.313
t-diff +PGDM	**0.291**	**0.389**	**0.637**

表 4。全观测去噪：NMSE 与噪声观测值（= 1.0）的关系，噪声水平相对于信号均方根。

噪声	方法	N=100	N=200	N=500
50%	低通 [6]	0.37	0.39	0.37
	t-diff + PGDM	**0.10**	**0.18**	**0.35**
100%	低通 [6]	0.44	0.46	0.44
	t-diff + PGDM	**0.18**	**0.23**	**0.38**
200%	低通 [6]	0.73	0.76	0.72
	t-diff + PGDM	**0.31**	**0.33**	**0.47**

逆问题（表 3，图 3）。当噪声为信号 RMS 的 10% 时，PGDM 引导使最佳经典归一化均方误差在 N=100处降低 3.4×，在 N=200处降低 2.4×，并在 N=500处降低 1.6×，且随着隐藏节点从 30% 增加到 70% 而平稳退化。定理2最小二乘法 [6]使用给定的真实带宽，但采样定理所作用的完整谱管（模态3纤维）并未通过节点通道观测暴露出来。这正是学习先验所弥补的差距，二者是互补关系，而非相互竞争。稳定器

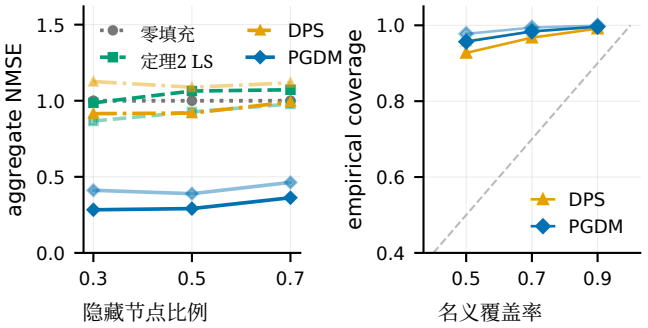

图 3。在 N=100 （饱和）和 N=200 （渐隐）条件下的缺失节点恢复。左：归一化均方误差随隐藏比例变化的曲线；随着观测消失，PGDM 的性能逐步下降（低通与零填充曲线重合，因此省略）。右：后验分布可信区间的经验覆盖率与名义覆盖率对比（两个采样器均基于 t-扩散先验运行）。区间较为保守（位于对角线上方），从不表现得过度自信。

消融实验 （N=200，隐藏 50%）：仅停用 α 门控，就会使 DPS 的归一化均方误差升至 $3{\cdot}10^9$；仅停用范数上限，就会使 PGDM 升至 $6{\cdot}10^2$；仅移除 3.5σ 钳制则没有变化（0.380 对比 0.389），说明钳制提供了纵深防护。对于精确分数，每项防护机制都不会启用；但对于训练得到的分数，它们都至关重要。

去噪（表 4）。当所有节点均被观测，且噪声为信号均方根的 50% 到 200% 时——这是经典谱收缩的自然适用范围——后验采样仍将低通基线的误差降低了 2.0–3.6×，在 $N \le 200$ 时尤为明显，并且在所有尺度和噪声水平下均胜出。结合表 3 可见，该先验在经典恢复有效的场景中表现更优，而在经典方法无能为力时，它是唯一的补救手段。

后验可信区间较为保守：在所有水平上，经验覆盖率均达到或高于名义覆盖率（图 3，右），也就是说，后验分布从不夸大其确定性，但代价是区间过宽。其原因是可以定位的。 Γ_t 使用了混合总体经验先验方差，即使轨迹已经确定属于某个簇，仍将簇间离散度计入不确定性。簇条件方差估计应能将区间收紧至接近名义水平，这留待未来研究。

8. 结论

我们使 t-谱热扩散具有良好定义、可精确求得闭式解，并通过混合得分和门控引导实现大规模稳定性，同时具备实用性。与团扩展基线相比，它生成的超图信号更加忠实，提升幅度最高达 27×，在轴外区域达到估计下限，并提供经保守校准的恢复与去噪结果；所有实验均可在一块消费级GPU上复现。

该方法适用于交互具有多元性且传感器会失效的领域，是一种通用先验：交通走廊，其中缺失环路插补十分常见（我们的初步研究指出，非平稳性和超边学习是其中的挑战）；点云，其中网格面片实际上就是三元超边；以及神经影像学，其中被丢弃的脑电图通道需要可信的误差条。下一步工作包括构建能够显式呈现管状样本的观测模型，以满足 [6], 簇条件引导方差的采样定理要求，并对后验分布进行序贯蒙特卡罗改进。

9. 参考文献

[1] Yang Song、Jascha Sohl-Dickstein、Diederik P. Kingma、Abhishek Kumar、Stefano Ermon 和 Ben Poole，“通过随机微分方程进行基于得分的生成建模”，载于国际学习表征会议，2021年。[2] Jonathan Ho、Ajay Jain 和 Pieter Abbeel，“去噪扩散概率模型”，载于神经信息处理系统进展，2020年，第33卷，第6840–6851页。[3] Hyungjin Chung、Jeongsol Kim、Michael T. McCann、Marc L. Klasky 和 Jong Chul Ye，“用于一般含噪逆问题的扩散后验采样”，载于国际学习表征会议，2023年。[4]Yigit Berkay Uslu、Samar Hadou、Sergio Rozada、Shirin Saeedi Bidokhti 和 Alejandro Ribeiro，“图信号生成扩散模型”，载于*IEEE*声学、语音与信号处理国际会议（*ICASSP*），2026年。[5] Sergio Rozada、Vimal K B、Andrea Cavallo、Antonio G. Marques、Hadi Jamali-Rad 和 Elvin Isufi，“面向信号生成的图感知扩散”，载于*IEEE*声学、语音与信号处理国际会议（*ICASSP*），2026年，第461–465页。[6] Karelia Pena-Pena、Daniel L. Lau 和 Gonzalo R. Arce，“t-HGSP：使用 t-积张量分解的超图信号处理”，*IEEE*网络信号与信息处理汇刊，第9卷，第329–345页，2023年。[7] Dorian Gailhard、Enzo Tartaglione、Lirida Naviner 和 Jhony H. Giraldo，“HYGENE：一种基于扩散的超图生成方法”，载于*AAAI*人工智能会议论文集，2025年，第39卷。[8] Christopher Nemeth，“通过结构化随机扩散进行超图生成”，arXiv:2605.05024，2026年。[9] Pascal Vincent，“得分匹配与去噪自编码器之间的联系”，*Neural Computation*，第23卷，第7期，第1661–1674页，2011年。[10]Jiaming Song、Arash Vahdat、Morteza Mardani 和 Jan Kautz，“用于逆问题的伪逆引导扩散模型”，载于国际学习表征会议，2023年。[11] Severi Rissanen、Markus Heinonen 和 Arno Solin，“利用逆热耗散进行生成建模”，载于国际学习表征会议，2023年。[12] Emiel Hoogeboom 和 Tim Salimans，“模糊扩散模型”，载于国际学习表征会议，2023年。[13] Dengyong Zhou、Jiayuan Huang 和 Bernhard Sch¨olkopf，“利用超图学习：聚类、分类与嵌入”，载于神经信息处理系统进展，2006年，第19卷，第1601–1608页。[14] Misha E. Kilmer 和 Carla D. Martin，“三阶张量的因子分解策略”，*Linear Algebra and its Applications*，第435卷，第3期，第641–658页，2011年。[15] Ethan Perez、Florian Strub、Harm de Vries、Vincent Dumoulin 和 Aaron Courville，“FiLM：具有通用条件层的视觉推理”，载于*AAAI*人工智能会议论文集，2018年。