arXiv:2611.33043v1 [math.MG] 24 Nov 2026

几何泛函的对数 Brunn–Minkowski 不等式与对数 Minkowski 问题的统一方法

Yude Liu[1] Xinbao Lu[2] Qiang Sun[3]

[1]复旦大学数学科学学院，中国上海，200433[2]同济大学数学科学学院、智能计算与应用重点实验室（同济大学），教育部，同济大学，中国上海，200092[3]西安交通大学数学与统计学院，中国西安，710049

摘要 我们为几何泛函建立了两条一般性原理：一条用于证明对数 Brunn–Minkowski 不等式，另一条用于求解相应的对数 Minkowski 问题。对于关于原点对称的凸体，我们证明了关于第一狄利克雷特征值、谱 ζ 函数、扭转刚度和弦积分的对数 Brunn–Minkowski 不等式，并给出了等号成立的条件。对于每个泛函，我们给出相应的对数 Minkowski 问题存在关于原点对称解的充要条件（针对偶测度），并证明了解的唯一性。

2020年数学主题分类： 52A39,52A40,35P15.

关键词： Brunn–Minkowski不等式，Minkowski问题，第一Dirichlet特征值，谱ζ函数，扭转刚度，弦积分。

1. 引言

本文研究的背景是 n维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$， $n \geqslant 2$。 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体是具有非空内部的紧凸集。分别用 $\mathcal{K}^n$、 $\mathcal{K}_o^n$和 $\mathcal{K}_e^n$表示凸体、内部包含原点的凸体以及关于原点对称的凸体的类。

凸体的 Brunn–Minkowski 理论有两个核心主题：等周问题和明可夫斯基问题。经典等周不等式在 Brunn–Minkowski不等式中得到了深远的推广；该不等式是凸几何的基石，将两个基本概念联系起来：向量加法与体积。它断言，对于

电子邮箱：1. liuyude@fudan.edu.cn；2. xinbaolu@tongji.edu.cn；3. sunqiang@fudan.edu.cn。
第一作者的研究得到中国博士后科学基金会第2025M773080号资助。第二作者的研究得到国家自然科学基金委员会第12501078号资助。第三作者的研究得到中国博士后科学基金会第2025M783084号资助，以及中国国家博士后
创新人才计划，编号：BX20250071。

K， $L\in\mathcal{K}^n$ 和 $0<\theta<1$,

$$|(1-\theta)K+\theta L|^{\frac{1}{n}}\geqslant(1-\theta)|K|^{\frac{1}{n}}+\theta|L|^{\frac{1}{n}},$$

当且仅当 K 和 L 是位似的时，等号成立。这里， $|K|$ 表示 K的 n维体积（即勒贝格测度）。根据齐次性，Brunn–Minkowski不等式等价于 $|(1-\theta)K+\theta L|\geqslant|K|^{1-\theta}|L|^{\theta}$。

2012年，B¨or¨oczky–Lutwak–Yang–Zhang [13] 提出了对数*Brunn–Minkowski*不等式猜想，该猜想指出，对于 K， $L\in\mathcal{K}_e^n$ 以及 $0<\theta<1$,

$$|K^{1-\theta}L^{\theta}|\geqslant|K|^{1-\theta}|L|^{\theta},$$

其中， $K^{1-\theta}L^{\theta}$ 是 K 和 L的对数 Minkowski 组合，定义为

$$K^{1-\theta}L^{\theta}=\{x\in\mathbb{R}^n:x\cdot u\leqslant h_K(u)^{1-\theta}h_L(u)^{\theta}\text{ for }u\in\mathbb{S}^{n-1}\}.$$

这里， $h_K(u)=\max\{x\cdot u:\ x\in K\}$ 是 K的支撑函数。将算术–几何平均不等式应用于 h_K 和 h_L ，得到 $K^{1-\theta}L^{\theta}\subseteq(1-\theta)K+\theta L$。因此，对于关于原点对称体，对数不等式比经典不等式更强。

B¨or¨oczky–Lutwak–Yang–Zhang [13]本人解决了平面情形。Saroglou [75]证明了无条件情形。随后，他证明了体积的对数 Brunn–Minkowski 不等式蕴含任意偶对数凹测度的相同不等式 [76,定理 3.1]。B¨or¨oczky 和 Kalantzopoulos [11]研究了具有 n 独立超平面对称性的凸体。Van Handel [39]证明了对数 Brunn–Minkowski 不等式的局部形式对分 zonotope 成立。Chen、Huang、Li 和 Liu [19] 证明了当 $p<1$ 充分接近 1 时，关于原点对称的凸体的 L_p-Brunn–Minkowski 不等式成立，并证明了 $0\leqslant p<1$ 时局部与整体表述的等价性。Putterman [70] 给出了这一等价性的另一种证明。Stancu [80] 提出了对数 Minkowski 不等式的一种中心仿射流方法。关于进一步的发展，参见 [7, 26, 41, 45, 48, 49, 50, 51, 52, 60, 72, 84, 85] 以及 B¨or¨oczky [6] 的综述。

就在最近，OpenAI 的一篇预印本 [66]给出了所有维度中关于原点对称的凸体的对数 Brunn–Minkowski 不等式的证明。有关该证明的讨论，请参见 Livshyts 的讲义 [59]。Liu–Sun–Xiong [58] 将该不等式推广到了质心位于原点的凸体，并刻画了等号成立的情形。

布伦-明可夫斯基理论的另一个核心主题——明可夫斯基问题，旨在刻画由凸体生成的几何测度。对表面积测度的刻画被称为经典明可夫斯基问题。从分析的角度来看，表面积测度 S_K 是体积关于明可夫斯基加法的微分：对于 K， $L\in\mathcal{K}^n$,

$$\frac{d}{dt}|K+tL|\Big|_{t=0^+}=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_L\,dS_K.$$

对经典明可夫斯基问题的研究历史悠久，并产生了一系列影响深远的成果。例如，参见 [2, 16, 17, 22, 33, 55, 64, 65, 68]。

锥体积测度的闵可夫斯基问题称为对数闵可夫斯基问题。对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$，其锥体积测度 V_K 是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$上的有限博雷尔测度，对博雷尔 $\omega \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ 定义为

$$V_K(\omega) = \frac{1}{n} \int_\omega h_K(u)\, dS_K(u).$$

从几何角度看， $V_K(\omega)$是从原点连接到 K 的边界点、且其唯一外单位法向量位于 ω中的线段所扫过的体积。从解析角度看， V_K 是对数 Minkowski 组合 [13]下体积的微分：对于 K， $L \in \mathcal{K}_o^n$，

$$\frac{d}{dt}\left|K^{1-t}L^t\right|\Big|_{t=0^+} = n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K}\, dV_K.$$

2013 年，B¨or¨oczky–Lutwak–Yang–Zhang [14] 提出了著名的子空间集中条件，并证明该条件是保证偶对数闵可夫斯基问题存在解的充分且必要条件。若定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的非零有限博雷尔测度 μ 满足以下条件，则称其满足该条件：

$$\frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi)}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} \leqslant \frac{\dim \xi}{n}$$

对于 $\mathbb{R}^n$的每个真非零子空间 ξ，以及当某个 ξ取等号时，存在一个与 ξ 互补的子空间 ξ'，使得 μ 集中在 $\mathbb{S}^{n-1} \cap (\xi \cup \xi')$上。关于锥体积测度的更多结果，参见 [9, 10, 40, 42, 57, 61, 82, 83]；关于对数闵可夫斯基问题，参见 [8, 20, 21, 23, 56, 79, 81, 86]；另请参阅综述 [6, 43]。

Brunn–Minkowski不等式的适用范围不仅限于体积，还可推广到其他几何泛函。Brascamp 和 Lieb [15] 以及 Borell [5] 分别证明了关于第一狄利克雷特征值和扭转刚度的不等式。Colesanti [24]刻画了这两个不等式取等号的情形。对于牛顿容量，Borell [4] 证明了相应的不等式，Caffarelli、Jerison 和 Lieb [18]刻画了等号成立的情形；Colesanti 和 Salani [28]将这两项结果推广到了 $1 < p < n$ 的 p-容量。其他例子还包括 Monge–Amp`ere 特征值 [73]以及一类全非线性齐次椭圆算子的主特征值 [29]。

与这些泛函相关的Minkowski 问题也得到了研究。Jerison证明了与第一狄利克雷特征值[47, 定理7.4]和静电容量 [46]相关的Minkowski 问题的存在性。Colesanti等人 [27]研究了 p-容量，Akman等人 [1] 则考虑了更广泛的一类非线性容量。Colesanti和 Fimiani [25] 解决了扭转刚度问题，其平移意义下的唯一性由相关的Brunn–Minkowski不等式及其等号情形推出。Lutwak,

Xi、Yang和Zhang [63, 定理1.1和1.2]解决了 $q>0$的弦闵可夫斯基问题的存在性部分。对于 $1\leqslant q\leqslant n+1$，他们还给出了一个充分条件，使偶测度成为关于原点对称凸体的第 q 个锥弦测度。

本文研究四种几何泛函的对数布伦-闵可夫斯基不等式和对数明可夫斯基问题。对于凸体 K，令$0<\lambda_1(K)\leqslant\lambda_2(K)\leqslant\cdots$为 K内部 $-\Delta$ 的狄利克雷特征值，按重数计。前两个泛函是第一狄利克雷特征值 $\lambda_1(K)$和谱ζ函数

$$\zeta_\sigma(K)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(K)^{-\sigma}$$

对应于$\sigma->\frac{n}{2}$。第三个是扭转刚度，定义为

$$\tau(K)=\int_K u_K\,dx,$$

其中，u_K 满足 $-\Delta u_K=1$，定义在 K 内部，且边界值为零。最后一个是弦积分，对 $q>-1$ 定义为

$$I_q(K)=\int_{K\cap\ell\neq\varnothing}|K\cap\ell|^q\,d\ell,$$

其中，$|K\cap\ell|$ 是弦长，$d\ell$ 是 $\mathbb{R}^n$中无向直线上的不变测度。

这四种泛函的对数变分产生相应的锥测度：对于 K，$L\in\mathcal{K}_o^n$，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\lambda_1(K^{1-t}L^t)\Big|_{t=0^+}&=-\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\log\frac{h_L}{h_K}\,d\lambda_1(K,u),\\
\frac{d}{dt}\zeta_\sigma(K^{1-t}L^t)\Big|_{t=0^+}&=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\log\frac{h_L}{h_K}\,d\zeta_\sigma(K,u),\\
\frac{d}{dt}\tau(K^{1-t}L^t)\Big|_{t=0^+}&=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\log\frac{h_L}{h_K}\,d\tau(K,u),\\
\frac{d}{dt}I_q(K^{1-t}L^t)\Big|_{t=0^+}&=(n+q-1)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\log\frac{h_L}{h_K}\,dG_q(K,u).
\end{aligned}$$

对于 λ_1 和 τ，这些恒等式分别由 Jerison 的变分公式 [47, 定理 7。5] 以及 Colesanti和 Fimiani 的变分公式 [25, 推论 4。2], 得到。关于I_q 的公式是 Lutwak、Xi、Yang 和 Zhang 的对数变分公式[63,(5.11)]的特例。我们将在第 ζ_σ 6.2节推导 ζ_σ 的公式。

我们的主要结果如下。首先，我们为几何泛函证明以下一般性原理。记 $K^m=K\times\cdots\times K$ 为 K 的 m 重笛卡尔积。

定理 1.1。设 $\beta \in \mathbb{R}$、$m_j \in \mathbb{N}_+$ 和 $\psi_j : \mathbb{R}^{nm_j} \to (-\infty, +\infty]$ 为 $j \in \mathbb{N}_+$ 上的偶凸函数。假设对于 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 和 $t > 0$,

$$H_K(t) := t^\beta \lim_{j\to\infty} \int_{(K/\sqrt{t})^{m_j}} e^{-\psi_j(x)}\, dx \in (0, \infty).$$

(i) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$。若 $\mathcal{J}_\alpha(K) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} H_K(t)\, dt < \infty$ 对每个 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 均成立，则对于 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$ 和 $0 < \theta < 1$,

$$\mathcal{J}_\alpha\big(K^{1-\theta} L^\theta\big) \geqslant \mathcal{J}_\alpha(K)^{1-\theta} \mathcal{J}_\alpha(L)^\theta,$$

当且仅当存在 r、$s > 0$ 使得 $H_L(rt) = sH_K(t)$ 以及 $H_{K^{1-\theta}L^\theta}(r^\theta t) = s^\theta H_K(t)$ 对 $t > 0$ 成立时，等号成立。

(ii) 若 $\Lambda(K) := -\lim_{t\to\infty} t^{-1}$ 对数 $H_K(t) \in (0, \infty)$ 对每个 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 均成立，则对于 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$ 和 $0 < \theta < 1$,

$$\Lambda\big(K^{1-\theta} L^\theta\big) \leqslant \Lambda(K)^{1-\theta} \Lambda(L)^\theta.$$

将定理 1.1 应用于不同的 H_K，我们证明下面四个对数 Brunn–Minkowski 不等式。具体而言，

$$\begin{aligned}
H_K(t) = \sum_{j=1}^\infty e^{-t\lambda_j(K)} \qquad &\Longrightarrow \quad \Lambda(K) = \lambda_1(K),\ \mathcal{J}_\sigma(K) = \Gamma(\sigma)\zeta_\sigma(K),\\
H_K(t) = \int_{K^2} k_t^K(x,y)\, dx\, dy \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{J}_1(K) = \tau(K),\\
H_K(t) = \int_{K^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dx\, dy \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{J}_{\frac{q-n-1}{2}}(K) = c_{n,q} I_q(K).
\end{aligned}$$

其中，k_t^K 是定义在 $\operatorname{int} K$ 上的狄利克雷热核，而 $c_{n,\,q} > 0$ 仅取决于 n 和 q。

定理 1.2。设 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$、$0 < \theta < 1$、$\sigma > \frac{n}{2}$ 和 $1 < q < n+1$。那么

$$\begin{aligned}
\lambda_1(K^{1-\theta} L^\theta) &\leqslant \lambda_1(K)^{1-\theta} \lambda_1(L)^\theta,\\
\zeta_\sigma(K^{1-\theta} L^\theta) &\geqslant \zeta_\sigma(K)^{1-\theta} \zeta_\sigma(L)^\theta,\\
\tau(K^{1-\theta} L^\theta) &\geqslant \tau(K)^{1-\theta} \tau(L)^\theta,\\
I_q(K^{1-\theta} L^\theta) &\geqslant I_q(K)^{1-\theta} I_q(L)^\theta.
\end{aligned}$$

在每种情形下，当且仅当 K 和 L 是伸缩体时，等号成立。

我们还求 解了偶测度对应的对数 Minkowski 问题 .

定理 1.3。设 μ 是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的非零有限偶 *Borel* 测度。在下述不等式中，ξ 遍历 $\mathbb{R}^n$ 的所有非零真子空间。

(i) 存在 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 使得 $\lambda_1(K, \cdot) = \mu$ 当且仅当

$$\frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi)}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} < 1.$$

(ii) 对于 $\sigma > -\frac{n}{2}$，存在 $K \in \mathcal{K}_e^n$，使得 $\zeta_\sigma(K, \cdot) = \mu$ 当且仅当

$$\frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi)}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} < 1 - \frac{n - \dim \xi}{2\sigma}.$$

(iii) 存在 $K \in \mathcal{K}_e^n$，使得 $\tau(K, \cdot) = \mu$ 当且仅当

$$\frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi)}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} < \frac{\dim \xi + 2}{n + 2}.$$

(iv) 对于 $1 < q < n + 1$，存在 $K \in \mathcal{K}_e^n$，使得 $G_q(K, \cdot) = \mu$ 当且仅当

$$\frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi)}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} < \frac{\dim \xi + \min\{\dim \xi, q - 1\}}{n + q - 1}.$$

此外，解在 $\mathcal{K}_e^n$ 中唯一。

对于关于原点对称的凸体，定理 1.2 强化了相应的 Brunn– Minkowski 不等式，因为 $K^{1-\theta} L^\theta \subseteq (1-\theta)K + \theta L$ 且这四个泛函关于包含关系单调，并且是齐次的。

在定理 1.2 的弦积分不等式中令 q 趋于 1 或 $n + 1$，即可得到体积的对数 Brunn–Minkowski 不等式。事实上，$I_q(K)$ 关于q连续，其中 $I_1(K) = |K|$ 且 $I_{n+1}(K) = \frac{n+1}{\omega_n}|K|^2$，其中 ω_n 是欧几里得单位球的体积。

定理1.2 和1.3 （iii）回答了 Crasta 和 Fragal 的两个问题`a [30, （11）–（12）],其表明，在 $\mathcal{K}_e^n$的情形下，扭转刚度满足对数 Brunn–Minkowski 不等式，并且锥扭转测度能够唯一确定凸体。

定理1.3 中的不等式对于每个固定的 ξ 都是尖锐的（见注6.5）。对于第一狄利克雷特征值和扭转刚度，Langharst 和 Ulivelli [53]证明了满足更强条件 $\frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1}\cap\xi)}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} < \frac{\xi\text{维数}}{n\text{维数}}$ 的偶测度的存在性。对于弦积分，Lutwak、Xi、Yang 和 Zhang [63] 证明，条件（iv）对于偶测度而言是充分的。Guo、Xi 和 Zhao [38] 去除了偶性假设。对于 $q \in \{2, \dots, n\}$，Lutwak、Xi、Yang 和 Zhang 得到了一个必要的上界，并证明当维数为 $\xi < q - 1$时该上界是尖锐的。第（iv）部分表明，对于 $1 < q < n+1$，该条件对于关于原点对称的解也是必要的，并且该解是唯一的。

本文组织如下。在第2节中，我们汇集有关凸体、四个几何泛函和热核的一些基本事实。在第1.1 和1.2 节中，我们证明定理3中的不等式，并在第4节中刻画等号成立的情形。在第5 节中，我们为对数 Minkowski 问题建立变分原理，并在第6 节中应用该原理证明定理1.3。

2. 预备知识

2.1. 凸体与 Wulff 形

背景资料请参见 Gardner [34], Hug–Weil [44], 和 Schneider [78]。

通常， $x \cdot y$ 表示 x 与 y的标准内积， $|x|$ 表示 x 在 $\mathbb{R}^n$中的标准欧几里得范数。记 $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ 为n在 $\mathbb{R}^n$中的欧几里得单位球 B^n的边界。 B^n的体积为 $\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$。

对于 $\mathbb{R}^n$中的线性子空间 ξ，令 $\xi^\perp$ 表示其正交补，并令 $P_\xi : \mathbb{R}^n \to \xi$表示到 ξ上的正交投影。记 $B_\xi = \xi \cap B^n$。

对于 $K \in \mathcal{K}^n$，其支撑函数 $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h_K(x) = \max\{x \cdot y : y \in K\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathcal{K}^n$ 配备有*Hausdorff* 度量 δ_H，定义为

$$\delta_H(K, L) = \max_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_K(u) - h_L(u)|, \qquad K, L \in \mathcal{K}^n.$$

表面积测度 S_K 是 $K \in \mathcal{K}^n$ 上的有限博雷尔测度，对于 $\mathbb{S}^{n-1}$中的 Borel 集 $\omega \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$，定义为 $S_K(\omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\nu_K^{-1}(\omega))$，其中 $\mathcal{H}^{n-1}$ 是 $(n-1)$ 维 Hausdorff 测度，而 $\nu_K : \partial' K \to \mathbb{S}^{n-1}$ 是 K的高斯映射，定义在 $\partial' K$上； $\partial' K$是 ∂K 中具有唯一外单位法向量的点集。回顾 $\mathcal{H}^{n-1}(\partial K \setminus \partial' K) = 0$。详见例如 [78,第 84] 页。

记 $C(\mathbb{S}^{n-1})$为 $\mathbb{S}^{n-1}$上连续实值函数的空间，记$C_e(\mathbb{S}^{n-1})$为其偶函数子空间。

对于正的 $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$，由 f 确定的 Wulff 形（或 Aleksandrov 体）为

$$[f] = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leqslant f(u) \text{ for } u \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

于是 $h_{[f]} \leqslant f$在 $\mathbb{S}^{n-1}$上，并且 $[h_K] = K$对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$成立。

引理 2.1。若 $\mathcal{F}$： $\mathcal{K}_o^n \to (0, \infty)$ 关于包含关系单调且一次齐次，则对于正的 f、$g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$，

$$\min_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f}{g} \leqslant \frac{\mathcal{F}([f])}{\mathcal{F}([g])} \leqslant \max_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f}{g}. \tag{2.1}$$

特别地， $\mathcal{F}$在 $\mathcal{K}_o^n$上连续。如果 $\mathcal{F}$： $\mathcal{K}_e^n \to (0, \infty)$ 满足相同的假设，那么 (2.1) 对于正的 f、 $g \in C_e(\mathbb{S}^{n-1})$以及 $\mathcal{F}$在 $\mathcal{K}_e^n$上连续。

证明。记 $m =$最小值$_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f}{g}$和 $M =$最大值$_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f}{g}$。于是 $mg \leqslant f \leqslant Mg$。根据 Wulff 形的定义，有 $m[g] \subseteq [f] \subseteq M[g]$。由 $\mathcal{F}$的单调性和齐次性，得到（2.1）。

若 $K_j \to K$ 在 $\mathcal{K}_o^n$中，则 $\frac{h_{K_j}}{h_K} \to 1$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$上一致地成立。取 $f = h_{K_j}$ 和 $g = h_K$ 于（2.1）中，可得 $\mathcal{F}(K_j) \to \mathcal{F}(K)$。

对于偶的 f 和 g，Wulff 形 $[f]$ 和 $[g]$ 关于原点对称，因此在 $\mathcal{K}_e^n$上同样的证明仍然适用。□

对于 K，$L \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $0 < \theta < 1$，其对数 Minkowski 组合定义为 $K^{1-\theta}L^\theta = [h_K^{1-\theta} h_L^\theta]$。根据算术-几何平均不等式，

$$K^{1-\theta}L^\theta \subseteq [(1-\theta)h_K + \theta h_L] = (1-\theta)K + \theta L.$$

对于 $m \in \mathbb{N}_+$，令 $K^m = K \times \cdots \times K$ 表示 m 重笛卡尔积。

引理 2.2. 对于 K、$L \in \mathcal{K}_o^n$、$m \in \mathbb{N}_+$和 $0 < \theta < 1$,

$$(K^m)^{1-\theta}(L^m)^\theta = (K^{1-\theta}L^\theta)^m.$$

证明。首先，注意到 K^m 的支撑函数为 $h_{K^m}(u_1, \ldots\ldots, u_m) = \sum_{i=1}^m h_K(u_i)$。

假设 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_m) \in (K^m)^{1-\theta}(L^m)^\theta$。对于 $i = 1, \ldots\ldots, m$和 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$，取 $u = (0, \ldots\ldots, 0, v, 0, \ldots\ldots, 0)$，其中 v位于第 i 个位置。根据对数 Minkowski 组合的定义，

$$x_i \cdot v = x \cdot u \leqslant h_{K^m}(u)^{1-\theta} h_{L^m}(u)^\theta = h_K(v)^{1-\theta} h_L(v)^\theta.$$

因此 $x \in (K^{1-\theta}L^\theta)^m$。由此可得 $(K^m)^{1-\theta}(L^m)^\theta \subseteq (K^{1-\theta}L^\theta)^m$。

反过来，假设 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_m) \in (K^{1-\theta}L^\theta)^m$。根据定义以及支撑函数的正齐次性，对于 $v \in \mathbb{R}^n$ 和 $i = 1, \ldots\ldots, m$，有 $x_i \cdot v \leqslant h_K(v)^{1-\theta} h_L(v)^\theta$。因此，对于 $u = (u_1, \ldots\ldots, u_m) \in \mathbb{S}^{nm-1}$，由赫尔德不等式可得

$$\begin{aligned} x \cdot u = \sum_{i=1}^m x_i \cdot u_i &\leqslant \sum_{i=1}^m h_K(u_i)^{1-\theta} h_L(u_i)^\theta \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^m h_K(u_i)\Big)^{1-\theta} \Big(\sum_{i=1}^m h_L(u_i)\Big)^\theta = h_{K^m}(u)^{1-\theta} h_{L^m}(u)^\theta. \end{aligned}$$

因此 $x \in (K^m)^{1-\theta}(L^m)^\theta$。由此可得 $(K^{1-\theta}L^\theta)^m \subseteq (K^m)^{1-\theta}(L^m)^\theta$。 □

根据 Saroglou [76, 定理 3。1], 体积的对数 Brunn–Minkowski 不等式蕴含了如下关于偶对数凹函数的不等式。

引理 2.3。如果 $\psi: \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ 是偶且凸的，则对于 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$和 $0 < \theta < 1$,

$$\int_{K^{1-\theta}L^\theta} e^{-\psi(x)}\, dx \geqslant \Big(\int_K e^{-\psi(x)}\, dx\Big)^{1-\theta} \Big(\int_L e^{-\psi(x)}\, dx\Big)^\theta.$$

注意，引理 2.3 中的积分是有限的，因为偶性和凸性意味着 $e^{-\psi(x)} \leqslant e^{-\psi(0)} < \infty$。

我们还 需要以下一维 Pr´ekopa–Leindler 不等式 [54, 69]。

引理 2 .4. 设 f、g、h 是定义在 $\mathbb{R}$ 和 $0<\theta<1$ 上的非负可积函数。若

$$h((1-\theta)x+\theta y)\geqslant f(x)^{1-\theta}g(y)^{\theta}$$

对于 $x,y\in\mathbb{R}$，则

$$\int_{\mathbb{R}}h(x)\,dx\geqslant\Big(\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx\Big)^{1-\theta}\Big(\int_{\mathbb{R}}g(x)\,dx\Big)^{\theta}.$$

2.2. 几何泛函

对于 $K\in\mathcal{K}^n$，令 $0<\lambda_1(K)\leqslant\lambda_2(K)\leqslant\cdots$ 表示 $-\Delta$ 在 int K 上的特征值，具有零狄利克雷边界值，并按重数计数。对于 K，$L\in\mathcal{K}^n$ 满足 $K\subseteq L$,$j\geqslant 1$ 和 $r>0$,

$$\lambda_j(K)\geqslant\lambda_j(L),\qquad \lambda_j(rK)=r^{-2}\lambda_j(K). \tag{2.2}$$

例如，参见 [36,第 8 节。12]。

对于 $\sigma>\frac{n}{2}$，谱ζ函数为 $\zeta_\sigma(K)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(K)^{-\sigma}$。若 $K\subseteq L$，则$\zeta_\sigma(K)\leqslant\zeta_\sigma(L)$ 根据 (2.2)。该级数由 (3.19) 收敛。

扭转刚度为 $\tau(K)=\int_K u_K\,dx$，其中 $u_K\in H_0^1(\text{int } K)$ 是满足 $-\Delta u_K=1$ in int K 的唯一弱解。其变分刻画意味着，对于$K\subseteq L$，有 $\tau(K)\leqslant\tau(L)$。由于对于 $r>0$，$u_{rK}(rx)=r^2u_K(x)$，因此有 $\tau(rK)=r^{n+2}\tau(K)$。例如，参见 [25,第 2] 节。

令 $\mathscr{L}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中无向直线构成的仿射格拉斯曼流形。对于 $K\in\mathcal{K}^n$ 和 $q>-1$,弦积分为

$$I_q(K)=\int_{K\cap\ell\neq\varnothing}|K\cap\ell|^q\,d\ell,$$

其中 $|K\cap\ell|$ 表示弦长，$d\ell$ 是经归一化的不变测度，使得 $I_1(B^n)=\omega_n$。对于几乎每条与 K 相交的直线 ℓ，$|K\cap\ell|>0$。根据引理 3.1]，积分 $I_q(K)$ 对于 $q>-1$ [63, 是有限的。

如果 $K\subseteq L$，那么对于 $q>0$，$I_q(K)\leqslant I_q(L)$。对于 $q\in[a,b]\subseteq(-1,\infty)$ 和 $r=|K\cap\ell|>0$，我们有 $r^q\leqslant r^a+r^b$。由于 $I_a(K)+I_b(K)<\infty$，控制收敛表明，对于固定的 K，$q\mapsto I_q(K)$ 在 $(-1,\infty)$ 上连续。

克罗夫顿公式和庞加莱–哈德维格公式 [71, 74]给出

$$I_1(K)=|K|,\qquad I_{n+1}(K)=\frac{n+1}{\omega_n}|K|^2.$$

对于 $1<q<n+1$，弦积分有经典表示

$$I_q(K)=\frac{q(q-1)}{n\omega_n}E_{n+1-q}(K), \tag{2.3}$$

其中，$E_a(K)=\int_{K^2}|x-y|^{-a}\,dx\,dy$ 是 K 关于 $0<a<n$的里斯能量。参见 [71] 和[74, 第 238 页，(14.25)]。

对于 $\sigma_- > \frac{n}{2}$ 和 $1 < q < n+1$，归一化泛函 $\lambda_1^{-\frac{1}{2}}$、$\zeta_\sigma^{\frac{1}{2\sigma}}$、$\tau^{\frac{1}{n+2}}$ 和 $I_q^{\frac{1}{n+q-1}}$ 均为正、关于包含关系单调，且为一次齐次。它们在 $\mathcal{K}_o^n$ 上的连续性可由引理 2.1 推出。

2.3. 热核

欧几里得热核为

$$p_t(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4t}\Big), \qquad t>0,\ x,y\in\mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

对于 $K\in\mathcal{K}^n$，设 k_t^K、$t>0$ 表示方程 $\partial_t u = \Delta u$ 在 $\operatorname{int} K$ 上的狄利克雷热核。也就是说，对于 $f\in L^2(K)$，函数

$$u(t,x) = \int_K k_t^K(x,y) f(y)\,dy, \qquad t>0, x\in \operatorname{int} K,$$

满足该方程，并具有零狄利克雷边界值，且当 $t\to 0^+$ 时，$u(t,\cdot)\to f$ 于 $L^2(K)$ 中。详细信息请参见 [67, 第 4 章和 6]。

设 $\{\phi_j\}_{j\geqslant 1}$ 是由狄利克雷特征函数组成的 $L^2(K)$ 的实正交归一基。每个 $\phi_j\in H_0^1(\operatorname{int} K)$ 在弱意义下满足 $-\Delta\phi_j = \lambda_j(K)\phi_j$。由于 $\operatorname{int} K$ 是连通的，$\lambda_1(K)$ 是单的，因此我们选取在 $\operatorname{int} K$ 中严格为正的 ϕ_1。关于这些谱性质，请参见 [36, 定理 8.37 和 8.38]。核 k_t^K 的谱展开为

$$k_t^K(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j(K)}\phi_j(x)\phi_j(y), \quad \text{for } t>0,\ x,y\in\operatorname{int} K. \tag{2.5}$$

见 [31, 引理 2.1]。特别地，$k_t^K(x,y) = k_t^K(y,x)$。

对于 $t>0$，$x,y\in\operatorname{int} K$ 以及整数 $j\geqslant 2$，令 $x_0 = x$，$x_j = y$，并定义逼近核

$$k_{t,j}^K(x,y) = \int_{K^{j-1}} \prod_{i=1}^{j} p_{\frac{t}{j}}(x_{i-1},x_i)\,dx_1\cdots dx_{j-1}. \tag{2.6}$$

以下逼近结果证明见 [15, 第 384 页，(6.4)]。

引理 2.5。 设 $K\in\mathcal{K}^n$，$t>0$ 和 $x,y\in\operatorname{int} K$。则 $0\leqslant k_{t,j}^K(x,y)\leqslant p_t(x,y)$、$j\geqslant 2$，且 $k_{t,j}^K(x,y)\longrightarrow k_t^K(x,y)$ 当 $j\to\infty$ 时。

若 $K\subseteq L$，则 (2.6) 给出 $k_{t,j}^K(x,y)\leqslant k_{t,j}^L(x,y)$，对于 $t>0$ 和 $x,y\in\operatorname{int} K$。令 $j\to\infty$，得到 $k_t^K(x,y)\leqslant k_t^L(x,y)$。

3. 对数几何泛函的对数 Brunn–Minkowski 不等式 ls

本节中，我们证明定理 1.1 和 1.2 中的不等式。等号成立的条件将在第 4 节中确立。

3.1. **传递原理**

定理 3.1。令 $\beta \in \mathbb{R}$、 $m_j \in \mathbb{N}_+$ 和 $\psi_j : \mathbb{R}^{nm_j} \to (-\infty, +\infty]$ 为偶凸函数，其中 $j \in \mathbb{N}_+$。假设对于 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 和 $t > 0$,

$$H_K(t) := t^\beta \lim_{j\to\infty} \int_{(K/\sqrt{t})^{m_j}} e^{-\psi_j(x)}\, dx \in (0, \infty). \tag{3.1}$$

(i) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$。若 $\mathcal{J}_\alpha(K) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} H_K(t)\, dt < \infty$ 对每个 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 均成立，则对于 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$ 和 $0 < \theta < 1$,

$$\mathcal{J}_\alpha\big(K^{1-\theta} L^\theta\big) \geqslant \mathcal{J}_\alpha(K)^{1-\theta} \mathcal{J}_\alpha(L)^\theta. \tag{3.2}$$

(ii) 若 $\Lambda(K) := -\lim_{t\to\infty} t^{-1} \log H_K(t) \in (0, \infty)$ 对每个 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 均成立，则对于 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$ 和 $0 < \theta < 1$,

$$\Lambda\big(K^{1-\theta} L^\theta\big) \leqslant \Lambda(K)^{1-\theta} \Lambda(L)^\theta.$$

证明。设 $M = K^{1-\theta} L^\theta$ 对于 K, $L \in \mathcal{K}_e^n$ 和 $0 < \theta < 1$。我们首先证明，对于 t_0, $t_1 > 0$,

$$H_M(t_0^{1-\theta} t_1^\theta) \geqslant H_K(t_0)^{1-\theta} H_L(t_1)^\theta. \tag{3.3}$$

为此，设 $m \in \mathbb{N}_+$ 并设 $\psi : \mathbb{R}^{nm} \to (-\infty, +\infty]$ 是一个偶凸函数。将引理 2.3 应用于维数 nm 中的 K^m, L^m 并利用引理 2.2 得到

$$\int_{M^m} e^{-\psi(x)}\, dx \geqslant \Big(\int_{K^m} e^{-\psi(x)}\, dx\Big)^{1-\theta} \Big(\int_{L^m} e^{-\psi(x)}\, dx\Big)^\theta. \tag{3.4}$$

根据定义,

$$(K/\sqrt{t_0})^{1-\theta} (L/\sqrt{t_1})^\theta = M/\sqrt{t_0^{1-\theta} t_1^\theta}.$$

将（3.4）应用于这两个体，并令 $m = m_j$ 和 $\psi = \psi_j$，令 $j \to \infty$ 并利用（3.1），我们得到

$$\frac{H_M(t_0^{1-\theta} t_1^\theta)}{(t_0^{1-\theta} t_1^\theta)^\beta} \geqslant \Big(\frac{H_K(t_0)}{t_0^\beta}\Big)^{1-\theta} \Big(\frac{H_L(t_1)}{t_1^\beta}\Big)^\theta.$$

对于部分（i），记 $f_D(s) = e^{\alpha s} H_D(e^s)$ 为 $D = K$、L、M。于是

$$\int_{\mathbb{R}} f_D(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha s} H_D(e^s)\, ds = \int_0^\infty t^{\alpha-1} H_D(t)\, dt = \mathcal{J}_\alpha(D) < \infty.$$

由（3.3），可得

$$f_M((1-\theta)s_0 + \theta s_1) \geqslant f_K(s_0)^{1-\theta} f_L(s_1)^\theta$$

对于 s_0, $s_1 \in \mathbb{R}$。引理2.4 现在推出了部分（i）中的不等式。

对于第（ii）部分，固定 $t > 0$ 并取 $t_0 = \frac{t}{\Lambda(K)}$ 以及 $t_1 = \frac{t}{\Lambda(L)}$ 在 (3.3) 中。于是

$$-\frac{1}{t} \log H_M\Big(\frac{t}{\Lambda(K)^{1-\theta} \Lambda(L)^\theta}\Big) \leqslant -(1-\theta)\frac{\log H_K(t_0)}{t} - \theta \frac{\log H_L(t_1)}{t}.$$

令 $t \to \infty$ 并利用 Λ 的定义可得

$$\frac{\Lambda(M)}{\Lambda(K)^{1-\theta}\Lambda(L)^{\theta}} \leqslant (1-\theta)\cdot 1 + \theta \cdot 1 = 1,$$

如所希望的。 □

3.2. 几何泛函的不等式

定理 3.2. 设 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$、$0 < \theta < 1$、$\sigma > \frac{n}{2}$ 和 $1 < q < n+1$。则

$$\lambda_1(K^{1-\theta}L^{\theta}) \leqslant \lambda_1(K)^{1-\theta}\lambda_1(L)^{\theta}, \tag{3.5}$$

$$\zeta_\sigma(K^{1-\theta}L^{\theta}) \geqslant \zeta_\sigma(K)^{1-\theta}\zeta_\sigma(L)^{\theta}, \tag{3.6}$$

$$\tau(K^{1-\theta}L^{\theta}) \geqslant \tau(K)^{1-\theta}\tau(L)^{\theta}, \tag{3.7}$$

$$I_q(K^{1-\theta}L^{\theta}) \geqslant I_q(K)^{1-\theta}I_q(L)^{\theta}. \tag{3.8}$$

证明。 设 k_t^K和 $\{\phi_j\}_{j\geqslant 1}$ 分别为第2.3节中的狄利克雷热核和特征基。对于$t > 0$，定义

$$Q_K(t) = \int_{K^2} k_t^K(x,y)\,dx\,dy, \tag{3.9}$$

$$Z_K(t) = \int_K k_t^K(x,x)\,dx, \tag{3.10}$$

$$F_K(t) = \int_{K^2} \exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4t}\Big)\,dx\,dy. \tag{3.11}$$

我们应用定理3.1 ，采用以下选择：对 λ_1 使用第（ii）部分，对其余三个泛函使用第（i）部分。

泛函	H_K	β	α
第一狄利克雷特征值 λ_1	Z_K	0	—
谱ζ函数 ζ_σ	Z_K	0	σ
扭转刚度 τ	Q_K	$\frac{n}{2}$	1
弦积分 I_q	F_K	n	$\frac{q-n-1}{2}$

我们首先将 Q_K 和 Z_K 表示为（3.1）的形式。
取定 $t > 0$，令 $k_{t,\,j}^K$ 由（2.6）给出。对于 x，$y \in \operatorname{int} K$，引理 2.5 给出

$$\begin{aligned} &k_{t,j}^K(x,y) \longrightarrow k_t^K(x,y) \qquad \text{as } j \to \infty, \\ &0 \leqslant k_{t,j}^K(x,y) \leqslant p_t(x,y) \leqslant (4\pi t)^{-\frac{n}{2}},\ j \geqslant 2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由于 $|\partial K| = 0$，由控制收敛定理、（3.9）和（3.10）可得

$$Q_K(t) = \lim_{j\to\infty} \int_{K^2} k_{t,j}^K(x,y)\,dx\,dy,$$
$$Z_K(t) = \lim_{j\to\infty} \int_{K} k_{t,j}^K(x,x)\,dx.$$

由于 $p_t(\sqrt{t}\,x, \sqrt{t}\,y)$ 根据（2.4），将（2.6）代入这些积分，并通过 $x_i = \sqrt{t}\,y_i$ 作变量代换可得

$$Q_K(t) = t^{\frac{n}{2}} \lim_{j\to\infty} \int_{(K/\sqrt{t})^{j+1}} \prod_{i=1}^{j} p_{\frac{1}{j}}(y_{i-1}, y_i)\,dy_0 \cdots dy_j,$$
$$Z_K(t) = \lim_{j\to\infty} \int_{(K/\sqrt{t})^{j}} \prod_{i=1}^{j} p_{\frac{1}{j}}(y_{i-1}, y_i)\,dy_0 \cdots dy_{j-1},$$

其中 $y_j = y_0$ 对于 Z_K。根据（2.4），每个被积函数的负对数 is

$$\psi_j(y_0, \dots, y_j) = \frac{j}{4}\sum_{i=1}^{j} |y_i - y_{i-1}|^2 + \frac{nj}{2}\log\frac{4\pi}{j}.$$

由于 ψ_j 是偶的、凸的，并且与 K，t无关，因此（3.1）成立，其中 $m_j = j+1$和 $\beta = \frac{n}{2}$对于 Q_K成立，而 $m_j = j$和 $\beta = 0$对于 Z_K成立。

情形 1。 证明第一狄利克雷特征值的（3.5）不等式。

根据步骤 1 和定理 3.1的第（ii）部分，只需证明

$$\lambda_1(K) = -\lim_{t\to\infty} \frac{\log H_K(t)}{t}$$

分别取 $H_K = Z_K$ 或 $H_K = Q_K$。

固定 $t > 0$，(2.5) 中满足 $y = x$ 的各项 $e^{-t\lambda_j(K)}\phi_j(x)^2 \geqslant 0$。因此，在 (3.10) 中应用单调收敛，并利用 $\int_K \phi_j^2\,dx = 1$，可得

$$Z_K(t) = \int_K k_t^K(x,x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j(K)} \int_K \phi_j(x)^2\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j(K)}. \tag{3.13}$$

令 $j \to \infty$ 趋于 (3.12) 中的条件可得 $k_t^K(x,\ x) \leqslant p_t(x,\ x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$。因此

$$Z_K(t) \leqslant \int_K p_t(x,x)\,dx = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}|K| < \infty. \tag{3.14}$$

根据柯西–施瓦茨不等式，我们有 $\int_K |\phi_j|\,dx \leqslant |K|^{\frac{1}{2}}$。因此

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j(K)} \int_{K^2} |\phi_j(x)\phi_j(y)|\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j(K)} \left(\int_K |\phi_j|\,dx\right)^2 \leqslant |K| Z_K(t) < \infty.$$

结合富比尼定理、(2.5) 和 (3.9)，可得

$$Q_K(t) = \int_{K^2} k_t^K(x,y)\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j(K)} \Big(\int_K \phi_j(x)\,dx \Big)^2. \tag{3.15}$$

对于 $t \geqslant 1$，不等式 $\lambda_j(K) \geqslant \lambda_1(K)$ 意味着

$$e^{-t\lambda_j(K)} = e^{-\lambda_j(K)} e^{-(t-1)\lambda_j(K)} \leqslant e^{-\lambda_j(K)} e^{-(t-1)\lambda_1(K)}.$$

这一点结合式（3.13）和（3.15，可得

$$Z_K(t) \leqslant Z_K(1) e^{-(t-1)\lambda_1(K)}, \tag{3.16}$$

$$Q_K(t) \leqslant Q_K(1) e^{-(t-1)\lambda_1(K)}. \tag{3.17}$$

在式（3.13）和（3.15）中仅保留第一项，得到

$$Z_K(t) \geqslant e^{-t\lambda_1(K)}, \qquad Q_K(t) \geqslant e^{-t\lambda_1(K)} \Big(\int_K \phi_1(x)\,dx \Big)^2.$$

由于 $\phi_1 > 0$ 属于 $\operatorname{int} K$ （见第 2.3 节），这些下界以及式（3.16）–（3.17）意味着

$$-\lim_{t\to\infty} \frac{\log Z_K(t)}{t} = -\lim_{t\to\infty} \frac{\log Q_K(t)}{t} = \lambda_1(K). \tag{3.18}$$

不等式（3.5）现由定理 3.1 （ii）得出。

情形 2。 证明谱 ζ 函数的不等式（3.6）。

固定 $j \geqslant 1$。由于 $\lambda_j(K) > 0$，因此

$$\begin{aligned} \Gamma(\sigma) &= \int_0^\infty s^{\sigma-1} e^{-s}\,ds = \int_0^\infty \big(t\lambda_j(K)\big)^{\sigma-1} e^{-t\lambda_j(K)} \lambda_j(K)\,dt \\ &= \lambda_j(K)^\sigma \int_0^\infty t^{\sigma-1} e^{-t\lambda_j(K)}\,dt. \end{aligned}$$

Thus

$$\lambda_j(K)^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty t^{\sigma-1} e^{-t\lambda_j(K)}\,dt.$$

对于 $\sigma > \frac{n}{2}$， （3.14）和（3.16）推出 $\int_0^\infty t^{\sigma-1} Z_K(t)\,dt < \infty$。对 j 求和，并对非负被积函数应用单调收敛定理，由（3.13）得到

$$\begin{aligned} \zeta_\sigma(K) &= \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(K)^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty t^{\sigma-1} e^{-t\lambda_j(K)}\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty t^{\sigma-1} Z_K(t)\,dt < \infty. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ine不等式（3.6）现由定理 3.1 （i）得到，其中 $H_K = Z_K$ 和 $\alpha = \sigma$.

情况3。 证明扭转刚度的不等式（3.7）。

Sin若 $-\Delta u_K = 1$ 和 $-\Delta \phi_j = \lambda_j(K)\phi_j$ 在弱意义下成立，则可推出 t

$$\lambda_j(K)\int_K u_K\phi_j\,dx = \int_K \nabla u_K\cdot\nabla\phi_j\,dx = \int_K \phi_j\,dx.$$

前述等号以及 $u_K, 1 \in L^2(K)$ 的 Parseval 恒等式意味着

$$\tau(K) = \int_K u_K\,dx = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\int_K u_K\phi_j\,dx\Big)\Big(\int_K \phi_j\,dx\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\big(\int_K \phi_j\,dx\big)^2}{\lambda_j(K)}. \tag{3.20}$$

代入 $\lambda_j(K)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t\lambda_j(K)}\,dt$，并利用单调收敛和 (3.15)，我们得到

$$\tau(K) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-t\lambda_j(K)}\Big(\int_K \phi_j(x)\,dx\Big)^2 dt = \int_0^\infty Q_K(t)\,dt < \infty. \tag{3.21}$$

由定理 3.7即可得到不等式 (3.1 (i)，其中 $H_K = Q_K$ 且 $\alpha = 1$。

情形 4。 证明弦积分的不等式 (3.8。

记 $a = n+1-q$。于是 $0 < a < n$ 且 $E_a(K) < \infty$。根据 (2.3)，不等式 (3.8等价于关于 E_a的对数 Brunn–Minkowski 不等式。

在伽马积分中作代换 $s = \frac{|x-y|^2}{4t}$，再结合富比尼定理和 (3.11)，可得

$$\begin{aligned} E_a(K) &= \int_{K^2}|x-y|^{-a}\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{a}{2})}\int_{K^2}|x-y|^{-a}\int_0^\infty s^{\frac{a}{2}-1}e^{-s}\,ds\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{4^{\frac{a}{2}}\Gamma(\frac{a}{2})}\int_{K^2}\int_0^\infty t^{-\frac{a}{2}-1}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dt\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{4^{\frac{a}{2}}\Gamma(\frac{a}{2})}\int_0^\infty t^{-\frac{a}{2}-1}F_K(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.22}$$

特别地，$t^{-\frac{a}{2}-1}F_K(t)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上可积。

由（3.11），$0 < F_K(t) \leqslant |K|^2$ 对 $t > 0$成立。作代换 $x = \sqrt{t}\,u$，$y = \sqrt{t}\,v$ 得到

$$F_K(t) = t^n\int_{(K/\sqrt{t})^2} e^{-\frac{|u-v|^2}{4}}\,du\,dv.$$

取 $m_j = 2$ 和 $\psi_j(u,\ v) = \frac{|u-v|^2}{4}$ 作为 $j \geqslant 1$。由于 ψ_j 是偶且凸的，F_K 具有表示式（3.1），其中 $\beta = n$。由（3.22），不等式（3.8）现可由定理 3.1 （i）推出，其中 $H_K = F_K$ 且 $\alpha = -\frac{a}{2}$。证明完毕。 □

4. 等号成立条件

本节建立定理 1.1 和 1.2中的等号成立条件。本节中，设 K， $L \in \mathcal{K}_e^n$， $0 < \theta < 1$。记 $M = K^{1-\theta}L^{\theta}$。

4.1. 传递原理中的等号成立条件

定理 m 4.1. 定理*3.1 (i)* 中等号成立，当且仅当存在某个 r， $s > 0$ ，

$$H_L(rt) = sH_K(t), \qquad H_M(r^{\theta}t) = s^{\theta}H_K(t), \quad for\ t > 0. \tag{4.1}$$

证明。 对于充分性，假设（4.1）成立。根据 $\mathcal{J}_{\alpha}$的定义，我们有

$$\mathcal{J}_{\alpha}(L) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}H_L(x)\,dx = \int_0^{\infty} (rt)^{\alpha-1}H_L(rt)\,r\,dt = r^{\alpha}s\,\mathcal{J}_{\alpha}(K),$$
$$\mathcal{J}_{\alpha}(M) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}H_M(x)\,dx = \int_0^{\infty} (r^{\theta}t)^{\alpha-1}H_M(r^{\theta}t)\,r^{\theta}\,dt = (r^{\alpha}s)^{\theta}\mathcal{J}_{\alpha}(K).$$

因此 $\mathcal{J}_{\alpha}(M) = \mathcal{J}_{\alpha}(K)^{1-\theta}\mathcal{J}_{\alpha}(L)^{\theta}$，如所求。

对于必要性，假设等号在（3.2）中成立。

对于 $D = K$， L， M，定义

$$f_D(x) = \frac{e^{\alpha x}H_D(e^x)}{\mathcal{J}_{\alpha}(D)}, \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

由（3.3）及 $K = L = D$， f_D 在 $\mathbb{R}$上是对数凹的，因此连续。此外，

$$\int_{\mathbb{R}} f_D(x)\,dx = \frac{1}{\mathcal{J}_{\alpha}(D)}\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x}H_D(e^x)\,dx = \frac{1}{\mathcal{J}_{\alpha}(D)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}H_D(t)\,dt = 1.$$

定义 T： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$\int_{-\infty}^{x} f_K(y)\,dy = \int_{-\infty}^{T(x)} f_L(y)\,dy. \tag{4.3}$$

由于 f_K和 f_L均为正、连续，且 $\int_{\mathbb{R}} f_K\ (x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} f_L\ (x)\ \ dx = 1$，因此 T定义良好， C^1，且严格递增。对于 $x \in \mathbb{R}$，对（4.3）求导得

$$f_K(x) = f_L(T(x))T'(x), \qquad T'(x) > 0. \tag{4.4}$$

在（3.3）中取 $t_0 = e^x$和 $t_1 = e^{T(x)}$。由于 $\mathcal{J}_{\alpha}\ (M)\ = \mathcal{J}_{\alpha}\ (K)^{\ 1-\theta}\mathcal{J}_{\alpha}\ (L)^{\ \theta}$，由（4.2）和（4.4）可得

$$f_M((1-\theta)x + \theta T(x)) \geqslant f_K(x)^{1-\theta}f_L(T(x))^{\theta} = \frac{f_K(x)}{T'(x)^{\theta}}. \tag{4.5}$$

根据（4.4），映射 $x \mapsto\ (1-\theta)\ x + \theta T\ (x)$ 严格递增，并趋于 $\pm\infty$ 当$x \to \pm\infty$。对 $\int_{\mathbb{R}} f_M\ (x)\ dx = 1$ 作变量替换4.5并应用16

算术-几何平均不等式，可得

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_M((1-\theta)x + \theta T(x))\big(1-\theta+\theta T'(x)\big)\,dx$$
$$\geqslant \int_{\mathbb{R}} f_K(x)\frac{1-\theta+\theta T'(x)}{T'(x)^\theta}\,dx \geqslant \int_{\mathbb{R}} f_K(x)\,dx = 1.$$

因此，两个不等式均取等号。由于 $f_K > 0$ 和 T' 连续，算术-几何平均不等式的等号条件意味着 $T'(x) = 1$ 对$x \in \mathbb{R}$成立。因此，对于某个 $r > 0$，有 $T(x) = x + \log r$。

由于 $T' = 1$，(4.5) 两边的积分均为 1。根据连续性，对$x \in \mathbb{R}$等号成立。将 $T(x) = x + \log r$ 代入 (4.4) 和 (4.5)，得到

$$f_L(x + \log r) = f_K(x), \qquad f_M(x + \theta \log r) = f_K(x).$$

这些结果与 (4.2) 一起给出 (4.1)，其中 $s = r^{-\alpha}\,{}^{\mathcal{J}_\alpha(L)}/_{\mathcal{J}_\alpha(K)}$。证明完毕。 □

4.2. **刚性引理**

引理 4.2. 对于 $D = K$、L、M，设 μ_D 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的偶概率测度，其支撑为D。如果

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,d\mu_M \leqslant (1-\theta)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,d\mu_K + \theta\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,d\mu_L \tag{4.6}$$

对于偶 *con* 凸函数 φ：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，当 $\varphi(x) = |x|^2$ 时等号成立，于是 $K = L = M$。

证明。设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为偶函数。由于 f 具有有界二阶导数，我们可以选取$b > 0$，使得 $b|x|^2 \pm f(x)$ 为凸函数。将（4.6）应用于这两个函数。由于等号对于 $\varphi(x) = |x|^2$成立，因此可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_M = (1-\theta)\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_K + \theta\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_L.$$

因此 $\mu_M = (1-\theta)\mu_K + \theta\mu_L$。

取支集可得 $K \cup L \subseteq M$。结合 $M = K^{1-\theta}L^\theta$，得到

$$\max\{h_K, h_L\} \leqslant h_M \leqslant h_K^{1-\theta}h_L^\theta \leqslant \max\{h_K, h_L\}.$$

因此处处都有等号成立。于是 $h_K = h_L = h_M$，从而 $K = L = M$。 □

我们使用下一个引理来建立第 4.3 节中谱泛函和扭转泛函的等号成立条件。

引理 4.3。 第一狄利克雷特征值满足

$$\lambda_1(M) \leqslant (1-\theta)\lambda_1(K) + \theta\lambda_1(L), \tag{4.7}$$

当且仅当 $K = L$ 时取等号。

证明。 由（3.5）及算术-几何平均不等式可得

$$\lambda_1(M) \leqslant \lambda_1(K)^{1-\theta}\lambda_1(L)^{\theta} \leqslant (1-\theta)\lambda_1(K) + \theta\lambda_1(L).$$

接下来要刻画等号成立的情形。对于 $D = K$， L， M，令 k_t^D为 int D上的狄利克雷热核，如第2.3节所述。令 ϕ_D 为对应于 $\lambda_1(D)$的正特征函数，并将其归一化使得$\int_D \phi_D^2\,dx = 1$，再将其延拓至 $\mathbb{R}^n$，延拓部分取零。

固定一个偶 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$。下面我们比较$\int_D f\phi_D^2\,dx$ 在$D = K$， L， M时的积分。为此，取 $b > 0$使得 $b|x|^2 \pm f(x)$为凸，并定义

$$U(x,y) = bx\cdot y + \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \text{for } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.8}$$

固定$0 < \varepsilon < \frac{1}{2b}$ 并定义

$$g_D(t) = \int_{D^2} k_t^D(x,y)^2 e^{-\frac{\varepsilon U(x,y)}{t}}\,dx\,dy, \quad \text{for } t > 0.$$

步骤 1。证明

$$g_M(t) \geqslant g_K(t)^{1-\theta} g_L(t)^{\theta}. \tag{4.9}$$

我们首先利用 g_D 根据$k_{t,\,j}^D$ 对（2.6）进行逼近。对于 $j \geqslant 2$，定义

$$g_{D,j}(t) = \int_{D^2} k_{t,j}^D(x,y) k_{t,j}^D(y,x) e^{-\frac{\varepsilon U(x,y)}{t}}\,dx\,dy, \quad \text{for } t > 0.$$

由引理2.5、 k_t^D的对称性以及 $|\partial D| = 0$， 可得$k_{t,\,j}^D(x,\ y)k_{t,\,j}^D(y,\ x) \to k_t^D(x,\ y)^2$在 D^2上几乎处处成立。引理2.5 还蕴含

$$0 \leqslant k_{t,j}^D(x,y) k_{t,j}^D(y,x) \leqslant p_t(x,y)^2.$$

由于 D是紧集，且 U连续，对于固定的$t > 0$， $p_t(x,y)^2 e^{-\frac{\varepsilon U(x,y)}{t}}$ 在 D^2 上可积。由控制收敛定理，

$$\lim_{j\to\infty} g_{D,j}(t) = \int_{D^2} k_t^D(x,y)^2 e^{-\frac{\varepsilon U(x,y)}{t}}\,dx\,dy = g_D(t).$$

将 (2.6) 代入$g_{D,\,j}$，得到

$$g_{D,j}(t) = \left(\frac{4\pi t}{j}\right)^{-nj} \int_{D^{2j}} e^{-\Phi(z)}\,dz,$$

其中 $z = (z_0, \ldots\ldots, z_{2j-1})$、 $z_0 = x$、 $z_j = y$、 $z_{2j} = z_0$，以及

$$\Phi(z) = \frac{j}{4t}\sum_{i=1}^{2j} |z_i - z_{i-1}|^2 + \frac{\varepsilon}{t} U(z_0, z_j).$$

由于 f 是偶，因此也是 Φ。要应用（3.4），还需证明凸性。将 $\Phi(z)$改写为

$$\Phi(z) = \left(\frac{j}{4t}\sum_{i=1}^{2j} |z_i - z_{i-1}|^2 - \frac{\varepsilon b}{2t}|z_j - z_0|^2\right)$$

$$+\frac{\varepsilon}{2t}\big(b|z_0|^2+f(z_0)+b|z_j|^2+f(z_j)\big).$$

根据 b的选择，第二项是凸的。对于第一项，由柯西–施瓦茨不等式可得 $|z_j-z_0|^2\leqslant j\sum_{i=1}^{2j}|z_i-z_{i-1}|^2$。由于 $2\varepsilon b<1$，我们有

$$\frac{j}{4t}\sum_{i=1}^{2j}|z_i-z_{i-1}|^2-\frac{\varepsilon b}{2t}|z_j-z_0|^2\geqslant\frac{j(1-2\varepsilon b)}{4t}\sum_{i=1}^{2j}|z_i-z_{i-1}|^2\geqslant 0.$$

因此，第一项是一个非负二次型，所以 Φ是凸的。将 (3.4) 与 $m=2j$ 和 $\psi=\Phi$结合应用，可得

$$g_{M,j}(t)\geqslant g_{K,j}(t)^{1-\theta}g_{L,j}(t)^{\theta}.$$

令 $j\to\infty$，得到 (4.9)。

步骤 2. 证明

$$\log g_D(t)=-2t\lambda_1(D)-\frac{\varepsilon}{t}\int_D f\phi_D^2\,dx+O(t^{-2})\quad\text{as } t\to\infty. \tag{4.10}$$

令 $q_t^D=e^{t\lambda_1(D)}k_t^D$和 $\delta_D=\lambda_2(D)-\lambda_1(D)$。那么 $\delta_D>0$。由于 $k_1^D\leqslant p_1\leqslant(4\pi)^{-\frac{n}{2}}$且 D 有界，我们有 $q_1^D\in L^2(D^2)$。对于 $t\geqslant 1$，由 (2.5) 及特征函数的正交归一性可得

$$\begin{aligned}\|q_t^D-\phi_D\otimes\phi_D\|_{L^2(D^2)}^2&=\sum_{k=2}^{\infty}e^{-2t(\lambda_k(D)-\lambda_1(D))}\\&\leqslant e^{-2(t-1)\delta_D}\|q_1^D\|_{L^2(D^2)}^2=O(e^{-2\delta_D t}),\end{aligned}$$

其中 $(\phi_D\otimes\phi_D)(x,y)=\phi_D(x)\phi_D(y)$.

由于 $g_D(t)$ 涉及核的平方，接下来我们估计 $L^1(D^2)$ 中平方核之差。注意到 $\|\phi_D\otimes\phi_D\|_{L^2(D^2)}=\int_D\phi_D^2\,dx=1$，因此由三角不等式可得 $\|q_t^D\|_{L^2(D^2)}=O(1)$。由柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}&\|(q_t^D)^2-(\phi_D\otimes\phi_D)^2\|_{L^1(D^2)}\\&\leqslant\|q_t^D-\phi_D\otimes\phi_D\|_{L^2(D^2)}\big(\|q_t^D\|_{L^2(D^2)}+1\big)=O(e^{-\delta_D t}).\end{aligned} \tag{4.11}$$

由于 $-D=D$，函数 $x\mapsto\phi_D(-x)$也是对应于 $\lambda_1(D)$的正归一化特征函数。该特征值是单的，因此 $\phi_D(-x)=\phi_D(x)$。因此 $\phi_D^2\,dx$ 是一个偶概率测度，且 $\int_D x\phi_D(x)^2\,dx=0$。由（4.8）和 $\int_D\phi_D^2\,dx=1$，可得

$$\int_{D^2}U(x,y)\phi_D(x)^2\phi_D(y)^2\,dx\,dy=b\Big|\int_D x\phi_D(x)^2\,dx\Big|^2+\int_D f\phi_D^2\,dx=\int_D f\phi_D^2\,dx.$$

由于 U在 D^2上有界，泰勒公式给出 $e^{-\frac{\varepsilon U}{t}}=1-\frac{\varepsilon U}{t}+O(t^{-2})$ 在D^2 上一致成立，当 $t\to\infty$时。利用 (4.11) 和 $e^{-\delta_D t}=O(t^{-2})$，我们得到

$$e^{2t\lambda_1(D)}g_D(t)=\int_{D^2}(q_t^D(x,y))^2e^{-\frac{\varepsilon U(x,y)}{t}}\,dx\,dy$$

$$= \int_{D^2} \Big(1 - \frac{\varepsilon}{t} U(x,y)\Big) \phi_D(x)^2 \phi_D(y)^2 \, dx \, dy + O(t^{-2})$$
$$= 1 - \frac{\varepsilon}{t} \int_D f \phi_D^2 \, dx + O(t^{-2}),$$

从而得到 (4.10)。

步骤 3. 刻画等号成立的情形。

假设（4.7）中等号成立。（ t 中的4.10）阶项随即抵消，因此由（4.9）可得

$$0 \leqslant \log g_M(t) - (1-\theta) \log g_K(t) - \theta \log g_L(t)$$
$$= \frac{\varepsilon}{t} \Big((1-\theta) \int_K f \phi_K^2 \, dx + \theta \int_L f \phi_L^2 \, dx - \int_M f \phi_M^2 \, dx \Big) + O(t^{-2}).$$

乘以 $\frac{t}{\varepsilon}$ 并令 $t \to \infty$，得到

$$\int_M f \phi_M^2 \, dx \leqslant (1-\theta) \int_K f \phi_K^2 \, dx + \theta \int_L f \phi_L^2 \, dx.$$

将此不等式应用于 $-f$，我们得到偶 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的等号成立。由于当 $D = K$、L、M 时，测度 $\phi_D^2 \, dx$ 均为偶测度，因此可得

$$\phi_M^2 \, dx = (1-\theta) \phi_K^2 \, dx + \theta \phi_L^2 \, dx. \tag{4.12}$$

函数 ϕ_D 在 $\operatorname{int} D$ 中为正，并在 D之外为零，因此测度 $\phi_D^2 \, dx$ 的支撑为 D。由（4.12），引理 4.2 中关于偶凸函数的积分不等式取等号，因此 $K = L = M$。

反之，当 $K = L$时，（4.7）中等号成立。证明完毕 . □

回顾 F_K 由（3.11）定义。

引理 4.4。若 $F_M(t) = F_K(t)^{1-\theta} F_L(t)^{\theta}$对 $t > 0$成立，则 $K = L = M$。

证明。对于 $D = K$、L、M，令 μ_D为定义在 $\mathbb{R}^n$上的概率测度，其由 $d\mu_D(x) = \frac{\mathbf{1}_D(x)}{|D|} dx$给出。其支撑为 D，且由于 $D = -D$，它是偶的。还需验证引理4.2中的条件。

由于 D 有界，我们有

$$\exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4t}\Big) = 1 - \frac{|x-y|^2}{4t} + O(t^{-2})$$

在 D^2 上一致地，当 $t \to \infty$时。由于 $\int_D x \, dx = 0$ 具有对称性，

$$\int_D \int_D |x-y|^2 \, dy \, dx = 2|D| \int_D |x|^2 \, dx - 2 \Big| \int_D x \, dx \Big|^2 = 2|D| \int_D |x|^2 \, dx.$$

由（3.11）可得

$$\log F_D(t) = 2 \log |D| - \frac{1}{4t|D|^2} \int_{D^2} |x-y|^2 \, dx \, dy + O(t^{-2})$$

$$= 2\log|D| - \frac{1}{2t}\int_D |x|^2\,d\mu_D + O(t^{-2}).$$

对 $F_M(t) = F_K(t)^{1-\theta}F_L(t)^\theta$取对数并代入此展开式，可得

$$2\log\frac{|M|}{|K|^{1-\theta}|L|^\theta} = \frac{1}{2t}\Big(\int_M |x|^2\,d\mu_M - (1-\theta)\int_K |x|^2\,d\mu_K - \theta\int_L |x|^2\,d\mu_L\Big) + O(t^{-2}).$$

令 $t\to\infty$ 得到 $|M| = |K|^{1-\theta}|L|^\theta$。乘以 $2t$ 并再次令 $t\to\infty$，得到

$$\int_M |x|^2\,d\mu_M = (1-\theta)\int_K |x|^2\,d\mu_K + \theta\int_L |x|^2\,d\mu_L. \tag{4.13}$$

Let φ： $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为偶且凸。应用引理 2.3 及 $\psi = r\varphi$ 可得 s

$$\int_M e^{-r\varphi}\,d\mu_M \geqslant \Big(\int_K e^{-r\varphi}\,d\mu_K\Big)^{1-\theta}\Big(\int_L e^{-r\varphi}\,d\mu_L\Big)^\theta, \quad \text{for } r\geqslant 0.$$

两边在 $r=0$处均等于 1。由于 φ 在 $K\cup L\cup M$上有界，我们可以比较它们在该处的右导数，从而得到

$$\int_M \varphi\,d\mu_M \leqslant (1-\theta)\int_K \varphi\,d\mu_K + \theta\int_L \varphi\,d\mu_L.$$

将此结果与引理 4.13中的（4.2 ）结合可得 $K=L=M$。 □

4.3. **几何泛函的等号成立条件**

定理 4.5。 在定理*3.2*的每个不等式中，等号成立当且仅当 K 和 L互为伸缩体。

证明。 若 $L=tK$ 对某个 $t>0$成立，则 $M=t^\theta K$。由齐次性，定理3.2 中的四个不等式均取等号。下面证明其逆命题。

情形 1。 假设第一狄利克雷特征值 λ_1在（3.5）中取等号。令$\widetilde{K} = \sqrt{\lambda_1}(K)\,K$，$\widetilde{L} = \sqrt{\lambda_1}(L)\,L$。由齐次性可得 $\lambda_1(\widetilde{K}) = \lambda_1(\widetilde{L}) = 1$。结合假设，得到

$$\lambda_1(\widetilde{K}^{1-\theta}\widetilde{L}^\theta) = \lambda_1(\widetilde{K})^{1-\theta}\lambda_1(\widetilde{L})^\theta = 1.$$

~ ~引理 4.3 因此推出 $K=L$。于是 K 和 L 互为伸缩体。

情形 2. 假设谱ζ函数 ζ_σ with$\sigma > \frac{n}{2}$在（3.6）中成立等号，或扭转刚度 τ在（3.7）中成立等号。由（3.19）和（3.21）可知，在谱ζ函数情形下， $H_K = Z_K$ and $\alpha=\sigma$ 使（3.2）成立等号；在扭转刚度情形下， $H_K = Q_K$ and $\alpha=1$ 使（3.2）成立等号。由定理 4.1可得，对于某些 r、$s>0$，有（4.1）成立。将（3.18）应用于（4.1），得到 $\lambda_1(L) = r^{-1}\lambda_1(K)$ 以及

$$\lambda_1(M) = r^{-\theta}\lambda_1(K) = \lambda_1(K)^{1-\theta}\lambda_1(L)^\theta.$$

根据情形 1， K 和 L 是伸缩体。

情况3。 假设弦积分 I_q在 (3.8) 中取等号。由 (2.3)，这等价于 E_a取等号，其中 $a = n + 1 - q \in (0,\ n)$ 。表示式 (3.22) 进而推出，当 $H_K = F_K$且 $\alpha = -\frac{a}{2}$时，(3.2) 中取等号。定理 4.1 于是给出，对某个 $r,\ s > 0$，有 (4.1)。

写出 $L_0 = r^{-\frac{1}{2}} L$和 $M_0 = r^{-\frac{\theta}{2}} M = K^{1-\theta} {L_0}^{\theta}$。对（3.11）进行变量替换，$F_{cD}(t) = c^{2n} F_D\left(\frac{t}{c^2}\right)$ 对于 $c > 0$。因此，（4.1）中的恒等式可写为

$$F_{L_0}(t) = sr^{-n} F_K(t), \qquad F_{M_0}(t) = (sr^{-n})^{\theta} F_K(t).$$

因此，$F_{M_0}(t) = F_K(t)^{1-\theta} F_{L_0}(t)^{\theta}$ 对于 $t > 0$。引理 4.4 现在推出 $L_0 = K$，从而 $L = \sqrt{r}\, K$。□

结合定理3.2，定理1.2的证明即告完成。

5. 对数 Minkowski 问题的变分原理

本节将为第6节所研究的对数 Minkowski 问题建立变分原理。

设 $\mathcal{F}:\ \mathcal{K}_e^n \to (0,\ \infty)$ 关于包含关系单调且为一次齐次。在本节中，始终假设下述变分公式成立。

(V) 对于 $K \in \mathcal{K}_e^n$，存在一个有限偶 Borel 测度 η_K，其定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上，使得

$$\frac{d}{dt} \log \mathcal{F}([h_K e^{tg}])\Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\, d\eta_K, \qquad \text{for } g \in C_e(\mathbb{S}^{n-1}).$$

根据 (V) 和齐次性，η_K 是一个概率测度，且 $\eta_{rK} = \eta_K$ 对于 $r > 0$成立。为了统一处理定理 1.3中的四种情形，我们研究以下问题。

一般对数 Minkowski 问题。 给定一个偶 *Borel* 概率测度μ，其定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$上，存在满足 $\eta_K = \mu$的 $K \in \mathcal{K}_e^n$的充要条件是什么？如果这样的凸体存在，它在伸缩意义下是否唯一？

如果 $F:\ \mathcal{K}_e^n \to (0, \infty)$ 是次数为 $s \neq 0$的齐次函数，那么通过考察 $F^{\frac{1}{s}}$，我们可以将其对数 Minkowski 问题归约为上述问题。详见第 6.4 节。

5.1. 唯一性

唯一性由以下对数 Brunn–Minkowski 不等式推出。

(L) 对于 $K,\ L \in \mathcal{K}_e^n$和 $0 < \theta < 1$,

$$\mathcal{F}(K^{1-\theta} L^{\theta}) \geqslant \mathcal{F}(K)^{1-\theta} \mathcal{F}(L)^{\theta}, \tag{5.1}$$

当且仅当 $L = rK$ 对于某个 $r > 0$ 时取等号。

对于体积，B¨or¨oczky–Lutwak–Yang–Zhang [13, 引理 3.2] 证明了对数 Brunn–Minkowski 不等式与对数 Minkowski 不等式的等价性。

Lemma 5.1. 条件 *(L)* 等价于断言对所有 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$、

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K}\, d\eta_K \geqslant \log \frac{\mathcal{F}(L)}{\mathcal{F}(K)}, \tag{5.2}$$

当且仅当 K 和 L 互为伸缩体时，等号成立。

证明。假设 (L) 成立。令 K，$L \in \mathcal{K}_e^n$。记 $K_t = K^{1-t}L^t$ 为 $0 \leqslant t \leqslant 1$。则 $K_t = [h_K e^{t\log \frac{h_L}{h_K}}]$。由 (V) 和（5.1），可得

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K}\, d\eta_K = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log \mathcal{F}(K_t) - \log \mathcal{F}(K)}{t} \geqslant \log \frac{\mathcal{F}(L)}{\mathcal{F}(K)}.$$

因此（5.2）成立。

假设（5.2）中等号成立。令 $0 < t < 1$。由于 $K_t = [h_K^{1-t} h_L^t]$，可得 $\left(\frac{h_L}{h_K}\right)^t \geqslant \frac{h_{K_t}}{h_K}$。由此，（5.2）对 K，K_t以及（5.1）对 K，L，可推出

$$t\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K}\, d\eta_K \geqslant \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_{K_t}}{h_K}\, d\eta_K \geqslant \log \frac{\mathcal{F}(K_t)}{\mathcal{F}(K)} \geqslant t \log \frac{\mathcal{F}(L)}{\mathcal{F}(K)}.$$

根据假设，首项与末项相等，因此（5.1）中等号成立，从而K 和 L 互为伸缩体。反之，若 $L = rK$ 对某个 $r > 0$ 成立，则（5.2）两边都等于 $\log r$，因为 $\eta_K(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$ 且 $\mathcal{F}(rK) = r\mathcal{F}(K)$。

为证明逆命题，假设（5.2）对所有 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$均成立，且等号仅在二者为伸缩体时成立。设 K、$L \in \mathcal{K}_e^n$ 以及 $0 < \theta < 1$。记 $M = K^{1-\theta}L^\theta$ 以及 $g = \log \frac{h_K^{1-\theta}h_L^\theta}{h_M}$。则对于 $0 \leqslant s \leqslant 1$，$h_M \leqslant h_M e^{sg} \leqslant h_K^{1-\theta}h_L^\theta$。由于$[h_M] = M = [h_K^{1-\theta}h_L^\theta]$，可知$[h_M e^{sg}] = M$。因此，$\log \mathcal{F}([h_M e^{sg}])$ 对于 $0 \leqslant s \leqslant 1$为常数。由 （V），得到

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\, d\eta_M = \frac{d}{ds} \log \mathcal{F}([h_M e^{sg}])\Big|_{s=0^+} = 0.$$

由 $g = \log \frac{h_K^{1-\theta}h_L^\theta}{h_M}$和（5.2），可得

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\, d\eta_M &= (1-\theta)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_K}{h_M}\, d\eta_M + \theta \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_M}\, d\eta_M \\ &\geqslant (1-\theta)\log \frac{\mathcal{F}(K)}{\mathcal{F}(M)} + \theta \log \frac{\mathcal{F}(L)}{\mathcal{F}(M)}, \end{aligned}$$

这意味着（5.1）。

假设（5.1）中等号成立。则两次应用（5.2）时等号都必须成立。因此，K和 L 都是 M的伸缩体。反之，若 $L = rK$，则 $M = [r^\theta h_K] = r^\theta K$。由齐次性，（5.1）中的等号成立。□

定理 5.2。设 $\mathcal{F}$满足 *(L)*。则对于 K，$L \in \mathcal{K}_e^n$，$\eta_K = \eta_L$ 当且仅当K 和 L是伸缩体。

证明。 假设 $\eta_K = \eta_L$。根据（5.2），有

$$\log \frac{\mathcal{F}(L)}{\mathcal{F}(K)} \leqslant \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_L}{h_K}\, d\eta_K = -\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_K}{h_L}\, d\eta_L \leqslant \log \frac{\mathcal{F}(L)}{\mathcal{F}(K)}.$$

因此，两个不等式均为等式。由引理 5.1， K 和 L是伸缩体。反之，若 $L = rK$ 对某个 $r > 0$成立，则 $\eta_L = \eta_K$，正如在 （V）之后所指出的那样。 □

5.2. **存在性**

固定 $b_1 > 0$和 b_2，……， $b_n \geqslant 0$，其中 $\sum_{i=1}^n b_i = 1$，并记 $c_k = \sum_{i=1}^k b_i$为 $1 \leqslant k < n$。我们将使用以下涉及圆柱体和 John 椭球的条件。

(C) 对于 $\mathbb{R}^n$ 的每个 k 维子空间 ξ， $1 \leqslant k < n$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log \mathcal{F}(B_\xi \times rB_{\xi^\perp})}{\log r} = 1 - c_k.$$

(J) 对于 $\varepsilon > 0$，存在 $C_\varepsilon > 0$，使得对于 $K \in \mathcal{K}_e^n$,

$$\mathcal{F}(K) \leqslant C_\varepsilon \Big(\frac{a_n}{a_1}\Big)^\varepsilon \prod_{i=1}^n a_i^{b_i},$$

其中， $0 < a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$是 John 椭球 JK 的半轴长度；JK 是包含于 K中的最大体积椭球，且该椭球唯一。

令 $\mathcal{P}_c$ 为满足条件 $\mu(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi) < c_k$ 的偶概率测度 μ 类，其中 μ 定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上；对每个 $k = 1, \ldots, n-1$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 的每个 k 维子空间，都满足该条件。

定理 5.3.

(i) 若 $\mathcal{F}$满足 *(L)* 和 *(C)* ，则 $\eta_K \in \mathcal{P}_c$ 对于 $K \in \mathcal{K}_e^n$。(ii) 若 $\mathcal{F}$满足 *(J)* 且 $\mu \in \mathcal{P}_c$，则存在 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 使得 $\eta_K = \mu$。

证明。 **(i)** 设 $K \in \mathcal{K}_e^n$和 ξ 为一个满足 $0 < k < n$ 的 k 维子空间。取 $r_0 > 0$使得 $r_0(B_\xi \times B_{\xi^\perp}) \subseteq K$。对于 $t \geqslant 0$，令 $L_t = r_0(B_\xi \times e^t B_{\xi^\perp})$。于是

$$L_t \subseteq e^t r_0(B_\xi \times B_{\xi^\perp}) \subseteq e^t K \quad \text{and} \quad \mathrm{P}_\xi L_t = r_0 B_\xi \subseteq \mathrm{P}_\xi K.$$

因此，对于 $t > 1$，$h_K^{1-\frac{1}{t}} h_{L_t}^{\frac{1}{t}} \leqslant h_K^{1-\frac{1}{t}}(e^t h_K)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上，而 $h_K^{1-\frac{1}{t}} h_{L_t}^{\frac{1}{t}} \leqslant h_K$ 在 $\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi$ 上。由 Wulff 形的定义可得

$$K^{1-\frac{1}{t}} L_t^{\frac{1}{t}} = [h_K^{1-\frac{1}{t}} h_{L_t}^{\frac{1}{t}}] \subseteq eK \cap (\mathrm{P}_\xi K + \xi^\perp) =: D.$$

由 (L) 以及 $\mathcal{F}$ 的单调性和齐次性可得

$$\log \frac{\mathcal{F}(D)}{\mathcal{F}(K)} \geqslant \frac{1}{t} \log \frac{\mathcal{F}(L_t)}{\mathcal{F}(K)} = \frac{1}{t} \log \frac{r_0\, \mathcal{F}(B_\xi \times e^t B_{\xi^\perp})}{\mathcal{F}(K)}.$$

令 $t \to \infty$，并利用 (C) 和 $r = e^t$ 可得

$$\log \frac{\mathcal{F}(D)}{\mathcal{F}(K)} \geqslant 1 - c_k. \tag{5.3}$$

由于 $K \subseteq D \subseteq \mathrm{P}_\xi K + \xi^\perp$，我们有 $\mathrm{P}_\xi D = \mathrm{P}_\xi K$。若 $D = sK$ 对某个 $s > 0$成立，则该恒等式迫使 $s = 1$，而 $D \cap \xi^\perp = e(K \cap \xi^\perp)$迫使 $s = e$。因此， K 和 D 不是伸缩体。由 $\eta_K(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$、在 $\mathbb{S}^{n-1}$上的 $h_D \leqslant e h_K$、在 $\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi$上的 $h_D = h_K$、引理 5.1 中的严格不等式以及 (5.3)，可得

$$\begin{aligned} 1 - \eta_K(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi) = \eta_K(\mathbb{S}^{n-1} \setminus \xi) &\geqslant \int_{\mathbb{S}^{n-1} \setminus \xi} \log \frac{h_D}{h_K}\, d\eta_K \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log \frac{h_D}{h_K}\, d\eta_K > \log \frac{\mathcal{F}(D)}{\mathcal{F}(K)} \geqslant 1 - c_k. \end{aligned}$$

因此， $\eta_K(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi) < c_k$，如所要求。

(ii) 令 $\mu \in \mathcal{P}_c$。定义

$$\Phi_\mu(K) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log h_K \, d\mu - \log \mathcal{F}(K), \quad \text{for } K \in \mathcal{K}_e^n.$$

我们将 (ii) 的证明分为三个步骤。

步骤 1. 估计 Φ_μ。

记 $d(u, \xi)$ 为从 u 到 ξ的欧几里得距离。我们声称存在 $\delta > 0$和 $\varepsilon \in (0,1)$，使得

$$\mu(\{u \in \mathbb{S}^{n-1} : d(u, \xi) \leqslant \varepsilon\}) \leqslant c_k - \delta \tag{5.4}$$

对每个 k 维子空间 ξ of $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k < n$。否则，由于格拉斯曼流形的紧性，存在 k 维子空间 $\xi_j \to \xi$, $1 \leqslant k < n$，使得

$$\mu(\{u \in \mathbb{S}^{n-1} : d(u, \xi_j) \leqslant \frac{1}{j}\}) > c_k - \frac{1}{j}.$$

固定 $r > 0$ 后，这些逐渐缩小的管状邻域最终包含于 $\{u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 中： $d(u, \xi) \leqslant r\}$。令$j \to \infty$，则有

$$\mu(\{u \in \mathbb{S}^{n-1} : d(u, \xi) \leqslant r\}) \geqslant c_k.$$

当 $r \to 0^+$ 时，这些闭邻域递减至 $\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi$。由上连续性，$\mu(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi) \geqslant c_k$，这与 $\mu \in \mathcal{P}_c$ 矛盾。

对于 $K \in \mathcal{K}_e^n$，选取 e_i 关于 $\mathrm{J}K$ 对应于 a_i的正交主方向，并令 $\xi_k =$张成 $\{e_1, \ldots, e_k\}$ 对于 $1 \leqslant k < n$。由于 $\mathrm{J}K \subseteq K$，我们有 $h_K \geqslant a_1$和$h_K(u) \geqslant a_{k+1} d(u, \xi_k)$。对于 $a_k \leqslant r \leqslant a_{k+1}$，因此（5.4）意味着

$$\mu(\{u : h_K(u) > \varepsilon r\}) \geqslant 1 - c_k + \delta.$$

根据 Fubini 定理 根据 's 定理、上述估计、 $c_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log h_K \, d\mu &= \log(\varepsilon a_1) + \int_{a_1}^{\infty} \mu(\{u : h_K(u) > \varepsilon r\}) \frac{dr}{r} \\ &\geqslant \log(\varepsilon a_1) + \sum_{k<n} (1 - c_k + \delta) \log \frac{a_{k+1}}{a_k} \\ &= \sum_i b_i \log a_i + \delta \log \frac{a_n}{a_1} + \log \varepsilon.\end{aligned}$$

将 (J) 中的指数取为 $\frac{\delta}{2}$ 并应用前面的估计，我们得到

$$\Phi_\mu(K) \geqslant \frac{\delta}{2} \log \frac{a_n}{a_1} - C,$$

其中， $C > 0$ 与 K无关。特别地， Φ_μ 有下界。

步骤 2。 求一个极小化元。

令 $\{K_j\}$ 为 Φ_μ的极小化序列。由于 μ是概率测度且 $\mathcal{F}$是一次齐次的，对于 $r > 0$，有 $\Phi_\mu(rK) = \Phi_\mu(K)$。因此，不妨设$a_1(K_j) = 1$。由于 $\Phi_\mu(K_j)$有上界，步骤 1 中的估计给出 $\sup_j a_n(K_j) < \infty$。John 定理（例如参见 [78, 定理 10.12.2]）继而给出

$$B^n \subseteq K_j \subseteq RB^n$$

对于固定的 R。根据布拉施克选择定理， $\{K_j\}$ 有一个收敛子序列，仍记为 $\{K_j\}$，其极限为 $K \in \mathcal{K}_e^n$。由 $\log h_{K_j}$的一致收敛性以及引理 2.1，可知

$$\Phi_\mu(K) = \lim_{j\to\infty} \Phi_\mu(K_j) = \inf_{L\in\mathcal{K}_e^n} \Phi_\mu(L).$$

步骤 3。 证明 $\eta_K = \mu$。

对于 $g \in C_e(\mathbb{S}^{n-1})$，令 $K_t = [h_K e^{tg}]$。考虑函数

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\log h_K + tg) \, d\mu - \log \mathcal{F}(K_t).$$

由于 K 使 Φ_μ 和 $h_{K_t} \leqslant h_K e^{tg}$达到最小值，因此我们有

$$\varphi(0) = \Phi_\mu(K) \leqslant \Phi_\mu(K_t) \leqslant \varphi(t).$$

因此 φ 在 $t = 0$处取得最小值。由 (V)，

$$0 = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g \, d\mu - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g \, d\eta_K.$$

由于 g 是任意的，且两个测度都是偶的， $\eta_K = \mu$。 □

6. 几何泛函的对数 Minkowski 问题

在本节中，我们通过应用定理1.3 、定理5.2 和5.3来证明。条件（L）由定理1.2得出，因此只需验证（V）、（J）和（C）。

6.1. 锥谱 zeta 测度

设 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $\{\phi_j\}$ 为第 2.3节中的狄利克雷特征基。对于 $\sigma > \frac{n}{2}$，对 Borel $\omega \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ 定义 K 的锥谱 zeta 测度如下

$$\zeta_\sigma(K,\omega) = \sigma \int_{\nu_K^{-1}(\omega)} h_K(\nu_K(x)) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(K)^{-\sigma-1} |\partial_\nu \phi_j(x)|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}(x). \tag{6.1}$$

根据 Grisvard 正则性定理 [37, 定理 3.2.1。2]，$\phi_j \in H^2(\operatorname{int} K)$，因此 $\nabla\phi_j$的边界迹的法向分量 $\partial_\nu\phi_j$属于 $L^2(\partial K)$。注意，$\zeta_\sigma(K,\ \cdot)$ 关于 S_K绝对连续。该和与正交归一特征基的选择无关。如果 $K = -K$，反射保持每个特征空间不变，因此该测度是偶的。

设 u 是 $\operatorname{int} K$ 上的 Dirichlet特征函数，其特征值为 λ，且 X 是定义在 K的某个开邻域上的 C^1 向量场。由于 u的边界迹为零，∇u的边界迹为 $(\partial_\nu u)\nu_K$。将 $\Delta u = -\lambda u$ 代入 Rellich 公式 [3, 第 223 页，公式 (1)]，并对 $-\lambda X \cdot \nabla(u^2)$ 分部积分，可得

$$\int_{\partial K} (X \cdot \nu_K) |\partial_\nu u|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_K \left(2\langle DX \nabla u, \nabla u \rangle - (\operatorname{div} X) |\nabla u|^2 + \lambda (\operatorname{div} X) u^2 \right) dx, \tag{6.2}$$

其中 DX 是 X的雅可比矩阵。

取 $X(x) = x$和 $u = \phi_j$于（6.2）中，得到 $\int_{\partial K} h_K(\nu_K) |\partial_\nu \phi_j|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = 2\lambda_j(K)$。由（6.1）及单调收敛，

$$\zeta_\sigma(K, \mathbb{S}^{n-1}) = 2\sigma \zeta_\sigma(K) < \infty.$$

由于 $\zeta_\sigma(K, \mathbb{S}^{n-1}) < \infty$ 且 $\min_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K > 0$，级数（6.1）在 $L^1(\partial K)$中收敛。

引理 6.1。设 $\sigma > \frac{n}{2}$。若 $K_i \to K$ 在 $\mathcal{K}_o^n$中随 $i \to \infty$变化，则 $\zeta_\sigma(K_i, \cdot) \to \zeta_\sigma(K, \cdot)$ 弱收敛。

证明。记 $\Omega = \operatorname{int} K$。令 $R > 0$ 满足 $K_i, K \subseteq RB^n$ 对所有 i .

步骤 1。由于 $K_i \to K$在 $\mathcal{K}_o^n$中，我们可以选择 $\varepsilon_i \to 0$使得 $(1-\varepsilon_i)K \subseteq K_i \subseteq (1+\varepsilon_i)K$对于较大的 i成立。由区域单调性和齐次性（2.2），我们有

$$\frac{\lambda_j(K)}{(1+\varepsilon_i)^2} \leqslant \lambda_j(K_i) \leqslant \frac{\lambda_j(K)}{(1-\varepsilon_i)^2}.$$

因此，对于固定的 j, $\lambda_j(K_i) \to \lambda_j(K)$，当 $i \to \infty$ 时。

将正交归一的狄利克雷特征基 $\{\phi_{j,i}\}_{j\geqslant 1}$ 从 K_i 通过零延拓至 RB^n。对于固定的j，这些延拓在 H^1中有界，因为$\|\phi_{j,\ i}\|_{H^1}^2 = 1 + \lambda_j(K_i) \to 1 + \lambda_j(K)$。根据27

Rellich–Kondrachov定理 [36, 定理7.22] 以及对角线论证，从(K_i)的任意子序列中，我们都可以提取一个子序列(K_{i_k})，使得对于每个 j，$\phi_{j,\,i_k} \to v_j$ 在 H^1 中弱收敛，并在 L^2 中强收敛，当 $k \to \infty$时。

若 $A \subseteq RB^n \setminus K$是紧集，则当 i充分大时有 $A \cap K_i = \varnothing$，因此$\phi_{j,\,i} = 0$在 A上成立。因此， $v_j = 0$在 K之外几乎处处成立。由于 Ω 是 Lipschitz 的， $v_j|_\Omega \in H_0^1($Ω$)$ [37, 推论 1.4.4.5]。对于 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，当 i充分大时，我们有 $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \operatorname{int} K_i$。用 φ 测试$\phi_{j,\,i_k}$ 的特征值方程，并令 $k \to \infty$，得到

$$\int_\Omega \nabla v_j \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_j(K) \int_\Omega v_j \varphi \, dx, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{6.3}$$

此外，强 L^2 收敛给出 $\|v_j\|_2 = 1$。由于 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，弱方程（6.3）对 $\varphi = v_j$也成立。因此

$$\|\nabla \phi_{j,i_k}\|_2^2 = \lambda_j(K_{i_k}) \longrightarrow \lambda_j(K) = \|\nabla v_j\|_2^2,$$

因此$\phi_{j,\,i_k} \to v_j$ 在 H^1 中强收敛。

步骤 2。 对于 $D \in \mathcal{K}_o^n$ 和 Borel $A \subseteq \partial D$，定义

$$\gamma_D(A) = \sigma \int_A h_D(\nu_D(x)) \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(D)^{-\sigma-1} |\partial_\nu \phi_j(x)|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

其中， $\{\phi_j\}_{j \geqslant 1}$ 是 $\operatorname{int} D$ 上的正交归一狄利克雷特征基。我们证明 $\gamma_{K_i} \to \gamma_K$在 RB^n上弱收敛。

设 u 是 $\operatorname{int} D$ 上经 L^2归一化的 Dirichlet特征函数。对于 $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$，记

$$I_D(u, g) = \int_{\partial D} g(x)(x \cdot \nu_D) |\partial_\nu u|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

将 $X(x) = g(x)x$ 代入 Rellich恒等式（6.2），并利用步骤 1 中的强 H^1 收敛性，可得 $I_{K_{i_k}}(\phi_{j,\,i_k},\ g) \to I_K(v_j,\ g)$。

γ_D 的定义给出

$$\int_{\partial D} g \, d\gamma_D = \sigma \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(D)^{-\sigma-1} I_D(\phi_j, g).$$

根据 Rellich恒等式（6.2），$I_D(\phi_j,\ 1) = 2\lambda_j(D)$。由于 $D \subseteq RB^n$ 对于 $D = K_i$ 或 K，因此可得

$$\sigma \lambda_j(D)^{-\sigma-1} |I_D(\phi_j, g)| \leqslant 2\sigma \|g\|_{C(RB^n)} \lambda_j(D)^{-\sigma} \leqslant 2\sigma \|g\|_{C(RB^n)} \lambda_j(RB^n)^{-\sigma}.$$

由于 $\zeta_\sigma(RB^n) < \infty$，我们可以令 $k \to \infty$ 在对 j的求和中逐项进行。由强 v_j收敛性，仍保持正交归一 L^2。因此 $\{v_j : \lambda_j(K) = \lambda\}$ 是28

λ特征空间。由于该和在此特征空间中的正交基变换下保持不变，因此可得

$$\sum_{\lambda_j(K)=\lambda} I_K(v_j, g) = \sum_{\lambda_j(K)=\lambda} I_K(\phi_j, g).$$

因此 $\int_{\partial K_{i_k}} g\, d\gamma_{K_{i_k}} \to \int_{\partial K} g\, d\gamma_K$。

由于初始子列是任意的，因此完整序列也具有相同的极限。特别地，取 $g = 1$，我们有 $\gamma_{K_i}(\partial K_i) \to \gamma_K(\partial K)$ 当 $i \to \infty$。给定 $g \in C(RB^n)$ 和 $\varepsilon > 0$，选取 $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|g - h\|_{C(RB^n)} < \varepsilon$。由于 h 的积分收敛，根据三角不等式可得

$$\limsup_{i\to\infty} \left| \int_{\partial K_i} g\, d\gamma_{K_i} - \int_{\partial K} g\, d\gamma_K \right| \leqslant \varepsilon \lim_{i\to\infty} \left(\gamma_{K_i}(\partial K_i) + \gamma_K(\partial K)\right) = 2\varepsilon \gamma_K(\partial K).$$

令 $\varepsilon \to 0$，我们得出 $\gamma_{K_i} \to \gamma_K$ 在 RB^n 上弱收敛。

步骤 3。 证明 $\zeta_\sigma(K_i, \cdot) \to \zeta_\sigma(K, \cdot)$ 弱收敛。

令 $\widehat{\gamma}_{K_i} = (\mathrm{id}\ \nu_{K_i})_{\#}\gamma_{K_i}$。根据步骤 2，$\sup_i \widehat{\gamma}_{K_i}(RB^n \times \mathbb{S}^{n-1}) = \sup_i \gamma_{K_i}(\partial K_i) < \infty$。由于$RB^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是紧集，每个子序列都有一个弱收敛的进一步子序列。由于 $\gamma_{K_i} \to \gamma_K$ 弱收敛，任意这样的极限 $\widehat{\gamma}$ 满足

$$\int_{RB^n\times\mathbb{S}^{n-1}} f(x)\, d\widehat{\gamma}(x,u) = \int_{\partial K} f(x)\, d\gamma_K(x) \qquad \text{for } f \in C(RB^n).$$

由于对于 $\widehat{\gamma}_{K_i}$-几乎处处的 (x, u)，有 $x \cdot u = h_{K_i}(u)$，因此

$$\int_{RB^n\times\mathbb{S}^{n-1}} |x\cdot u - h_K(u)|\, d\widehat{\gamma}_{K_i}(x,u) \leqslant \|h_{K_i} - h_K\|_\infty\, \gamma_{K_i}(\partial K_i) \longrightarrow 0.$$

由于被积函数是连续的，$x \cdot u = h_K(u)$ 对于 $\widehat{\gamma}$-几乎处处的 (x, u)。测度γ_K 相对于边界面积是绝对连续的，因此 $\gamma_K(\partial K \setminus \partial' K) = 0$。对于$x \in \partial' K$，$x \cdot u = h_K(u)$ 意味着 $u = \nu_K(x)$。因此，对于 $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$，(6.1) 给出

$$\int_{RB^n\times\mathbb{S}^{n-1}} g(u)\, d\widehat{\gamma}(x,u) = \int_{\partial K} g(\nu_K(x))\, d\gamma_K(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(u)\, d\zeta_\sigma(K,u).$$

由于 $\widehat{\gamma}$ 是任意的子列弱极限，$\zeta_\sigma(K_i, \cdot) \to \zeta_\sigma(K, \cdot)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上$i \to \infty$弱收敛。□

6.2. 变分公式

在本小节中，我们验证 (V) 对于 $\mathcal{F} \in \{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \zeta_\sigma^{\frac{1}{2\sigma}}, \tau^{\frac{1}{n+2}}, I_q^{\frac{1}{n+q-1}}\}$成立。我们先从 ζ_σ的变分公式开始。

引理 6.2。 对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$, $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$，以及 $\sigma > \frac{n}{2}$，

$$\frac{d}{dt}\zeta_\sigma([h_K + tf])\Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f(u)}{h_K(u)}\, d\zeta_\sigma(K,u). \tag{6.4}$$

证明。 我们将证明分为三个步骤。

步骤 1。 证明光滑体的公式。

设 ∂K 是具有正高斯曲率的光滑体，且 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$。当 $|t|$ 足够小时，$h_K + tf$ 是与 K_t 同类的凸体的支撑函数。具有外单位法向量 u 的点 $x_t(u) \in \partial K_t$ 为

$$x_t(u) = x_0(u) + t\big(\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u) + f(u)u\big).$$

设 V 是边界场 $V(x_0(u)) = \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u) + f(u)u$ 的光滑延拓，并将其延拓到 K 的一个邻域上。则 $K_t = (\mathrm{id} + tV)(K)$。

对于特征值 λ 属于 K，在 El Soufi–Ilias 的变分公式 [32,引理 3.1 和 3.2]中对其特征空间取迹可得

$$\frac{d}{dt} \sum_{j:\, \lambda_j(K)=\lambda} \lambda_j(K_t)\bigg|_{t=0} = -\int_{\partial K} f(\nu_K) \sum_{j:\, \lambda_j(K)=\lambda} |\partial_\nu \phi_j|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

取 N，使得 $\lambda_N(K) < \lambda_{N+1}(K)$。将前述恒等式乘以 $-\sigma\lambda^{-\sigma-1}$，并对不同特征值 $\lambda \leqslant \lambda_N(K)$ 求和，得到

$$\frac{d}{dt} \sum_{j\leqslant N} \lambda_j(K_t)^{-\sigma}\bigg|_{t=0} = \sigma \int_{\partial K} f(\nu_K) \sum_{j\leqslant N} \lambda_j(K)^{-\sigma-1} |\partial_\nu \phi_j|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{6.5}$$

写作 $c = \big\| \frac{f}{h_K} \big\|_\infty$。于是 $(1-c|t|)K \subseteq K_t \subseteq (1+c|t|)K$ 当 $|t|$足够小时。当 $t \neq 0$足够小时，由 (2.2) 可得

$$\sum_{j>N} \left| \frac{\lambda_j(K_t)^{-\sigma} - \lambda_j(K)^{-\sigma}}{t} \right| \leqslant C \sum_{j>N} \lambda_j(K)^{-\sigma} \longrightarrow 0 \qquad \text{as } N \to \infty,$$

其中 C 与 t 和 N无关，且极限由 $\zeta_\sigma(K) < \infty$得出。(6.1) 中的级数在 $L^1(\partial K)$ 中收敛。因此，在 (6.5) 中令 $N \to \infty$ 沿着满足 $\lambda_N(K)$ 的指标趋近， $<\lambda_{N+1}(K)$ 得到 (6.4)。

步骤 2。 证明一个平均值公式。

对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$，记 $d\mu_\zeta(K,u) = \frac{1}{h_K(u)}\, d\zeta_\sigma(K,u)$。由于当 $K_i \to K$ 属于 $\mathcal{K}_o^n$ 时， 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上一致地 $\mathcal{K}_o^n$，引理 6.1 推出 μ_ζ 的弱连续性。

对于 K， $L \in \mathcal{K}_o^n$，令 $M_\theta = (1-\theta)K + \theta L$。则 $h_{M_\theta} = h_K + \theta(h_L - h_K)$。假设 K和 L 具有光滑的正高斯曲率。根据步骤 1，取 $f = h_L - h_K$，并对 $s \mapsto \zeta_\sigma(M_s)$应用中值定理，可得存在 $\theta \in (0,\ 1)$，使得

$$\zeta_\sigma(L) - \zeta_\sigma(K) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (h_L(u) - h_K(u))\, d\mu_\zeta(M_\theta, u). \tag{6.6}$$

对于一般的 K， L，选取光滑逼近 $K_i \to K$ 和 $L_i \to L$，使其具有正高斯曲率 [78, 第 3 节。4]。取一个子序列后，我们可以假设相应的参数 θ_i 趋于某个 $\theta \in [0,1]$。于是 $(1-\theta_i)\ K_i + \theta_i L_i \to M_\theta$ 并且30

$h_{L_i} - h_{K_i} \to h_L - h_K$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$上一致地。由 ζ_σ 的连续性以及 μ_ζ的弱连续性，（6.6）对该 θ成立。

步骤 3。将变分公式推广到一般的 K 和连续的 f。

令 $c = \left\| \frac{f}{h_K} \right\|_\infty$。对于 $t \neq 0$ 满足 $c|t| < 1$的情形，令 $K_t = [h_K + tf]$ 以及 $f_t = \frac{h_{K_t} - h_K}{t}$。则 $(1 - c|t|)\, K \subseteq K_t \subseteq (1 + c|t|)\, K$，从而 $\|f_t\|_\infty \leqslant c\|h_K\|_\infty$。由 6.6 以及 $L = K_t$，存在 $\theta_t \in [0, 1]$ 使得

$$\frac{\zeta_\sigma(K_t) - \zeta_\sigma(K)}{t} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_t(u)\, d\mu_\zeta(M_t, u),$$

其中 $M_t = (1 - \theta_t)K + \theta_t K_t$。由于 $\|h_{M_t} - h_K\|_\infty = \theta_t |t|\, \|f_t\|_\infty \to 0$，我们有 $M_t \to K$当 $t \to 0$时。

根据 S_K， $t \to 0$几乎处处满足 $f_t \to f$（例如参见 [47, 引理 3.3]和 [77, 定理 3.5]）。由于 $\mu_\zeta(K, \cdot)$相对于 S_K是绝对连续的，因此该收敛性相对于 $\mu_\zeta(K, \cdot)$也几乎处处成立。

取定 $\varepsilon > 0$，使得 $c\varepsilon < 1$。由 $K_0 = K$， K_t 的定义给出 $(1 - \theta)K_{t_0} + \theta K_{t_1} \subseteq K_{(1-\theta)t_0 + \theta t_1}$，其中 $t_0, t_1 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ 和 $\theta \in [0, 1]$。因此， $t \mapsto h_{K_t}(u)$是凹函数，并且 $f_\varepsilon \leqslant f_t \leqslant f_{-\varepsilon}$对 $0 < |t| \leqslant \varepsilon$成立。对 $\mu_\zeta(M_t, \cdot)$进行积分，得到

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_\varepsilon(u)\, d\mu_\zeta(M_t, u) \leqslant \frac{\zeta_\sigma(K_t) - \zeta_\sigma(K)}{t} \leqslant \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_{-\varepsilon}(u)\, d\mu_\zeta(M_t, u).$$

由于 $f_{\pm\varepsilon}$ ar e 连续，且当 $t \to 0$ 时， $\mu_\zeta(M_t, \cdot)$ 弱收敛于 $\mu_\zeta(K, \cdot)$，则有

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_{\pm\varepsilon}(u)\, d\mu_\zeta(M_t, u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_{\pm\varepsilon}(u)\, d\mu_\zeta(K, u).$$

当 $\varepsilon \to 0^+$时，控制收敛定理给出共同极限 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u)\, d\mu_\zeta(K, u)$。因此，(6.4) 成立。□

现在我们转向与另外三个泛函相关的测度。

按照 Crasta 与 Fragal`a [30, 定义 1]，，将 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 的锥特征值测度与锥扭转测度定义为

$$\lambda_1(K, \omega) = \int_{\nu_K^{-1}(\omega)} h_K(\nu_K(x)) |\partial_\nu \phi_1(x)|^2\, d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

$$\tau(K, \omega) = \int_{\nu_K^{-1}(\omega)} h_K(\nu_K(x)) |\nabla u_K(x)|^2\, d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

对于 Borel $\omega \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$。这里， ∇u_K 的边界值取为非切向极限。按照 Lutwak、Xi、Yang 和 Zhang 的做法， [63, 定义 4.1 和 (2.11)], 定义了 K 的 q阶锥弦测度，其中 $1 < q < n + 1$ 满足

$$G_q(K, \omega) = \frac{2q(q-1)}{n\omega_n(n+q-1)} \int_{\nu_K^{-1}(\omega)} h_K(\nu_K(x)) \int_K |x - y|^{q-1-n}\, dy\, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

为验证(V)，令 $K \in \mathcal{K}_o^n$，$g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$。记 $K_t = [h_K e^{tg}]$ 为 $t \in \mathbb{R}$。对于 $\mathcal{F} \in \{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \zeta_\sigma^{\frac{1}{2\sigma}}, \tau^{\frac{1}{n+2}}, I_q^{\frac{1}{n+q-1}}\}$ 且 $|t|$ 充分小时，引理2.1 给出

$$\big|\mathcal{F}(K_t) - \mathcal{F}([h_K + th_K g])\big| \leqslant \mathcal{F}([h_K + th_K g]) \left\| \frac{e^{tg}}{1+tg} - 1 \right\|_\infty = O(t^2).$$

因此 $\frac{d}{dt}\mathcal{F}(K_t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathcal{F}([h_K + th_K g])\big|_{t=0}$只要右侧的导数存在。因此，在公式中取 $f = h_K g$ Jerison [47, 定理 7。5], 引理 6.2，以及 Colesanti–Fimiani 公式 [25, 推论 42]，利用链式法则即可得到下面前三个变分公式。第四个公式则由 Lutwak–Xi–Yang–Zhang 公式[63,方程 (5.11)]给出。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\log\big(\lambda_1(K_t)^{-\frac{1}{2}}\big)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2\lambda_1(K)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\, d\lambda_1(K,u),\\
\frac{d}{dt}\log\big(\zeta_\sigma(K_t)^{\frac{1}{2\sigma}}\big)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2\sigma\zeta_\sigma(K)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\, d\zeta_\sigma(K,u),\\
\frac{d}{dt}\log\big(\tau(K_t)^{\frac{1}{n+2}}\big)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{(n+2)\tau(K)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\, d\tau(K,u),\\
\frac{d}{dt}\log\big(I_q(K_t)^{\frac{1}{n+q-1}}\big)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{I_q(K)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\, dG_q(K,u).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

若 $K \in \mathcal{K}_e^n$且 g为奇函数，则 $K_{-t} = -K_t$，因此 $\mathcal{F}(K_{-t}) = \mathcal{F}(K_t)$。因此，式 (6.7) 中的导数在 g为奇函数时均为零，故这四个测度都是偶测度。这验证了四个归一化泛函的 (V) 条件。

6.3. 几何泛函的估计

在本小节中，我们验证 （J）和 （C）对于 $\mathcal{F} \in \{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \zeta_\sigma^{\frac{1}{2\sigma}}, \tau^{\frac{1}{n+2}}, I_q^{\frac{1}{n+q-1}}\}$成立。

对于 $K \in \mathcal{K}_e^n$，令 $0 < a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$为其 John 椭球 $\mathrm{J}K$的半轴长度。在主坐标下，写作 $Q = \prod_{i=1}^n [-a_i, a_i]$。根据 John 定理（例如参见 [78,定理10.12。2]），我们有

$$\frac{1}{\sqrt{n}} Q \subseteq \mathrm{J}K \subseteq K \subseteq \sqrt{n}\,\mathrm{J}K \subseteq \sqrt{n}\,Q.$$

由于 $\mathcal{F}$是单调的且一次齐次，这些包含关系给出 $\mathcal{F}(K) \asymp \mathcal{F}(Q)$。这里的 $f \asymp g$ 表示，对于某个与 a_1、……、a_n无关的 $C \geqslant 1$，有 $C^{-1} g \leqslant f \leqslant Cg$。

引理6.3。对于 $\sigma > \frac{n}{2}$，

$$\lambda_1(Q) \asymp a_1^{-2}, \qquad \zeta_\sigma(Q) \asymp |Q| a_1^{2\sigma - n}, \qquad \tau(Q) \asymp |Q| a_1^2.$$

证明。 根据分离变量法， $\lambda_1(Q)$ 是区间 $(-a_i,\ a_i)$ 的第一狄利克雷特征值之和。因此 $\lambda_1(Q) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi^2}{4a_i^2} \asymp a_1^{-2}$，因为 $a_1 = \min_i a_i$。

对于 $t>0$，（3.13）和（3.14）给出

$$Z_Q(t) \leqslant e^{-\frac{t}{2}\lambda_1(Q)} Z_Q\Big(\frac{t}{2}\Big) \leqslant |Q|(2\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{t}{2}\lambda_1(Q)}.$$

由（3.19）可得

$$\zeta_\sigma(Q) \leqslant \frac{|Q|}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty t^{\sigma-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}\lambda_1(Q)}\, dt = C_{n,\sigma}|Q|\lambda_1(Q)^{\frac{n}{2}-\sigma} \asymp |Q|a_1^{2\sigma-n}.$$

对于扭转刚度，由（3.20）和 $\lambda_j(Q) \geqslant \lambda_1(Q)$，有

$$\tau(Q) = \sum_{j=1}^\infty \frac{\big(\int_Q \phi_j\, dx\big)^2}{\lambda_j(Q)} \leqslant \frac{1}{\lambda_1(Q)} \sum_{j=1}^\infty \Big(\int_Q \phi_j\, dx\Big)^2 = \frac{|Q|}{\lambda_1(Q)} \asymp |Q|a_1^2.$$

最后一个等号由 Parseval 恒等式得到

$$\sum_{j=1}^\infty \Big(\int_Q \phi_j\, dx\Big)^2 = \sum_{j=1}^\infty \big|\langle 1, \phi_j\rangle_{L^2(Q)}\big|^2 = \|1\|_{L^2(Q)}^2 = |Q|.$$

对于下界，令 $U=[-a_1,a_1]^n$。则 Q 包含 $N=\prod_{i=1}^n \big\lfloor \frac{a_i}{a_1}\big\rfloor \asymp |Q|a_1^{-n}$个 U 的平移副本，且它们的内部互不相交。对于每个这样的平移副本 D 和 $t>0$，狄利克雷热核的区域单调性（见第 2.3节）蕴含

$$\int_D k_t^Q(x,x)\, dx \geqslant \int_D k_t^D(x,x)\, dx = Z_D(t) = Z_U(t),$$
$$\int_{D^2} k_t^Q(x,y)\, dx\, dy \geqslant \int_{D^2} k_t^D(x,y)\, dx\, dy = Q_D(t) = Q_U(t).$$

对这 N 个立方体求和，并应用（3.19）和（3.21），得到

$$\zeta_\sigma(Q) \geqslant N\zeta_\sigma(U) \asymp |Q|a_1^{2\sigma-n}, \qquad \tau(Q) \geqslant N\tau(U) \asymp |Q|a_1^2,$$

where $\zeta_\sigma(U) \asymp a_1^{2\sigma}$并且 $\tau(U) \asymp a_1^{n+2}$由齐次性得到。证明完毕 f. □

下一引理中关于 $I_q(Q)$的估计由 B¨or¨oczky–Kov´acs–Mui–Zhang [12, 引理 4.1] 中的对偶体积估计得出。对于非整数 q，Lutwak–Xi–Yang–Zhang [63, 引理 7.3]中的椭球估计已经给出了上界。这里我们给出一个直接证明。

引理6.4。令 $1<q<n+1$ 和 $\ell=\lfloor q\rfloor$。如果 $\ell<q<\ell+1$，则

$$I_q(Q) \asymp |Q|\Big(\prod_{i<\ell} a_i\Big) a_\ell^{q-\ell}. \tag{6.8}$$

如果 $q=\ell$，则

$$I_q(Q) \asymp |Q|\Big(\prod_{i<\ell} a_i\Big)\Big(1+\log\frac{a_\ell}{a_{\ell-1}}\Big). \tag{6.9}$$

证明。由（2.3），只需估计 $E_{n+1-q}(Q)$。根据第 2.2 节中的定义以及富比尼定理，我们有

$$\begin{aligned} E_{n+1-q}(Q) &= \int_Q \int_Q |x-y|^{q-n-1}\, dy\, dx \\ &= (n+1-q) \int_Q \int_Q \int_{|x-y|}^{\infty} r^{q-n-2}\, dr\, dy\, dx \\ &= (n+1-q) \int_0^{\infty} r^{q-n-2} \int_Q \int_{Q\cap B(x,r)} dy\, dx\, dr \\ &= (n+1-q) \int_0^{\infty} r^{q-n-2} \int_Q |Q\cap B(x,r)|\, dx\, dr, \end{aligned}$$

其中 $B(x,\ r) = x + rB^n$。

为估计 $|Q\cap B(x,\ r)|$，注意到

$$x + \frac{r}{\sqrt{n}}[-1,1]^n \subseteq B(x,r) \subseteq x + r[-1,1]^n.$$

对于 $x\in Q$ 和 $s>0$，有 $\min\{a_i,s\} \leqslant \big|[-a_i,a_i]\cap[x_i-s,x_i+s]\big| \leqslant 2\min\{a_i,s\}$。因此

$$\big|Q\cap(x+[-s,s]^n)\big| = \prod_{i=1}^n \big|[-a_i,a_i]\cap[x_i-s,x_i+s]\big| \asymp \prod_{i=1}^n \min\{a_i,s\}.$$

取 $s = \frac{r}{\sqrt{n}}$ 和 $s = r$ 可得 $|Q\cap B(x,\ r)| \asymp \prod_{i=1}^n \min\{a_i,r\}$，对 $x\in Q$ 和 $r>0$ 一致成立。因此

$$I_q(Q) \asymp |Q| \int_0^{\infty} H(r)\,\frac{dr}{r}, \qquad H(r) = r^{q-n-1}\prod_{i=1}^n \min\{a_i,r\}. \tag{6.10}$$

记 $a_0 = 0$、$a_{n+1} = \infty$，并定义 $H(0) = H(\infty) = 0$。对于 $a_{j-1} < r < a_j$、$1\leqslant j\leqslant n+1$，有 $H(r) = \big(\prod_{i<j} a_i\big) r^{q-j}$。因此，$H$ 在 $[0,a_\ell]$ 上非递减，在 $[a_\ell,\infty$ 上非递增）。其最大值为 $M = H(a_\ell) = \big(\prod_{i<\ell} a_i\big) a_\ell^{q-\ell}$。对于 $j\neq q$，

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} H(r)\,\frac{dr}{r} = \frac{|H(a_j)-H(a_{j-1})|}{|q-j|} \asymp |H(a_j)-H(a_{j-1})|.$$

对 $j\neq q$ 求和，我们得到

$$\sum_{j\neq q} \int_{a_{j-1}}^{a_j} H(r)\,\frac{dr}{r} \asymp \sum_{j\neq q} |H(a_j)-H(a_{j-1})| = 2M.$$

如果 $\ell < q < \ell+1$，则

$$\int_0^{\infty} H(r)\,\frac{dr}{r} = \sum_{j\neq q} \int_{a_{j-1}}^{a_j} H(r)\,\frac{dr}{r} \asymp M.$$

如果 $q=\ell$，则在 $[a_{\ell-1},a_\ell]$ 上有 $H=M$。因此

$$\int_0^\infty H(r)\,\frac{dr}{r}\asymp M+M\int_{a_{\ell-1}}^{a_\ell}\frac{dr}{r}=M\Big(1+\log\frac{a_\ell}{a_{\ell-1}}\Big).$$

将这些估计代入（6.10）分别得到（6.8）和（6.9）。 □

现在验证（J）和（C）。对于四个归一化泛函，表1 列出了由引理 b_i 在（J）中得到的指数，这些引理为6.3 和6.4。

$\mathcal{F}$	$(b_1,\dots,b_n)$	$c_k=\sum_{i=1}^k b_i$
$\lambda_1^{-\frac12}$	$(1,0,\dots,0)$	1
$\zeta_\sigma^{\frac{1}{2\sigma}}$	$\dfrac{(2\sigma-n+1,1,\dots,1)}{2\sigma}$	$1-\dfrac{n-k}{2\sigma}$
$\tau^{\frac{1}{n+2}}$	$\dfrac{(3,1,\dots,1)}{n+2}$	$\dfrac{k+2}{n+2}$
$I_q^{\frac{1}{n+q-1}}$	$\dfrac{(1+\text{最小}\{i,q-1\}-\text{最小}\{i-1,q-1\})_{i=1}^n}{n+q-1}$	$\dfrac{k+\text{最小}\{k,q-1\}}{n+q-1}$

TABLE 1

对于 $\mathcal{F}\in\{\lambda_1^{-\frac12},\zeta_\sigma^{\frac{1}{2\sigma}},\tau^{\frac12}\}$，引理 6.3给出 $\mathcal{F}(Q)\asymp\prod_{i=1}^n a_i^{b_i}$。根据引理 6.4，当 $q\notin\mathbb{Z}$ 时，同样的1估计也适用于 $\mathcal{F}=I_q^{n+q-1}$。如果 $q=\ell\in\mathbb{Z}$，则

$$\mathcal{F}(Q)\asymp\Big(\prod_{i=1}^n a_i^{b_i}\Big)\Big(1+\log\frac{a_\ell}{a_{\ell-1}}\Big)^{\frac{1}{n+q-1}}.$$

注意，对于任意 $\varepsilon>0$，$\big(1+\log\frac{a_\ell}{a_{\ell-1}}\big)^{\frac{1}{n+q-1}}\leqslant A_\varepsilon\big(\frac{a_n}{a_1}\big)^{\varepsilon}$，其中 $A_\varepsilon>0$ 与 a_1无关,…, a_n。由于 $\mathcal{F}(K)\asymp\mathcal{F}(Q)$，四个泛函均满足

$$\mathcal{F}(K)\leqslant C_\varepsilon\Big(\frac{a_n}{a_1}\Big)^{\varepsilon}\prod_{i=1}^n a_i^{b_i},$$

按照（J）的要求。

为验证（C），取一个 k维子空间 ξ，它属于 $\mathbb{R}^n$，并选择正交归一坐标，使得 $\xi=\mathbb{R}^k\times\{0\}$。对于 $r\geqslant1$，令 $Q_r=[-1,1]^k\times[-r,r]^{n-k}$。由于 $\frac{1}{\sqrt n}Q_r\subseteq B_\xi\times rB_{\xi^\perp}\subseteq Q_r$，我们有 $\mathcal{F}(B_\xi\times rB_{\xi^\perp})\asymp\mathcal{F}(Q_r)$。

由于 JQ_r 半轴长度为 $a_1=\dots=a_k=1$ 和 $a_{k+1}=\dots=a_n=r$，我们有

$$\prod_{i=1}^n a_i^{b_i}=r^{\sum_{i=k+1}^n b_i}=r^{1-c_k}.$$

应用 (J) 于 Q_r 可得 $\mathcal{F}(Q_r) \leqslant C_\varepsilon r^{1-c_k+\varepsilon}$ 对于 $\varepsilon > 0$。引理 6.3 和 6.4 给出$\mathcal{F}(Q_r) \geqslant cr^{1-c_k}$。因此

$$1 - c_k \leqslant \liminf_{r\to\infty} \frac{\log \mathcal{F}(Q_r)}{\log r} \leqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \mathcal{F}(Q_r)}{\log r} \leqslant 1 - c_k + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$并利用 $\mathcal{F}(B_\xi \times rB_{\xi^\perp}) \asymp \mathcal{F}(Q_r)$，我们得出

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log \mathcal{F}(B_\xi \times rB_{\xi^\perp})}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log \mathcal{F}(Q_r)}{\log r} = 1 - c_k,$$

如（(C) 中所要求的。

6.4. **定理1.3的证明**

证明。在 (i) – (iv) 中，取 $(\mathcal{F}, \widetilde{\eta}_K)$ 为

$$\big(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \lambda_1(K,\cdot)\big), \quad \big(\zeta_\sigma^{\frac{1}{2\sigma}}, \zeta_\sigma(K,\cdot)\big), \quad \big(\tau^{\frac{1}{n+2}}, \tau(K,\cdot)\big), \quad \big(I_q^{\frac{1}{n+q-1}}, G_q(K,\cdot)\big),$$

分别为。于是，根据定理 (L) 1.2，$\mathcal{F}$ 满足 (L)，并且根据第 (J) 和 (C) 6.3节，$\mathcal{F}$ 满足 (L) 和 (J)。由 (6.7)，$\mathcal{F}$满足 (V)，其中 η_K 是 $\widetilde{\eta}_K$的正倍数。由于 η_K 是概率测度，~~我们有~~$\eta_K = \frac{\widetilde{\eta}_K}{\widetilde{\eta}_K(\mathbb{S}^{n-1})}$。

假设 $\widetilde{\eta}_K = \mu$ 对于某个 $K \in \mathcal{K}_e^n$。固定一个非零真子空间 ξ 的 $\mathbb{R}^n$，并记 $k =$ 维数ξ。根据定理 5.3 (i)，$\eta_K \in \mathcal{P}_c$，从而

$$\frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1}\cap\xi)}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} = \frac{\widetilde{\eta}_K(\mathbb{S}^{n-1}\cap\xi)}{\widetilde{\eta}_K(\mathbb{S}^{n-1})} = \eta_K(\mathbb{S}^{n-1}\cap\xi) < c_k.$$

将表 c_k 中的数值代入表 1 即可证明 (i)–(iv) 中的必要性。

反之，若 μ 满足相应的子空间集中条件，则$\mu = \frac{\mu}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} \in \mathcal{P}_c$。根据定理 5.3 (ii)，存在~~$K$~~ $\in \mathcal{K}_e^n$ 使得 $\eta_K = \frac{\mu}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})}$。

在（$g = 1$ 6.7）中取 λ_1，并利用 ζ_σ、τ 和 I_q 的齐次性，可得

$$\widetilde{\eta}_{tK}(\mathbb{S}^{n-1}) = t^s \widetilde{\eta}_K(\mathbb{S}^{n-1}), \qquad \text{for } t > 0, \tag{6.11}$$

其中，在 (i)–(iv) 中，$s = -2$、2σ、$n+2$、$n+q-1$分别如此。令 $r = \Big(\frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1})}{\widetilde{\eta}_K(\mathbb{S}^{n-1})}\Big)^{\frac{1}{s}}$。由于$\eta_{rK} = \eta_K$，我们有

$$\widetilde{\eta}_{rK} = r^s \widetilde{\eta}_K(\mathbb{S}^{n-1})\, \eta_K = \mu(\mathbb{S}^{n-1})\, \eta_K = \mu.$$

这就证明了充分性。

~~若~~ $L \in \mathcal{K}_e^n$ 也满足 $\widetilde{\eta}_L = \mu$，则 $\eta_L = \frac{\eta_L}{\widetilde{\eta}_L(\mathbb{S}^{n-1})} = \frac{\mu}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})} = \eta_K$。根据定理 5.2，$L = tK$ 对于某个 $t > 0$。由于 $\widetilde{\eta}_{tK} = \mu = \widetilde{\eta}_{rK}$，(6.11) 给出 $t^s = r^s$。因此 $t = r$ 和$L = rK$。这就证明了唯一性。□

注记 6.5。定理 1.3 中的不等式对于每个固定的非零真子空间 ξ 都 $\mathbb{R}^n$是锐的。固定表 1 中的一个泛函，并记 $k =$ 维数ξ。根据定理 5.3 (i)，$\eta_K(\mathbb{S}^{n-1}\cap\xi) < c_k$对于 $K \in \mathcal{K}_e^n$成立。

要证明锐性，只需证明对于每个 $t \in [0, c_k)$，存在 $K_t \in \mathcal{K}_e^n$，使得 $\eta_{K_t}(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi) = t$。分别记 ν_ξ 和 ν 为定义在 $\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi$ 和 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的均匀概率测度。令 $\mu_t = t\nu_\xi + (1-t)\nu$。对于任意非零真子空间 ξ'，

$$\mu_t(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi') = t\,\nu_\xi(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi') = \begin{cases} t, & \xi \subseteq \xi', \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 $0 < c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_{n-1}$，可得 $\mu_t(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi') < c_{\dim \xi'}$。因此 $\mu_t \in \mathcal{P}_c$，由定理5.3（ii）可得 $K_t \in \mathcal{K}_e^n$，其中 $\eta_{K_t} = \mu_t$。取 $\xi' = \xi$，则有 $\eta_{K_t}(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi) = \mu_t(\mathbb{S}^{n-1} \cap \xi) = t$，证毕。

References

1. M. Akman, J. Gong, J. Hineman, J. Lewis, A. Vogel，关于非线性容量的 Brunn–Minkowski不等式及一个明可夫斯基问题，《Memoirs of the American Mathematical Society》275 (2022) vi +115 页。3 2. A. Aleksandrov，关于凸体混合体积理论。III. 将明可夫斯基关于凸多面体的两个定理推广至任意凸体，数学文集 3(45) (1938年) 27–46（俄文）。3 3. A. Ancona，关于 Lipschitz区域上的 Rellich 公式的一则注记，数学出版物 42 (1998) 223–237。27 4. C. Borell，Brunn–Minkowski型容量不等式，《数学年刊》263 (1983) 179–184。3 5. C. Borell，Green势与凹性，《数学年刊》272 (1985) 155–160。3 6. K. B¨or¨oczky，对数明可夫斯基猜想与 L_p-明可夫斯基问题，载于：A. Koldob- sky, A. Volberg（编），调和分析与凸性，De Gruyter，柏林，2023年，83–118。2, 3 7. K. B¨or¨oczky, A. De，具有多个超平面对称性时对数 Brunn–Minkowski 不等式的稳定性，匈牙利数学科学研究 61 (2024年) 341–376。2 8. K. B¨or¨oczky, P. Heged´us, G. Zhu，关于离散对数明可夫斯基问题，《International Mathematics Research Notices》 (2016) 1807–1838。3 9. K. B¨or¨oczky, M. Henk，一般中心对称凸体的锥体积测度，《数学进展》286 (2016) 703–721。3 10. K. B¨or¨oczky, M. Henk，锥体积测度与稳定性，《数学进展》306 (2017年) 24–50。3 11. K. B¨or¨oczky, P. Kalantzopoulos，对称情形下的对数布伦–明可夫斯基不等式，《Transactions of the American Mathematical Society》375 (2022年) 5987–6013。2´12. K. B¨or¨oczky, A. Kov´acs, S. Mui, G. Zhang，具有群对称性的对偶曲率密度方程，微分方程杂志 465 (2026年) 114197。33 13. K. B¨or¨oczky, E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang，对数布伦–明可夫斯基不等式，《数学进展》231 (2012年) 1974–1997。2, 3, 22 14. K. B¨or¨oczky, E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang，对数闵可夫斯基问题，美国数学会杂志 26 (2013) 831–852。3 15. H. Brascamp, E. Lieb，关于 Brunn–Minkowski 与 Pr´ekopa–Leindler 定理的推广，包括对数凹函数的不等式，并及其在扩散方程中的应用，《泛函分析杂志》22 (1976) 366–389。3, 10

16. L. Caffarelli，Monge–Amp`ere 方程黏性解的局部化性质及其严格凸性，《数学年刊》(2) 131 (1990) 129–134。3 17. L. Caffarelli，Monge–Amp`ere 方程解的内部 $W^{2,p}$ 估计，《数学年刊》(2) 131 (1990) 135–150。3 18. L. Caffarelli, D. Jerison, E. Lieb，关于容量的 Brunn–Minkowski不等式中的等号情形，《数学进展》117 (1996年) 193–207。3 19. S. Chen, Y. Huang, Q. Li, J. Liu， L_p-Brunn–Minkowski不等式与 $p < 1$，《数学进展》368 (2020年) 107166。2 20. S. Chen, Q. Li, G. Zhu，非对称测度的对数闵可夫斯基问题，《Transactions of the American Mathematical Society》371 (2019) 2623–2641。3 21. Z. Chen, Y. Liu, G. Xiong，截断平行多胞体的非对称对数明可夫斯基问题，《泛函分析杂志》291 (2026年) 111637。3 22. S. Cheng, S. Yau， n维明可夫斯基问题解的正则性，《纯粹与应用数学通讯》29 (1976) 495–516。3 23. K. Chou, X. Wang， L_p-明可夫斯基问题与中心仿射几何中的明可夫斯基问题，《数学进展》205 (2006) 33–83。3 24. A. Colesanti，变分泛函的 Brunn–Minkowski 不等式及相关问题，《数学进展》194 (2005) 105–140。3 25. A. Colesanti, M. Fimiani，扭转刚度的明可夫斯基问题，《印第安纳大学数学杂志》59 (2010) 1013–1040。3, 4, 9, 32 26. A. Colesanti, G. Livshyts, A. Marsiglietti，Brunn–Minkowski型不等式的稳定性，《泛函分析杂志》273 (2017年) 1120–1139。2 27. A. Colesanti, K. Nystr¨om, P. Salani, J. Xiao, D. Yang, G. Zhang，Hadamard变分公式与 p-容量的明可夫斯基问题，《数学进展》285 (2015) 1511–1588。3 28. A. Colesanti, P. Salani，凸体的 p-容量 Brunn–Minkowski 不等式，《数学年刊》327 (2003) 459–479。3 29. G. Crasta, I. Fragal`a，全非线性齐次椭圆算子主特征值的 Brunn–Minkowski 不等式，《数学进展》359 (2020年) 106855。3 30. G. Crasta, I. Fragal`a，变分磨石，《Archive for Rational Mechanics and Analysis》248 (2024年) 48。6, 31 31. E. Davies, B. Simon，Schr¨odinger 算子和 Dirichlet拉普拉斯算子的超压缩性与热核，《泛函分析杂志》59 (1984) 335–395。10 32. A. El Soufi, S. Ilias，黎曼流形中区域变形与 Dirichlet拉普拉斯算子的特征值，《伊利诺伊大学数学杂志》51 (2007) 645–666。30 33. W. Fenchel, B. Jessen，集合函数与凸 K¨orper，Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 16 (1938年) 1–31。3 34. R. Gardner，几何断层扫描，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，2006。7 35. R. Gardner，Brunn–Minkowski不等式，《Bulletin of the American Mathematical Society》39 (2002) 355–405。36. D. Gilbarg, N. Trudinger，二阶椭圆偏微分方程，Springer，柏林，2001。9, 10, 28 37. P. Grisvard，非光滑区域中的椭圆问题，1985年版重印，SIAM，费城，2011。27, 28 38. L. Guo, D. Xi, Y. Zhao，临界区间内的 L_p 弦闵可夫斯基问题，《数学年刊》389 (2024年) 3123–3162。6

39. R. van Handel，《分带体的局部对数 Brunn–Minkowski 不等式》，载于：R. Eldan、B. Klartag、A. Litvak、E. Milman（编），《泛函分析的几何方面》，Springer，Cham，2023年，355–379。2 40. M. Henk、E. Linke，多胞体的锥体积测度，《数学进展》253（2014年）50–62。3 41. M. Henk、H. Pollehn，关于单形和平行六面体的对数 Minkowski 不等式，《Acta Mathematica Hungarica》155（2018年）141–157。2 42. J. Hu、G. Xiong，关于多胞体的一种新的仿射不变几何泛函及其相关的仿射等周不等式，《International Mathematics Research Notices》2021年，8977–8995。3 43. Y. Huang、D. Yang、G. Zhang，关于几何测度的 Minkowski 问题，《Bulletin of the American Mathematical Society》62（2025年）359–425。3 44. D. Hug、W. Weil，《凸几何讲义》，Springer，Cham，2020年。7 45. L. Iffland，《旋转体的局部对数 Brunn–Minkowski 不等式》，预印本，arXiv:2602.17912（2026年）。2 46. D. Jerison，关于静电容量的 Minkowski 问题，《Acta Mathematica》176（1996年）1–47。3 47. D. Jerison，凸体变分法中的直接法，《数学进展》122（1996年）262–279。3, 4, 31, 32 48. A. Kolesnikov、G. Livshyts，关于对数 Brunn–Minkowski 猜想的局部版本及一些新的相关几何不等式，《 International Mathematics Research Notices》2022年，14427–14453。2 49. A. Kolesnikov、E. Milman，带边界加权黎曼流形上的 Brascamp–Lieb 型不等式，《Journal of Geometric Analysis》27（2017年）1680–1702。2 50. A. Kolesnikov、E. Milman，凸集边界上关于高斯测度的尖锐 Poincar´e 型不等式，载于：B. Klartag、E. Milman（编），《泛函分析的几何方面》，Springer，Cham，2017年，221–234。2 51. A. Kolesnikov、E. Milman，加权黎曼流形边界上的 Poincar´e 与 Brunn–Minkowski 不等式，《American Journal of Mathematics》140（2018年）1147–1185。2 52. A. Kolesnikov、E. Milman，关于 L^p-Brunn–Minkowski 不等式的局部结果（针对 $p < 1$），《Memoirs of the American Mathematical Society》277（2022年）v+78 pp。2 53. D. Langharst、J. Ulivelli，《（自相似、变分）滚石》，《International Mathematics Research Notices》2024年，9178–9193。6 54. L. Leindler，关于 H¨older 不等式的某个逆命题。II，《Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)》33（1972年）217–223。8 55. H. Lewy，关于大范围微分几何。I. Minkowski 问题，《Transactions of the American Mathematical Society》43（1938年）258–270。3 56. Y. Liu、X. Lu、Q. Sun、G. Xiong，$\mathbb{R}^2$中的对数 Minkowski 问题，《Pure and Applied Mathematics Quarterly》20（2024年）869–902。3 57. Y. Liu、Q. Sun、G. Xiong，多胞体体积分解泛函的尖锐仿射等周不等式，《数学进展》389（2021年）107902。3 58. Y. Liu、Q. Sun、G. Xiong，中心化对数 Brunn–Minkowski 不等式，预印本，arXiv:2610.10152v2（2026年）。2 59. G. Livshyts，《凸性、对称性、 L^2 方法与矩映射：关于 OpenAI 解决对数 Brunn–Minkowski 猜想之后的讨论》，CIRM 讲义，马赛，2026年11月，工作稿。2

60. X. Lu，在 $n-2$ 反射对称性下的对数 Brunn–Minkowski 不等式，预印本，arXiv:2608.20730（2026年）。2 61. X. Lu、Q. Sun、G. Xiong，明可夫斯基第一混合体积与 LYZ 猜想的新方法，《离散与计算几何》66（2021年）122–139。3 62. X. Lu、G. Xiong，关于静电 $\mathfrak{p}$-容量的 L_p Minkowski 问题（针对 $\mathfrak{p}\geqslant n$），《印第安纳大学数学杂志》70（2021年）1869–1901。63. E. Lutwak、D. Xi、D. Yang、G. Zhang，积分几何中的弦测度及其 Minkowski 问题，《纯粹与应用数学通讯》77（2024年）3277–3330。4, 6, 9, 31, 32, 33 64. H. Minkowski，《体积与表¨面积》，《数学年刊》57（1903年）447–495。3 65. L. Nirenberg，大范围微分几何中的 Weyl 问题与 Minkowski 问题，《纯粹与应用数学通讯》6（1953年）337–394。3 66. OpenAI，对数 Brunn–Minkowski 猜想，OpenAI Math Release 预印本，2026年9月23日。2 67. E. M. Ouhabaz，《区域上的热方程分析》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2005年。10 68. A. Pogorelov，《明可夫斯基多维问题》，V. H. Winston & Sons，华盛顿特区，1978年。3 69. A. Pr´ekopa，具有随机规划应用的对数凹测度，《Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)》32（1971年）301–316。8 70. E. Putterman，L^p-Brunn–Minkowski 不等式的局部与整体版本的等价性，《泛函分析杂志》280（2021年）108956。2 71. D. Ren，《积分几何专题》，世界科学出版社，新加坡，1994年。9 72. L. Rotem，一封信：复体的对数 Brunn–Minkowski 不等式，预印本，arXiv:1412.5321（2014年）。2 73. P. Salani，关于 Monge–Amp`ere 特征值的 Brunn–Minkowski 不等式，《数学进展》194（2005年）67–86。3 74. L. Santal´o，《积分几何与几何概率》，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，2004年。9 75. C. Saroglou，关于猜想的对数布伦–明可夫斯基不等式的评注，《几何专论》177（2015年）353–365。2 76. C. Saroglou，关于凸体对数和的进一步研究，《数学》62（2016年）818–841。2, 8 77. C. Saroglou、I. Soprunov、A. Zvavitch，Wulff 形与通过贝祖型不等式刻画单形，《数学进展》357（2019年）106789。31 78. R. Schneider，《凸体：布伦–明可夫斯基理论》，第2版扩展版，剑桥大学出版社，剑桥，2014年。7, 26, 30, 32 79. A. Stancu，离散平面 L_0-Minkowski 问题，《数学进展》167（2002年）160–174。3 80. A. Stancu，几何不等式的偏微分方程方法，载于：《凸几何及其应用》，《奥伯沃尔法赫报告》15（2018年）3262–3264。2 81. M. Su、G. Xiong，$\mathbb{R}^n$中截断棱柱的非对称对数明可夫斯基问题，《变分法与偏微分方程》65（2026年）261。3 82. Q. Sun、G. Xiong，混合体积测度的子空间集中，《应用数学进展》147（2023年）102503。3

83. Q. Sun, G. Xiong，线段体的子空间集中与尖锐的闵可夫斯基混合体积不等式，《数学进展》457（2024年）109934。384. D. Xi，反对数布伦-闵可夫斯基不等式，预印本，arXiv:2307.04266（2023年）。285. D. Xi，G. Leng，Dar猜想与对数布伦–明可夫斯基不等式，《微分几何杂志》103（2016）145–189。286. G. Zhu，多胞体的对数闵可夫斯基问题，《数学进展》262（2014年）909–931。3