arXiv:2611.33046v1 [math.CO] 24 Nov 2026

h重和集的未达量：Ap´ery 谱、相似排序与三距离定理

Prashant Chaudhary[1*]和 Kapil Khandelwal[2]

[1*]独立研究者，美国加利福尼亚州旧金山湾区。[2]圣母大学土木与环境工程及地球科学系，美国印第安纳州圣母城。

通讯作者。电子邮箱：prashant@prashantchaudhary.com；贡献者：kapil.khandelwal@nd.edu；

摘要

对于一个有限集 $A_0 \subset \mathbb{N}$，其 $0 \in A_0$为 **最大** $A_0 = d$，且 **最大公因数**$(A_0) = 1$，给定目标 T，层级 h 的未达量是指从 T 向下到不超过 T 的 h 重和集 hA_0 中最大元素的距离。其在 $T \in [0, hd]$ 上的总量有界于 h：当 h 足够大时，它等于与 A_0 相关的两个数值半群的质量之和，其中质量是对 L 个间隙的极大连续段求和得到的 $L(L+1)/2$。我们描述总量如何达到这一极限：它可以逐渐上升至极限，先下降再达到极限，也可以先攀升超过极限再回落。若 A_0 的单项式曲线是算术 Cohen–Macaulay 的，则两个 Ap´ery 集能精确给出每个未达量，而固定谱的部分和给出总量的下界；当且仅当两个阈值序列同序排列时，每一层的下界都取等号。此时总量凹性地上升至极限，并恰在和集正则性处达到该极限。我们刻画了同序排列的四元素集。对于 $\{0, a, b, 2b\}$，若 $0 < a < b$ 互素，则三距离定理可用显式的二次片段给出总量。非 Cohen–Macaulay 集合在每个失效层 h（其中 hd 至少为两个导子之和）上的总量都超过其极限；每个这样的四元素集皆如此，而一个五元素示例则从不如此。对于任意集合，有限角点数据都能精确给出任意窗口上的未达量。

关键词： 和集、数值半群、Ap´ery 集、Cohen–Macaulay 单项式曲线、三距离定理、间隙

MSC分类： 主要分类 11B13，20M14；次要分类 13H10，11J71，11D07

1 引言

一个有限整数集的至多 h个元素之和未必能填满其 h 倍最大元素以下的范围。本文衡量其未达程度：对于每个目标，将不超过该目标的最近和与目标之间的距离相加，并研究其关于 h的函数。设 $A_0 = \{0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = d\}$ 为一个最大公因数为（A_0） $= 1$的整数集合，令其 h重和集 $hA_0 \subseteq [0, hd]$ 为至多 h个 $A = A_0 \setminus \{0\}$元素之和所组成的集合。对于目标 $T \geq 0$，其未达量

$$D_h(T) = T - \max\{n \in hA_0 : n \leq T\}$$

表示从 T 向下到不超过它的最大和的距离，而 Tot(h) $=\sum_{T=0}^{hd} D_h(T)$ 则是其在范围内所有目标上的总和。这个问题源于填充广告时段：如果 A 的元素是可用广告的时长，而一个长度为 T 的时段最多可容纳 h 个广告，那么 $D_h(T)$ 就是尽可能填满该时段后剩余的未填时间。目标范围随 h 增大，但总量始终有界，并最终保持不变。它如何达到最终值，取决于集合。对于 $\{0, 5, 7, 14\}$，当 $h = 1$，2，..... 时，总量依次为 32，48，56，61，64，65，65，.....：每次增幅都更小，随后便停止增长。对于 $\{0, 2, 8, 11\}$，总量依次为 19，19，18，18，.....：它们起初高于最终值，随后逐渐下降至该值。对于 $\{0, 4, 9, 13\}$，总量依次为 22，36，45，48，49，46，44，40，40，.....：它们先超过最终值 40，直到 $h = 8$ 才重新回到该值。本文解释这三种行为，并描述整个序列 Tot(h)。

极限。

当 h 足够大时，集合 hA_0 是一个区间，两端各有固定的例外集合 [1–4]，由两个数值半群 $S_1 = \langle A \rangle$ 和 $S_2 = \langle d - A_0 \rangle$ 决定。通过 A_0 的射影单项式曲线，可以得到这一结论成立的起始层级，即正则性 [5, 6]；对于特殊类的集合 [7]，其规模 $|hA_0|$ 最近已被计算出来；而根据每个剩余类中最小部分数的严格纪录，对任意有限集 [8]，其规模也已计算出来（定理 1]）。这些结果统计的是和。未达量记录每个目标距离 1 有多远。端部结构给出了它的极限：对每个 A_0 以及所有足够大的 h，总量 Tot(h) $=$ M(S_1) +M(S_2)（命题 6.1 和 6.2），其中数值半群 S 的质量 M(S) 是对其沙漠 —— 即长度为 L 的极大间隙连续段——求和所得的 $L(L+1)/2$。上述三个集合的极限分别为 65、18 和 40。端部结构并未揭示总量如何趋近极限，而这正是本文的研究主题。

主要结果。

设 c_1 和 c_2 分别是 S_1 和 S_2的导子，并设

$$I_h = \{n \in [0, hd] : n \in S_1,\ hd - n \in S_2\}.$$

始终 $hA_0 \subseteq I_h$。当对每个 h 都有 $hA_0 = I_h$ 时，我们称 A_0 *Cohen–Macaulay* (CM)；Cavaliere 和 Niesi 将其称为单项式

曲线的算术 Cohen–Macaulay 性质（定理 2.2）。对于一个 CM 集以及每个模 d 的剩余类 s，都存在整数 u_s、$v_s \ge 0$，可从 S_1 和 S_2 的 Ap´ery 集中读出，使得当且仅当 $u_s \le k \le h - v_s$ 时，$kd - s \in hA_0$（引理 3.1）。若数对 (u_s, v_s) 满足 $u_s > u_t$ 蕴含 $v_s \ge v_t$，即切比雪夫求和不等式的假设，我们称它们同序排列。Gimenez 和 Gonz´alez-S´anchez 所定义的和集正则性 $\sigma(A)$，是指从某个层级开始，hA_0 保持其最终形态（第 2 节）。

定理 A (定理 3.5，命题 3.8) *Let A_0 be CM with $d \ge 2$. There are integers $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge 0$, finitely many of them positive, with $\sum_\ell \lambda_\ell = \mathrm{M}(S_1) + \mathrm{M}(S_2)$ such that*

$$\mathrm{Tot}(h) \ge \lambda_1 + \cdots + \lambda_h \qquad (h \ge 1),$$

*with equality for every h if and only if the pairs $(u_s,\ v_s)$ are similarly ordered. In that case*总量 *is nondecreasing and concave,* 总量(h) $= \mathrm{M}(S_1) + \mathrm{M}(S_2)$ *exactly when $h \ge \sigma(A)$ and the Castelnuovo–Mumford regularity of the coordinate ring of the curve is $\sigma(A) + 1$.*

命题 3.8 证明了每个模数处的阈值及正则性结论$m \ge 2$，其中该模数是 d 的一个因子，且属于 $S_1 \cap S_2$；在此处，按模 m 读取的数对同序排列。集合 $\{0, 5, 7, 14\}$ 与 $\lambda =$ (32, 16, 8, 5, 3, 1) 同序排列，其总量为部分和。集合 $\{0, 2, 8, 11\}$ 则不是：其界 10、15、18 在$h = 1$ 和 $h = 2$处严格成立，而界严格成立的层级一般由这些数对的逆序所给出（命题 3.6）。对于四个元素，相似排序有一个有限的几何判据。CM 集 $\{0, a_1, a_2, d\}$ 的数对来自其 Ap´ery 图，该图是由 d 个点 $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ 组成的集合，使得值 $a_1x + a_2y$ 是S_1 在 d 剩余类中的最小元素（引理 4.1）。

定理 B (定理 4.2，命题 4.3) *For a CM set $\{0, a_1, a_2, d\}$ the Apéry diagramis a rectangle or an L-shape, and the pairs are similarly ordered if and only if on each layer $x + y = t$ of the diagram the values $a_1x + a_2y$ lie in one interval $((q-1)d,\ qd]$ with $q \in \mathbb{Z}$. An L-shape whose notch has both sides of length at least 2 is never similarly ordered.*

族 $\{0, a, b, 2b\}$ 是 Cohen–Macaulay。在 $d = 2b$处，其数对不一定是同序排列，但当剩余类取模 b时，它们总是同序排列；此时其谱是圆上一个等差数列的统计量。对于 $1 \le j \le b$，令 $\phi(j)$ 表示$\binom{g}{2}$ 在点 0，a，……，$(j-1)a$ 在 $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$上的间隙之和。

定理 C （定理 5.4 和 5.6、推论 5.5 和 5.7） *Let $0 < a < b$ be coprime and $A_0 = \{0, a, b, 2b\}$. Then*

$$\mathrm{Tot}(h) = \binom{b}{2} + 2\sum_{j=2}^{h} \phi(j) + \phi(h+1) \qquad (1 \le h \le b-1),$$

and $h = 2\sum_{j=1}^{b} \phi\ j\ - \binom{b}{2}$ *for $h \ge b - 1$. The gaps of $\{0, a, \ldots,\ j-1\ a\}$ take at most*总量 *three lengths given by the continued fraction of a/b through the three-distance theorem and* ( ) ( ) ( ),, 总量 *consists of explicit quadratic pieces, one for each block of that continued fraction.*

对于 $\{0,5,7,14\}$, $\phi(1)\ldots,\phi(6) = 21,11,5,3,2,1$，这给出 $32,48,56,61,64,65$。非 Cohen–Macaulay 集合具有失败层级，即具有 h 的 $hA_0 \neq I_h$。它们只有有限多个，而 τ 表示最后一个失效层之后的层级。

定理 D（命题 6.1 6.2, 6.3, 6.4 *Let A_0 be arbitrary*。和。推论。例。）总量( ) M( ) M( ) *and $hd \geq c_1 + c_2$. Then $h \geq S_1 + S_2$ with equality if and only if h is not a failing level. Every four-element set that is not CM has $\tau - 1 > S_1 + S_2$* 总量( ) M( ) M( ) *. The*，总量( ) M( ) M( ) *five-element set $\{0,5,9,11,20\}$ is not CM and $h \leq S_1 + S_2$ for every h.*

集合 $\{0,4,9,13\}$ 具有 $c_1 + c_2 = 48$，且第 4 至第 7 层为失败层级，因此根据定理 D，其总量在每个失败层级都超过 40，并从 $h = 8$ 开始等于 40。四元素命题使用姊妹论文 [9, 定理 A], ，该定理表明，对于这些集合，$(\tau - 1)d \geq c_1 + c_2 + d$。对于任意集合，未达量与 I_h 的未达量之差由一个显式修正项给出（命题 7.2），而每个剩余类中的有限个角可以给出任意目标窗口上的精确未达量（定理 7.4）。

方法。
所有内容都可以从剩余对 $(u_s,\ v_s)$ 中读出，它们逐块确定 hA_0 中的每个剩余类。对于 Cohen–Macaulay 集，$[0, hd]$ 中缺失而未出现在 hA_0 中的整数，落在模数的连续倍数之间的块内；目标的未达量是以该目标结尾的连续缺失整数的数量（命题 3.2）。一个块中的缺失位置是来自 S_1 的集合与来自 S_2 的集合的并集。取每个块中这两个集合里较大的一个，就得到谱界；当且仅当这两个集合彼此包含时，谱界在该块中取等。在模数 d 处，当且仅当满足相似排序时，它们在每一层的每个块中都彼此包含。对于四个元素，这些数对来自 Ap´ery 图，因此判定转化为对其各层的判定。对于 $\{0, a, b, 2b\}$，模数 b 处的缺失位置是进程 0，$-a$，$\ldots$，$-(j-1)a$ 在 $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ 上的补集，因此谱是对圆周间隙求和，三距离定理可计算该和。对于非 Cohen–Macaulay 集，我们将 hA_0 与 I_h 进行比较：一旦 $hd \geq c_1 + c_2$，I_h 的总量就是质量，而 I_h 中每个未出现在 hA_0 中的元素都会使总量增加。修正和窗口公式来自各剩余类出现的那些层的最小角点。

相关工作。
三距离定理归功于 S´os [10], Sur´anyi [11] 和 ´Swierczkowski [12]；我们采用 Alessandri 和 Berth´e [13]给出的显式形式。齐次化的 Ap´ery 集合以及 Cohen–Macaulay 判据分别出自 Cavaliere 和 Niesi [14] 以及 Gimenez 和 Gonz´alez-S´anchez [6]。引理 3.1 是将其坐标描述读取在同一层级上所得的结果，命题 3.2 则直接由此推出。命题 6.1 是采用其他坐标表示的 [9,引理 2.5]，而第 4 节中的 L 形来自由三个元素生成的数值半群 [15]。本文新增的内容始于谱。Hoa 和 Tien[16] 通过 Ap´ery 集合和 Frobenius 数界定单项式曲线的正则性，并给出 Cohen–Macaulay 性质的判据以及其在和集结构中的应用。相似排序是切比雪夫求和不等式的条件[17]。据我们所知，未达量尚未作为泛函 hA_0进行研究。

尚未解决的主要问题，是通过关于（a_1， a_2， d）的简短同余或连分数条件列表，描述同序排列的四元素集（第 8 节）。

组织结构。
第2 节规定记号。第3至6 节依次证明定理A至D，第7节给出修正和窗口公式。第8节列出未解决问题，第9节描述计算过程，所有结果均可通过随附的代码精确且可复现地获得[18]。

2 预备知识

数值半群。
这里 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$，区间 $[a,b]$ 表示由满足 $a\le n\le b$的整数 n 组成的集合（半开区间同理），但第 5 节的圆 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上除外。数值半群是$(\mathbb{N},+)$的一个有限补集子幺半群 S。不属于 S的元素称为其间隙，其最大间隙为弗罗贝尼乌斯数 $\mathrm{Fr}(S)$，而 $c(S)=\mathrm{Fr}(S)+1$ 是其导子；对于 $S=\mathbb{N}$，令 $\mathrm{Fr}(S)=-1$，且 $c(S)=0$。对于 S中的正元素 m，相对于 m 的 S 的 Apéry 集合为 $\mathrm{Ap}(S;m)=\{w_r:\ r\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\}$，其中 w_r是 S 中与 r 模 m同余的最小元素；整数 $n\ge 0$ 属于 S 当且仅当$n\ge w_n$ 模 m，且 $\mathrm{Fr}(S)=\max_r w_r-m$ [19]。

定义 2.1（质量）数值半群 S 的 *mass* 为

$$\mathrm{M}(S)=\sum_{x\notin S}\bigl(x-\max\{s\in S:s<x\}\bigr),$$

S 的各个间隙到 S中前一个元素的距离之和。

沙漠，也就是由连续间隙 [20] 构成的极大连续段（关于两个生成元的情形，见[21, 第 6] 节），长度为 L 时贡献 $1+2+\cdots+L=L(L+1)/2$；到下一个元素的距离之和也是如此。对于有限集 $X\subset\mathbb{Z}$，记 $f(X)$为满足 $[s,t]\subseteq X$的数对 $s\le t$ 的数量；若 X 是长度为L_i 的极大连续段的并集，则 $f(X)=\sum_i L_i(L_i+1)/2$。因此 $\mathrm{M}(S)=f(\mathbb{N}\setminus S)$。

圆周间隙。
我们使用一个统计量来研究圆上的等差数列。对于互素整数 $p\ge 1$和 r，以及 $1\le h\le p$，令 $g_1,\ \dots,g_h$表示圆 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$上点 $0,\ r,\ \dots,\ (h-1)r$ 之间的圆周间距，并令

$$\phi_{p,r}(h)=\sum_{i=1}^{h}\binom{g_i}{2},\qquad \Phi(p,r)=\sum_{h=1}^{p}\phi_{p,r}(h),$$

其中 $\phi_{p,\,r}(h)=0$ 取遍 $h>p$。于是 $\phi_{p,\,r}(1)=\binom{p}{2}$，$\phi_{p,\,r}(p)=0$，而 $\phi_{p,\,r}$ 仅取决于 r 模 p。对于互素的 $p,\ q\ge 1$，我们记 $\mathrm{M}(p,\ q)=\mathrm{M}(\langle p,\ q\rangle)$。

和集与未达量。

在全文中， $A_0 = \{0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = d\}$ 是一个由整数构成的集合，且 $\gcd(A_0) = 1$；除以最大公因数即可将一般情形归结为这一情形。对于 $h \geq 0$， hA_0 是由 A_0中的 h 个元素相加得到的和的集合，也就是由 $A = A_0 \setminus \{0\}$中至多 h 个元素相加得到的和的集合。对于一个整数 $T \geq 0$，未达量 为

$$D_h(T) = T - \max\{n \in hA_0 : n \leq T\},$$

并且 $\mathrm{Tot}(h) = \sum_{T=0}^{hd} D_h(T)$ 是总未达量。我们将 $S_1 = \langle a_1, \ldots\ldots, a_k \rangle$ 和 $S_2 = \langle d - a_0, \ldots\ldots, d - a_{k-1} \rangle$ 分别记作 A_0 的两个数值半群，其导子为c_1 和 c_2。

齐次化半群。

设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^2$ 是由点 $(a, d-a)$， $a \in A_0$ 生成的半群。那么，当且仅当 $(n, hd-n) \in \mathcal{S}$ 时， $n \in hA_0$；域 $\Bbbk$ 上的半群环 $\Bbbk[\mathcal{S}]$ 是射影单项式曲线 C_A 的齐次坐标环。设 G 是由 $\mathcal{S}$ 生成的群。

定理 2 2 [14, 4 3, 4 6] *The ring $\Bbbk[\mathcal{S}]$ is Cohen–*。（Cavaliere 和 Niesi 引理。定理。）（），*Macaulay if and only if $\mathcal{S} = G \cap S_1 \times S_2$. Equivalently for every $h \geq 1$*

,

$$hA_0 = I_h := \{n \in [0, hd] : n \in S_1,\ hd - n \in S_2\}.$$

当这些条件成立时，我们称 A_0 *CM*，并称在层级 h 的交形式 为 I_h；一般而言 $hA_0 \subseteq I_h$。相同的表述见 [6, 命题 2.6]；关于一般的单纯仿射半群，参见 [22, 定理 (2.6)] 和 [23, 推论 4.4]。

和集正则性。

根据 [6, 定义 1.3], ，和集正则性 $\sigma(A)$ 是 C_A的一个 Hilbert 函数指标，而非其 Castelnuovo–Mumford 正则性；它是满足以下条件的最小 $h_0 \geq 0$： 对于每个$h \geq h_0$，区间 $[c_1, hd - c_2]$ 非空，并且

$$hA_0 = \big(S_1 \cap [0, c_1 - 2]\big) \sqcup [c_1, hd - c_2] \sqcup \big(hd - (S_2 \cap [0, c_2 - 2])\big).$$

要求中心区间非空，即 $hd \geq c_1 + c_2$，这一点很重要：没有这一要求时，分解可能在更小的层级成立（对于 $\{0, 3, 4, 6\}$，它在 $h = 1$ 时就已成立，但中心区间为空）。根据 [6, 定理 3.1、命题 3.2]， $\sigma(A)$ 是 $\Bbbk[\mathcal{S}]$ 的 Hilbert 正则性指标与 $\lceil (c_1 + c_2)/d \rceil$ 的最大值；当 A_0 为 CM 时，它等于 $\lceil (c_1 + c_2)/d \rceil$ 。Gimenez 和 Gonz´alez-S´anchez 假设 A_0 至少有四个元素；对于三个元素， C_A 是次数为 d的平面曲线，因此是算术 Cohen–Macaulay 的，其 $\mathrm{reg}\,\Bbbk[\mathcal{S}] = d - 1$ 也正是下文 (2) 的值；随附的代码还检查了从 [6]引用的关于表1中三元素集合的其他事实。

我们始终使用四个基本事实。

引理 2.3（基本事实）（*i*）如果 $T \geq hd$，那么 $D_h(T) = T - hd$。（*ii*）对于最大公约数为 g 的部分，目标 T 的未达量为（T 模g）$+ g\, D_h(\lfloor T/g \rfloor)$，其中使用的是约化集合。（*iii*）从 hA_0 中移除一个满足 $0 < x < hd$ 的元素 x，会严格增加总量h。（*iv*）在 $[0, hd]$ 内每个由 L 个连续的、不属于 hA_0 的元素组成的极大连续段上，向下到前一个成员的距离与向上到后一个成员的距离之和均为 $L(L+1)/2$。

Proof (i) hA_0 中的每个元素都不超过 hd，且 $hd \in hA_0$。(ii) hA_0 中的元素是倍数 gn，其中 n 属于约化集合的 h重和集，因此不超过T的最大元素是 g乘以不超过 $\lfloor T/g \rfloor$的最大元素。(iii) x 处的未达量变为正值，且没有未达量减少。(iv) 两个和都是 $1 + 2 + \cdots + L$。□

3 和集：剩余区间、计数与谱

本节证明定理 A。它将定理 2.2 的交形式转化为未达量的精确计数。S_1 和 S_2 的质量表现为总量的极限。关于两个整数序列的一个条件——相似排序——刻画了谱下界中的等号成立，并且虽非总量单调的必要条件，却是其充分条件：Cohen–Macaulay 集 $\{0, 2, 3, 5\}$ 对每个 $h \geq 1$都有 Tot(h) $= 2$，而其唯一模数 5 给出不可比较的数对 (1，1) 和 (2，0)。

3.1 剩余区间与精确计数

A_0 的模数 是满足 $m \mid d$ 和 $m \in S_1 \cap S_2$的正整数 m；$m = d$ 恒为 1。固定一个模数 m，令($w_r^{(1)}$)和($w_r^{(2)}$)分别为 S_1 和 S_2关于 m的 Ap´ery 集，并令 $0 \leq s < m$

$$u_s = \frac{s + w^{(1)}_{-s \bmod m}}{m}, \qquad v_s = \frac{w^{(2)}_s - s}{m}.$$

Ap´ery 元素的下标按模 m读取。这些是整数，$u_0 = v_0 = 0$、$u_s \geq 1$（因为 $w^{(1)}_{-s} > 0$ 与 $m - s$同余）以及 $v_s \geq 0$。令 $h \geq 0$ 为$N = hd/m$。

引理 3.1 *Let $h \geq 0$ m a modulus and $n = km - s$ with $0 \leq s < m$。*（剩余区间）*, , , and $0 \leq n \leq hd$. Then $n \in I_h$ if and only if $u_s \leq k \leq N - v_s$. If A_0 is CM the same holds for hA_0.*

Proof 整数 $x \geq 0$ 属于包含 m 的数值半群，当且仅当它不小于其所在类的 Ap´ery 元素。n 所在的类为 $-s$，因此 $n \in S_1$ 当且仅当 $km - s \geq w^{(1)}_{-s}$，

即 $k \geq u_s$；且 $hd-n=\ (N-k)\ m+s \in S_2$ 当且仅当 $(N-k)\ m+s \geq w_s^{(2)}$，即 $k \leq N-v_s$。对于 CM 集 $hA_0 = I_h$（定理 2.2；二者都是 $\{0\}$ 的 $h=0$）。□

对于 $m=d$ 和 CM 集，这是 [6, Prop. 2.6(3)], 中齐次化 Ap´ery 集在层级为 h 的直线上的坐标描述。每个倍数 km, $0 \leq k \leq N$ 都属于 I_h，因此 $[0, hd]$ 中位于 I_h 之外的每个极大连续段都包含在一个块 $((k-1)m, km)$ $1 \leq k \leq N$ 中。若 $km-s \notin I_h$，则称 $s \in [1, m-1]$ 为块 k 的一个空缺。根据引理 3.1，块 k 的空缺构成

$$H_k = B_k \cup R_{N-k}, \qquad B_k = \{s \in [1, m-1] : u_s > k\}, \quad R_j = \{s \in [1, m-1] : v_s > j\}. \tag{1}$$

命题 3.2（精确计数） *Let A_0 be CM, $h \geq 1$ and m a modulus. For $1 \leq k \leq N$ and $1 \leq s \leq m-1$:*

(a) $D_h(km-s) = \#\{t :\ s \leq t \leq m-1,\ [s,t] \subseteq H_k\}$; ***(b)*** 总量$(h) = \sum_{k=1}^{N} f(H_k)$; ***(c)*** 对于整数 $0 \leq T_- \leq T_+ \leq hd$, $\sum_{T=T_-}^{T_+} D_h(T)$，其为三元组 (k, s, t) 的数量，其中 $1 \leq k \leq N$, $1 \leq s \leq t \leq m-1$, $T_- \leq km-s \leq T_+$ 且 $[s,t] \subseteq H_k$。

Proof(a) 若 $s \notin H_k$，两边均为零。否则，令 s' 为块 k 中大于 s的最小非空洞位置，或令 $s'=m$。$km-s$ 在 hA_0 中的前驱是 $km-s'$，因此 $D_h(km-s) = s'-s$，即 $t \in [s, s'-1]$的数量；它们是满足 $[s,t] \subseteq H_k$的 t。(b)、(c) $[0, hd]$ 中不能被 m 整除的每个整数，恰好是某一对 $(k,\ s)$ 对应的 $km-s$，而 m 的倍数未达量为 0；将 (a) 求和。□

(c) 中只有目标 $km-s$ 受窗口限制，t不受限制：目标下方的一段可能延伸到窗口之外。格点目标通过对 (a) 求和处理，目标$T \geq hd$ 通过引理 2.3(i) 处理，公因数则通过引理 2.3(ii) 处理。证明中只通过 $hA_0 = I_h$用到了 Cohen–Macaulay，因此该命题对任意满足 A_0 的层级上的 $hA_0 = I_h$都成立；对于 I_h 本身，则在每个层级上都成立。

3.2 谱与单调总量

令 $\beta_k = f(B_k)$ 表示 $k \geq 1$，令 $\gamma_j = f(R_j)$ 表示 $j \geq 0$。这两个序列均为非增序列，并且最终都为 0。A_0 在模数 m 下的 谱是所有 β_k 和 γ_j 组成的多重集，补入若干个 0 后写作 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$。如果 $u_s > u_t$ 蕴含 $v_s \geq v_t$，我们称 $(u,\ v)$ 同序排列，也就是说，数对 $(u_s,\ v_s)$ 在乘积序下构成一条链；这是切比雪夫求和不等式的假设，也是重排不等式 [17, 定理 43、368 及 369] 中的等号情形。令 $U =$ 为最大值 $_s\, u_s$，令 $V =$ 为最大值 $_s\, v_s$。

引理 3.3 $\sum_{k \geq 1} \beta_k = \mathrm{M}(S_1)$ *and* $\sum_{j \geq 0} \gamma_j = \mathrm{M}(S_2)$。

Proof m 的倍数位于 S_1 和 S_2中，因此 M(S_i) 是对 f 的各个块 $k \geq 1$ 中 S_i 的间隙求和。如引理 3.1 所示，块 k 中 S_1 的间隙是满足 $s \in B_k$ 的 $km - s$；位置 $(k-1)m + s$、$1 \leq s < m$ 位于 S_2 中，当且仅当 $k - 1 \geq v_s$，因此块 k 中S_2 的间隙构成 R_{k-1}的一个平移。□

引理 3.4（合并） *Let*$(x_k)_{k\geq 1}$, $(y_j)_{j\geq 0}$ *be nonincreasing sequences of nonnegative integers eventually* 0 x_k y_{N-k} *is the sum of the N largest entries* , , *of the multiset of all* x_k *and* y_j. *and* $N \geq 1$. *Then* $\sum_{k=1}^{N}$ max(,)

Proof 对于 $z \geq 1$ 令 $p_z = \#\{k\colon\ x_k \geq z\}$ 且 $q_z = \#\{j\colon\ y_j \geq z\}$。在 $1 \leq k \leq N$、$x_k \geq z$ 中，前 min(N, p_z) 个索引对应 $y_{N-k} \geq z$，后 min(N, q_z) 个索引对应 $y_{N-k} \geq z$，因此 max(x_k, y_{N-k}) 对于 k 的 min(N, $p_z + q_z$) 个值为 $\geq z$。该多重集至少有 $p_z + q_z$ 个条目为 z。对 z 求和。□

定理 3.5（谱） *Let* A_0 *be CM and* m *a modulus.*

1. 对于每个 $h \geq 1$, *Tot(h)* $\geq \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$。*2.* 如果（$u$, v）同序排列，则对于每个 h, *(1)* 中等号成立。对于 $m = d$，当且仅当（u, v）同序排列时，对于每个 $h \geq 1$，等号成立。*3.* 如果（u, v）同序排列，则对于每个 $h \geq 0$, *Tot(h)* $= \sum_{\ell=1}^{hd/m} \lambda_\ell$。因此，*Tot* 非递减且离散凹，*Tot(h)* $\leq$ *M(S_1) + M(S_2)*，并且当且仅当 $N \geq$ *max($U-1$, 0)* $+ V$ 时等号成立；对于 $m \geq 2$，这表示为 $N \geq U + V - 1$。

Proof (1) 该泛函 f 关于包含关系单调，并且关于真包含关系严格单调，因为 $Y \setminus X$ 中的一个点是由 $f(Y)$ 唯一计数的区间。根据命题 3.2(b)，Tot(h) $= \sum_{k=1}^{N} f(B_k \cup R_{N-k}) \geq \sum_{k=1}^{N} \max(\beta_k,\ \gamma_{N-k})$，而引理 3.4 确定了右侧。

(2) 若 B_k 和 R_j 不是嵌套的，则存在 $s \in B_k \setminus R_j$ 和 $t \in R_j \setminus B_k$，使得 $u_s > k \geq u_t$ 和 $v_s \leq j < v_t$；在相似排序下这是不可能的，因此每个块都取等号。反过来，设 $m = d$，则 $N = h$，并设 $u_s > u_t$, $v_s < v_t$。于是 $t \neq 0$，因此 $k = u_t \geq 1$；令 $j = v_s$ 和 $h = k + j$。于是 $s \in B_k \setminus R_j$ 和 $t \in R_j \setminus B_k$，因此 $f(B_k \cup R_j) > \max(\beta_k,\ \gamma_j)$，且 (1) 在 h处为严格不等式。

(3) 由 (2) 和引理 3.4可知，总量(h) 是 $N = (d/m)h$ 个最大项之和（在 $h = 0$处也成立）。增大 h 会增加接下来的 d/m 项；这些项均非负，且逐项不大于此前增加的项。结合引理 3.3 即可得到前述结论。对于 $m \geq 2$，$B_k \neq \varnothing$ 恰好在 $1 \leq k < U$ 时成立，而 $R_j \neq \varnothing$ 恰好在 $0 \leq j < V$时成立，因此恰好有 $U - 1 + V$个正项。对于 $m = 1$，不存在位置，且每一项都为 0。□

换言之，这个界在每个块中取两个空位集合中较大的那个，一个来自 S_1，另一个来自 S_2；当其中一个包含另一个时，该块中的界恰好成立。相似排序使这种情况在每个块中都成立，而在 $m = d$ 处除此之外别无他法。对于一般的模数，式 (1) 严格成立的层级由 $(u,\ v)$ 的逆序对决定。

命题 3 6 *Let A_0 be CM* h >。(严格层级)，
$\lambda_1 + \cdots + \lambda_N$ *if and only if*
m *a modulus and* $h \geq 1$. *Then*总量()

$$N \in \bigcup_{u_s > u_t,\ v_s < v_t} [\,u_t + v_s,\ u_s + v_t - 2\,].$$

Thus equality holds at every level if and only if no positive multiple of d/m lies in this finite union; for $m = d$ this is similar ordering.

Proof 根据定理3.5的证明，Tot(h) 严格递增，当且仅当某个块 k 包含 B_k， R_{N-k}且不嵌套；也就是说，存在 s， t 使得 $u_t \leq k \leq u_s - 1$ 且 $v_s \leq N - k \leq v_t - 1$；对于固定的逆序对 ($s$, t)，存在这样的 k 当且仅当 N 落在所示区间内（此时 $1 \leq u_t \leq k \leq N$）。□

Example 3.7(a) 对于 $A_0 = \{0, 2, 5, 10\}$ 和 $m = 10$，正谱为 (14, 6, 2, 2)；在 $h = 3$ 处，定理 3.5(1) 中的上界为 22，而 Tot(3) $= 23$。在 $m = 5$ 处，这些数对同序排列（第 5 节中的引理 5.2），因此这两种性质都取决于模数。(b) CM 集 $\{0, 2, 8, 11\}$ 满足 M(S_1) + M(S_2) $= 18$ 且 Tot(h) $= 19$，19, 18, 18, . . .：总量并非单调，且超过了质量。共有五个逆序对 (s, t)，即 (6, 1)、(6, 7)、(6, 5)、(4, 5) 和 (10, 5)，其区间为 $[1, 1]$, $[1, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 2]$ 和 $[2, 2]$,，并集为 $[1, 2]$,；因此，根据命题 3.6，定理 3.5(1) 中的不等式恰好在 $h = 1$ 和 $h = 2$处严格成立。

3.3 阈值

对于一个 CM 集， $m = d$ 齐次化的 Ap´ery 集由点 ($u_s d - s$， $v_s d + s$) 组成，其层级为 $u_s + v_s$ [6, 命题 2.6(3)],，而 $\Bbbk[\mathcal{S}]$ 的正则性是最大层级 [6,定理 3.7]:

$$\operatorname{reg} \Bbbk[\mathcal{S}] = \max_{0 \leq s < d} (u_s + v_s). \tag{2}$$

在相似排序下，同一个指标同时取得 U 和 V：若 $u_s = U$ 且 $v_t = V$，则要么 $u_t = U$，要么 $u_s > u_t$ 且 $v_s \geq v_t$。因此最大值为 $U + V$。（相似排序针对的是数对，而非 Ap´ery 点：对于 $\{0, 1, 2, 5\}$，指标 $s = 1$，2 都对应 (1，1)，而它们的点 (4，6) 和 (3，7) 不可比较。）

命题 3 8 *Let A_0 be CM and $m \geq 2$ a modulus at which u v is similarly*。(阈值) (,) ( )，总量() *ordered. Then $U + V - 1 = \lceil c_1 + c_2 \ / m \rceil$* h = S_1 + S_2 *if and only if $h \geq \sigma$ A* M( ) M( ) ( )*and* A *then* 正则性 $\Bbbk[\mathcal{S}] = \sigma$( ) $+ 1$. *If $m = d$,*

$$U + V - 1 = \left\lceil \frac{c_1 + c_2}{d} \right\rceil = \sigma(A).$$

Proof 相对于 m 的 Ap´ery 元素为： S_1 对应 $u_s m - s$， S_2对应 $v_s m + s$。设 s 为满足 $u_s = U$ 且 s_2 为满足 $v_s = V$的最大 s。由于 $0 \leq s < m$，最大的 Ap´ery 元素为 $Um - s_1$ 和 $Vm + s_2$，因此 $c_1 + c_2 =$ ($U + V - 2$)$m + s_2 - s_1 + 2$ （这也涵盖了 $S_i = \mathbb{N}$）。由于 $m \geq 2$， $U \geq 1$ 和 $s_1 \geq 1$；同时达到两个最大值的指标属于$[s_1, s_2]$；因此 $2 \leq s_2 - s_1 + 2 \leq m$，即 ($U + V - 2$)$m < c_1 + c_2 \leq$ ($U + V - 1$)m，且向上取整为 $U + V - 1$。由于 $N = hd/m$ 是一个整数，当且仅当 $N \geq U + V - 1$时， $hd \geq c_1 + c_2$。

对于 CM 集 $\sigma(A) = \lceil (c_1+c_2)/d \rceil$ [6, 命题 3。2], 因此 $h \geq \sigma(A)$ 当且仅当 $hd \geq c_1+c_2$，而定理 3.5（3）给出了关于总量的结论。对于 $m=d$ 我们有 $N=h$。

The regularity. 令 s 为满足 $u_s = U$ 和 $v_s = V$的一个指标；则 $s \geq 1$，因为 $U \geq 1$。置 $q = d/m$。由于 $m \in S_1 \cap S_2$，相对于 d 的 S_i 的 Ap´ery 集合由满足 $w \in$的元素 $w+jm$ 组成，其中 Ap$(S_i;\, m)$ 和 $0 \leq j < q$：每个元素都属于 S_i，而 S_i 中与 $w+jm$ 模 d 同余的元素也与 w 模 m同余，因此等于满足 $j' \geq 0$ 和 $j' \equiv j$（模 q）的 $w+j'm$，所以至少为 $w+jm$。取满足 $q-1 \leq j_1+j_2 \leq 2q-2$ 且 q整除 $U+V+j_1+j_2$的 $0 \leq j_1$、$j_2 < q$；该范围包含 q个连续整数，因此恰有一个 j_1+j_2的值符合条件。于是 $x_1 = (U+j_1)m - s \in$Ap$(S_1;\, d)$，$x_2 = (V+j_2)m+s \in$Ap$(S_2;\, d)$，且 d整除 x_1+x_2，所以 x_1和 x_2分别是类 $-s'$和 s'相对于 d的 Ap´ery 元素，其中 $s' = x_2$模 d，并且模数 d下的剩余类 s'之和为 $(x_1+x_2)/d$。由于$U+V+j_1+j_2$是至少为 $U+V+q-1$的 q的最小倍数，且对于 $x \geq 0$有 $\lceil \lceil x/m \rceil /q \rceil = \lceil x/d \rceil$，由 (2) 得

$$\operatorname{reg} \Bbbk[\mathcal{S}] \;\geq\; \frac{U+V+j_1+j_2}{q} = \left\lceil \frac{U+V-1}{q} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{c_1+c_2}{d} \right\rceil + 1 = \sigma(A)+1.$$

反向不等式见 [6, 定理 3.16]。 □

因此，在相似排序下，总量在 hA_0保持其最终形状的层级处达到质量。

对于 CM 集，若 $m=1$ 两个半群都是 $\mathbb{N}$，则每个总量都消失。对于 $d=1$, $A_0 = \{0,1\}$，$\sigma(A) = 0$，$\Bbbk[\mathcal{S}]$ 是正则性为 0 的多项式环，且两个质量和所有总量都消失。$\sigma(A)$的定义中需要非空的中心区间：$\{0,3,4,6\}$ 是 CM 集，并且与 $(c_1, c_2) = (6, 2)$ 同序排列，而其中心区间为空的分解在 $h = 1 < \lceil 8/6 \rceil$时就已经成立。具有 $d \geq 2$ 的同序排列 CM 集达到界 $\operatorname{reg} \Bbbk[\mathcal{S}] \leq \sigma(A) + 1$，其值为 [6, 定理 3.16]。证明仅通过一个同时达到 U 和 V的索引使用相似排序，因此，在某个模数 $m \geq 2$ 下具有此类索引的每个 CM 集都满足 $U+V-1 = \lceil (c_1+c_2)/m \rceil$以及 $\operatorname{reg} \Bbbk[\mathcal{S}] = \sigma(A) + 1$。 [6, 命题 3.18] 的假设对于 CM 集而言等价于$s_1 = s_2$，这给出了这样的索引。它并不蕴含相似排序：$\{0,2,5,10\}$ 在 $m=10$ 处具有$s_1 = s_2 = 7$，但在那里并非同序排列（例 3.7）。

4 同序排列的四元素集

本节证明定理 B。对于四个元素，第3 节$m=d$ 中的剩余对来自一个由 d 个格点构成的二维图，而相似排序成为关于其各层的一个条件，可通过两个 Ap´ery 集合检验。

设 $A_0 = \{0, a_1, a_2, d\}$，$0 < a_1 < a_2 < d$。设 $w_r^{(1)}$和 $w_r^{(2)}$分别为 $'$的 Ap S_1 éry 元素，并令 S_2 模 d，如第 3.1 节中那样，令 $m=d$（下标模 d），并且令$0 \leq r < d$ 为

$$t_r = \frac{w_r^{(1)} + w_{-r}^{(2)}}{d}, \qquad y_r = \frac{w_r^{(1)} - a_1 t_r}{a_2 - a_1}, \qquad x_r = t_r - y_r. \tag{3}$$

引理 4.1（公共图） *A four-element set is CM if and only if all x_r, y_r are nonnegative integers. Then $\mathcal{D} = \{x_r\ y_r \quad 0 \leq r < d\}$ consists of d points it is an order ideal（, ）：,*

of $\mathbb{N}^2$*, the point* $(x,\ y)$ *of residue* r *satisfies* $w_r^{(1)} = a_1x + a_2y$ *and* $w_{-r}^{(2)} = (d-a_1)\ x + (d-a_2)\ y$*, and with* $s = -r$ 模 d*,*

$$u_s = \left\lceil \frac{a_1x + a_2y}{d} \right\rceil, \qquad v_s = x + y - u_s. \tag{4}$$

Proof 点 $(w_r^{(1)},\ w_{-r}^{(2)})$ 位于 $G \cap (S_1 \times S_2)$ 中，并且是其中第一坐标为 $\equiv r$ 的逐坐标最小点。若 A_0 是 Cohen–Macaulay，则该点位于 $\mathcal{S}$（定理 2.2）中；根据 $w_r^{(1)}$和 $w_{-r}^{(2)}$的极小性，其表示不可能使用 $(d,\ 0)$ 或 $(0,\ d)$，因此它是 $x\,(a_1,\ d-a_1) + y\,(a_2,\ d-a_2)$，解得 $(x,\ y) = (x_r,\ y_r)$。反过来，若 x_r、y_r是非负整数，则 $G \cap (S_1 \times S_2)$中的每个点都可表示为 $(w_r^{(1)},\ w_{-r}^{(2)}) \in \mathcal{S}$，再加上 $(d,\ 0)$和 $(0,\ d)$的倍数，因此 A_0是 Cohen–Macaulay。若 $(x',\ y') \le (x,\ y) \in \mathcal{D}$，且其等价类中存在一个小于 $a_1x' + a_2y'$ 的 S_1 元素，那么加上$a_1(x-x') + a_2(y-y')$就会与 $a_1x + a_2y$的极小性矛盾；S_2也同样如此，因此 $(x',\ y') \in \mathcal{D}$。最后，对于 $r > 0$，$u_s = (d - r + w_r^{(1)})/d = \lceil w_r^{(1)}/d \rceil$，且 $u_s + v_s = t_r$。□

对于 $(x,\ y) \in \mathbb{N}^2$，称 $a_1x + a_2y$，并将 $(d-a_1)x + (d-a_2)y$ 的两个值以及$a_1x + a_2y$ 模 d 的剩余类记为其剩余类。对于非空的层 $\mathcal{D}_t = \{(x,\ y) \in \mathcal{D} :\ x + y = t\}$ 令F_t^-和 F_t^+分别为 $a_1x + a_2y = a_1t + (a_2 - a_1)y$ 在该层上的最小值和最大值，它们分别在最小和最大 y 处取得。

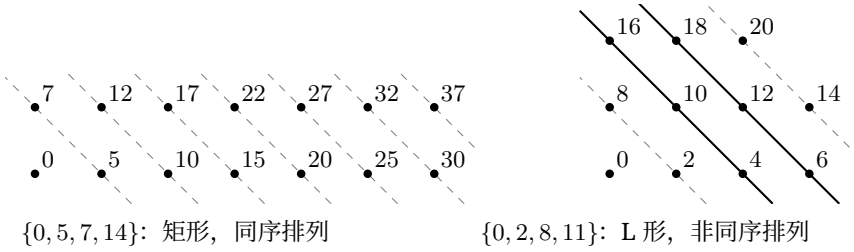
定理 4.2（相似排序） *For a CM set* $\{0, a_1, a_2, d\}$ *the following are equivalent:(1)* $(u,\ v)$ *is similarly ordered at* $m = d$*; (2)* $\lceil (a_1x + a_2y)/d \rceil$ *is constant on each layer* $\mathcal{D}_t$*; (3)* $\lceil F_t^-/d \rceil = \lceil F_t^+/d \rceil$ *for every nonempty layer, that is, each layer is mapped into one interval* $((q-1)d,\ qd]$ *with* $q \in \mathbb{Z}$*.*

Proof 由 (4)，$\mathcal{D}_t$ 中的两个点对应数对 $(u, t-u)$、$(u', t-u')$；若 $u \ne u'$，则它们不可比较；因此 (1) 蕴含 (2)。设 (2) 成立，且在 $\mathcal{D}_t$ 上的值为 q_t。非空的层为 $0, \ldots, t^*$，并且层 $t+1$ 中的每个点都位于层 t 中某个点的上方，其值 $a_1x + a_2y$ 小 a_1 或$a_2 \in (0, d)$，因此 $q_{t+1} - q_t \in \{0, 1\}$。故 q_t 和 $t - q_t$ 均为非递减的，数对 $(q_t, t-q_t)$ 构成一条链。(2) 与 (3) 等价，因为在同一层上，值随 y 增大。□

命题 4.3（形状） *For a CM set* $\{0, a_1, a_2, d\}$*,* $\mathcal{D}$ *is a rectangle* $[0, P-1] \times [0, Q-1]$ *or an L-shape* $[0, W-1] \times [0, Q-1] \cup [W, P-1] \times [0, Z-1]$ *with* $0 < W < P$ $0 < Z < Q$ *and*( ) ( ) , , (模), (,) *then* $a_1W + a_2Z \equiv 0$ d *. If* $P - W \ge 2$ *and* $Q - Z \ge 2$ u v *is not similarly ordered.*

Proof $\mathbb{N}^2 \setminus \mathcal{D}$的极小点为 $(P, 0)$、$(0, Q)$，以及可能还有点 (p, q)，其中 $p, q > 0$。对于这样的点，令 $(x, y) \in \mathcal{D}$ 为其剩余类中的点；它的两个值都不大于 (p, q) 的对应值，且其中一个严格小于。若 $x > 0$，则 $(p-1, q) \in \mathcal{D}$，而 $(x-1, y)$ 具有相同的剩余类，且其值都不大于 $(p-1, q)$ 的对应值，其中一个严格小于，这与引理 4.1 矛盾；若 $y > 0$，同理。因此 $(x, y) = (0, 0)$，且 $a_1p + a_2q \equiv 0$。若存在两个这样的点 (p_1, q_1)、(p_2, q_2)，满足 $p_1 < p_2$，那么同一剩余类中的不同点 $(p_2 - p_1, 0)$和 $(0, q_1 - q_2)$就会落在 $\mathcal{D}$中（因为 $p_2 - p_1 < P$和 $q_1 - q_2 < Q$）。若 $P - W, Q - Z \ge 2$，点 $(W \mp 1, Z \pm 1)$ 位于同一层上，其值$a_1W + a_2Z \pm (a_2 - a_1)$ 围绕着 d 的一个正倍数，而定理 4.2 适用。□

这是 $\mathcal{D}$ 三生成半群 $S_1 = \langle a_1、\ a_2、 d\rangle$ 相对于 d而言的经典形状：矩形或 L 形；它是该半群的 Ap´éry 集合 $S_1 = \langle a_1,\ a_2,\ d\rangle$ 相对于 d而言，以 a_1 和 a_2 [15]的坐标绘出；这里用到的是缺口的同余及其对相似排序的推论。图1 展示了对引言中的两个集合应用定理4.2 的检验。



$\{0,5,7,14\}$：矩形，同序排列　　$\{0,2,8,11\}$：L 形，非同序排列

图1 Ap´ery 图，每个点（x，y）都标有 $a_1x + a_2y$；这些直线是层 $x + y = t$。对于 $\{0,5,7,14\}$，每一层上的值都落在一个区间内（$14(q-1)\ 14q$]。对于 $\{0,2,8,11\}$，层 $t = 2$ 和 $t = 3$（实线）分别承载值 4，10，16 和 6，12，18，它们与 11 交叉。图由 Claude Opus（Anthropic）使用 Ti*k*Z 代码绘制，代码根据计算所得的 Ap´ery 集合生成。

命题4.4 (族)***(a)*** 设 $1 < b < d$ 和 $d = qb + e$，$0 \le e < b$。那么$\{0,1,b,d\}$ 是 ***Cohen–Macaulay***，当且仅当 $e = 0$ 或 $q + e \ge b$，且此时它是同序排列的。***(b)*** A_0 是 ***Cohen–Macaulay*** 且同序排列，当且仅当 $d - A_0$ 是。特别地，每个 ***Cohen–Macaulay*** 集合 $\{0,a,d-1,d\}$ 都是同序排列的。***(c)*** ***Cohen–Macaulay*** 集合 $\{0,a,d-a,d\}$，$0 < a < d - a$是同序排列的，当且仅当 $d = 3$。***(d)*** 每个集合 $\{0,a,a+1,d\}$，$a + 1 < d$都是 ***Cohen–Macaulay***；当且仅当 $\mathcal{D}$ 是一个矩形或满足 $P - W = 1$ 或 $Q - Z = 1$的 L 形时，它才是同序排列的。

*Proof*对于 $n \in \langle a_1, a_2\rangle$，令 len($n$) 为将 a_1, a_2 相加得到 n 所需的最少项数。由引理 4.1 的证明可知，A_0 是 Cohen–Macaulay，当且仅当对所有 r，都有 $w_{-r}^{(2)} =$ len$(w_r^{(1)})d - w_r^{(1)}$。S_2 中属于类 $-r$ 且不含项 d 的元素为 $\ell' d - (w_r^{(1)} + kd)$，对应于用 ℓ' 个内部项表示 $w_r^{(1)} + kd$ 的情形，其中 $k \ge 0$ 由 $w_r^{(1)}$的极小性可知。因此，A_0 是 Cohen–Macaulay，当且仅当

$$\mathrm{len}(w_r^{(1)} + kd) - \mathrm{len}(w_r^{(1)}) \ge k \qquad (0 \le r < d,\ k \ge 0,\ w_r^{(1)} + kd \in \langle a_1, a_2\rangle). \tag{5}$$

(a) 这里 Ap(S_1; d) $= [0, d-1]$，而 n的最短表示使用 $\lfloor n/b\rfloor$ 个 b部分和 n 个模 b 部分，因此 len(n) $= \lfloor n/b\rfloor +$ (n 模 b)。加上 $d = qb + e$ 后，若 $e = 0$，len 会增加 q；否则会增加 $q + e$，或者当余数越过 b时增加 $q + e - b + 1$。若 $q + e \ge b$，每次递增至少为 1，结论 (5) 得证。若 $0 < e$ 且 $q + e < b$，则 Ap(S_1; d) 中的元素 $n = b - e$构成反例，因为 $n + d = (q + 1)b$，且其长度增加了 $q + e - b + 1 \le 0$。由于 $w_r^{(1)} = r$，对每个 $s \ge 1$都有 $u_s = 1$，并且数对 $(1, v_s)$ 与 (0, 0) 一起构成一条链。(b) 反射交换 $\mathcal{S}$的两个坐标，因此保留 CM 性质；它交换 S_1 和 S_2，且当 $s' = d - s$时，反射后的数对为 $(v_s + 1, u_s - 1)$，其中 $s \ne 0$。交换两个数对的坐标并将它们平移相同的量，仍会使它们可比较或不可比较，因此相似排序得以保留。第二个结论由

(a)。（c）这里反射使集合保持不变，因此对于每个数对 (u,v)，若 $s\neq 0$，数对 $(v+1,u-1)$ 会出现在同一层；由可比较性可知 $u=v+1$，所以该层 $u+v$ 为奇数。对于 $d>3$，序理想 $\mathcal{D}$ 包含的点多于三个，而第 0 层和第 1 层至多各有三个点，因此第 2 层上必有一个点，这不可能。对于 $d=3$，这些数对为 (0, 0)、(1, 0)、(1, 0)。(d) 令 $b=a+1$。 $n\in\langle a,b\rangle$ 中所含部分数最少的表示有 $x(n)=(-n)$ 个模 $b\leq a$的部分 a，因此 $\mathrm{len}(n)=(n+x(n))/b$；对于 $k\geq 1$，$\mathrm{len}(n+kd)-\mathrm{len}(n)\geq(kd-a)/b>k-1$，如 $d>b$所示；故 (5) 成立。若两个凹口尺寸都至少为 2，则使用命题 4.3。否则，每一层都是连续格点构成的集合（在 L 形中，层 t 上满足 $x<W$的点与满足 $x\geq W$的点，只有当 $(W,t-W)$ 位于缺口内且两组都非空时才会分开；也就是说，$W+Z\leq t\leq\min(W+Q-2,P+Z-2)$，而当 $P-W=1$ 或 $Q-Z=1$时，这个范围为空）。这些点的值连续；其中没有任何一个是 $t>0$时 d的倍数，因为那样它就会与 (0, 0) 的剩余类相同，所以该层位于一个区间 $((q-1)d,qd)$ 中。□

(a) 中的条件也是 Chen 和 Yang 关于 $|h\{0,1,b,d\}|$ 的基数公式成立的条件 [8, Cor. 1], 该公式在那里通过对部分最小数量的相同计数得到；同序排列的结论并未出现在他们的陈述中。

第 $\{0,a,b,2b\}$ 5 节中的族 在 $m=b$（引理 5.2）处是同序排列的，但在 $m=2b$处并不总是如此： $\{0,2,5,10\}$ 有 $\mathcal{D}=[0,4]\times[0,1]$，其第 4 层的值为 8 和 11。定理 4.2是由两个 Ap´ery 集合给出的有限算术判定；目前尚不知道能否用一份简短的同余或连分数条件列表描述同序排列的三元组（a_1， a_2， d）（第 8节）。

5 族 {0、 a、 b、 $2b$}

本节证明定理 C。在模数 b 下，该族的数对同序排列，其缺失位置是 $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$上等差数列的补集，而谱则变为对圆周间隙求和，并由三距离定理进行计算。

在本节中， $0<a<b$互素且 $A_0=\{0,a,b,2b\}$，因此 $d=2b$、$S_1=\langle a、\ b\rangle$ 以及 $S_2=\langle b、\ 2b-a\rangle$。令 $\mathrm{M}_4(a、\ b)=\mathrm{M}(a、\ b)+\mathrm{M}(b、\ 2b-a)$，并令$\phi(j)=\phi_{b、\ a}(j)$（第 2 节），于是 $\phi(1)=\binom{b}{2}$ 且 $\phi(j)=0$对于 $j\geq b$。

5.1 结构与谱

引理 5。1 *Over every field, the ideal of C_A is generated by $x_2^2-x_0x_3$ and $x_1^b-x_2^jx_0^zx_3^w$, where x_0 x_3 correspond to the parts 0 a b 2b $j=a$ 2 $w=a-j\ /2$ and $z=$, . . . , , , , , 模 , ( ) $(2b-a-j)$ /2. So C_A is a complete intersection of degrees 2 and b and A_0 is CM; $|hA_0|=(h+1)$ 2 for $h\leq b-1$ and $|hA_0|=2bh+1-(b-1)^2$ for $h\geq b-1$; $c_1=(a-1)(b-1)$ $c_2=$ $(b-1)(2b-a-1)$ and $\sigma(A)$ $=b-1$.*

Proof 这两个二项式都是齐次的（次数分别为 2 和 $b=j+w+z$），并且属于理想 I 中的 C_A。模掉它们后，每个单项式都同余于一个 $x_0^rx_1^ex_2^\varepsilon x_3^t$ 与其次数相同且满足 $e<b$、 $\varepsilon\leq 1$的单项式：替换 x_1^b 会降低 x_1 的指数，替换 x_2^2 会保持其指数不变并降低 x_2 的指数。这样的单项式映射到第一个坐标为 $ae+b\varepsilon+2bt$的点；对于两个次数相同且像相同的单项式， $ae\equiv ae'$（模 b）给出 $e=e'$，然后由奇偶性得到 $\varepsilon=\varepsilon'$ 和 $t=t'$，再由次数得到 $r=r'$。因此，在每个次数下，这些单项式

的像都是线性无关的， I 中的每个齐次元素都化简为 0，而 I 由这两个二项式生成；一个高度为二且具有两个生成元的素理想是完全交（参见 [24]）。因此， $|hA_0|$ 就是这些次数为 h 的单项式的数量，即 $\sum_{e=0}^{\min(h,b-1)}(2(h-e)+1)$。导子是 $\langle a、\ b\rangle$ 和 $\langle b、\ 2b-a\rangle$、 $c_1+c_2=2(b-1)^2$，以及 $\sigma(A)=\lceil(b-1)^2/b\rceil=b-1$ 的导子（第 2 节）。□

整数 b 是一个模数（第 3.1节），其中 $N=2h$。

引理 5.2（模 b 的剩余区间） *For $0\le s<b$ let $i_s\in[0,b-1]$ satisfy $i_sa\equiv -s$ (模 b $u_s=\ s+i_sa\ /b=\lceil i_sa/b\rceil$ and $v_s=2i_s-u_s$ so $kb-s\in hA_0$ if and). At $m=b$, ( ),,, only if $u_s\le k\le 2h-v_s$. As functions of $i=i_s$ u is nondecreasing with steps 0 1 and v is increasing with steps 1 2. Hence u v is similarly ordered at $m=b$ $U=a$ $V=2b-a-2$, (,) ,,,*

and a b 总量

is nondecreasing and concave and equals $\mathrm{M}_4(,\ )$ *exactly for $h\ge b-1$.*

Proof 模 b 的 Ap´ery 元素为 ia （ S_1 和 i）， $\equiv -ia$适用于 S_2，因此 $w_{-s}^{(1)}=i_sa$ 和$w_s^{(2)}=i_s$（$2b-a$），从而得到 u_s 和 v_s；根据引理 5.1，引理 3.1 适用。由于 $0<a/b<1$，$\lceil\ i+1\ a/b\rceil-\lceil ia/b\rceil\in\{0,1\}$ $u_s>u_t$ $i_s>i_t$ u i ( )。如果那么，因为在 中是非递减的，接着 $v_s>v_t$，因为 v 递增。两个最大值都在 $i=b-1$ 处取得。根据定理 3.5(3)，当且仅当 $2h\ge U+V-1=2b-3$ 时达到质量。□

这一族未必是同序排列的，条件为 $d=2b$ （第 4 节）；在模数 b 下，命题 3.8 再次给出引理 $\sigma(A)=b-1$ 的层级；而 $\operatorname{reg}\mathbb{k}[S]=b$ 是次数为 2 和 b 的完全交的正则性。

对于 $1\le i\le b-1$ 令 $s(i)\in[1,b-1]$ 满足 $s(i)\equiv -ia$ (模 b)，设 $\mathcal{P}_j=\{s(i):j\le i\le b-1\}$，并令 $\mathcal{R}_j$ 为数值 $g-1\ge 1$ 在 $\{0,a,\dots,(j-1)a\}$ 关于 $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ 的间隙 g 上构成的多重集。

定理 5.3（游程长度） *For $h\ge 1$ the lengths of the maximal runs of integers of $[0,2hb]$ outside hA_0 form the multiset*

$$\mathcal{R}_1\sqcup\bigsqcup_{j=2}^{h}2\mathcal{R}_j\sqcup\mathcal{R}_{h+1}\quad(h<b-1),\qquad\mathcal{R}_1\sqcup\bigsqcup_{j=2}^{b-1}2\mathcal{R}_j\quad(h\ge b-1),$$

where $2\mathcal{R}_j$ is two copies. In particular the distribution of D_h on $[0,2hb]$ is unchanged when a is replaced by $b-a$.

Proof 根据引理 5.2，位置 $s(i)$ 仅当 $k\in E_i=[\alpha_i,\alpha_i+2h-2i]$，$\alpha_i=\lceil ia/b\rceil$ $[1,2h]$ $\alpha_{i+1}-\alpha_i\in\{0,1\}$ $E_{i+1}\subseteq E_i$ 时存在于块 k 中；在非空时，这是一个内部区间。由于， ，以及 $|E_i|=\max(2(h-i)+1,0)$。因此，块 k 的空缺为 $\mathcal{P}_j$，其中 $j=1+\max(\{0\}\cup\{i:k\in E_i\})$。由于 $E_1=[1,2h-1]$，一个块有空缺 $\mathcal{P}_1$。对于 $2\le j\le\min(h,b-1)$， $E_{j-1}\setminus E_j$ 的两个块有空缺 $\mathcal{P}_j$。如果 $h<b-1$，则 E_h 的块有空缺 $\mathcal{P}_{h+1}$；而如果 $h\ge b-1$，则 E_{b-1} 的各块均无空缺。 $[1,b-1]$ 中 $\mathcal{P}_j$ 的补集与 0 一起构成 $\{0,-a,\dots,-(j-1)a\}$，而该集合的一个间隙 g 是一串 $g-1$ 个空缺。映射 $x\mapsto -x$ 将 $\{0,a,\dots,(j-1)a\}$ 的间隙映射到该集合的间隙，因此 $\mathcal{P}_j$ 的各串长度为 $\mathcal{R}_j$。将 a 替换为 $b-a$ 会反射每个点集，并保留每个 $\mathcal{R}_j$；长度为 L 的一串对应于未达量 $1,\dots,L$。□

定理 5.4（该族的谱） *At $m = b$ the spectrum of A_0 is $\binom{b}{2}$ once and $\phi(j)$ twice for $2 \le j \le b-1$, and ϕ is nonincreasing. Hence*

$$\mathrm{Tot}(h) = \binom{b}{2} + 2\sum_{j=2}^{h} \phi(j) + \phi(h+1) \qquad (1 \le h \le b-1), \tag{6}$$

and 总量$(h) = \mathsf{M}_4(a,b)$ *for $h \ge b-1$.*

Proof 将引理 5.2 中的数对 $u(i) = \lceil ia/b \rceil$ 和 $v(i) = 2i - u(i)$ 表示为 i 的函数。于是，对于 $u(j) - u(j-1)$ 值 $u(j-1) \le k < u(j)$，$B_k = \mathcal{P}_j$；而对于 $v(j) - v(j-1)$ 值 $v(j-1) \le \ell < v(j)$，$R_\ell = \mathcal{P}_j$。这两项计数对 $j \ge 2$ 的总和为 2，而 $\mathcal{P}_1$ 仅以 R_0 的形式出现，因为 $k \ge 1 = u(1)$。根据定理 5.3 的证明，$f(\mathcal{P}_j) = \phi(j)$。向圆集添加一个点会将一个间隙 $x+y$ 一分为二，并使 $\binom{x+y}{2}$ 减少 $xy \ge 0$，因此 ϕ 单调不增；由定理 3.5(3) 可知，总量(h) 等于最大的 $2h$ 个项之和。□

推论 5.5（族的质量） *For coprime $0 < a < b$, $\mathsf{M}_4(a,b) = 2\Phi(b,a) - \binom{b}{2}$.*

Proof 由引理 3.3 可知，质量等于谱之和，$\binom{b}{2} + 2\sum_{j=2}^{b-1} \phi(j) = 2\Phi(b,a) - \binom{b}{2}$，因为 $\phi(1) = \binom{b}{2}$ 且 $\phi(b) = 0$。□

5.2 通过连分数覆盖整个范围

设 $a/b = [0;\ \theta_1,\ \ldots\ldots,\ \theta_K]$，其中 $\theta_K \ge 2$，其渐近分数为 p_j/q_j, $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, 因此 $q_K = b$，并令 $\varepsilon_j = |q_j a - p_j b|$ 表示 $-1 \le j \le K$。于是 $\varepsilon_{-1} = b$, $\varepsilon_0 = a$, $\varepsilon_{K-1} = 1$, $\varepsilon_K = 0$ 且 $\varepsilon_{j-1} = \theta_{j+1}\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}$。区间 $[\nu q_k + q_{k-1}, (\nu+1)q_k + q_{k-1})$, $1 \le \nu \le \theta_{k+1}$，铺砌 $[q_k + q_{k-1}, q_{k+1} + q_k)$，而这些铺砌 $[1, b + q_{K-1})$，其中 $0 \le k < K$。因此，每个 $h \in [2,b]$ 都有唯一的表达式

$$h - 1 = \nu q_k + q_{k-1} + r, \qquad 0 \le k \le K-1,\ 1 \le \nu \le \theta_{k+1},\ 0 \le r < q_k, \tag{7}$$

而从 $h = b+1$ 开始的块 $(k,\nu) = (K-1, \theta_K)$ 并不会出现。给定 (k,ν) 的 h 构成一个块。

下一个定理是上述记号下经典三距离定理的有理形式。

定理 5 6 *For $2 \le h \le b$ as in 7 $h-1$ $a\}$ on。*（三距离）（） *$\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ are $h - q_k$ gaps ε_k $r+1$ gaps $\varepsilon_{k-1} - \nu\varepsilon_k$ and $q_k - r - 1$ gaps $\varepsilon_{k-1} - \nu - 1$ ε_k. Hence the gaps of $\{0, a, \ldots, (), ()$*

$$\phi(h) = (h - q_k)\binom{\varepsilon_k}{2} + (r+1)\binom{\varepsilon_{k-1} - \nu\varepsilon_k}{2} + (q_k - r - 1)\binom{\varepsilon_{k-1} - (\nu-1)\varepsilon_k}{2}.$$

Proof 对于带有渐近分数 p_j/q_j 和 $\eta_j = |q_j\alpha - p_j|$ 的无理数 α，[13, 第 3] 节中的形式的三距离定理（由 S´os [10], Sur´anyi [11] 和 ´Swierczkowski [12] 得出）指出：

对于上述 $n=\nu q_k+q_{k-1}+r$，点 0、α、……、$n\alpha$ 将 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 分割成 $n+1-q_k$ 个弧 η_k、$r+1$ 个弧 $\eta_{k-1}-\nu\eta_k$ 和 q_k-r-1 个弧 $\eta_{k-1}-(\nu-1)\,\eta_k$。令 $\alpha_N=[0;\,\theta_1$、……、θ_K、N、1、1、$\ldots]$: 其指标不超过 K 的渐近分数与 a/b 的相同，且 $\alpha_N\to a/b$。取 $n=h-1$; 其表达式只涉及 $k\le K-1$ 和 $\nu\le\theta_{k+1}$, 因此对 α_N 也相同。点 ia/b 模 1、
$0\le i<h\le b$ $1/b$ $|\alpha_N-a/b|<1/\,3b^2$ 彼此不同，且圆周间距至少为。一旦（），每个 $i\alpha_N$ 都位于 ia/b 的 $1/(3b)$ 范围内，因此圆周顺序保持不变，并且每个弧都收敛于相应有理间隙除以 b 所得的值，而对于 $j\le K-1$, $\eta_j(\alpha_N)\to\varepsilon_j/b$。取极限并乘以 b。□

因此，ϕ 的公式只会在相邻块之间发生变化。在一个块内，增大h 会将间隙 $x+\varepsilon_k$, $x=\varepsilon_{k-1}-\nu\varepsilon_k$分成 x 和 ε_k，因此 ϕ 在此处是斜率为$-\delta_{k,\nu}$, $\delta_{k,\nu}=\varepsilon_k(\varepsilon_{k-1}-\nu\varepsilon_k)$的仿射函数。总量的二次片段发生了平移。

推论 5 7 *Put* $0=0$ *and let* $h^*=\nu q_k+q_{k-1}+1$ *be the first*。（二次片段）总 *h of block k ν . Then*
量( ) ,(,)

$$\mathrm{Tot}(h^*-2+j)=\mathrm{Tot}(h^*-2)+2\phi(h^*-1)\,j-\delta_{k,\nu}\,j^2\qquad(0\le j\le q_k),$$

and the intervals $[h^*-2,h^*+q_k-2]$ *tile* $[0,b-1]$ *with shared endpoints.*

*Proof*定理 5.6 的公式在 $r=-1$ 处等于 $\phi(h^*-1)$。对于 $\nu>1$，它是块 $(k,\nu-1)$ 在 $r=q_k-1$ 处的值。对于 $\nu=1$ 和 $k\ge1$，它是 $q_{k-1}\binom{\varepsilon_k}{2}+q_k\binom{\varepsilon_{k-1}}{2}$，即块 $(k-1,\theta_k)$ 的最后一个 $h=q_k+q_{k-1}$ 处的值，因为 $\varepsilon_{k-2}-\theta_k\varepsilon_{k-1}=\varepsilon_k$。对于 $k=0$和 $\nu=1$，两者都是 $\binom{b}{2}$。因此，对于 $0\le i\le q_k$，$\phi(h^*-1+i)=\phi(h^*-1)-\delta_{k,\nu}i$。根据式 (6)，对于 $1\le h\le b-1$, 总量(h) −总量$(h-1)$ $=\phi(h)+\phi(h+1)$; 在 $h=h^*-2+j$, $1\le j\le q_k$处，这等于 $2\phi(h^*-1)$ $-\delta_{k,\nu}(2j-1)$，对 j求和即可得到该公式。相邻块分别从 h^*和 h^*+q_k开始，跨行时也如此，如 $\theta_{k+1}q_k+q_{k-1}+q_k=q_{k+1}+q_k$所示。第一个块有 $h^*=2$，最后一个块则在 $h=b$处结束。□

对于 $a=2$、$b=9$（$[0;\,4,2]$），ϕ的最后一个块是 $h=6$、……、9，但 Tot(6)……Tot(9) $=132$、135、136、136 的三阶差分为 1；Tot 的最后一个二次片段是 $4\le h\le8$，其值为 120、127、132、135、136。

6 非 Cohen–Macaulay 集

本节证明定理 D。非 CM 集合在有限多个层的和数量少于其交截形式。我们证明，在每个剩余类中，这些层构成一个区间；并且一旦 $hd\ge c_1+c_2$ 的总量 I_h 恰好等于质量，因此从 hA_0 中缺失的每一个和都会使其上方的总量增加。

对于包含 0 和一个整数 E 的整数集合 $n\ge0$，令 $D_E(n)=n-\max(E\cap[0,n])$，从而 $D_h=D_{hA_0}$。对于每个 A_0 和 $h\ge0$，都有 $hA_0\subseteq I_h$ 和 0，$hd\in hA_0$。令 $F_h=I_h\setminus hA_0$, 并将 h 称为 失效层，如果 $F_h\neq\varnothing$。根据定理 2.2，A_0 是 CM，当且仅当它没有失效层。

命题 6 1 *Fix* $1\le s\le d-1$. *The levels h at which some integer*。（失败层 $kd-s$ *lies in* F_h *form an interval of integers*
级）: *possibly empty. Consequently* A_0 *has finitely many failing levels.*

Proof The corners. 将类为 $-s$ 的目标写作 $kd-s$，并使用坐标（k, ℓ），其中 $\ell = h-k$。令 $\mathcal{C}_s$ 为满足 $kd-s \in (k+\ell)A_0$ 的（k, ℓ）$\in \mathbb{N}^2$ 的集合，并令 $\mathcal{C}_s^I$ 为满足 $kd-s \in I_{k+\ell}$ 的集合。由引理 3.1，$m=d$，$\mathcal{C}_s^I = [u_s,\infty) \times [v_s,\infty)$。集合 $\mathcal{C}_s \subseteq \mathcal{C}_s^I$ 在加上（1, 0）（增加一个部分 d）和（0, 1）（增加一个部分 0）后保持不变，因此根据狄克逊引理，它是位于有限个极小点（κ_1, μ_1）.....（κ_t, μ_t）上方的象限的并集；这些极小点按如下方式排列：$\kappa_1 < \cdots < \kappa_t$ 且 $\mu_1 > \cdots > \mu_t$。我们断言 $\kappa_1 = u_s$ 且 $\mu_t = v_s$。S_1 的 Ap´ery 元素 $u_s d - s$ 是若干个 j 正部分的和，因此 $u_s d - s \in jA_0$；由于所有部分均不超过 d 且 $u_s d - s > (u_s-1)d$，我们有 $j \geq u_s$，所以（u_s, $j-u_s$）$\in \mathcal{C}_s$。同理，S_2 的 Ap´ery 元素 $v_s d + s$ 是 j' 个部分 $d-a$、$a \in A_0$ 的和，因此 $j'd - (v_s d + s) = (j'-v_s)\,d - s$ 属于 $j'A_0$，且（$j'-v_s$, v_s）$\in \mathcal{C}_s$。结合 $\mathcal{C}_s \subseteq \mathcal{C}_s^I$ 即可证明该断言。

The failing levels of one class. 若 $t=1$，则 $\mathcal{C}_s = \mathcal{C}_s^I$，且该类中没有失效层。若 $t \geq 2$，则 $\mathcal{C}_s^I \setminus \mathcal{C}_s$ 是矩形 $[\kappa_j, \kappa_{j+1}-1] \times [v_s, \mu_j - 1]$、$1 \leq j < t$ 的不相交并集，因为对于 $\kappa_j \leq k < \kappa_{j+1}$，使 $(k,\ell) \in \mathcal{C}_s$ 的最小 ℓ 是 μ_j。矩形 j 所遇到的层级构成区间 $J_j = [\kappa_j + v_s,\ \kappa_{j+1} + \mu_j - 2]$，该区间非空。对于 $j \leq t-2$，严格下降给出 $\mu_j \geq \mu_{j+1} + 1 \geq v_s + 2$，因此 J_j 的上端至少是 $\kappa_{j+1} + v_s$，即 J_{j+1} 的下端。因此，$J_1 \cup \cdots \cup J_{t-1}$ 是区间 $[u_s + v_s, \max_{j<t}(\kappa_{j+1} + \mu_j - 2)]$。$d$ 的倍数从不失效，因此失效层是对 s 取这些区间所得的有限并集。□

换用其他坐标时，命题 6.1以及下面 τ 的公式都是 [9,引理 2。5]；我们保留简短的证明。

令 τ 为最小的 $h_0 \geq 0$，使得对每个 $h \geq h_0$ 都有 $hA_0 = I_h$。因此，对于 Cohen–Macaulay 集，$\tau = 0$；否则，$\tau - 1$ 就是最后一个失效层。由上面的证明，$\tau - 1$ =是在具有 $t_s \geq 2$ 个角的类 s 中，$\kappa_{j+1} + \mu_j - 2$ 的最大值 s，$j<t_s$ 的最大值；这是一个明确的有限计算。

命题 6.2（超调） *Let $h \geq 0$ satisfy $hd \geq c_1+c_2$. Then* $\sum_{n=0}^{hd} D_{I_h}(n) = \mathrm{M}(S_1) + \mathrm{M}($ S_2 $h \geq S_1 + S_2$ *with equality if and only if h is not a failing*$)$. *Consequently* 总量 *level. In particular if A_0 is not CM and $\tau-1$ $d \geq c_1+c_2$ then* $\tau-1 > S_1 + S_2$.
() M( ) M( ), ( ), 总量( ) M( ) M( )

Proof 由于 $hd - c_1 \geq c_2$，整数 c_1 属于 I_h，$[c_1, hd-c_2]$ 中的每个整数也都属于其中。整数 $n < c_1$ 具有 $hd - n > c_2$，因此当且仅当 $n \in I_h$ 时有 $n \in S_1$；整数 $n > hd - c_2$ 具有 $n > c_1$，因此当且仅当 $n \in I_h$ 时有 $hd - n \in S_2$。因此，$[0, hd]$ 中位于 I_h 之外的整数，正是 S_1 的间隙，它们都小于 c_1；而间隙 x 的反射 $hd - x$ 则都大于 $hd - c_2$，并且 I_h 中的元素 c_1 将这两类分隔开来。L 个 S_1 的间隙组成的一个极大连续段，对 I_h 的总量和 $\mathrm{M}(S_1)$ 分别贡献 $1 + \cdots + L$。对于反射后的连续段，在 $hd - x$ 处的未达量等于从 x 到 S_2 中下一个元素的距离，因此根据引理 2.3(iv)，该连续段贡献 $L(L+1)/2$，如 $\mathrm{M}(S_2)$ 中所示。这证明了第一个等式（如果导子为 0，则相应的间隙集合为空）。从一个包含 0 和 hd 的集合中移除一个满足 $0 < x < hd$ 的元素 x，会使其在 x 处的未达量变为正值，同时不会减少其他未达量（引理 2.3(iii)）；由于 $hA_0 = I_h \setminus F_h$ 和 $0, hd \notin F_h$，hA_0 的总量恰好在 $F_h \neq \varnothing$ 时大于 I_h 的总量。□

因此，只要范围足够长，交形式就恰好承载着质量，而每个 hA_0 缺少的和都会计入总量。对于 CM 集，命题6.2 在$h = \mathrm{M}(S_1) + \mathrm{M}(S_2)$ 时恢复总量 $hd \geq c_1 + c_2$。对于四元素集，关于 τ 的假设总是成立：根据 [9,定理 A]，，每个非 CM 四元素集都满足

$$(\tau - 1)d \geq c_1 + c_2 + d,$$

其中等号成立当且仅当 $\{0, b-1, b+1, 2b\}$ 为偶数。

推论 6。3 *Every four-element set A_0 that is not CM satisfies* 总量($\tau - 1$) $>$ M(S_1) $+$ M(S_2 *for four-element sets* $h \le S_1 + S_2$ *for all h implies that*). *In particular*、、总量( ) A_0 *is CM.*
M( ) M( )

Proof 结合 [9,定理 A]与命题 6.2。 □

当有五个元素时，结论可能失效。

Example 6.4 令 $A_0 = \{0, 5, 9, 11, 20\}$为 [25, 例 4.3] 中的非 Cohen–Macaulay 集合（另见 [6, 例 2.13(2)]）。于是 $c_1 = 18$、$c_2 = 44$ 以及 M(S_1) $+$M(S_2) $= 74$。唯一的失效层是 $h = 3$，因此 A_0 不是 CM，且 $\tau = 4$，而对于 $h = 1$，2，3，Tot(h) $= 53$为 69，74。对于 $h \ge 4$，我们有 $hA_0 = I_h$和 $20h \ge 80 > c_1 + c_2 = 62$，因此根据命题 6.2，Tot($h$) $= 74$。所以对于每个 h，Tot(h) $\le$M(S_1) $+$M(S_2)：该集合的总量从未超过其质量。在失效层$h = 3$，假设 $hd \ge c_1 + c_2$ 失效（$60 < 62$），并且尽管$F_3 = \{24\}$，总量仍等于质量： I_3 的总量为 73，而命题 7.2 在 $z = 24$处的修正，在 $z^- = 23$ 和 $z^+ = 25$的情况下，加上 1。

7 修正与窗口

本节讨论任意集合和有限目标窗口。任意集合在任一层级的未达量等于 I_h 加上一个显式修正，而窗口上的未达量可用第6节角点的闭式表达式给出。按照第 D_E 和 F_h 节中的定义6 令

$$o_2(y) = \min\{j \ge 0 : y + j \in S_2\}.$$

相等层级是一个满足以下条件的 h： 对于科恩–麦考利集，每个 $hA_0 = I_h$；否则，每个 h 。

7.1 低于目标量视为超出量

命题 7.1（头部与反射尾部） *Let A_0 be arbitrary and $h \ge 0$.*

(a) $D_{I_h}(n) = D_{S_1}(n)$，对于 $0 \le n \le hd - c_2$。***(b)*** 若 $x \in I_h$ 且 $x \ge c_1$，则 $D_{I_h}(n)$ $= o_2(hd - n)$，对于 $x \le n \le hd$。当 $hd - c_1 \in S_2$时可取$x = c_1$，尤其是当 $c_1 = 0$ 或 $hd \ge c_1 + c_2$时。***(c)*** 若 $hd \ge c_1 > 0$ 且 $N_h = \max(I_h \cap [0, c_1 - 1])$，则对于 $c_1 \le n \le hd$，若 $o_2(hd - n) \le n - c_1$ 且 $D_{I_h}(n) = n - N_h$，则 $D_{I_h}(n) = o_2(hd - n)$；否则为.....。***(d)*** 若 $hd \ge c_1 + c_2 - 1$，则***(a)***连同***(b)***或***(c)***可确定 D_{I_h} 在 $[0, hd]$上的取值。

At an equality level $D_h = D_{I_h}$.

Proof (a) 对于 $n' \le n \le hd - c_2$, $hd - n' \ge c_2$，因此 $n' \in I_h$ 当且仅当 $n' \in S_1$。(b)、(c) 对于 $c_1 \le n' \le n$, $n' \in S_1$，因此 $n' \in I_h$ 当且仅当 $hd - n' \in S_2$。对于 $j = o_2(hd - n)$：若 $j \le n - c_1$，则 $n - j$ 是 I_h 在 $[c_1, n]$中的最大元素；否则不存在，且

前驱为 N_h（且 $0 \in I_h$）。若 $x \in I_h$, $x \geq c_1$ 且 $n \geq x$，则 $j \leq n - x$，因为 $(hd - n) + (n - x) = hd - x \in S_2$。若 $c_1 = 0$, $hd - c_1 = hd \in S_2$。(d) 当 $hd \geq c_1 + c_2 - 1$时，我们有 $hd - c_2 \geq c_1 - 1$，因此 (a) 的范围 $[0, hd - c_2]$ 与 (b)、(c) 的范围 $[c_1, hd]$ 合起来覆盖 $[0, hd]$。□

因此，在锚点上方，未达量就是反射目标在 S_2中的超调；对 $[0, hd]$ 求和即得命题 6.2。对于任意集合，实际未达量与 I_h 的未达量相差一个显式修正项。

命题 7.2 *For $z \in F_h$ let $z^+ = \min(I_h \cap [z, hd])$ and $z^- = \max(hA_0 \cap [0, z])$. For every $W \subseteq [0, hd]$,*

$$\sum_{n \in W} D_h(n) = \sum_{n \in W} D_{I_h}(n) + \Psi_h(W), \qquad \Psi_h(W) = \sum_{z \in F_h} \#\big(W \cap [z, z^+)\big)(z - z^-).$$

So $\Psi_h \geq 0$, and $\Psi_h([0, hd]) > 0$ if and only if h is a failing level.

Proof 两者 $z^{\pm}$ 均存在，且取值为 0，$hd \in hA_0$。对于目标 n，令 $z = \max(I_h \cap [0, n])$。若 $z \notin F_h$，它也是 $hA_0 \subseteq I_h$中的前驱。若 $z \in F_h$，则 $n \in [z, z^+)$，hA_0 在 $[z, n]$中没有元素，而前驱为 z^-，加上 $z - z^-$。这些单元 $[z, z^+)$ 互不相交。□

对于加权目标，将基数替换为 $W \cap [z, z^+$ 的权重）。

7.2 窗口公式

对于任意集合，窗口上的修正都可以用命题 6.1 中角的一个有限闭式表达。令 C_s 为 $\mathcal{C}_s$的极小点集合，则 $kd - s \in hA_0$ 当且仅当对于某个（κ, μ）$\in C_s$成立。这些角点换用其他坐标表示，就是 Chen 和 Yang 所使用的类 $-s$ 中最少部分数的严格纪录；而对于单个位置，引理 7.3 是其关于 $|hA_0|$ [8, 引理 2、定理 1]的精确公式背后的正部计数；窗口截取、对连续位置取并集，以及转到未达量及其修正，正是定理 7.4 所补充的内容。对于 $1 \leq s \leq t < d$，令 $C^B_{s,t}$ 为 $\bigcup_{r=s}^{t} C_r$的极小元素，并令 $C^I_{s,t}$ 为 $\{(u_r, v_r)$ 的极小元素：$s \leq r \leq t\}$，按 $\kappa_1 < \cdots < \kappa_J$和 $\mu_1 > \cdots > \mu_J$列出。每个角（κ_j, μ_j）都会使块 $k \in [\kappa_j, h - \mu_j]$中的一个位置出现，而窗口保留 $[\ell_0, q_0]$中的块。下面的函数 H_C 计算至少被这些区间之一覆盖的 $[\ell_0, q_0]$中的块数：它将各区间截取后的长度相加，再减去每个区间与其前一个区间的重叠部分；由于两个端点序列都递增，这正好是它与所有更早区间的重叠部分。令 $[x]_+ = \max(x, 0)$

$$H_C(h; \ell_0, q_0) = \sum_{j=1}^{J} \big[\min(q_0, h - \mu_j) - \max(\ell_0, \kappa_j) + 1\big]_+ \\ - \sum_{j=2}^{J} \big[\min(q_0, h - \mu_{j-1}) - \max(\ell_0, \kappa_j) + 1\big]_+.$$

引理 7.3 *$H_C(h;\ \ell_0,\ q_0)$ is the number of integers in $[\ell_0, q_0] \cap \bigcup_j [\kappa_j, h-\mu_j]$.*

Proof 区间 $I_j = [\max(\ell_0, \kappa_j), \min(q_0, h-\mu_j)]$ 的端点非递减，因此 $I_j \cap I_i$, $i < j-1$中的一个点属于 I_{j-1}，而 $I_j \cap (I_1 \cup \cdots \cup I_{j-1}) = I_j \cap I_{j-1}$的大小由第 j个被减项给出（空区间同样适用）。□

定理 7.4（铰链公式） *Let $T_- \le T_+$ be integers in $[0, hd]$, and put $\ell_s = \max(1, \lceil (T_- + s)/d \rceil)$ and $q_s = \min(h, \lfloor (T_+ + s)/d \rfloor)$. Then*

$$\sum_{T=T_-}^{T_+} D_h(T) = \sum_{1 \le s \le t < d} \Big([q_s - \ell_s + 1]_+ - H_{C^B_{s,t}}(h; \ell_s, q_s) \Big),$$

$$\Psi_h([T_-, T_+]) = \sum_{1 \le s \le t < d} \big(H_{C^I_{s,t}}(h; \ell_s, q_s) - H_{C^B_{s,t}}(h; \ell_s, q_s) \big).$$

For $0 < c < d$, $c \notin A_0$, with corners C' for $A_0 \cup \{c\}$, the total undershoot of $A_0 \cup \{c\}$ at level h on $[T_-, T_+]$ is smaller than that of A_0 at level $h+1$ if and only if $\sum_{s \le t} H_{C'^B_{s,t}}\ h\ \ell_s\ q_s\ > .(;\ ,\ ).(;\ ,\ )$ $\sum_{s \le t} H_{C^B_{s,t}}\ h+1\ \ell_s\ q_s$ and they tie exactly when the sums are equal.

Proof 倍数 kd, $k \le h$ 都属于 hA_0，因此与命题 3.2(a) 中一样，$D_h(kd-s)$ 统计的是满足以下条件的 $t \ge s$：$[s,t]$ 的任何位置都不出现在块 k 中。目标 $kd-s$ 恰好在 $\ell_s \le k \le q_s$时属于 $[T_-, T_+]$。位置 r 恰好在 $k \in [\kappa, h-\mu]$时出现在块 k 中，$(\kappa, \mu) \in C_r$，而被支配的角点给出更小的区间；引理 7.3 统计了至少有一个 $[s,t]$ 的位置出现的块数。对于 I_h，角点为 (u_r, v_r)（引理 3.1）。比较时，$T_+ \le hd$ 和 $s < d$ 给出 $\lfloor (T_+ + s)/d \rfloor \le h$，因此 ℓ_s、q_s 在层级 h 和 $h+1$ 相同，首项相消。□

角点既不依赖于 h，也不依赖于窗口，因此每个剩余类中有限多个整数就能给出每个层级、每个窗口上的未达量。对于 $[T_-, T_+] = [0, hd]$，每一项都是具有固定角点的 $[h+1-\kappa-\mu]_+$，因此 $\Psi_h([0, hd])$ 是关于 h 的分段仿射函数，并且在 $h \ge \tau$ 时为零。

8 开放问题

1. 通过连分数进行相似排序。定理 4.2 通过两个 Ap´ery 集合刻画了相似排序的 Cohen–Macaulay 四元素集。请通过关于 (a_1, a_2, d) 的同余或连分数条件的简短列表给出一种刻画，例如通过计算三生成半群 S_1 和 S_2 [26]的 Ap´ery 集合的欧几里得型算法，并将图示描述和检验扩展到五个或更多元素。

2. 其他族。的谱 $\{0, a, b, 2b\}$ 由三距离定理（第 5 节）支配。计算模数 d 下其他完全交族的谱，例如 $\{0, a, b, kb\}$，其中 $0 < a < b$ 互素且 $k \ge 3$；对于$k \ge 3$，b 不是模数，因为 $b \notin S_2$。

3. 更多元素时的超调。每个非 Cohen–Macaulay 四元素集都会在某个层级超调其质量，但 $\{0, 5, 9, 11, 20\}$ 则不会（第 6 节）。哪些含有五个或更多元素的非 Cohen–Macaulay 集合会超调其质量？命题 6.2 和定理 7.4 可以通过有限计算判定任意给定集合的情况；这个问题寻求的是一种结构性判据。Hoa 和 Tien [16, 定理 4。4] 描述了 I_h 在 hA_0 之外的点，即 $\mathbb{k}[\mathcal{S}]$ 的第一局部上同调，可通过 Ap´ery 集来刻画，这或许可以作为一个起点。

9 计算与可复现性

本文中的每一条计算性陈述都可通过随附的代码复现[18],该代码仅使用 Python标准库以及精确的整数和有理数运算。三个相互独立的引擎充当校验基准：直接计算迭代和集、齐次化的 Ap´ery 集（由此重建并与第一个引擎比较 hA_0 以及未达量），以及根据两个数值半群计算的定理 2.2 中的交形式。正则性根据（2）计算，而不是借助计算机代数系统；引理 5.1 中理想的生成元则通过 SymPy 中的格¨罗布纳基 [27] 进行 $b \leq 12$计算，定义在 $\mathbb{Q}$上， $\mathbb{F}_2$ 并且 $\mathbb{F}_3$；定理 [9,A] 中的不等式仅作为有限范围内的证据进行检验。论文中的每个公式都在表1所列范围内进行了检验：对于表中给出直接范围的部分（对于该 $b \leq 25$族），与直接和集及其定义进行比较；超出该范围后，则与论文中的其他精确公式进行比较；输出具有确定性，其 SHA- 256 摘要清单使读者能够确认逐字节一致的重新运行结果。完整测试套件在单个核心上运行不到一分钟。

表1 精确检验。“包含 $d \leq D$ 的集合”指所有满足 $\gcd(A_0) = 1$ 且具有指定元素个数的 $A_0 = \{0 < a_1 < \cdots < d\}$。

结果	检验范围
第 1 , 3和4	含三个和四个元素的集合， $d \leq 20$；五个元—— ....., $d \leq 12$；普查 $d \leq 30$
第5节	$b \leq 25$ 通过直接和集， $b \leq 60$ 通过公式，三距离 $b \leq 80$；引理5.1由 Gr¨obner 基 $b \leq 12$
第6节	四个元素 $d \leq 23$，五个元素 $d \leq 14$
第 7	含有 $d \leq 11$ （五个元素 $d \leq 8$）的集合，层级 $h \leq 5$；窗口公式 $d \leq 10$、 $h \leq 4$

本文的任何结果都不依赖计算；这些检验确认了公式在所述范围内成立。

生成式人工智能的使用

作者使用 ClaudeOpus（Anthropic）在作者的指导下检索文献、起草证明和文本，并编写随附的

存档，以及编写图 *1* 的 TiZ 代码，该代码基于计算得到的 Ap´ery 集合。作者检查了所有输出，并对内容承担全部责任。

声明与陈述

- **经费支持**。 本研究未获得任何经费支持。
- **利益冲突**。 作者声明不存在与本文内容相关的利益冲突。

- **伦理审批与参与同意**。不适用。
- **发表同意**。不适用。
- **数据可用性**。 所有通过计算生成的数据均存档于 Zenodo，网址为 https://doi.org/10.5281/zenodo。22952563 [18]。
- **材料可用性**。不适用。
- **代码可用性**。代码与数据一同存档，具有相同的 DOI，来自源代码仓库的带标签版本。

参考文献

[1] Nathanson, M.B.：《有限整数集的和集》。《美国数学月刊》79，1010–1012（1972）https://doi.org/10.1080/00029890.1972.11993172[2]Granville, A., Shakan, G.：《弗罗贝尼乌斯邮票问题及其他》。《匈牙利数学学报》161(2)，700–718（2020）https://doi.org/10.1007/ s10474-020-01073-y[3] Granville, A., Walker, A.：《和集的一个紧结构定理》。《美国数学学会会刊》149(10)，4073–4082（2021）https://doi.org/10.1090/proc/15608[4] Lev, V.F.：《高阶和集的结构》。《美国数学学会会刊》150(12)，5165–5177（2022）https://doi.org/10.1090/proc/16128[5] Elias, J.：《和集与射影曲线》。《地中海数学杂志》19，177（2022）https: //doi.org/10.1007/s00009-022-02108-0[6] Gimenez, P., Gonz´alez-S´anchez, M.：《通过和集研究射影单项式曲线的 Castelnuovo–Mumford 正则性》。《地中海数学杂志》20，287（2023）https: //doi.org/10.1007/s00009-023-02482-3[7] Nathanson, M.B.：《加法数论问题。VI：有限集的和集大小》。《匈牙利数学学报》176(2)，498–521（2025）https://doi.org/10.1007/ s10474-025-01559-7[8] Chen, S.-Q., Yang, Q.-H.：《关于 h重和集的大小》arXiv:2607.29535（2026）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2607.29535[9] Chaudhary, P.,Khandelwal, K.：《和集正则性与单项式曲线的 Castelnuovo–Mumford 正则性之比较》arXiv:2610.24121（2026）。https://doi.org/10.

48550/arXiv.2610.24121

[10]S ´os, V.T.: 《序列 $n\alpha$模 1 的分布》。《布达佩斯大学科学学报。E¨otv¨os 数学辑》1，127–134（1958）.[11] Sur´anyi, J.: 《实数倍数模 1 的排序》。《布达佩斯大学科学学报。E¨otv¨os 数学辑》1，107–111（1958）[12] ´Swierczkowski, S.: 《在圆周上连续放置弧》。《基础数学》46，187–189（1958）https://doi.org/10.4064/fm-46-2-187-189[13] Alessandri, P., Berth´e, V.: 《三距离定理与字词组合学》。《数学教学》（第 2 辑）44(1-2)，103–132（1998）https://doi.org/10.5169/seals-63900[14]Cavaliere, M.P., Niesi, G.: 《关于单项式曲线与科恩-麦考利型》。《数学手稿》42，147–159（1983）https://doi.org/10.1007/BF01169580[15]Aguil´o, F., Marijuan, C.: 《利用 L 形对数值三半群进行分类》。《半群论坛》88(3)，670–688（2014）https://doi.org/10.1007/ s00233-013-9560-1[16] Hoa, L.T., Tien, D.Q.: 《单项式曲线的 Castelnuovo–Mumford 正则性新界及其在和集中的应用》。《纯粹与应用代数杂志》230(9)，108323（2026）https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2026.108323[17] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., P´olya, G.: 《不等式》，第 2 版。剑桥大学出版社，剑桥（1952）[18] Chaudhary, P., Khandelwal, K.: 《以下内容的代码和数据： h 重和集的未达量：Ap´ery 谱、相似排序与三距离定理》。Zenodo。存储库：https://github.com/methodtrace/2026-sumset-undershoot（2026）。https://doi.org/10.5281/zenodo.22952563[19]Rosales, J.C., Garc´ıa-S´anchez, P.A.: 《数值半群》。《数学进展》，第 20 卷。施普林格，纽约（2009）。https://doi.org/10.1007/ 978-1-4419-0160-6[20]Delgado, M., Garc´ıa-S´anchez, P.A., Morais, J.: 《NumericalSgps：数值半群软件包》。GAP软件包，1.5.0 版，https://gap-packages.github. io/numericalsgps/。Deserts 函数列出极大间隙连续段（2026）[21] Moree, P.: 《数值半群、分圆多项式与伯努利数》。《美国数学月刊》121(10)，890–902（2014）https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.121.10.890[22] Goto, S., Suzuki, N., Watanabe, K.: 《关于仿射半群环》。《日本数学杂志》（新辑）2(1)，1–12（1976）https://doi.org/10.4099/math1924.2.1

[23] Trung, N.V., Hoa, L.T.：由单项式生成的仿射半群与 Cohen–Macaulay 环。Trans. Amer. Math. Soc. **298**，145–167（1986）https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0857437-3[24] Bermejo,I., Garc´ıa-Marco, I.：某些仿射和射影单项式曲线中的完全交。Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)**45**(4), 599–624（2014）https://doi.org/10.1007/s00574-014-0065-7[25] Bermejo, I., Gimenez, P.：饱和与 Castelnuovo–Mumford 正则性。J. Algebra **303**(2), 592–617（2006） https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.05.020[26] Rødseth, Ø.J.：关于 Frobenius 线性丢番图问题。J. Reine Angew. Math. **301**, 171–178（1978）https://doi.org/10.1515/crll.1978.301.171[27] Meurer, A., Smith, C.P., Paprocki, M., ˇCert´ık, O.,Kirpichev, S.B., Rocklin, M.,Kumar, A., Ivanov, S., Moore,J.K., Singh, S., 等：SymPy：Python 符号计算。PeerJ Comput. Sci. **3**, 103（2017） https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103